

ТИПОВІ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ ПЕРЕХОДИ ДО ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ НЕТИПОВИХ АТРАКТОРІВ НЕІДЕАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О.Ю. ШВЕЦЬ

Анотація. Розглянуто деякі прикладні нелінійні неідеальні динамічні системи п'ятого порядку, які застосовуються для опису коливань сферичних маятників та у гідродинаміці. Побудовано максимальні атрактори, як регулярні, так і хаотичні, таких систем. Обговорено різноманітні біфуркації максимальних атракторів. Установлено перехід до детермінованого хаосу для максимальних атракторів за типовими сценаріями Фейгенбаума та Маннвілля–Помо. Досліджено імплементацію сценарію узагальненої переміжності для хаотичних максимальних атракторів таких систем. Виявлено ознаку реалізації сценарію узагальненої переміжності.

Ключові слова: неідеальна динамічна система, регулярний максимальний атрактор, хаотичний максимальний атрактор, переміжність типова та узагальнена.

ВСТУП

Під час дослідження динамічних систем великий інтерес викликають питання виникнення хаотичних граничних множин у таких системах. Тобто виникнення усталених режимів динамічної поведінки, за яких поведінка детермінованої динамічної системи стає у деякому сенсі непередбачуваною. Причому ця непередбачуваність залежить виключно від внутрішніх властивостей динамічної системи, а не від тих чи інших зовнішніх хаотичних збуджень цієї системи. Якщо динамічна система є дисипативною, то граничними множинами будуть атрактори різних типів. Причому такі множини можуть бути як регулярними (положення рівноваги, граничні цикли, інваріантні тори), так і хаотичними. Перший хаотичний атрактор був побудований у знаменитій праці Лоренца 1963 р. [1] і надалі отримав назву «метелик Лоренца».

Із плином часу було розроблено понятійну базу для класифікації різних типів хаотичних атракторів. Натепер розглядаються гіперболічні, квазіхаотичні, приховані, самозбуджені, рідкісні хаотичні атрактори [2–4].

Усі перелічені атрактори є ізольованими граничними множинами. Тобто, якщо A , B — два різні атрактори, то

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y) > 0, \quad (1)$$

де ρ — деяка метрика, як правило, евклідова, у фазовому просторі динамічної системи.

Однак, крім існування таких «типових» атракторів, у деяких динамічних системах існують граничні множини, які не задовольняють умову ізолюваності (1). Граничні множини такої динамічної системи можна

об'єднати у сім'ї за спільними властивостями, серед яких неізолюваність і спільний спектр ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Серед інших такі сім'ї можуть ще й мати властивість «притягання» до себе інших траєкторій (яка виокремлює атрактор серед інших граничних множин у випадку її ізолюваності). У випадку сім'ї властивість «притягання» буде виявлятися у вигляді, що кожна траєкторія з деякої відкритої множини прямує не до всієї сім'ї граничних множин як такої, а до деякого її представника. Такі сім'ї утворюють так звані максимальні атрактори, означення яких наведено у працях [5, 6]. Зауважимо, що максимальні атрактори не є атракторами у класичному сенсі.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ТА МЕТА РОБОТИ

Чільне місце серед динамічних систем займають неідеальні системи або системи з обмеженим збудженням. Уперше такі системи були розглянуті Зоммерфельдом на початку ХХ ст. [7]. Але як усталений науковий напрям теорія систем з обмеженим збудженням утворилася після публікації монографії Кононенка [8], у якій він увів чітку аксіоматику та побудував математичні моделі для широкого кола завдань. Теорія систем з обмеженим збудженням досліджує взаємодію коливальних систем з джерелами збудження їх коливань. У межах цієї теорії передбачається, що джерела збудження коливань мають потужність, порівнянну до потужності, споживаної коливальним навантаженням. У цьому випадку робота джерела енергії залежить від режиму коливального навантаження і вплив джерела не може бути виражений у вигляді заданої явної функції часу. Тоді як у традиційному математичному моделюванні коливальної системи розглядаються ідеалізовані джерела збудження необмеженої потужності.

У багатьох випадках «ідеальний» підхід в корені хибний, що на практиці призводить до грубих помилок в описі динаміки як коливальної системи, так і джерела збудження [9–15].

