

## МОДИФІКАЦІЯ МЕРЕЖ ПЕТРІ З АНТИСИПАЦІЄЮ ПО ПОЗИЦІЇ

В.М. СТАТКЕВИЧ

**Анотація.** Запропоновано модифікацію мережі Петрі з урахуванням сильної антисипації по позиції. Розширення реалізовано за допомогою введення в правило запуску переходу нового доданка, який містить цілочислову функцію від нової кількості фішок у позиції. Знайдено важливі відмінності від класичних мереж Петрі, наприклад, множина маркувань, досяжних з поточного маркування запуском дозволеного переходу, може бути як порожньою, так і містити більше одного маркування. Розглянуто питання побудови графу досяжності та дерева покриття. Указано умови, за яких дерево покриття існує, а для його побудови запропоновано алгоритм, який узагальнює відомий класичний алгоритм. Основні ідеї та конструкції проілюстровано на прикладах.

**Ключові слова:** мережа Петрі, антисипація, умова запуску переходу, граф досяжності, дерево покриття.

Пам'яті Юрія Вікторовича Богданського (10.06.1949–21.11.2021)

### ВСТУП

Мережі Петрі, запропоновані К.А. Петрі в 1962 р., є зручним засобом для проектування, аналізу та моделювання різних процесів та мереж [1–3]. Багатьма авторами були розглянуті та досліджені різні модифікації мереж Петрі: інгібіторні, часові, стохастичні, кольорові, неперервні та інші [1–6]. У деяких з цих мереж правила запуску переходу можуть відрізнитись від класичного правила запуску переходу, запропонованого К.А. Петрі. Наприклад, в інгібіторних мережах вводиться інгібіторна дуга, яка проведена від позиції до переходу та яка забороняє запуск цього переходу, якщо в позиції наявна фішка. Також в неперервних мережах правило запуску відрізняється від класичного і пристосоване до ситуації, коли кількість фішок у позиції може бути будь-яким дійсним невід'ємним числом і перехід може бути запущений нецілу кількість разів, а саме вводиться поняття ступеня запуску переходу.

У 1992 р. Д. Дюбуа [7–9] запропонував поняття інкурсії, антисипації або передбачення, коли новий стан об'єкта залежить не тільки від певних попередніх станів, а і від певних майбутніх станів (сильна антисипація) або їх оцінок (слабка антисипація). Об'єкти можуть бути різної природи: диференціальні рівняння з неперервним часом та їх скінченно-різницеви аналоги з дискретним часом, диференціальні рівняння звичайні та з частинними похідними, клітинні автомати досліджувались, наприклад, у працях [7–12], диференціальні рівняння з випереджальним аргументом – у працях [13–15].

У цій роботі пропонується модифікувати правило запуску переходу класичної мережі Петрі з урахуванням сильної антисипації, а саме: ввести новий доданок, який містить функцію від нової кількості фішок у позиції. Якщо функція  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , то кількість фішок у позиції також буде цілим невід'ємним числом, як і у випадку класичних мереж Петрі. Наскіль-

ки відомо автору, такі модифікації мереж Петрі з антисипацією в літературі не розглядалися.

### ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Мережею Петрі називають набір  $\langle P, T, W, \mu_0 \rangle$ , де  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$  – скінченна множина позицій,  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  – скінченна множина переходів,  $W = (T \times P) \cup (P \times T) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  – вагова функція,  $\mu_0 : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  – початкове маркування. Для зображення мереж Петрі використовують дводольний орієнтований мультиграф [1–3]. Перехід  $t$  називають дозволим, якщо для кожної вхідної позиції  $p$  виконується нерівність  $\mu(p) \geq W(p, t)$ . Якщо перехід  $t$  дозволений, то він може бути запущений (але не обов'язково має бути запущеним), після його запуску нова кількість фішок у позиції  $p$  дорівнює

$$\mu_{k+1}(p) = \mu_k(p) - W(p, t) + W(t, p). \quad (1)$$

Модифікуємо правило запуску переходу (1). А саме розглянемо розширення класичної мережі Петрі  $\langle P, T, W, \mu_0, \{f_{p_1}, \dots, f_{p_m}\} \rangle$ , де функція  $f_{p_i} : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  відповідає позиції  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  (також будемо використовувати позначення  $f_i = f_{p_i}$ ). Перехід  $t$ , як і раніше, називаємо дозволим, якщо для кожної вхідної позиції  $p$  виконується нерівність  $\mu(p) \geq W(p, t)$ . Нехай після запуску дозволеного переходу  $t$  нова кількість фішок  $\mu_{new}(p)$  у позиції  $p$  задовольняє рівняння запуску переходу:

$$\mu_{new}(p) = \mu_k(p) - W(p, t) + W(t, p) + f_p(\mu_{new}(p)). \quad (2)$$

Рівняння (2) запуску переходу узагальнює правило запуску переходу (1) в класичній мережі Петрі. Запропоноване розширення назвемо мережею Петрі з антисипацією по позиції.

### ВИКОНАННЯ МЕРЕЖ ПЕТРІ З АНТИСИПАЦІЄЮ ПО ПОЗИЦІЇ

Розглянемо виконання мереж Петрі з антисипацією по позиції по декількох прикладах.

