УДК 539.3
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2022.1.09

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ПРУЖНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПІВПРОСТОРІВ, ОДИН З ЯКИХ МІСТИТЬ ПРИПОВЕРХНЕВУ ВИЇМКУ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК, В.В. ГАВРИЛЕНКО

Анотація. На основі математичної моделі розглянуто задачу про стискання двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів, один з яких містить похилу приповерхневу виїмку еліптичного перерізу. Розв’язок задачі отримано за допомогою подання Еліота для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції, класичних гармонічних потенціалів та зведення граничної задачі до розгляду інтегро-диференціального рівняння з невідомою областю інтегрування. Як частинний випадок зі знайдених аналітичних виразів випливають основні параметри контакту трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності в одному з них виїмки вісесиметричної форми, а також параметри контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів, один з ких містить виїмку еліптичного перерізу. Отримано числові результати, вивчено вплив пружних властивостей півпросторів, геометричних параметрів виїмки та навантаження на контактну взаємодію та закриття зазору між тілами.

Ключові слова: математичне моделювання, трансверсально-ізотропний півпростір, приповерхнева виїмка, еліптичний переріз, параметри контактної взаємодії.

ВСТУП

Під час проектування елементів конструкцій широко застосовуються біматеріали, складові яких мають різні пружні властивості, у тому числі анізотропні. Це стимулює дослідження і аналіз розподілу напружень у пружних тілах з біматеріалів поблизу концентраторів напружень, а також у разі їх контактної взаємодії. Водночас розв’язання просторових задач теорії пружності для анізотропних тіл ускладнюється, оскільки у цьому випадку необхідно розв’язувати граничну задачу для системи рівнянь рівноваги анізотропного тіла, яка має суттєво більш складну структуру (порівняно з відповідною системою рівнянь для ізотропного пружного тіла).

Для трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тіл з концентраторами напружень з більшою глибиною досліджено двовимірні задачі [9, 16, 17, 27]. Подання загальних розв’язків систем рівнянь рівноваги у тривимірній постановці для трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тіл через гармонічні функції запропоновано у працях [11] і [24, 28] відповідно. Цікаві результати досліджень напруженого стану у просторових задачах для трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тіл отримано у працях [1, 3, 4–6, 8, 10–12, 15, 18, 22, 23, 26] та [2, 7, 19, 20, 24, 29].

Відзначимо, що задачі контактної взаємодії для двох пружних ізотропних півпросторів за стискання через наявність між півпросторами включень чи похилої приповерхневої виїмки еліптичного перерізу досліджувались у працях [14, 21, 25]. Але задача контактної взаємодії для двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності в одному з них приповерхневої виїмки еліптичного перерізу не вивчалась.

У цій роботі за допомогою математичного моделювання на основі строгої моделі досліджено контактну взаємодію двох пружних трансвесально-ізотропних півпросторів, один з яких містить приповерхневу виїмку еліптичного перерізу, під час стискання. У постановці задачі припускається, що поверхня поділу двох пружних тіл розташована у площині ізотропії трансверсально-ізотропних матеріалів. Також вважається, що між тілами відбувається гладкий (без тертя) контакт. За допомогою подання розв’язку рівнянь рівноваги для трансвесально-ізотропного тіла через гармонічні функції (подання Еліота) і подальшого зведення задачі до розгляду інтегро-диференціального рівняння отримано аналітичний розв’язок задачі. Знайдено основні параметри контактної взаємодії трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності в одному з них приповерхневої виїмки еліптичного перерізу) під час стискання. Як частинний випадок з отриманих виразів випливають параметри контактної взаємодії двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за наявності в одному з них виїмки кругового перерізу, а також параметри контакту двох ізотропних пружних півпросторів, один з яких містить виїмку еліптичного перерізу.

Постановка задачі. Розглянемо математичну модель, на основі якої вивчимо контактну взаємодію трансверсально-ізотропних пружних півпросторів, один з яких (тіло *2*) містить приповерхневу виїмку еліптичного перерізу (рис. 1). Припускаємо, що форма виїмки описується таким виразом:

$$f_0(x,y)=$$
$$=\begin{cases}-h_0(1-x^2/a_0^2-y^2/b_0^2)^{3/2},\ \sqrt{x^2/a_0^2+y^2/b_0^2}\le 1,\ (h_0 \ll \max(a_0,b_0)),\\ 0,\ \sqrt{x^2/a_0^2+y^2/b_0^2}>1.\end{cases} \tag{1}$$