Відкриття детермінованого хаосу стимулювало появу нового напрямку в теорії систем з обмеженим збудженням, пов'язаного з пошуком хаотичних режимів взаємодії коливальних систем з джерелами збудження. Особливий інтерес становлять ті хаотичні режими, поява яких зумовлена нелінійною взаємодією коливальної системи з джерелом збудження, а не з їх автономними властивостями. У публікаціях [16, 17] описано виникнення хаотичних усталених режимів у низці детермінованих неідеальних динамічних систем. У цих системах хаос принципово неможливий без урахування взаємодії коливальної системи з джерелом збудження її коливань.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - \left[y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 + B(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_4 + 2y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + \left[y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 + B(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_5 + 2y_1; \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1 y_2 + y_4 y_5) + Ey_3 + F; \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - \left[y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 - B(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_1 + 2y_5; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dy_5}{d\tau} = Cy_5 + \left[y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 - B(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4.$$

Це нормальна нелінійна система диференціальних рівнянь п'ятого порядку. Тут y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 — фазові змінні; τ — безрозмірний час; A, B, C, D, E, F — деякі параметри. Система рівнянь (2) має достатньо широке застосування у математичному моделюванні систем з обмеженням, за Зоммерфельдом–Кононенком, збудженням.

Так, якщо $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{3}{4}$, ця система описує коливання сферичного маятника, точка опори якого збуджується по вертикалі електродвигуном обмеженої потужності. У цьому випадку фазові змінні y_1, y_2, y_4, y_5 визначають положення маятника у просторі, а фазова змінна y_3 визначає швидкість обертання вала електродвигуна. Відповідно параметри C, D, E, F залежать від довжини і власної частоти маятника, рушійного моменту електродвигуна, внутрішнього моменту сил опору обертанню ротора електродвигуна, коефіцієнта демпфування, кута нахилу статичної характеристики електродвигуна тощо. Детальне виведення системи рівнянь (2) для випадку сферичного маятника з обмеженням збудженням виконано у праці [18].

Систему рівнянь (2) можна використовувати також для опису коливань вільної поверхні рідини циліндричного бака частково заповненого рідиною, платформа якого збуджується по вертикалі електродвигуном обмеженої потужності. У загальному випадку система «бак з рідиною – електродвигун» достатньо складна нескінченно вимірною динамічною системою. Але у частинному випадку параметричного резонансу система п'ятого порядку (2) дозволяє з високою точністю описати коливання вільної поверхні рідини. Звичайно фізичний зміст фазових координат і параметрів значно відрізняється від випадку сферичного маятника. Так у випадку системи «бак з рідиною – електродвигун» фазові змінні y_1, y_2 і y_4, y_5 — коефіцієнти розкладу амплітуд коливань вільної поверхні рідини, відповідно за першою і другою основними домінуючими модами; фазова змінна y_3 пропорційна швидкості обертання вала електродвигуна; C — коефіцієнт сил в'язкого демпфування; D — коефіцієнт пропорційності вібраційного моменту; E — кут нахилу статичної характеристики електродвигуна. Параметри A і B є константами, які залежать від радіуса бака і висоти налитої в нього рідини. Детальні пояснення з приводу обґрунтування математичної моделі системи «бак з рідиною – електродвигун» та обчислення параметрів цієї системи наведено у працях [19, 20].

Метою роботи є побудова максимальних атракторів системи (2) та дослідження різноманітних біфуркацій такого типу атракторів.

МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ І ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Система диференціальних рівнянь (2) суттєво нелінійна, тому знаходження її розв'язків та дослідження динамічної поведінки цієї системи, у загальному випадку, можна проводити тільки числовими методами. Опис деяких з таких методів наведено у працях [21, 22], а методику їх застосування стосовно систем з обмеженням збудженням роз'яснено у працях [23, 24].

Передусім відзначимо, що положення рівноваги системи рівнянь (2) проаналізовано у праці [25]. Коротко нагадаємо результати цієї роботи. Система (2) має єдине ізольоване положення рівноваги:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\frac{F}{E} = 0, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 0. \quad (3)$$

Достатні умови асимптотичної стійкості за Ляпуновим такого положення рівноваги можуть бути отримані за допомогою теореми Л'єнара–Шіпара [26]. Крім одного ізольованого положення рівноваги система (2) має нескінченну кількість неізольованих положень рівноваги. Ці положення рівноваги утворюють замкнені лінії у фазовому просторі. Кожна точка цих особливих ліній буде положенням рівноваги. Якщо положення рівноваги ізольоване, положення рівноваги (3) є асимптотично стійким, то воно буде єдиним традиційним атрактором системи. Усі інші, можливі, граничні множини не будуть атракторами у традиційному сенсі цього терміна.