**Приклад 1.** Розглянемо класичну мережу Петрі, зображену на рис. 1. Її граф досяжності зображено на рис. 1. Для функції наступного стану  $\delta : (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \times T \rightarrow (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ , яка природним чином узагальнюється для довільної скінченної послідовності запусків переходів [1], виконується, наприклад, рівність

$$\delta(\mu_0, t_1 t_2) = \delta(\mu_0, t_2 t_1) = (1, 0). \quad (3)$$

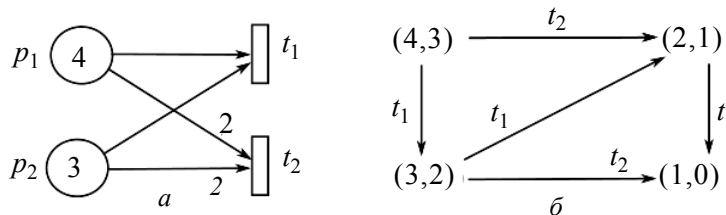


Рис. 1

Розширимо дану класичну мережу, а саме введемо антисипацію по позиції. Нехай позиціям  $p_i$  відповідають функції  $f_i : \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$f_1(k) = 0, 0 \leq k \leq 3; f_1(k) = k - 2, 4 \leq k \leq 5; f_1(k) = 2k, k \geq 6; \quad (4)$$

$$f_2(k) = 0, k \notin \{3, 4, 5\}; f_2(k) = k - 2, k \in \{3, 4\}; f_2(5) = 5.$$

Обидва переходи  $t_1$  і  $t_2$  дозволені в початковому маркуванні.

Рівняння запуску переходу  $t_1$  з маркування  $\mu_0$  згідно з рівнянням (2) мають вигляд

$$\mu_{new}(p_1) = \mu_0(p_1) - 1 + f_1(\mu_{new}(p_1)) = 3 + f_1(\mu_{new}(p_1)); \quad (5)$$

$$\mu_{new}(p_2) = \mu_0(p_2) - 1 + f_2(\mu_{new}(p_2)) = 2 + f_2(\mu_{new}(p_2)).$$

Тоді  $\mu_{new}(p_1) = 3$ ,  $\mu_{new}(p_2) \in \{2, 3, 4\}$ . Аналогічні рівняння запуску  $t_2$  такі:

$$\mu_{new}(p_1) = \mu_0(p_1) - 2 + f_1(\mu_{new}(p_1)) = 2 + f_1(\mu_{new}(p_1)); \quad (6)$$

$$\mu_{new}(p_2) = \mu_0(p_2) - 2 + f_2(\mu_{new}(p_2)) = 1 + f_2(\mu_{new}(p_2)).$$

Тоді  $\mu_{new}(p_1) \in \{2, 4, 5\}$ ,  $\mu_{new}(p_2) = 1$ . Таким чином, на відміну від класичної однозначної функції стану  $\delta : (\mathbf{N} \cup \{0\})^2 \times T \rightarrow (\mathbf{N} \cup \{0\})^2$ , для мережі рис. 1 отримуємо з введенням антисипації по позиції багатозначну функцію:

$$\delta : (\mathbf{N} \cup \{0\})^2 \times T \rightarrow 2^{((\mathbf{N} \cup \{0\})^2)};$$

$$\delta(\mu_0, t_1) = \{\mu_1 = (3, 2), \mu_2 = (3, 3), \mu_3 = (3, 4)\}; \quad (7)$$

$$\delta(\mu_0, t_2) = \{\mu_4 = (2, 1), \mu_5 = (4, 1), \mu_6 = (5, 1)\}.$$

З'ясуємо, чи виконується рівність (3), тобто як саме співвідносяться множини  $\delta(\mu_0, t_1 t_2)$  і  $\delta(\mu_0, t_2 t_1)$ ?

Розглянемо рівняння запуску переходу  $t_2$  з маркувань  $\mu_k \in \delta(\mu_0, t_1)$ ,  $k = 1, 2, 3$ :

$$\mu_{new}(p_1) = 1 + f_1(\mu_{new}(p_1)), \mu_{new}(p_2) = \mu_k(p_2) - 2 + f_2(\mu_{new}(p_2)). \quad (9)$$

Із першого рівняння отримуємо  $\mu_{new}(p_1) = 1$ . Для другого рівняння розглянемо випадки:

- 1) для  $k = 1$  маємо  $\mu_{new}(p_2) = f_2(\mu_{new}(p_2))$ ,  $\mu_{new}(p_2) \in \{0, 5\}$ ;
- 2) для  $k = 2$  маємо  $\mu_{new}(p_2) = 1 + f_2(\mu_{new}(p_2))$ ,  $\mu_{new}(p_2) = 1$ ;
- 3) для  $k = 3$  маємо  $\mu_{new}(p_2) = 2 + f_2(\mu_{new}(p_2))$ ,  $\mu_{new}(p_2) \in \{2, 3, 4\}$ .

Таким чином,  $\delta(\mu_0, t_1 t_2) = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ .