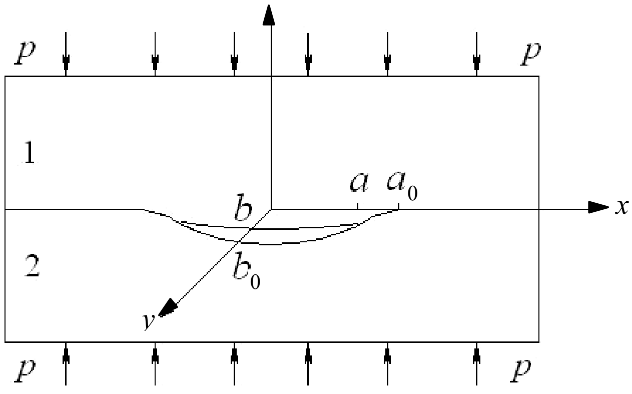

Рис. 1. Контактна взаємодія трансверсально-ізотропних пружних півпросторів, один з яких містить приповерхневу виїмку еліптичного перерізу

z

Розглядаючи задачу, будемо вважати, що площина контакту пружних трансверсально-ізотропних півпросторів розташована у площині ізотропії обох трансверсально-ізотропних матеріалів. Припускаємо, що до контактуючих тіл прикладено стискальні зусилля p і між тілами відбувається гладкий (без тертя) контакт. За наявності виїмки контакт між тілами здійснюється не по всій площині $z=0$, а по деякій її частині $\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2}>1$, де a, b — невідомі параметри ділянки еліптичної форми (рис. 1), які залежать від значення стискальних зусиль p, геометрії початкової виїмки (описується параметрами a_0, b_0 і h_0), пружних властивостей обох трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів. Припускаємо, що у процесі деформування виїмка набуває вигляду, який можна описати у вигляді

$$f(x,y)=\begin{cases}-h(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{3/2},\ x^2/a_0^2+y^2/b^2\le 1,\ (h_0 << \max(a,b)),\\ 0,\ \ x^2/a_0^2+y^2/b^2>1.\end{cases}$$

На поверхні поділу (у площині $z=0$) отримуємо такі граничні умови:

$$\sigma_{zz}^{(i)}=0\,,x^2/a^2+y^2/b^2\le 1\,;$$

$$u_z^{(1)}=u_z^{(2)}+f_0(x,y),\ x^2/a^2+y^2/b^2>1\ \ (i=1,2)\,;$$

$$\sigma_{zx}^{(i)}=\sigma_{zy}^{(i)}=0\,,\ z=0\,;\ \sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(2)},\ x^2/a^2+y^2/b^2>1\ \ (i=1,2)\,. \qquad (2)$$

У граничних умовах (2) індекси 1 і 2 відповідають першому та другому пружним півпросторам, а також використовується функція, що описується виразом (1).

Припускаємо, що площина $z=0$ (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії обох трансверсально-ізотропних матеріалів, тобто вісь $0z$ є віссю симетрії для цих матеріалів. Також вважаємо, що у площині контактної взаємодії $z=0$ виконуються умови гладкого (без тертя) контакту пружних тіл. Розміри ділянки розшарування двох пружних півпросторів (рис. 1) невідомі і визначаються з розв'язку задачі. Параметри контактної взаємодії пружних тіл залежать від значення стискальних зусиль p, пружних властивостей обох трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів і геометричних параметрів виїмки.

Виразимо напружений стан у трансверсально-ізотропних півпросторах суперпозицією двох станів, перший з яких — стискання вздовж осі симетрії матеріалів $0z$, тобто $\sigma_{zz}=-p$, а для визначення другого стану суперпозиції (збуреного стану) на поверхні півпростору $z=0$ отримуємо відповідні граничні умови.

Розглядаючи задачу, припускаємо, що в разі деформування півпросторів форма виїмки описується неперервно-диференційованою функцією $f(x,y)$, яка задовольняє умови:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_1}<<1,\ \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_2}<<1\quad (x,y)\in S\,; \qquad (3)$$

$$f(x,y)=0,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_2}=0\ (x,y)\in\partial S\ .$$

У формулах (3) S — поверхня виїмки. Із віддаленням від ділянки контакту виконуються умови на нескінченності для трансверсально-ізотропних півпросторів:

$$\sigma_{zz}\to -p,\quad \sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{xz},\sigma_{yy},\sigma_{yz}\to 0\text{, якщо } z\to\pm\infty\,.$$

Основні рівняння і співвідношення. Статичні рівняння теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла у переміщеннях набувають вигляду [4, 11]:

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial u_y}{\partial y}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=0\,;$$

$$\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial u_x}{\partial x}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=0\,;$$

$$c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=0\,, \qquad (4)$$

де $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ — незалежні пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу.

Розв’язок системи рівнянь (4) [11] можна виразити через три потенціальні функції Φ_i (i=1,2,3):

$$u_x=\partial\Phi_1/\partial x+\partial\Phi_2/\partial x+\partial\Phi_3/\partial y\,;$$

$$u_y=\partial\Phi_1/\partial y+\partial\Phi_2/\partial y-\partial\Phi_3/\partial x\,;$$

$$u_z=m_1\partial\Phi_1/\partial z+m_2\partial\Phi_2/\partial z\,, \qquad (5)$$

де Φ_1, Φ_2, Φ_3 — функції, що входять до формул (5), задовольняють рівняння

$$(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\nu_j\partial^2/\partial z^2)\Phi_j=0, \qquad (6)$$

а також $\nu_3=2c_{44}/(c_{11}-c_{12})$; ν_1,ν_2 — корені квадратного рівняння:

$$c_{11}c_{44}\nu^2-[c_{44}^2+c_{33}c_{11}-(c_{13}+c_{44})^2]\nu+c_{33}c_{44}=0\,; \qquad (7)$$

$$m_j=\frac{c_{11}\nu_j-c_{44}}{c_{13}+c_{44}}=\frac{\nu_j(c_{13}+c_{44})}{c_{33}-\nu_j c_{44}}\ (j=1,2). \qquad (8)$$

Увівши позначення $z_j = z\nu_j^{-1/2}$ $(j=1,2,3)$ з використанням виразів (6)–(8), легко встановити, що функції $\Phi_1(x,y,z_1), \Phi_2(x,y,z_2), \Phi_3(x,y,z_3)$ будуть гармонічними функціями у відповідній системі координат (x,y,z_i).