Для з'ясування можливого вигляду граничних множин системи (2) проведемо числові дослідження її динамічної поведінки. Спочатку розглянемо випадок, коли ця система описує нелінійну взаємодію бака з рідиною й електродвигуна. Для виконання числових розрахунків покладемо:

$$A = 0.56, \quad B = -1.531, \quad C = -0.8, \quad D = -4.6, \quad F = 0.6. \quad (4)$$

Параметр E (кут нахилу статичної характеристики електродвигуна) розглядатимемо як біфуркаційний. Будемо досліджувати поведінку системи, якщо $-2.2 < E < -1.75$. За таких вибраних значень параметрів у системі виникають надзвичайно цікаві граничні множини, які мають такі загальні властивості. Кожна з таких множин являє собою деяку сім'ю нескінченної кількості траєкторій у фазовому просторі системи (2). Ці траєкторії неізольовані одна від одної, при цьому вони не мають спільних точок і не є положеннями рівноваги. Траєкторії сім'ї мають властивості «притягання», що споріднює таку сім'ю з атрактором. У той же час неізольованість траєкторій сім'ї вказує на те, що такі сім'ї траєкторій не є атракторами у традиційному сенсі поняття «атрактор». Причому зауважимо, що такі граничні множини можуть бути як регулярними, так і хаотичними [25].

Розглянемо деякі конкретні приклади таких сімей. Припустимо, що $E = -1.792$. У цьому випадку виникає гранична множина, яка складається з нескінченної кількості замкнених траєкторій (циклів), усі з яких існують одночасно. Усі цикли розташовані як завгодно близько один до одного, тобто не ізольовані. Однак такі цикли не мають точок дотику або перетину. Кожна така замкнена траєкторія сама по собі є граничною множиною. Це зумовлено тим, що майже будь-яка траєкторія, яка починається в деякій достатньо великій області фазового простору, прямує до одного з циклів сім'ї. Але жоден із циклів не є атрактором у традиційному розумінні цього терміна. Отже, кожен із цих циклів не є граничним. Крім того, кожен окремий цикл має один і той же період, однаковий спектр ЛХП. Старший ляпуновський показник для всіх циклів сім'ї дорівнює нулю. Переріз Пуанкаре кожного з циклів складається з однакової скінченної кількості точок.

На рис. 1 побудовано проекції фазового портрета трьох представників такої сім'ї траєкторій, які нанесено відтінками чорного кольору. Такі граничні множини [5, 6] називаються максимальними атракторами. Отже, на рис. 1 зображено представники періодичного максимального атрактора.

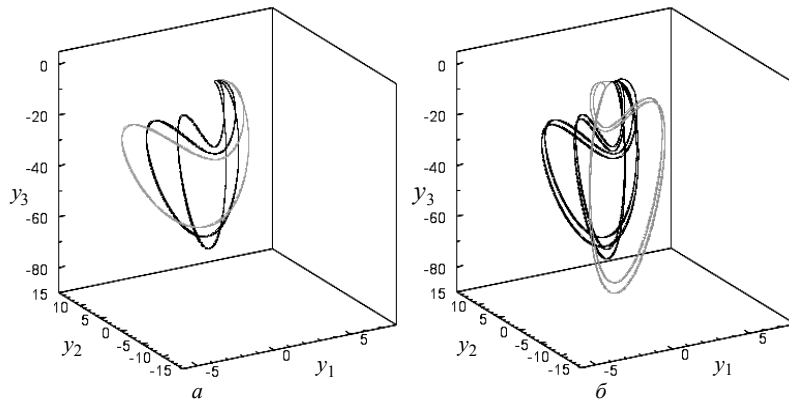


Рис. 1. Проекції фазових портретів, якщо $E = -1.792$ (а) і $E = -1.781$ (б).

Великий інтерес становлять біфуркації максимальних атракторів, зокрема переходи від регулярних максимальних атракторів до хаотичних максимальних атракторів. Для традиційних атракторів такі послідовності біфуркацій переходу від регулярного атрактора до хаотичного атрактора називаються сценаріями переходу до хаосу. Двома основними сценаріями таких переходів є сценарій Фейгенбаума [27, 28] та сценарій Маннвілля–Помо [29, 30]. Останнім часом виявлено нові сценарії переходів до хаосу, які узагальнюють уже відомі сценарії [31, 32]. Виявляється подібні послідовності біфуркацій притаманні і максимальним атракторам.