Тепер розглянемо рівняння запуску переходу  $t_1$  з маркувань  $\mu_k \in \delta(\mu_0, t_2)$ ,  $k = 4, 5, 6$ :

$$\mu_{new}(p_1) = \mu_k(p_1) - 1 + f_1(\mu_{new}(p_1)), \mu_{new}(p_2) = f_2(\mu_{new}(p_2)).$$

Для першого рівняння розглянемо випадки:

- 1) для  $k = 4$  маємо  $\mu_{new}(p_1) = 1 + f_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_1) = 1$ ;
- 2) для  $k = 5$  маємо  $\mu_{new}(p_1) = 3 + f_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_1) = 3$ ;
- 3) для  $k = 6$  маємо  $\mu_{new}(p_1) = 4 + f_1(\mu_{new}(p_1))$ , розв'язків немає.

Із другого рівняння отримуємо  $\mu_{new}(p_2) \in \{0, 5\}$ . Отже, остаточно отримуємо  $\delta(\mu_0, t_2 t_1) = \{(1, 0), (1, 5), (3, 0), (3, 5)\}$ .

Підсумовуючи маємо, що рівність (3) у загальному випадку не виконується. Множини  $\delta(\mu, t_1 t_2)$  та  $\delta(\mu, t_2 t_1)$  у загальному випадку різні, більш того жодна з цих множин не обов'язково у загальному випадку має бути підмножиною іншої:  $\delta(\mu, t_1 t_2) \not\subset \delta(\mu, t_2 t_1)$ ,  $\delta(\mu, t_2 t_1) \not\subset \delta(\mu, t_1 t_2)$ .

**Зауваження 1.** Для мережі Петрі з антисипацією по позиції, яка містить  $m$  позицій, функція  $\delta: (\mathbf{N} \cup \{0\})^m \times T \rightarrow 2^{(\mathbf{N} \cup \{0\})^m}$ .

**Приклад 2.** Модифікуємо умову прикладу 1, а саме: в рівності (4) покладемо

$$\tilde{f}_1(k) = 0, 0 \leq k \leq 3; \tilde{f}_1(k) = k - 4, 4 \leq k \leq 5; \tilde{f}_1(k) = 2k, k \geq 6.$$

Тоді замість рівняння (5) отримуємо  $\mu_{new}(p_1) = 3 + \tilde{f}_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_1) = 3$ , замість рівняння (6) маємо  $\mu_{new}(p_1) = 2 + \tilde{f}_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_1) = 2$ . Таким чином, множина (7) не змінюється, а множина (8) стає одноелементною:  $\delta(\mu_0, t_2) = \{\mu_4 = (2, 1)\}$ . Інакше кажучи, із запуском переходу  $t_2$  з маркування  $\mu_0$  настає маркування, визначене однозначно, як і у випадку класичних мереж Петрі. Зазначимо, що перехід  $t_2$  у маркуванні  $\mu_4$  не дозволений.

Рівняння (9) із заміною функції  $f_1$  на  $\tilde{f}_1$  мають такі самі розв'язки, тому  $\delta(\mu_0, t_1 t_2) = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ . Рівняння запуску переходу  $t_1$  з маркування  $\mu_4 \in \delta(\mu_0, t_2)$  набувають вигляду  $\mu_{new}(p_1) = 1 + \tilde{f}_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_2) = f_2(\mu_{new}(p_2))$ . Тоді  $\mu_{new}(p_1) = 1$ ,  $\mu_{new}(p_2) \in \{0, 5\}$ . Таким чином,  $\delta(\mu_0, t_2 t_1) = \{(1, 0), (1, 5)\} \subset \delta(\mu_0, t_1 t_2)$ .

Наведений приклад показує, що в окремому випадку може виконуватись вкладення  $\delta(\mu, t_2 t_1) \subset \delta(\mu, t_1 t_2)$ .

**Зауваження 2.** У прикладі 2 маркування (1,0) слід назвати тупиковим за аналогією із класичними мережами Петрі, оскільки жоден перехід у ньому не дозволений. У маркуванні (1,5) перехід  $t_2$  не дозволений, а перехід  $t_1$  хоча формально і дозволений, але друге з рівнянь запуску переходу  $t_1$   $\mu_{new}(p_1) = \tilde{f}_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_2) = 4 + f_2(\mu_{new}(p_2))$  не має розв'язків. У цьому і є відмінність ситуації від класичної. А саме, у мережі Петрі з антисипацією по позиції перехід може бути дозволений в тому сенсі, що кількості фішок у вхідних позиціях не менші, ніж ваги відповідних дуг, але рівнян-

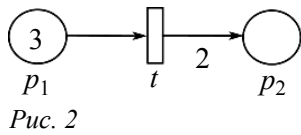
ня запуску такого переходу не має розв'язків і  $\delta(\mu, t) = \emptyset$ . Таке маркування (1,5) назвемо неklasичним тупиковим маркуванням.

**Зауваження 3.** Якщо у прикладі 1 у рівності (4) вибрати

$$\tilde{f}_1(k) = 0, 0 \leq k \leq 3; \tilde{f}_1(k) = k - 2, 4 \leq k \leq 5; \tilde{f}_1(k) = k - 3, k \geq 6,$$

то рівність (5) набуде вигляду  $\mu_{new}(p_1) = 3 + \tilde{f}_1(\mu_{new}(p_1))$  і має нескінченну множину розв'язків  $\mu_{new}(p_1) \in \{3, 6, 7, 8, \dots\}$ . Отже, множина  $\delta(\mu, t)$  у загальному випадку зліченна.