Надалі скористаємось виразами

$$k_1 = m_1 = \frac{c_{11}\nu_1 + c_{44}}{c_{13}+c_{44}} - 1\,;\ k_2 = m_2 = \frac{c_{11}\nu_2 + c_{44}}{c_{13}+c_{44}} - 1\,;$$

$$a_j = c_{44}(1+m_j) \quad (j=1,2). \tag{9}$$

Метод розв'язання. Потенціальні функції $\Phi_i(x,y,z_i)$ у поданні (5) для збуреного стану візьмемо, використовуючи класичні потенціали, у вигляді

$$\Phi_i^{(k)}(x,y,z_i) =$$

$$= -\frac{\alpha_i^{**(k)}}{2\pi}\left(\iint_{S_1}\frac{h(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}} + \iint_{S_0}\frac{r(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}}\right), \tag{10}$$

де

$$h(\xi_1,\xi_2) = h_1(1-\xi_1{}^2/a^2 - \xi_2{}^2/b^2)^{3/2},\ r(\xi_1,\xi_2) = -h_0(1-\xi_1{}^2/a_0^2 - \xi_2{}^2/b_0^2)^{3/2};$$

S_1 і S_0 — еліптичні ділянки, значення індексу $k=1$ відповідає першому півпростору, значення $k=2$ – другому півпростору. Також покладемо функцію $\Phi_3^{(k)} \equiv 0$. Сталі $\alpha_i^{**(k)}$ у формулах (10) визначимо так: спочатку знайдемо значення $\alpha_j^{*(k)}$ $(j,k=1,2)$ із системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{*(k)}(c_{44}^{(k)}(1+k_j^{(k)})) = 1;\ \ \sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{*(k)}(c_{44}^{(k)}(1+k_j^{(k)}))/\sqrt{\nu_j^{(k)}} = 0\,,\ k{=}1,\,2, \tag{11}$$

а потім

$$\alpha_j^{**(k)} = \alpha_j^{*(k)}/M^*,\ \text{де}\ M^* = \sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{*(1)}k_j^{(1)}/\sqrt{\nu_j^{(1)}} + \sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{*(2)}k_j^{(2)}/\sqrt{\nu_j^{(2)}}\,.$$

У наведених виразах використано позначення (9). Відзначимо, що потенціали вигляду (10) використовувались у дослідженні контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів, один з яких містив виїмку еліптичного перерізу [30]. За такого вибору $\alpha_j^{*(k)}$ задовольняються граничні умови по дотичних напруженнях уздовж всієї поверхні поділу, по переміщеннях, а також справджується рівність нормальних напружень поза виїмкою. Невідомими залишаються a, b — значення півосей ділянки контакту еліптичної форми; h_1 — максимальна висота проміжку (зазору) в результаті контакту двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів, один з яких містить виїмку. Значення цих параметрів визначимо з розв'язку контактної задачі.

За допомогою потенціальних функцій $\Phi_i^{(k)}(x,y,z_i)$ згідно з виразами (10), (11), задовольняючи граничні умови, що залишилися, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{S_1}\frac{h(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}}=$$

$$=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{S_0}\frac{r(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}}+2\pi M^* p\,,\ (x,y)\in S_1\,; \quad (12)$$

$$M^*=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{*(1)}k_j^{(1)}/\sqrt{\nu_j^{(1)}}+\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{*(2)}k_j^{(2)}/\sqrt{\nu_j^{(2)}}\,,$$

де

$$h(\xi_1,\xi_2)=h_1(1-\xi_1{}^2/a^2-\xi_2{}^2/b^2)^{3/2},$$

$$r(\xi_1,\xi_2)=-h_0(1-\xi_1{}^2/a_0^2-\xi_2{}^2/b_0^2)^{3/2}\,.$$

Після проведення диференціювання у (12) скористаємося значеннями двовимірних інтегралів по еліптичній ділянці [30]. У результаті маємо

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{S_1}\frac{h(\xi)d_\xi S}{|x-\xi|}=\alpha_0+A_0x_1^2+B_0x_2^2\,,\ x\in S\,, \quad (13)$$

де

$$d_\xi S=d\xi_1 d\xi_2\,;\ k_0=3a_0r_0/4e_0^2b_0^4f_0\,;\ r_0=h_0\,;$$

$$A_0=k_0[E(e_0)(1+e_0^2)/f_0-K(e_0)]\,;\ B_0=k_0[(2e_0^2-1)E(e_0)+f_0K(e_0)]\,;$$

$$\alpha_0=M^*p-k_0e_0^2b_0^2E(e_0)\,;\ f_0=1-e_0^2\,;\ e_0=\sqrt{1-a_0^2/b_0^2}\,.$$

У наведених виразах $K(e_0)$, $E(e_0)$ є повними еліптичними інтегралами першого та другого роду.

