УДК 519.816:330.42

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ И ОТСУТСТВИЕ АРБИТРАЖНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ

Я.В. ИВАНЕНКО, И.А. ПАСИЧНИЧЕНКО

Предложена новая классификация ситуаций принятия решений, в основе которой лежит понятие неопределенности в матричной схеме ситуации. Такой подход к классификации ситуаций принятия решений отличается от известного, согласно которому разделяют ситуации с риском и неопределенностью в зависимости от наличия распределения вероятностей на множестве значений неизвестного параметра. Установлены необходимые и достаточные условия существования неопределенности в матричной схеме. Предложенная классификация применена в анализе финансовых рынков. Показано, что отсутствие арбитражной возможности на финансовом рынке в модели Эрроу–Дебре с безрисковым активом есть частным случаем существования неопределенности в матричной схеме ситуации принятия решений. Этот результат даёт возможность рассматривать теорию безарбитражного оценивания финансовых инструментов как ветвь общей теории решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории решений представление о неопределённости как о чём-то противоположном риску было инициировано Найтом [3]. При этом наличие распределения вероятностей на последствиях или на состояниях природы именовалось риском, а отсутствие такого распределения — неопределённостью. Такая точка зрения во многом повлияла на дальнейшее развитие так называемой описательной теории решений [4–5]. Так теории, объясняющие парадокс Элсберга, существенным образом использовали данное Найтом определение [6–7].

Существует, однако, несколько аргументов в пользу альтернативного взгляда на проблему формализации понятия неопределённости. Одним из таких аргументов есть возможность построения такого определения только на основании того, что М. Алле назвал «принципом внутренней согласованности для социальных наук» [8, с. 504]. Полагая, следуя М. Алле, что рациональность заключается в том, что решения принимаются ради достижения целей [8, с. 504], можно определить неопределённость в схеме ситуации принятия решений как существование нескольких различных отношений предпочтения на множестве действий совместимых с некоторым фиксированным отношением предпочтения на множестве последствий [2], [9]. Можно показать, что существование хотя бы одной пары действий, на которых отношение предпочтения на действиях не единственно, уже необходимо и достаточно для существования неопределённости.

Если потребовать большего, чтобы неопределённость в схеме ситуации (определяемая таким образом) существовала для любой пары действий, то приходим к понятию отсутствия возможности арбитража [10–12], которое является одним из основных в анализе финансовых рынков. Таким образом, отсутствие возможности арбитража можно считать частным случаем существования неопределённости. Следовательно, это даёт возможность говорить о многих темах, которые традиционно считались прерогативой исключительно финансовой теории и, в частности, финансовой математики, с единых позиций теории решений и не выходя за её рамки.

Заметим, что теория решений, основанная на таком определении, ведет к следующему различию между риском и неопределённостью. Риск становится свойством одного отдельно взятого действия и означает лишь множественность возможных последствий этого действия безотносительно наличия распределения вероятностей. Неопределенность же есть свойством системы решений в целом и зависит от отношения предпочтения на множестве последствий, множеств последствий, соответствующих каждому решению, и правила вывода отношения предпочтения на множестве действий из отношения предпочтения на множестве последствий. Такой подход к риску и неопределенности хорошо согласуется с понятием меры неопределенности [13–14], [9]. При фиксированном отношении предпочтения на множестве последствий неопределенность есть свойством схемы ситуации принятия решений. Таким образом, в такой системе понятий неопределенность может быть или не быть присуща ситуации с рискованными действиями. Поэтому имеет смысл называть развиваемый здесь подход к неопределённости и риску нормативным [5] или операционным.

Таким образом, **цель работы** — построение классификации ситуаций принятия решений на основании нового понятия неопределенности в схеме ситуации и применение этой классификации в анализе финансовых рынков.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводится определение и дается критерий существования неопределённости в схеме ситуации принятия решений. Некоторые из результатов этого раздела аналогичны результатам из [16], хотя и получены независимо. Там же рассмотрено более общее понятие неопределенности в матричной схеме. При таком подходе матричная схема содержит неопределенность относительно определенного класса правил выбора предпочтений.

В разделе 3 показывается, что, с одной стороны, отсутствие возможности арбитража на финансовом рынке является частным случаем существования неопределённости в схеме ситуации принятия решений и что, с другой стороны, можно распространить понятие отсутствия арбитражной возможности с финансового рынка на общую ситуацию решения. Таким образом, раздел 3 можно рассматривать как конкретное, хотя и теоретическое, приложение абстрактной теории из раздела 2.

2. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И КРИТЕРИЙ ЕЁ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Продолжая исследование условий существования неопределённости, начатое в [2], [9], и развитое в [15], [16], рассмотрим задачу формального описания класса ситуаций принятия решений, в которых предпочтение индивида относительно последствий не «полностью определяют» его предпочтения относительно действий или, иными словами, совместимы со сразу несколькими отношениями предпочтения на действиях. Для этого необходимо уточнение интуитивного представления о том, как одни предпочтения могут определять другие в виде формального условия, налагаемого на связь отношений предпочтения на последствиях и действиях, или, другими словами, правила вывода отношения предпочтения на множестве действий из отношения предпочтения на множестве последствий. Это условие должно быть слабым, чтобы охватывать как можно более широкий класс возможного поведения. В данной статье используется условие доминирования на множестве действий, которое есть математической формой вышеупомянутого принципа внутренней согласованности.

В связи с неоднозначностью терминологии, используемой в современной литературе, напомним здесь свойства некоторых бинарных отношений.

Определение 1. Отношение $(\prec, X)$ называется отношением предпочтения, если оно:

- асимметрично: $x \prec y \Rightarrow$ не $y \prec x$ для любых $x, y \in X$;
- негативно транзитивно: не $x \prec y$, не $y \prec z \Rightarrow$ не $x \prec z$ для любых $x, y, z \in X$.

Так определенное отношение предпочтения есть иррефлексивной версией обычного слабого порядка. Имея отношение предпочтения, можно определить отношение безразличия стандартным путем, положив

$$x \sim y \Leftrightarrow (\text{не } x \prec y \text{ и не } y \prec x) \text{ для любых } x, y \in X.$$

Легко видеть, что отношение безразличия есть эквивалентность.

Определение 2. Отношение $(\prec, X)$ называется строгим частичным порядком, если оно:

- иррефлексивно: не $x \prec x$ для любого $x \in X$;
- транзитивно: $x \prec y, y \prec z \Rightarrow x \prec z$ для любых $x, y, z \in X$.

Если строгий частичный порядок вдобавок еще и

- связный: $x \neq y \Rightarrow x \prec y$ или $y \prec x$ для любых $x, y \in X$,

то его называют строгим линейным порядком. Очевидно, что строгий линейный порядок есть также отношением предпочтения.

Отношение предпочтения на множестве последствий отражает их желательность для лица, принимающего решения, или, иными словами, его интересы. Для простоты последствиями будем считать действительные числа с обычным упорядочением в качестве отношения предпочтения. Здесь для чисел, являющихся последствиями, единственной операцией есть сравнение по порядку. Такое рассмотрение подходит для всех случаев, в которых выполнены условия теоремы существования функции полезности [17, с. 47]. Ясно, что для разных индивидов одна реальная ситуация с последствиями произвольной природы может иметь вид различных ситуаций с числовыми последствиями в зависимости от предпочтения последствий этих индивидов.

Определение 3. Пару (Θ, D), где D — некоторое множество действительных функций, определенных на Θ, будем называть матричной схемой, D — множеством действий этой схемы, Θ — множеством значений параметра.

Множество действий схемы отражает действия, доступные в соответствующей ситуации принятия решений. Последствия этих действий в общем случае неоднозначны, чему в матричной схеме соответствует зависимость последствий, т.е. значений функций из D, от параметра $\theta \in \Theta$, который обычно называют состоянием природы [4]. Матричная схема не содержит какой-либо дополнительной информации о закономерности появления последствий, например, распределения вероятностей на множестве Θ. Именно поэтому для обозначения этого объекта уместно слово «схема».

Определение 4. Отношение $(\prec, D)$, заданное на множестве действий, будем называть доминированием, если для любых $d_1, d_2 \in D$

$$d_1 \prec d_2 \Leftrightarrow [d_1(\theta) \le d_2(\theta) \, \forall \theta \in \Theta \text{ и } d_1 \ne d_2].$$

Очевидно, доминирование есть строгий частичный порядок. Нас интересуют только те отношения предпочтения на множестве действий, которые совместимы с доминированием в смысле следующего определения.

Определение 5. Отношение предпочтения $(\prec^P, D)$, заданное на множестве действий матричной схемы (Θ, D), будем называть проекцией предпочтения последствий в схеме (Θ, D) (или кратко — проекцией), если

$$d_1 \prec d_2 \Rightarrow d_1 \prec^P d_2 \text{ для любых } d_1, d_2 \in D, \tag{1}$$

где $(\prec, D)$ — доминирование.

Определение 6. Матричная схема (Θ, D) содержит неопределенность, если в ней проекция предпочтения последствий неединственная.

Таким образом, предлагается правило вывода отношения предпочтения на множестве действий из отношения предпочтений на множестве последствий на основании доминирования. Это правило заключается в том, что отношение предпочтения на множестве действий есть проекцией предпочтения последствий. Тогда неопределенность в матричной схеме есть неоднозначностью правила вывода.

В определении 6 осуществляется разделение матричных схем и, соответственно, ситуаций принятия решений, на два класса: содержащие и не содержащие неопределённость. Следующая теорема отвечает на различные вопросы касательно существования и единственности проекции.

Теорема 1. В любой матричной схеме:

1) существует проекция предпочтения последствий;

2) для единственности проекции предпочтения последствий необходимо и достаточно связности доминирования;

3) из единственности проекции предпочтения последствий следует её тождество с доминированием.