**Приклад 3.** Розглянемо мережу Петрі з антисипацією по позиції, зображену на рис. 2, і нехай позиції  $p_1$  відповідає функція



$f_1: \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ , де  $f_1(k) = 0$  для  $k \notin \{3, 4\}$ ,  $f_1(k) = k - 2$  для  $k \in \{3, 4\}$ , а позиції  $p_2$  відповідає тотожно нульова функція  $f_2(k) \equiv 0$ . Рівняння запуску переходу  $t$  з поточного маркування  $\mu$  мають вигляд

$$\mu_{new}(p_1) = \mu(p_1) - 1 + f_1(\mu_{new}(p_1)), \quad \mu_{new}(p_2) = \mu(p_2) + 2. \quad (10)$$

Кожний запуск переходу  $t$  додає по дві фішки в позицію  $p_2$ , як і в класичних мережах Петрі. Очевидна рівність  $\delta(\mu_0, t) = \{\mu_1 = (2, 2), \mu_2 = (3, 2), \mu_3 = (4, 2)\}$ .

Рівняння запуску переходу  $t$  з маркування  $\mu_1$  згідно з рівняннями (10), мають вигляд  $\mu_{new}(p_1) = 1 + f_1(\mu_{new}(p_1))$ ,  $\mu_{new}(p_2) = \mu(p_2) + 2$ , звідки впливає  $\delta(\mu_1, t) = \{(1, 4)\}$ . Аналогічним чином  $\delta((1, 4), t) = \{(0, 6)\}$ , а маркування (0,6) тупикове, оскільки в ньому перехід  $t$  не дозволений.

Маркування  $\mu_2$  є покривним для маркування  $\mu_0$ , з рівнянь (10) впливає

$$\delta(\mu_2, t) = \{(2, 4), (3, 4), (4, 4)\};$$

$$\delta((3, 2k), t) = \{(2, 2k + 2), (3, 2k + 2), (4, 2k + 2)\}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Нарешті, маркування  $\mu_3$  теж є покривним для маркування  $\mu_0$ , але в ньому перше з рівнянь (10) набуває вигляду  $\mu_{new}(p_1) = 3 + f_1(\mu_{new}(p_1))$  і не має розв'язків  $\delta(\mu_3, t) = \emptyset$ . Тому згідно із зауваженням 2 маркування  $\mu_3$  неklasичне тупикове. Отримана ситуація, яка суперечить класичним мережам Петрі: у загальному випадку з маркування  $\mu'$ , яке є покривним для маркування  $\mu''$ , неможливо запустити ті самі переходи, що з маркування  $\mu''$ , яке покривається. Тому введення елемента  $\omega = +\infty$  потребує додаткових умов.

Отже, можемо побудувати граф досяжності, зображений на рис. 3. Для даної мережі граф нескінченний, є деревом і має єдину нескінченну гілку  $\{(3, 2k) : k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ . Інші гілки скінченні і завершуються або тупиковими маркуваннями  $\{(0, 2k) : k = 3, 4, \dots\}$ , або неklasичними тупиковими маркуваннями  $\{(4, 2k) : k \in \mathbf{N}\}$ . Зазначимо, що у працях [4, гл. 4; 6] для ілю-

страції досяжних маркувань неперервних мереж Петрі з двома (трьома) позиціями використовуються двовимірні (тривимірні) графіки відносно координат  $\mu(p_1)$ ,  $\mu(p_2)$  ( $\mu(p_1)$ ,  $\mu(p_2)$ , ( $\mu(p_3)$  відповідно).

Також зазначимо, що в побудові дерева покриття для класичної мережі Петрі кількість нових маркувань дорівнює кількості дозволених переходів у відповідному маркуванні [1, 2]. Проте для мережі з антисипацією по позиції кількість нових маркувань визначається рівняннями запуску переходів і у загальному випадку може бути зліченною (див. зауваження 3).

Перехід від нескінченного графу досяжності до скінченного дерева покриття пов'язаний із введенням елемента  $\omega = +\infty$ . Тоді виникає питання, чи можна з маркування  $\mu'$ , яке є покривним для маркування  $\mu''$ , запустити ті самі послідовності переходів, що з маркування  $\mu''$ , яке покривається. Наприклад, обидва маркування  $\mu_2$  і  $\mu_3$  є покривними для маркування  $\mu_0$ , але множина  $\delta(\mu_2, t)$  непорожня, а  $\delta(\mu_3, t) = \emptyset$ . Зазначимо, що умова обмеженості носіїв усіх функцій не дає відповіді на це питання:  $\text{supp } f_1 = \{3,4\} < \infty$ ,  $\text{supp } f_2 = \emptyset < \infty$ . Причому недостатньо лише знати всі некласичні тупикові маркування – множина послідовностей запусків переходів може бути вужчою, але вона може бути непорожною.

Зазначимо, що граф досяжності може бути також і скінченим: для мережі прикладу 2 граф досяжності скінченний (рис. 4). Таким же способом можна перекозатись, що і граф досяжності для мережі прикладу 1 скінченний, всі маркування з множини  $\mu$  з множини  $\{0,1,2,3,4,5\}^2$  досяжні. У цьому неважко перекозатись, якщо записати відповідні рівняння запусків переходів  $t_1$  і  $t_2$  з кожного досяжного маркування.