Припускаючи, що ділянка контакту S_1 у формулах (13) має форму еліпса з невідомими поки півосями a, b, розшукуємо висоту зазору між контактуючими тілами у вигляді $h(x)=\beta(1-x_1^2/a^2-x_2^2/b^2)^{3/2}$. Скориставшись значеннями інтегралів по еліптичній ділянці [31], отримуємо

$$\alpha+Ax_1^2+Bx_2^2=a_0+A_0x_1^2+B_0x_2^2\,,$$

де

$$\alpha=-ke^2b^2E(e)\,,\ A=k[E(e)(1+e^2)/f-K(e)]\,,\ B=k[(2e^2-1)E(e)+fK(e)]\,,$$

$$f=1-e^2\,,\ k=3\alpha h/(4e^2b^4f)\,,\ e=\sqrt{1-a^2/b^2}\,.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових структурних складових, знаходимо

$$a=a_0\sqrt{1-N_0}\,;\ \ b=b_0\sqrt{1-N_0}\,;\ h=r_0[1-N_0]^{3/2}\,;$$

$$N_0=2M^*p\,b_0\sqrt{1-e_0^2}\,/(r_0\,3E(e_0))\,. \quad (14)$$

Відзначимо, що із формул (14) можна визначити значення стискальних зусиль p, за якого виїмка між пружними тілами повністю заповнюється матеріалом. Видно, що при $N_0 = 1$ значення півосей a, b та максимальної висоти виїмки h_1 дорівнюють нулю. Отже, якщо $p \ge p^* = \dfrac{r_0\, 3E(e_0)}{2M^* b_0 \sqrt{1-e_0^2}}$, виїмка еліптичного перерізу у пружному півпросторі повністю зникає (заповнюється матеріалом). Як частинний випадок зі знайдених аналітичних виразів для виїмки еліптичного перерізу випливають результати для виїмки вісесиметричної форми.

Таким чином, з виразів (14) за відомими розмірами початкової виїмки (параметри a_0, b_0 і h_0) та значення стискальних зусиль p, десяти незалежних пружних сталих двох трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів (входять через величину M^*) знаходимо значення півосей ділянки контакту a, b і максимальну висоту виїмки.

Перетворимо у виразі M^* кожний доданок, що залежить від властивостей трансверсально-ізотропного матеріалу відповідного півпростору. Після елементарних операцій дістаємо

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^* k_j / \sqrt{\nu_j} = \frac{1}{(\sqrt{\nu_1} - \sqrt{\nu_2})} \left[\frac{-m_2}{c_{44}(1+m_2)} + \frac{m_1}{c_{44}(1+m_1)} \right] =$$

$$= \frac{c_{11}}{c_{44}} \frac{(\nu_1^{1/2} + \nu_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{(c_{11}\nu_1 + c_{13})(c_{11}\nu_2 + c_{13})} . \qquad (15)$$

У результаті подальших перетворень виразу (15) (з використанням теореми Вієта для коренів квадратного рівняння (7)) маємо

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^* k_j / \sqrt{\nu_j} = \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\sqrt{c_{44}}} \left[\sqrt{c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}c_{13} + 2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \right]. \qquad (16)$$

Отриманий вираз (16) дозволяє знаходити шукане значення безпосереднім підставлянням у нього пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу, не знайшовши заздалегідь коренів квадратного рівняння (7).

У випадку абсолютно жорсткої основи з еліптичною виїмкою маємо

$$M^* \to \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{*(1)} k_j^{(1)} / \sqrt{\nu_j^{(1)}} . \qquad (17)$$

У виразі (17) залишився тільки перший доданок з двох складових. Під час наступного граничного переходу від трансверсально-ізотропного до пружного ізотропного матеріалу півпростору отримуємо

$$c_{11} = \lambda + 2\mu;\ c_{13} = \lambda;\ c_{44} = \mu;\ \nu_1 = \nu_2 = 1;$$

$$A^{Iso} \to \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1-\nu}{\mu}.$$

За допомогою перетворень можна показати, що з виразів (12), (14) випливають результати роботи [30] для контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів (один — з виїмкою еліптичного перерізу) як частинний випадок.

Розглянемо частинний випадок попередньої задачі — виїмку кругового перерізу. Спрямувавши ексцентриситет еліпса до нуля, отримуємо, що $a_0 = b_0$, $a = b$, а зі знайдених виразів (15) маємо

$$N_0 = 4M^* p b_0 /(r_0 3\pi)\,;\; b = b_0\sqrt{1-\frac{4 p b_0 M^*}{3\pi r_0}}\,;\; h_1 = h_0\left(1-\frac{4 p b_0 M^*}{3\pi r_0}\right)^{3/2}, \quad (18)$$

де $M^* = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{*(1)} k_j^{(1)} / \sqrt{\nu_j^{(1)}} + \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{*(2)} k_j^{(2)} / \sqrt{\nu_j^{(2)}}$.