На рис. 2, а побудовано фазопараметричну характеристику (біфуркаційне дерево) для одного з представників максимальних атракторів системи (2) за значень параметрів за формулами (4). Зауважимо, що такі фазопараметричні характеристики для будь-якого представника максимального атрактора якісно подібні і відрізняються тільки несуттєвими кількісними відмінностями. Маємо типове біфуркаційне дерево. Окремим гілкам цього біфуркаційного дерева відповідають періодичні граничні множини, а густо чорним — хаотичні граничні множини. Можна побачити точки розгалуження гілок біфуркаційного дерева, які вказують на можливі типи різних біфуркацій.

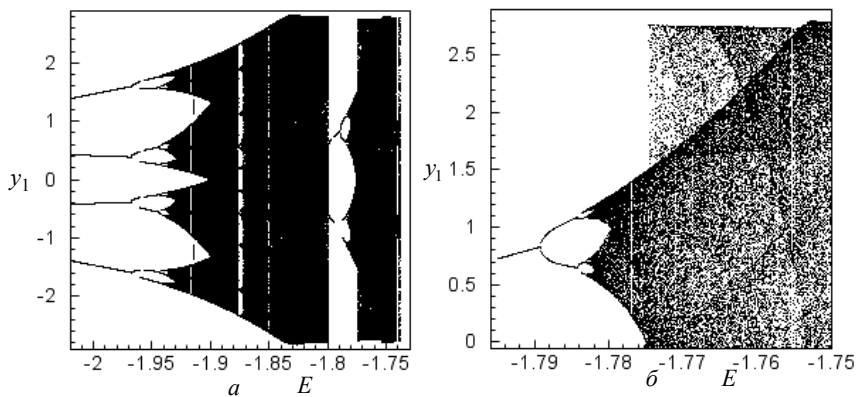


Рис. 2. Фазопараметрична характеристика системи

Для більш детального вивчення можливих біфуркацій на рис. 2, б побудовано збільшений фрагмент біфуркаційного дерева, який дозволяє ідентифікувати тип біфуркацій. Чітко можна бачити точки розгалуження

окремих гілок біфуркаційного дерева, із проходженням яких спостерігаються біфуркації подвоєння періодів циклів, що утворюють максимальний атрактор. Так, якщо $E = -1.792$, максимальний атрактор складається з нескінченної кількості циклів, кожен з яких має порівняно просту однокітну структуру. Зі збільшенням значень біфуркаційного параметра E починається каскад біфуркацій подвоєння періодів циклів сімей.

На рис. 1, б та на рис. 3, а побудовано періодичні максимальні атрактори, які виникають після першої та другої біфуркацій подвоєння періоду. Як і раніше відтінками чорного кольору зображено по три представники відповідних періодичних максимальних атракторів. Із кожною біфуркацією вдвічі збільшується тактність усіх циклів максимального атрактора. Спочатку вони стають двотактними, а потім — чотиритактними. Усі цикли мають нульовий старший ляпуновський показник. Також після кожної біфуркації подвоюється кількість точок у перетинах Пуанкаре. Такий нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду завершується виникненням хаотичного максимального атрактора, якщо $E = -1.776$.

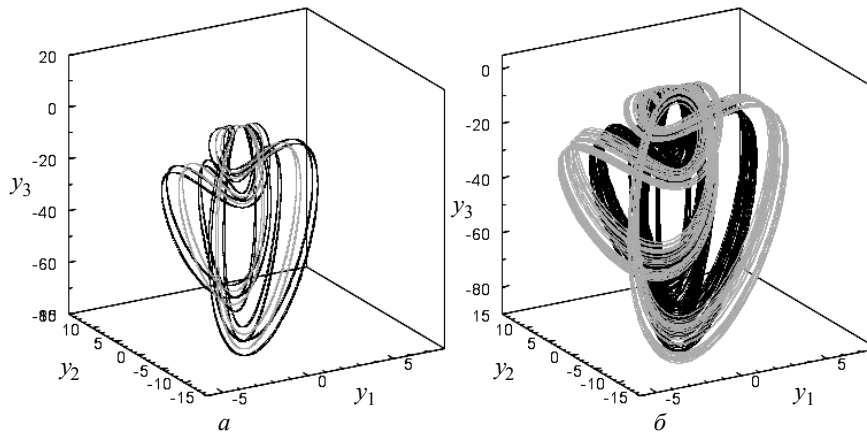


Рис. 3. Проекції фазових портретів, якщо $E = -1,7845$ (а) і $E = -1,776$ (б)