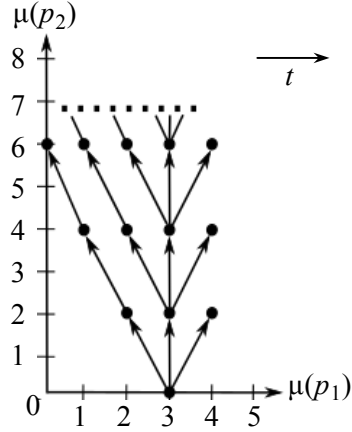


Рис. 3

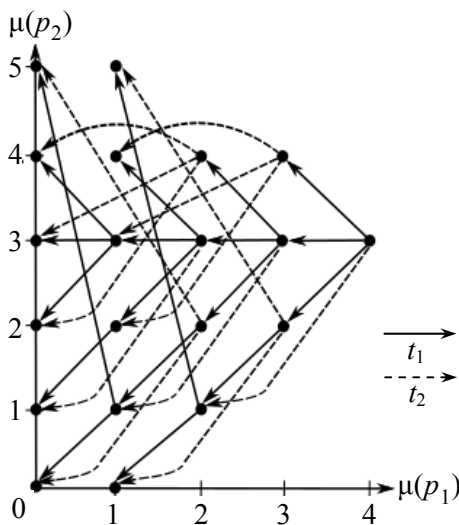


Рис. 4

**Приклад 4.** Розглянемо мережу Петрі з антисипацією по позиції, зображену на рис. 5, і нехай позиціям  $p_i$  відповідають функції  $f_i : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $i=1,2$ ;

$$f_1(k) = \text{sgn } k = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{N}, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \quad f_2(k) = \overline{\text{sgn } k} = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N}, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Поточне маркування позначимо через  $\mu = (\mu(p_1), \mu(p_2))$ .

Розглянемо рівняння запуску переходу  $t_1$  з поточного маркування:

$$\mu_{new}(p_1) = \mu(p_1) - 1 + \text{sgn } \mu_{new}(p_1), \quad \mu_{new}(p_2) = \mu(p_2) + 1 + \overline{\text{sgn } \mu_{new}(p_2)}.$$

Якщо  $\mu(p_1) = 0$ , то перехід  $t_1$  не дозволений. Якщо  $\mu(p_1) = 1$ , то

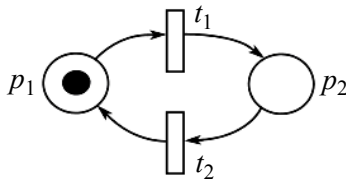


Рис. 5

$\mu_{new}(p_1) \in \{0, 1\}$ . Якщо ж  $\mu(p_1) \geq 2$ , то оскільки  $\mu_{new}(p_1) \geq 1$ ,  $\text{sgn } \mu_{new}(p_1) = 1$ , отримуємо  $\mu_{new}(p_1) = \mu(p_1)$ . Друге рівняння з урахуванням того, що  $\mu_{new}(p_2) \geq 1$ ,  $\overline{\text{sgn } \mu_{new}(p_2)} = 0$ , має єдиний розв'язок  $\mu_{new}(p_2) = \mu(p_2) + 1$ . Таким чином, у поточному маркуванні  $(0, \mu(p_2))$

перехід  $t_1$  не дозволений,  $\delta((1, \mu(p_2)), t_1) = \{(0, \mu(p_2) + 1), (1, \mu(p_2) + 1)\}$ , а для  $\mu(p_1) \geq 2$   $\delta((\mu(p_1), \mu(p_2)), t_1) = \{(\mu(p_1), \mu(p_2) + 1)\}$ .

Тепер розглянемо рівняння запуску переходу  $t_2$  з поточного маркування:

$$\mu_{new}(p_1) = \mu(p_1) + 1 + \text{sgn } \mu_{new}(p_1), \quad \mu_{new}(p_2) = \mu(p_2) - 1 + \overline{\text{sgn } \mu_{new}(p_2)}.$$

Перше рівняння,  $\mu_{new}(p_1) \geq 1$ ,  $\text{sgn } \mu_{new}(p_1) = 1$ , має єдиний розв'язок  $\mu_{new}(p_1) = \mu(p_1) + 2$ . Якщо  $\mu(p_2) = 0$ , то перехід  $t_2$  не дозволений. Якщо  $\mu(p_2) = 1$ , то друге рівняння набуде вигляду  $\mu_{new}(p_2) = \overline{\text{sgn } \mu_{new}(p_2)}$  і не має розв'язків. Якщо ж  $\mu(p_2) \geq 2$ , то з урахуванням того, що  $\mu_{new}(p_2) \geq 1$ ,  $\overline{\text{sgn } \mu_{new}(p_2)} = 0$ , отримуємо  $\mu_{new}(p_2) = \mu(p_2) - 1$ . Таким чином, у поточному маркуванні  $(\mu(p_1), 0)$  перехід  $t_2$  не дозволений,  $\delta((\mu(p_1), 1), t_2) = \emptyset$ ,  $\delta((\mu(p_1), \mu(p_2)), t_2) = \{(\mu(p_1) + 2, \mu(p_2) - 1)\}$  для  $\mu(p_2) \geq 2$ .