Із виразів (18) за відомими розмірами початкової вісесиметричної виїмки (параметри b і h_0), значеннями стискальних зусиль p, десяти незалежних пружних сталих для двох трансверсально-ізотропних пружних матеріалів (входять через величину M^*) визначаємо радіус контакту a і максимальну висоту зазору h_1 (після контактної взаємодії). Також з рівності нулю виразу a знаходимо значення сили стиснення $p^* = \dfrac{3\pi h_0}{4bM^*}$, за якого виїмка у півпросторі повністю заповнюється матеріалом. Отже, під час стиснення $p \geq p^*$ приповерхнева виїмка в результаті контактної взаємодії повністю зникає.

Відзначимо, що під час розгляду частинного випадку задачі — випадку приповерхневої виїмки кругового перерізу, з'являється можливість використання альтернативного алгоритму розв'язання задачі, пов'язаного із застосуванням парних інтегральних рівнянь (алгоритм 2 у праці [2]).

Аналіз результатів числових досліджень. На рис. 2, 3 зображено залежності радіуса і висоти вісесиметричного зазору (частинного випадку зазору еліптичного перерізу) між пружними трансверсально-ізотропними півпросторами від діючих навантажень. У розрахунках використано значення пружних сталих із праці [13], наведені у таблиці, де номер матеріалу відповідає номеру кривої на рис. 2, 3.

Властивості матеріалів

Номер матеріалу	Матеріал	c_{11}, ГПа	c_{33}, ГПа	c_{44}, ГПа	c_{12}, ГПа	c_{13}, ГПа
1	Be	292,3	336,4	162,5	26,7	14,0
2	Co	307,0	358,1	78,3	165,0	103,0
3	Hf	181,1	196,9	55,7	77,2	66,1
4	ZnO	209,7	210,9	42,5	121,1	105,1
5	Zr	143,4	164,8	32,0	72,8	65,3

На рисунках використано позначення p_1^*, яке обчислювалось для матеріалу 1 з наведеної таблиці за допомогою виразу $p^* = 4a_0 N^* p /(3\pi r_0)$. Показано зміну радіуса і висоти зазору за навантаження, які залежать також від десяти пружних сталих двох трансверсально-ізотропних матеріалів (реалізується за допомогою величини N^*).

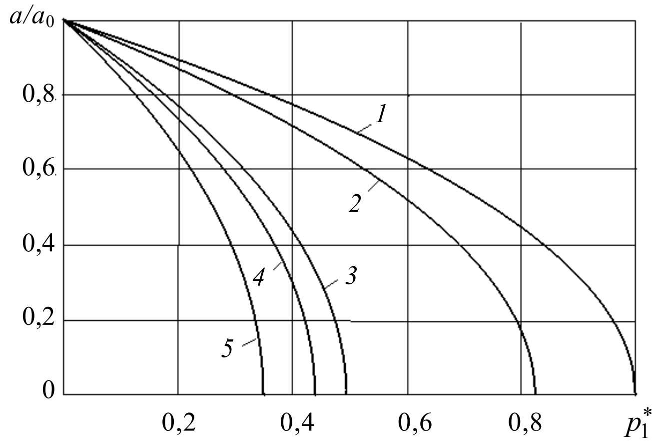

Рис. 2. Зміна радіуса виїмки за навантаження

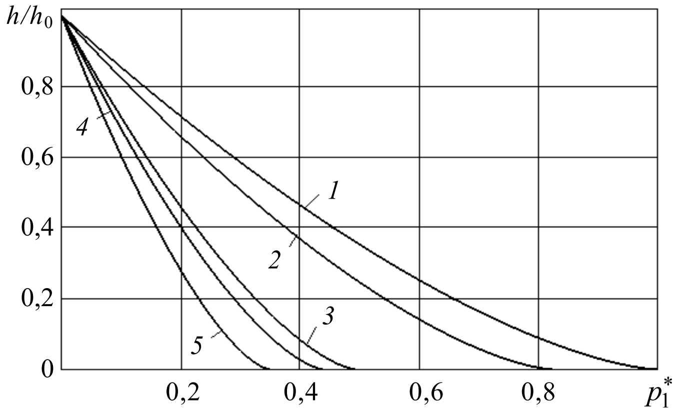

Рис. 3. Зміна висоти виїмки за навантаження

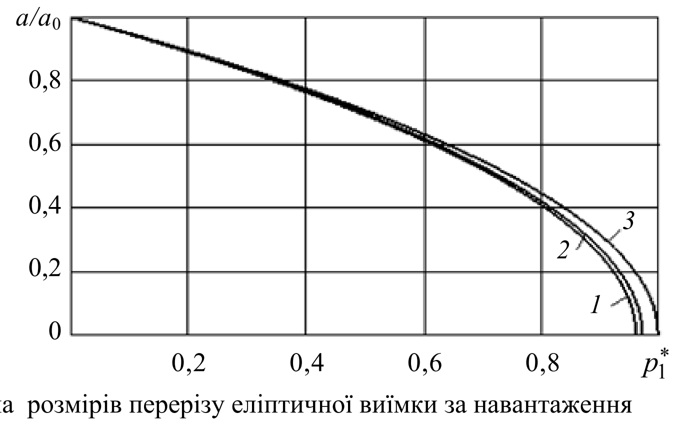

Рис. 4. Зміна розмірів перерізу еліптичної виїмки за навантаження

Виїмка повністю заповнюється матеріалом, якщо $p = p^* = \dfrac{3\pi h_0}{4a_0 N^*}$. Для значень навантажень $p < p^*$ утворюється новий зазор. Для розрахунків пружні властивості обох півпросторів вибирались однаковими (відповідно до наведеного номера у таблиці).