Побудовані проекції трьох представників нескінченної сім'ї неперіодичних траєкторій виниклого хаотичного максимального атрактора показано на рис. 3. Про виникнення хаотичної граничної множини свідчить поява додатного старшого ляпуновського показника у всіх траєкторій, які утворюють максимальний атрактор. Виникла сім'я містить нескінченну кількість хаотичних траєкторій. Відомо, що традиційний хаотичний атрактор складається із нескінченної кількості нестійких траєкторій. На перший погляд ця сім'я являє собою об'єднання нескінченної кількості хаотичних атракторів. Проте кожен член сім'ї не є атрактором у традиційному сенсі. Тут, як і раніше, для визначення такого об'єднання можна запропонувати поняття максимального атрактора [5, 6]. Усі траєкторії максимального хаотичного атрактора мають однаковий спектр ляпуновських характеристичних показників, старший з яких додатний. Отже, як і для традиційних атракторів, можна вводити поняття спектра ЛХП максимального атрактора в цілому, а не якоїсь його окремої траєкторії. Перетини Пуанкаре кожної з траєкторій сім'ї є структурно подібні хаотичні множини, що складаються із нескінченної кількості точок.

Таким чином, перехід до хаосу для максимальних атракторів відбувається через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періодів циклів. Та-

кий сценарій для традиційних атракторів називається сценарієм Фейгенбаума [27, 28]. Отже, попри те, що максимальні атрактори не є атракторами у класичному розумінні цього поняття, перехід до хаосу для максимальних атракторів може здійснюватися за природною аналогією типового сценарію Фейгенбаума.

Із подальшим зростанням біфуркаційного параметра E спостерігається перехід від хаотичного максимального атрактора одного типу до хаотичного атрактора максимального іншого типу. Такий перехід типу «хаос–хаос» відбувається за сценарієм узагальненої переміжності. Цей, порівняно новий, сценарій є узагальненням типового сценарію переміжності Манневілья–Помо [29, 30]. Різні варіанти сценарію узагальненої переміжності описано у працях [31, 32]. Зазначимо, що сценарій узагальненої переміжності спочатку був виявлений для традиційних атракторів. Але цей нетиповий сценарій реалізується також для максимальних атракторів.

Ознакою можливої реалізації узагальненої переміжності послуговує вигляд біфуркаційного дерева в околі точки $E \approx -1.775$ (див. рис. 2 (б)). Після проходження цієї точки в бік зростання біфуркаційного параметра E значно збільшується площа густо чорної ділянки на біфуркаційному дереві. Це свідчить про виникнення у системі (2) хаотичного атрактора нового типу.

На рис. 4, а побудовано проєкції фазових портретів трьох представників хаотичного максимального атрактора іншого типу, який існує у системі (2), якщо $E = -1.774$. Перехід до такого хаотичного максимального атрактора відбувається за сценарієм узагальненої переміжності [32]. Для ілюстрації імплементації такого сценарію побудовано розподіли інваріантної міри для двох типів хаотичних максимальних атракторів. Рис. 4, в побудований, якщо $E = -1.776$, а рис. 4, г — якщо $E = -1.774$. Після проходження точки біфуркації зі зростанням параметра E хаотичний максимальний атрактор, зображений на рис. 3, б, зникає і в системі виникає новий хаотичний максимальний атрактор, зображений на рис. 4, а. Рух траєкторій по новому хаотичному атрактору включає дві фази, груболамінарну та турбулентну. Груболамінарній фазі на рис. 4, г відповідає більш темна ділянка, яка за формою нагадує зниклий хаотичний атрактор. Турбулентній фазі переміжності відповідають більш світлі ділянки на рис. 4, г. Чергування фаз груболамінарна – турбулентна повторюється незліченну кількість разів. Час переходу із груболамінарної фази у турбулентну і знову назад у груболамінарну непередбачуваний. Такий перехід відбувається на всіх траєкторіях сім'ї, яка утворює хаотичний максимальний атрактор за одного і того ж значення біфуркаційного параметра.