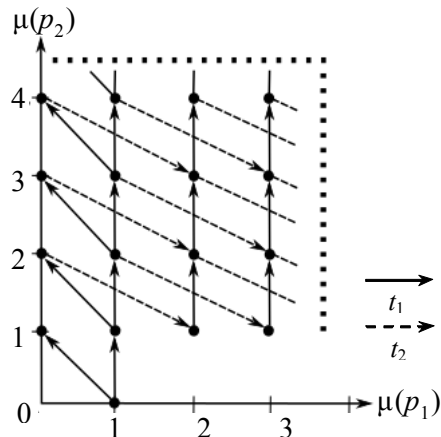


Рис. 6

Отже, можемо побудувати граф досяжності, зображений на рис. 6. Для даної мережі граф нескінченний, має єдине неklasичне тупикове маркування  $(0, 1)$  (оскільки в ньому перехід  $t_1$  не дозволений, а перехід  $t_2$  хоча і дозволений, але  $\delta((0, 1), t_2) = \emptyset$ ) і не є деревом ( $\delta((2, 2), t_1 t_2) = \delta((2, 2), t_2 t_1) = \{(4, 2)\}$ ). Зазначимо, що для класичної мережі Петрі без антисипації, зображеної на рис. 5, граф досяжності був би скінченним і містив би всього два марку-

вання  $(1,0)$  і  $(0,1)$ . Також зазначимо, що умова обмеженості носіїв усіх функцій не виконується:  $\text{supp } f_1 = \mathbf{N}$ ,  $\text{supp } f_2 = \{0\}$ .

Нарешті, зазначимо, що запуском переходу  $t_1$  з маркування  $(1,1) \in \delta((1,0), t_1)$ , яке є покривним для маркування  $(1,0)$ , можна отримати маркування  $(0,2)$ , яке вже не є покривним для маркування  $(1,0)$ . Крім того, з маркування  $(1,1)$  можна запускати перехід  $t_1$  нескінченну кількість разів і отримувати маркування  $(1, k)$ ,  $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ , а в маркуванні  $(0,2) \in \delta((1,1), t_1)$  перехід  $t_1$  хоча і дозволений, але  $\delta((0,2), t_1) = \emptyset$ . Таким чином, проблема введення елемента  $\omega$  (див. приклад 3) для даної мережі зберігається.

### ДЕРЕВО ПОКРИТТЯ ДЛЯ МЕРЕЖ ПЕТРІ З АНТИСИПАЦІЄЮ ПО ПОЗИЦІЇ

Розглянемо мережу Петрі з антисипацією по позиції з початковим маркуванням  $\mu_0$ . Нагадаємо, що множину маркувань, досяжних з маркування  $\mu$ , позначають через  $R(\mu)$  [1–3]. Нехай мережа задовольняє дві додаткові умови 1 і 2.

**Умова 1.** Існує константа  $C \in \mathbf{N}$ , яка залежить від мережі та від функцій  $f_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), що для кожного маркування  $\mu \in R(\mu_0)$  і для кожного переходу  $t$ , дозволеного в маркуванні  $\mu$ , рівняння запуску переходу  $t$  мають не більше ніж  $C$  розв'язків.

**Умова 2.** Якщо маркування  $\mu'$  досягне з маркування  $\mu'' \in R(\mu_0)$  послідовністю запусків переходів  $\sigma$  і є покривним для маркування  $\mu''$ , і до того ж для певної позиції  $p$   $\mu'(p) > \mu''(p)$ , то:

а) або заздалегідь відоме скінченне число  $N \in \mathbf{N}$ , що послідовність  $\sigma$  можна запустити з маркування  $\mu'$  не більше ніж  $N$  разів;

б) або заздалегідь відомо, що послідовність  $\sigma$  можна запустити з маркування  $\mu'$  нескінченну кількість разів, і причому жодне з отриманих цими запусками маркувань не є неklasичним тупиковим, а для всіх  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  довільне маркування  $\mu_k \in \delta(\mu', \sigma^k)$  покривається кожним маркуванням  $\mu_{k+1} \in \delta(\mu_k, \sigma)$  і для вказаної позиції  $p$   $\mu_{k+1}(p) > \mu_k(p)$ .

Зазначимо, що для класичної мережі Петрі без антисипації по позиції умови 1, 2 і 2б виконуються завжди ( $C = 1$ ), умова 2а ніколи не виконується. Проте з введенням антисипації по позиції з'являються мережі, для яких може не виконуватись

– або умова 1 – див., наприклад, зауваження 3;

– або умова 2 – у прикладі 3 маркування  $(3,2) \in \delta(\mu_0, t)$  є покривним для маркування  $\mu_0$ , послідовність  $\delta = t$  можна запускати з маркування  $(3,2)$  нескінченну кількість разів та отримувати маркування  $(3,2k)$ ,  $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ , але маркування  $(2,4) \in \delta((3,2), t)$  вже не є покривним для маркування  $(3,2)$ , більш того маркування  $(4,4) \in \delta((3,2), t)$  неklasичне тупикове.

Також зазначимо, що умова 2б є формалізацією нескінченного зростання по кожній гілці.