Зміну геометричних параметрів зазору для еліптичної у перерізі виїмки за навантаження зображено на рис. 4, 5, на яких лінії *1*, *2*, *3* відповідають значенням ексцентриситету еліпса *e*= 0,1; 0,2; 0,4. Використано позначення $p^{*(0.4)}$, яке відповідало значенню навантажень, що закривають виїмку, якщо *e*= 0,4.

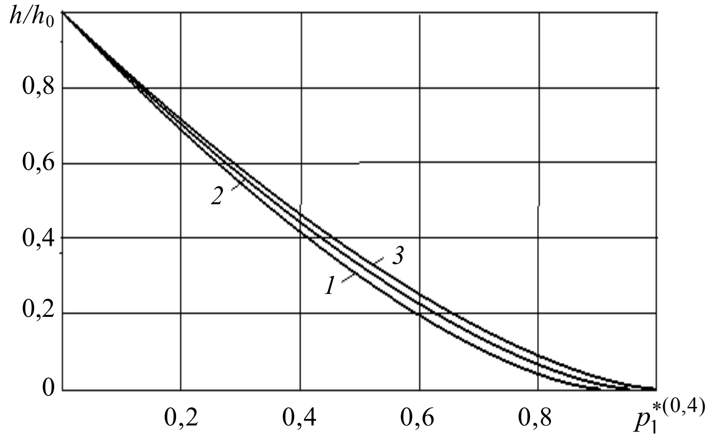

Рис. 5. Зміна висоти еліптичної виїмки за навантаження

ВИСНОВОК

У роботі за допомогою математичної моделі отримано аналітичний розв'язок задачі про контактну взаємодію складної системи, що складається з двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності похилої приповерхневої виїмки еліптичного перерізу в одному з них), під час стискання. Виконано числові розрахунки, досліджено вплив геометричних розмірів виїмки та властивостей пружних трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів на параметри контактної взаємодії.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.С. Кирилюк, О.І. Левчук, О.В. Гавриленко, та М.Б. Вітер, "Моделювання контактної взаємодії нагрітого плоского жорсткого еліптичного штампу з трансверсально-ізотропним півпростором", *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 3, с. 138–148, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.10.
2. В.С. Кирилюк и О.И. Левчук, "Моделирование контактного взаимодействия пьезоэлектрического полупространства и упругой изотропной основы с приповерхностной выемкой кругового сечения", *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 4, с.120–132, 2016.
3. В.С. Кирилюк и О.І. Левчук, "Моделювання контактної взаємодії двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску на ділянці розшарування", *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 1, с.107–119, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.1.10.
4. Ю.Н. Подильчук, *Граничные задачи статики упругих тел*. Киев: Наук. думка, 1984, 304 с.
5. Ю.Н. Подильчук, "Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор)", *Прикл. механика*, **33**, № 10, с. 3–30, 1997.

6. F.M. Borodich, B.A. Galanov, L.M. Keer, and M.M. Suarez-Alvarez, “The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids”, *Mechanics of Materials*, **75**, pp. 34–44, 2014.
7. Y.S. Chai and I.I. Argatov, “Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies”, *Meccanica*, **53**, no. 11-12, pp. 3137–3143, 2018.
8. W.Q. Chen, J. Zhu, and X.Y. Li, “General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review”, *J. Thermal Stresses*, **42**, no. 1, pp. 90–106, 2019.
9. L. Dai, W. Guo, and X. Wang, “Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids”, *Int. J. Solids and Struct.*, **43**, no. 6, pp. 1818–1831, 2006.
10. D.B. Davtyan and D.A. Pozharskii, “Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space”, *Mechanics of Solids*, **49**, no. 5, pp. 578–586, 2014.
11. H.A. Elliott and N.F. Mott, “Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **44**, no. 4, pp. 522–533, 1948.
12. V.I. Fabrikant, “Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space”, *Acta Mechanca*, 228, no. 4, pp. 1541–1560, 2017.
13. L.B. Freund and S. Suresh, *Thin Film Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 802 p.
14. G.M.L. Gladwell, “On Inclusions at a Bi-Material Elastic Interface”, *Journal of Elasticity*, **54**, no. 1, pp. 27–41, 1999.
15. P.F. Hou, W.H. Zhang, and J.-Y. Chen, “Three-dimensional exact solutions of homogeneous transversely isotropic coated structures under spherical contact”, *Int. J. Solids Structures*, **161**, pp. 136–173, 2019.
16. S.A. Kaloerov and A.A. Samodurov, “Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates”, *International Applied Mechanics*, **51**, no. 6, pp. 623–639, 2015.
17. S.A. Kaloerov, “Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media”, *Int. Appl. Mech.*, **43**, no. 6, pp. 631–637, 2007.
18. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “On stressed state of transversely isotropic medium with an arbitraly orientated spheroidal void or penny-shaped crack under internal pressure”, *Strength of Materials*, **37**, no. 5, pp. 480–488, 2005.
19. V.S. Kirilyuk, “Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack”, *Int. Appl. Mech.*, **44**, no. 2, pp. 150–157, 2008.
20. V.S. Kirilyuk, “Stress state of a piezoceramic body with a plane crack opened by a rigid inclusion”, *Int. Appl. Mech.*, **44**, no. 7, pp. 757–768, 2008.
21. A. Kotousov, L.B. Neto, and A. Khanna, “On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces”, *Mechanics of Materials*, **68**, no. 1, pp. 38–44, 2014.
22. R. Kumar and V. Gupta, “Green’s function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials”, *Journal of Thermal Stresses*, **37**, no. 10, pp. 1201–1229, 2014.
23. F. Marmo, F. Toraldo, and L. Rosati, “Analytical formulas and design charts for transversely isotropic half-spaces subject to linearly distributed pressures”, *Meccanica*, **51**, no. 11, pp. 2909–2928, 2016.
24. Yu.N. Podil’chuk, “Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions”, *International Applied Mechanics*, **34**, no. 7, pp. 623–628, 1998.
25. A.P.S. Selvadurai, “A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces”, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, no. 3, pp. 493–509, 1994.