Імплементацію сценарію узагальненої переміжності можна виявити, аналізуючи перетини Пуанкаре. На рис. 4, б побудовані перерізи Пуанкаре представників хаотичного максимального атрактора, якщо $E = -1.776$ (сірі точки) і $E = -1.774$ (чорні точки більшого розміру). В обох випадках перетини утворюють квазістрічкові хаотичні множини. Локалізація квазістрічкової множини представника хаотичного максимального атрактора за $E = -1.776$ збігається з локалізацією перетину Пуанкаре відповідного груболамінарній фазі представника хаотичного максимального атрактора за $E = -1.774$ (чотири ділянки на цьому рисунку, на яких сірі точки розташовуються посеред чорних). Чорні точки на рис. 4, б відповідають турбулентній фазі максимального атрактора, за $E = -1.774$.

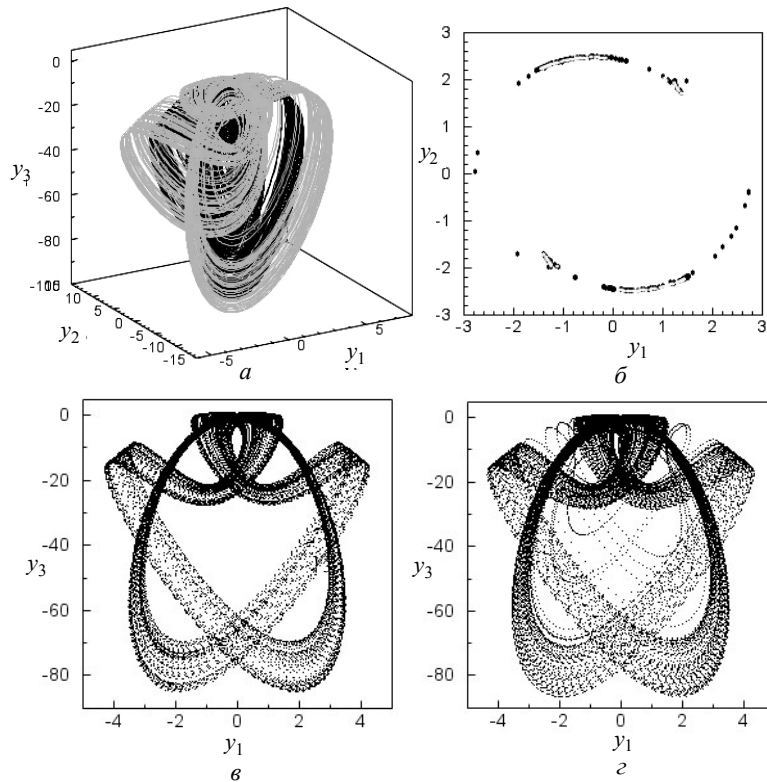


Рис. 4. Проекції фазових портретів, якщо $E = -1.774$ (а); перерізи Пуанкаре (б); розподіли природної інваріантної міри, якщо $E = -1.776$ (в) і $E = -1.774$ (г)

На завершення розглянемо реалізацію ще одного типового сценарію переходу до хаосу, а саме переміжності [29, 30], для нетипових максимальних атракторів. Цей розгляд, для різноманітності, проведемо в іншому вікні періодичності $-1.89 < E < -1.88$ біфуркаційного дерева. У малому правому півоколлі точки $E = -1.89$ у системі (2) існує періодичний максимальний атрактор (сім'я циклів). Проекцію розподілу природної інваріантної міри побудовано для одного з представників максимального періодичного атрактора за $E = -1.886$ (рис. 5, а). Цикли цього атрактора мають більш складну структуру на відміну від розглянутих вище. Якщо $E = -1.89$, сім'я циклів зникає і в системі виникає хаотичний максимальний атрактор. Виникнення хаосу відбувається за одну жорстку біфуркацію. На рис. 5, б показано проекцію розподілу природної інваріантної міри, побудовану за значення