Якщо додаткові умови 1 і 2 виконуються, стає можливим ввести елемент  $\omega = +\infty$ . Пропонується такий алгоритм побудови скінченного дерева покриття, який узагальнює добре відомий класичний алгоритм [2, с. 51; 1, с. 94; 3, с. 23; 4, с. 39–40].

**Крок 1.** Позначити початкове маркування  $\mu_0$  як корінь та присвоїти йому мітку “нове”.

**Крок 2.** Поки існують нові маркування, виконувати такі операції:

Крок 2.1. Вибрати нове маркування  $\mu$ .

Крок 2.2. Якщо  $\mu$  збігається з одним з маркувань на шляху від кореня до  $\mu$ , присвоїти  $\mu$  мітку “старе” та перейти до іншого нового маркування.

Крок 2.3. Якщо для маркування  $\mu$  немає дозволених переходів, присвоїти  $\mu$  мітку “тупикове”; якщо ж для кожного дозволеного переходу  $t$  рівняння запуску  $t$  не мають розв’язків, присвоїти  $\mu$  мітку “некласичне тупикове”.

Крок 2.4. Поки для маркування  $\mu$  існують дозволені переходи  $t$ , рівняння запуску яких мають розв’язки, для кожного з них виконати такі операції:

Знайти множину маркувань  $\delta(\mu, t)$  і для кожного маркування  $\mu' \in \delta(\mu, t)$  виконати такі операції:

– якщо на шляху від кореня до маркування  $\mu$  існує маркування  $\mu''$ , яке покривається маркуванням  $\mu'$ , і для них виконується умова 2б, то замінити  $\mu'(p)$  на  $\omega$  для кожної позиції  $p$ , указаній в умові 2;

– ввести  $\mu'$  як вузол, з’єднати  $\mu$  з  $\mu'$  дугою, помітити дугу символом  $t$  і присвоїти  $\mu'$  мітку “нове”.

Очевидно, що певні операції наведеного алгоритму точно збігаються з операціями класичного алгоритму [2, с. 51]. Відмінності обумовлені способом введення  $\omega$ , а також множиною  $\delta(\mu, t)$ , яка для дозволеного переходу  $t$  може бути в загального випадку як порожньою, так і містити більше одного маркування.

**Теорема 1.** Нехай для певної мережі Петрі з антисипацією по позиції виконуються умови 1 і 2. Тоді дерево покриття для такої мережі скінченне.

**Доведення** точно повторює доведення теореми 4.1 [1, с. 97–98]. Використані в ньому леми 4.1–4.3 [1, с. 95–97] запозичуються без змін, а в доведенні самої теореми 4.1 вносяться такі два коригування:

1) наявність нескінченного шляху  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , який виходить з кореня  $x_0$ , свідчить про те, що в умові 2 виконується саме пункт 2б, а не пункт 2а – таким чином введення елемента  $\omega$  коректне;

2) кількість вершин, які слідують зажною вершиною в дереві, обмежена не кількістю переходів, а константою  $C$  з умови 1.

Для мережі прикладу 4 побудова дерева покриття викликає складності: вказані у прикладі 4 міркування свідчать про те, що умова 2 не виконується.

**Приклад 5.** Змінимо початкове маркування мережі в прикладі 4, нехай  $\mu_0 = (2,1)$ . Тоді умови 1 і 2 виконуються і в результаті застосування наведеного алгоритму отримуємо дерево покриття, зображене на рис. 7.

Зазначимо, що можливість побудови дерева покриття за допомогою наведеного алгоритму, тобто виконання умов 1 і 2, залежить у тому числі і від початкового маркування  $\mu_0$  та множини  $R(\mu_0)$ . Тут ситуація відрізняється від класичної: для мережі Петрі без антисипації по позиції від початкового маркування залежить конкретний вигляд самого дерева покриття, але аж ніяк не можливість його побудови. Як і у прикладі 4 умова обмеженості носіїв усіх функцій не виконується, але на відміну від прикладу 4 дерево покриття побудоване.

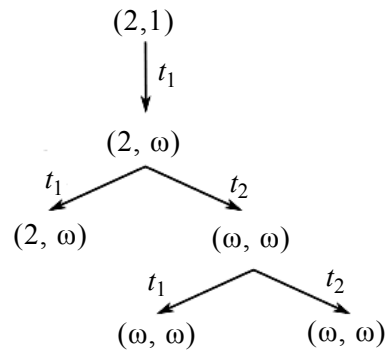


Рис. 7

Як і у випадку класичних мереж Петрі, у дереві покриття не відображається певна інформація. Наприклад, послідовність  $t_1 t_2^2$  запустити неможливо, але на рис. 7 це не відображається.

Граф покриття будується за таким же принципом, як і у випадку класичних мереж Петрі [2]. Граф покриття для мережі прикладу 5 зображено на рис. 8.

**Зауваження 4.** Якщо послабити умову 2б і дозволити отримувати некласичні тупикові маркування, то дерево покриття залишиться скінченним.

Але виникне інша проблема — можуть з'явитись зайві недосяжні маркування. А саме, якщо в дереві покриття буде наявне певне маркування  $\mu$ , яке міститиме  $\omega$ , то не можна буде зрозуміти чи повинне це маркування  $\mu$  бути насправді наявним, чи наявність некласичних тупикових маркувань виключатиме появу маркування  $\mu$ .