26. Yu.V. Tokovyy and C.C. Ma, “Three-Dimensional Elastic Analysis of Transversely-Isotropic Composites”, *Journal of Mechanics*, **33**, no. 6, pp. 821–830, 2018.
27. Y.J. Wang, C.F. Gao, and H.P. Song, “The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material”, *Mechanics Research Communications*, vol. 65, pp. 17–23, 2015.
28. Z.K. Wang and B.L. Zheng, “The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media”, *Int. J. Solids Structures*, **32**, no. 1, pp. 105–115, 1995.
29. M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, and G.T. Xu, “Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectricsemiconductors”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94–95, pp. 50–59, 2016.
30. Г.С. Кіт та Р.М. Мартиняк, “Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками”, *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, **42**, № 6, с. 7–11, 1999.
31. М.В. Хай, *Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения*. Киев: Наук. думка, 1993, 256 с.

Надійшла 31.05.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Vitaly S. Kirilyuk, ORCID: 0000-0002-8513-0378, S.P. Timoshenko Insitute of mechanics of NAS of Ukraine, e-mail: kirilyuk_v@ukr.net.

Olga I. Levchuk, ORCID: 0000-0002-6514-6225, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, e-mail: 2013levchuk@gmail.com

Valeriy V. Gavrilenko, ORCID: 0000-0001-9682-4204, National Transport University, Ukraine, e-mail: v_gavr@ukr.net

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ УПРУГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ПРИПОВЕРХНОСТНУЮ ВЫЕМКУ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук, В.В. Гавриленко

Аннотация. На основе математической модели рассмотрена задача о сжатия двух упругих трансверсально-изотропных полупространств, одно из которых содержит пологую приповерхностных выемку эллиптического сечения. Решение задачи получено с помощью представления Эллиота для трансверсально-изотропного тела через гармонические функции, классических гармонических потенциалов и сведения краевой задачи к рассмотрению интегро-дифференциального уравнения с неизвестной областью интегрирования. Как частный случай из найденных аналитических выражений вытекают основные параметры контакта трансверсально-изотропных полупространств при наличии в одном из них выемки осесимметричной формы, а также параметры контактного взаимодействия двух упругих изотропных полупространств, одно из которых содержит выемку эллиптического сечения. Получены численные результаты, изучено влияние упругих свойств полупространств, геометрических параметров выемки и погрузки на контактное взаимодействие и закрытия зазора между телами.

Ключевые слова: математическое моделирование, трансверсально-изотропные полупространства, приповерхностная выемка, эллиптического сечения, параметры контактного взаимодействия.

MATHEMATICAL MODELING OF THE CONTACT INTERACTION OF TWO ELASTIC TRANSVERSELY ISOTROPIC HALF-SPACES, ONE OF WHICH CONTAINS A NEAR-SURFACE GROOVE OF AN ELLIPTICAL SECTION / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, V.V. Gavrilenko

Abstract. On the basis of a mathematical model, the problem of compression of two elastic transversely isotropic half-spaces, one of which contains a shallow near-surface groove of an elliptical section, is considered. The solution to the problem is obtained using the Elliott representation for a transversely isotropic body in terms of harmonic functions, classical harmonic potentials and reducing the boundary value problem to considering an integro-differential equation with an unknown domain of integration. As a special case, the obtained analytical expressions yield the basic parameters of the contact of transversely isotropic half-spaces in the presence of an axisymmetric groove in one of them, as well as the parameters of the contact interaction of two elastic isotropic half-spaces, one of which contains an elliptical cross-section groove. Numerical results are obtained, the influence of elastic properties of half-spaces, geometrical parameters of groove and loading on contact interaction and closing of the gap between bodies is studied.

Keywords: mathematical modeling, transversely isotropic half-space, near-surface groove, elliptical section, parameters of contact interaction.