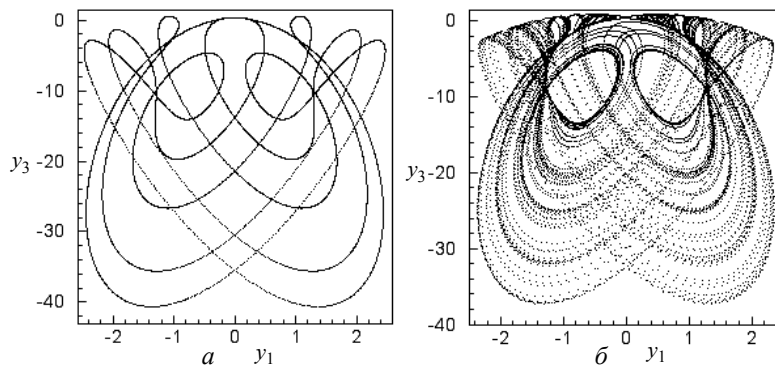


Рис. 5. Розподіли природної інваріантної міри за значень $E = -1.886$ (а) і $E = -1.89$ (б)

$E = -1.89$. Порівняльний аналіз розподілів (рис. 5) наочно свідчить про виникнення хаосу через переміжність за Манневільлем–Помо. На рис. 5, б можна помітити більш жирно прокреслені лінії, які за формою нагадують контури зниклого граничного циклу. Це ламінарна фаза переміжності. Більш світлі ділянки всередині цього рисунка є турбулентною фазою переміжності. Як зазначалося, перехід «цикл–хаос» відбувається за значення $E = -1.89$ для всієї сім'ї циклів періодичного максимального атрактора.

Усі числові розрахунки виконано за значень параметрів, що відповідають системі «бак з рідиною–електродвигун». Але подібні типи максимальних атракторів і сценарії переходу до хаосу характерні і для системи «сферичний маятник–електродвигун». Деякі результати для біфуркацій по іншому параметру частково отримано у праці [25].

ВИСНОВКИ

У роботі проаналізовано перехід до детермінованого хаосу в деяких важливих для застосувань неідеальних динамічних системах. Основними граничними множинами розглянутих систем будуть максимальні атрактори. Установлено, що незважаючи на те, що максимальні атрактори не є атракторами у традиційному розумінні цього терміна, перехід до хаосу для максимальних атракторів відбувається за типовими і нетиповими сценаріями, описаними для традиційних атракторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. E.N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *J. Atmos. Sci.*, **20**, pp. 130–141, 1963. Available: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
2. *Handbook of Applications of Chaos Theory*; Edited By C.H. Skiadas and Char. Skiadas. Chapman and Hall/CRC, 2016, 952 p.
3. G. Leonov and N. Kuznetsov, *Nonlinear mathematical models of phase-locked loops. Stability and Oscillations*. Cambridge Scientific Publisher, Cambridge, 2014.
4. N. Kuznetsov, “Hidden attractors in fundamental problems and engineering models,” *Lect. Notes Electr. Eng.*, **4**, pp. 13–25, 2016.
5. J. Milnor, “On the concept of attractor,” *Commun. Math. Phys.*, **99**, pp. 177–195, 1985. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01212280>
6. V.S. Anishchenko and T.E. Vadivasova, *Lectures on Nonlinear Dynamics*. Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2011, 516 p.
7. A. Sommerfeld, “Beitrag zur dynamischen Ausbaue der Festigkeitslehre,” *Physikalische Zeitschrift*, **3**, pp. 266–271, 1902.
8. V.O. Kononenko, *Vibrating system with a limited power-supply*. London: Iliffe, 1969, 236 p.
9. T.S. Krasnopolskaya, “Acoustic chaos caused by the Sommerfeld effect,” *J. Fluids Struct.*, **8**(6), 803–815, 1994. doi: 10.1016/s0889-9746(94)90300-x
10. T.S. Krasnopolskaya and G.J.F. van Heijst, “Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 328, pp. 229–252, 1996. Available: <https://doi.org/10.1017/S0022112096008701>
11. M.F. Dimentberg et al., “Dynamics of an Unbalanced Shaft Interacting with a Limited Power Supply,” *Nonlinear Dynamics*, **13**, pp. 171–187, 1997.
12. M. Dimentberg and C. Bucher, “Combinational parametric resonance under imperfectly periodic excitation,” *J. Sound Vibr.*, **331**(19), pp. 4373–4378, 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2012.04.025
13. R.F. Ganiev and T.S. Krasnopolskaya, “The Scientific Heritage of V.O. Kononenko: The Sommerfeld–Kononenko Effect,” *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, **47**(5), pp. 389–398, 2018. Available: <https://doi.org/10.3103/S1052618818050047>
14. A.A. Alifov, “About mixed forced, parametric and self-oscillations by limited excitation and delayed elasticity,” *PNRPU Mechanics Bulletin*, **3**, pp. 12–19, 2020.
15. S. Manikandan and P. Kokil, “Stability analysis of network-controlled generator excitation system with interval time-varying delays,” *Automatika*, **62**(1), pp. 65–75, 2021. doi: 10.1080/00051144.2020.1860390