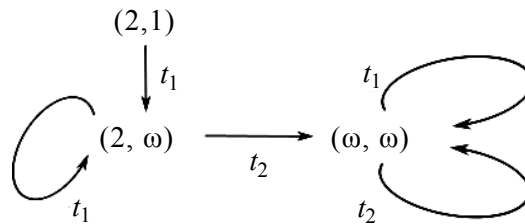


Рис. 8

Один зі способів розв'язання цієї проблеми може полягати у введенні нового додаткового елемента [ $\omega$ /н.т.], але це може призвести до суттєвого збільшення кількості маркувань у дереві покриття, хоча дерево і залишиться скінченним.

## ВИСНОВКИ

Запропоновано мережі Петрі з урахуванням сильної антисипації по позиції, які розширюють класичні мережі Петрі за допомогою модифікації правила запуску переходів. Наведено приклади виконання таких мереж; розглянуто питання побудови графу досяжності та дерева покриття. Виявлені відмінності від класичних мереж Петрі, які вказують на необхідність подальшого дослідження мереж такого типу.

Автор вдячний Олександрю Сергійовичу Макаренку за плідні обговорення та коментарі.

## ЛІТЕРАТУРА

1. J. Peterson, *Theory of Petri nets and system modeling*. М.: Mir, 1984, 264 p.
2. T. Murata, "Petri nets: Properties, analysis, applications," *TIIER*, vol. 77, no. 4, pp. 41–85, 1989.
3. V.E. Kotov, *Petri nets*. М.: Nauka, 1984, 160 p.

4. R. David and H. Alla, *Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
5. T. Gu and R. Dong, “A novel continuous model to approximate time Petri nets: modeling and analysis,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 15, no. 1, pp. 141–150, 2005.
6. C.R. Vazquez, C. Mahulea, J. Julvez, and M. Silva, “Introduction to Fluid Petri nets”, Chapter in Book: “Control of Discrete-Event Systems,” *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 433, Eds. C. Seatzu, M. Silva, J.H. van Schuppen, Springer-Verlag London, pp. 365–386, 2013. doi: 10.1007/978-1-4471-4276-8\_18.
7. D. Dubois, “Incurive and hyperincurive systems, fractal machine and anticipatory logic,” *Computing Anticipatory Systems: CASYS 2000 – Fourth International Conference. AIP Conference Proceedings 573*, pp. 437–451, 2001. doi: 10.1063/1.1388710.
8. D. Dubois, “Theory of Incurive Synchronization and Application to the Anticipation of the Chaotic Epidemic,” *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, vol. 10, pp. 3–18, 2001.
9. D. Dubois, “Generation of fractals from incurive automata, digital diffusion and wave equation systems,” *Biosystems*, vol. 43, pp. 97–114, 1997. doi: 10.1016/S0303-2647(97)01692-4.
10. A. Makarenko, “Multivaluedness Aspects in Self-Organization, Complexity and Computations Investigations by Strong Anticipation,” *Chapter in Book: Recent Advances in Nonlinear Dynamics and Synchronization*; Eds. K. Kyamakya, W. Mathis, R. Stoop, J. Chedjou, Z. Li, Springer, Cham, pp. 33–54, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-58996-1\_3.
11. A. Makarenko, “Neural Networks with Strong Anticipation and Some Related Problems of Complexity Theory,” *Chapter 12 in Series: Studies in Systems, Decisions and Control*, vol. 55. Ed. George H. Dimirovski, Springer, 2016, pp. 267–281. doi: 10.1007/978-3-319-28860-4\_12.
12. A. Makarenko, “Toward Multivaluedness Aspects in Self-Organization, Complexity and Computations Investigations,” *Fourth International Workshop on Nonlinear Dynamics and Synchronization INDS'15*, Klagenfurt, Austria, Alpen-Adria University, July 31, 2015, pp. 84–93.
13. L.E. Elsgolts and S.B. Norkin, *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*. M.: Nauka, 1971, 296 p.
14. G.A. Kamensky and A.L. Skubachevskii, *Linear boundary value problems for differential-difference equations*. M.: Ed. MAI, 1992, 190 p.
15. V.G. Pimenov and D.A. Korotkiy, “On solving systems of differential equations with lead and lag,” *Izvestiya UrGU*, 2006, no. 44, pp. 113–139.

Received 03.08.2022

#### INFORMATION ON THE ARTICLE

**Vitalii M. Statkevych**, ORCID: 0000-0001-5210-9890, Educational and Scientific Institute for Applied System Analysis of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: mstatkevich@yahoo.com

#### A MODIFICATION OF PETRI NETS WITH ANTICIPATION ON A POSITION / V.M. Statkevych

**Abstract.** We propose a modification of Petri nets with strong anticipation on a position. The extension modifies a transition rule by adding a new term that contains an integer function of the new marking in the position. The differences from classic Petri nets are found; for example, the set of markings that are reachable from a current marking by firing the enabled transition can either be empty or contain more than one marking. We consider the construction of a reachability graph and a coverability tree. We give the conditions for the existence of the coverability tree and propose the algorithm for constructing the coverability tree that generalizes the well-known classic algorithm. The main ideas and constructions are illustrated in the examples.

**Keywords:** Petri net, anticipation, transition rule, reachability graph, coverability tree.