REFERENCES

1. V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, O.V. Gavrilenko, and M.B. Viter, “Simulation of contact interaction of a heated flat rigid elliptical stamp with a transversely isotropic half-space”, *System research and information technologies*, no. 3, pp.138–148, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.10.
2. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Modeling of contact interaction of piezoelectric half-space and elastic isotropic base with surface groove of circle section”, *System research and information technologies*, no. 4, pp. 120–132, 2016.
3. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, “Simulation of the contact interaction of two transversely isotropic spring half-spaces for the presence of a hard disk-like inclusion between them and pressure on the stratification area”, *System research and information technologies*, no. 1, pp. 107–119, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.1.10.
4. Yu.N. Podil’chuk, Boundary value problems of statics of elastic bodies. Kyiv: Nauk. dumka, 1984, 304 p.
5. Yu.N. Podil’chuk, “Exact analytical solutions of spatial boundary value problems of statics of a transversely isotropic body of canonical form (Review)”, *Int. Appl. Mech.*, **33**, no. 10, pp. 3–30, 1997.
6. F.M. Borodich, B.A. Galanov, L.M. Keer, and M.M. Suarez-Alvarez, “The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids”, *Mechanics of Materials*, **75**, pp. 34–44, 2014.
7. Y.S. Chai and I.I. Argatov, “Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies”, *Meccanica*, **53**, no. 11-12, pp. 3137–3143, 2018.
8. W.Q. Chen, J. Zhu, and X.Y. Li, “General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review”, *J. Thermal Stresses*, **42**, no. 1, pp. 90–106, 2019.
9. L. Dai, W. Guo, and X. Wang, “Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids”, *Int. J. Solids and Struct.*, **43**, no. 6, pp. 1818–1831, 2006.
10. D.B. Davtyan and D.A. Pozharskii, “Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space”, *Mechanics of Solids*, **49**, no. 5, pp. 578–586, 2014.
11. H.A. Elliott and N.F. Mott, “Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **44**, no. 4, pp. 522–533, 1948.
12. V.I. Fabrikant, “Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space”, *Acta Mechanca*, **228**, no. 4, pp. 1541–1560, 2017.
13. L.B. Freund and S. Suresh, *Thin Film Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 802 p.

14. G.M.L. Gladwell, "On Inclusions at a Bi-Material Elastic Interface", *Journal of Elasticity*, **54**, no. 1, pp. 27–41, 1999.
15. P.F. Hou, W.H. Zhang, and J.-Y. Chen, "Three-dimensional exact solutions of homogeneous transversely isotropic coated structures under spherical contact", *Int. J. Solids Structures*, **161**, pp. 136–173, 2019.
16. S.A. Kaloerov and A.A. Samodurov, "Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates", *International Applied Mechanics*, **51**, no. 6, pp. 623–639, 2015.
17. S.A. Kaloerov, "Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media", *Int. Appl. Mech.*, **43**, no. 6, pp. 631–637, 2007.
18. V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk, "On stressed state of transversely isotropic medium with an arbitraly orientated spheroidal void or penny-shaped crack under internal pressure", *Strength of Materials*, **37**, no. 5, pp. 480–488, 2005.
19. V.S. Kirilyuk, "Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack", *Int. Appl. Mech.*, **44**, no. 2, pp. 150–157, 2008.
20. V.S. Kirilyuk, "Stress state of a piezoceramic body with a plane crack opened by a rigid inclusion", *Int. Appl. Mech.*, **44**, no. 7, pp. 757–768, 2008.
21. A. Kotousov, L.B. Neto, and A. Khanna, "On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces", *Mechanics of Materials*, **68**, no. 1, pp. 38–44, 2014.
22. R. Kumar and V. Gupta, "Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials", *Journal of Thermal Stresses*, **37**, no. 10, pp. 1201–1229, 2014.
23. F. Marmo, F. Toraldo, and L. Rosati, "Analytical formulas and design charts for transversely isotropic half-spaces subject to linearly distributed pressures", *Meccanica*, **51**, no. 11, pp. 2909–2928, 2016.
24. Yu.N. Podil'chuk, "Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions", *International Applied Mechanics*, **34**, no. 7, pp. 623–628, 1998.
25. A.P.S. Selvadurai, "A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, no. 3, pp. 493–509, 1994.
26. Yu.V. Tokovyy and C.C. Ma, "Three-Dimensional Elastic Analysis of Transversely-Isotropic Composites", *Journal of Mechanics*, **33**, no. 6, pp. 821–830, 2018.
27. Y.J. Wang, C.F. Gao, and H.P. Song, "The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material", *Mechanics Research Communications*, **65**, pp. 17–23, 2015.
28. Z.K. Wang and B.L. Zheng, "The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media", *Int. J. Solids Structures*, **32**, no. 1, pp. 105–115, 1995.
29. M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, and G.T. Xu, "Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectricsemiconductors", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94–95, pp. 50–59, 2016.
30. G.S. Keith and R.M. Martyniak, "Spatial contact problems for an elastic half-space and a rigid base with surface recesses", Math. methods and physical and mechanical fields, **42**, no. 6, pp. 7–11, 1999.
31. M.V. Hai, Two-dimensional integral equations of Newtonian potential and their applications. Kiev: Naukova dumka, 1993, 256 p.