16. A. Shvets and S. Donetskyi, "Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems," *Springer Proceedings in Complexity*, pp. 257–264, 2019. DOI 10.1007/978-3-030-15297-0_23.
17. E.D. Pechuk et al., "Influence of the Heart Rate on Dynamics of Cardiorespiratory System," *Springer Proceedings in Complexity*, pp. 211–216, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-39515-5_17
18. T.S. Krasnopol'skaya and A.Yu. Shvets, "Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with energy source," *Int. Appl. Mech.*, **28**(10), pp. 669–674, 1992.
19. T.S. Krasnopol'skaya and A.Y. Shvets, "Parametric resonance in the system: Liquid in tanks +electric motor," *Int. Appl. Mech.*, **29**(9), pp. 722–730, 1993.
20. T.S. Krasnopol'skaya and A.Yu. Shvets, "Chaotic surface waves in limited power—supply cylindrical tank vibrations," *J. Fluids Struct.*, **8**(1), pp. 1–18, 1994. doi: 10.1006/jfls.1994.1001
21. S.P. Kuznetsov, *Dynamic Chaos*. M.: Fizmatlit, 2006, 292 p.
22. T.S. Krasnopol'skaya and A.Yu. Shvets, *Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation*. M.: Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 280 p.
23. A.Yu. Shvets and T.S. Krasnopol'skaya, "Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply," *Solid Mechanics and its Applications*, **6**, pp. 313–322, 2008. doi: 10.1007/978-1-4020-6744-0_27
24. A.Yu. Shvets, "Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation," *Ukr. Math. J.*, **59**, pp. 602–614, 2007. doi: 10.1007/s11253-007-0039-7
25. A. Shvets and S. Donetskyi, "New Types of Limit Sets in the Dynamic System "Spherical Pendulum—Electric Motor," *Advanced Structured Materials*, **157**, pp. 443–455, 2021. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25
26. A. Li'enard and M.H. Chipart, "Sur le signe de la partie r'eele des racines d'une quation alg'ebrique," *J. Math. Pures Appl.*, **10** (4), pp. 291–346, 1914.
27. M.J. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *J. Stat. Phys.*, **19**(1), pp. 25–52, 1978. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01020332>
28. M.J. Feigenbaum, "The universal metric properties of nonlinear transformations," *J. Stat. Phys.*, **21**(6), pp. 669–706, 1979.
29. P. Manneville and Y. Pomeau, "Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems," *Physica D. Nonlinear Phenom.*, **1**(2), pp. 219–226, 1980.
30. Y. Pomeau and P. Manneville, "Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems," *Comm. Math. Phys.*, **74**(2), pp. 189–197, 1980. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01197757>
31. A.Yu. Shvets and V.A. Sirenko, "Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems," *J. Math. Sci.*, **243**(2), pp. 338–346, 2019. doi: 10.1007/s10958-019-04543-z
32. A. Shvets, "Overview of Scenarios of Transition to Chaos in Nonideal Dynamic Systems," *Springer Proceedings in Complexity*, pp. 853–864, 2021. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_59

Надійшла 27.07.2022

INFORMATION ON THE ARTICLE

Aleksandr Yu. Shvets, ORCID: 0000-0003-0330-5136, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: aleksandrshvetskpi@gmail.com

TYPICAL AND GENERALIZED TRANSITIONS TO DETERMINISTIC CHAOS FOR ATYPICAL ATTRACTORS OF NON-IDEAL DYNAMIC SYSTEMS / A.Yu. Shvets

Abstract. Some applied nonlinear, non-ideal dynamic systems of the fifth order, which are used to describe the oscillations of spherical pendulums and in hydrodynamics, are considered. Maximal attractors, both regular and chaotic, of such systems are constructed. Various bifurcations of maximal attractors are discussed. The transition to deterministic chaos is established for maximal attractors in typical Feigenbaum and Manneville–Pomeau scenarios. The implementation of the generalized alternation scenario for chaotic maximum attractors of such systems is investigated. A sign of the implementation of the scenario of generalized alternation has been revealed.

Keywords: non-ideal dynamic system, regular maximal attractor, chaotic maximal attractor, typical and generalized intermittency.