Доказательство. Зафиксируем произвольную матричную схему (Θ, D).

1. Существование проекции следует сразу же из теоремы Шпильрайна о продолжении порядка [17, с. 31], согласно которой любой строгий частичный порядок может быть продолжен до строгого линейного порядка. Применив её к доминированию $(\prec, D)$, получим такой строгий линейный порядок $(\prec^P, D)$, что

$$d_1 \prec d_2 \Rightarrow d_1 \prec^P d_2 \text{ для любых } d_1, d_2 \in D \tag{2}$$

и тем самым гарантируем выполнение условий определения 5.

2. **Достаточность.** Если доминирование $(\prec, D)$ связно, то оно есть отношением предпочтения и, следовательно, проекцией предпочтения последствий. Допустим, существует проекция $(\prec^P, D)$, отличная от доминирования, т.е. найдутся такие $d_1, d_2 \in D$, что $d_1 \prec^P d_2$ и не $d_1 \prec d_2$. Но по связности доминирования из не $d_1 \prec d_2$ следует либо $d_1 = d_2$, либо $d_2 \prec d_1$. Во втором случае условие (1) влечет $d_2 \prec^P d_1$, что, как и в первом случае, вместе с асимметричностью дает противоречие с допущением $d_1 \prec^P d_2$.

Необходимость. Допустим, что доминирование не связно, и построим две различные проекции. Пусть ни одно из соотношений $d_1 = d_2$, $d_1 \prec d_2$, $d_2 \prec d_1$ не выполнено для некоторых $d_1, d_2 \in D.$ Построим проекцию $(\prec_1^P, D),$ описанным в п.1 способом. Она к тому же будет строгим линейным порядком, поэтому либо $d_1 \prec_1^P d_2$, либо $d_2 \prec_1^P d_1$. Пусть, например, имеет место первый случай. Теперь построим проекцию $(\prec_2^P, D)$, для которой будет $d_2 \prec_2^P d_1$. Для этой цели сначала подходящим образом продолжим доминирование с $(\prec, D)$ до $(\prec', D)$, положив для любых $x, y \in D$

$$x \prec' y \Leftrightarrow x \prec y \text{ или } [(x \prec d_2 \text{ или } x = d_2) \text{ и } (d_1 \prec y \text{ или } y = d_1)]. \qquad (3)$$

Очевидно, что $d_2 \prec' d_1$ и

$$x \prec y \Rightarrow x \prec' y \text{ для любых } x, y \in D. \qquad (4)$$

Также несложно проверить, что $(\prec', D)$ — строгий частичный порядок, что устанавливается перебором всех возможностей в правой части (3). Повторим рассуждения п.1 для $(\prec', D)$ вместо $(\prec, D)$ и получим строгий линейный порядок $(\prec_2^P, D)$ с $d_2 \prec_2^P d_1$. Условие (1) удовлетворено в силу (4) и (2). Следовательно, мы получили проекцию, отличную от предыдущей.

Утверждение 3 теоремы следует сразу из утверждения 2, так как связность доминирования превращает это отношение из строгого частичного порядка в строгий линейный, что делает его проекцией предпочтения последствий.

Теорема доказана.

В определении 6 мы попытались воплотить интуитивные представления о наличии неопределенности в матричной схеме. Утверждение 2 теоремы указывает на способ, которым можно упростить формальное использование этого понятия. Этот способ реализован в следующем утверждении, которое даёт критерий существования неопределённости в матричной схеме.

Следствие. Матричная схема (Θ, D) содержит неопределенность тогда и только тогда, когда существуют такие $d_1, d_2 \in D$ и $\theta, \theta' \in \Theta$, что $d_1(\theta) < d_2(\theta)$ и $d_2(\theta') < d_1(\theta')$.

Доказательство. По определению матричная схема (Θ, D) содержит неопределенность тогда и только тогда, когда в ней проекция предпочтения последствий неединственная, что в свою очередь по утверждению 2 теоремы 1 равносильно тому, что доминирование $(\prec, D)$ не связно, т.е. найдутся различные $d_1, d_2 \in D$, для которых неверно $d_2 \prec d_1$ и неверно $d_1 \prec d_2$. Это, в свою очередь, по определению доминирования равносильно наличию таких $\theta, \theta' \in \Theta$, что $d_1(\theta) < d_2(\theta)$ и $d_2(\theta') < d_1(\theta')$.

Таким образом, даже если ситуация принятия решений будет содержать всего лишь два состояния природы, возможны два такие действия, последствия которых так зависят от этих состояний, что соответствующая матричная схема содержит неопределенность.

3. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ И ОТСУТСТВИЕ ВОЗМОЖНОСТИ АРБИТРАЖА

Понятие неопределенности в матричной схеме находит свое непосредственное применение в финансовой теории. Оказывается, что понятие отсутствия арбитражной возможности на финансовом рынке можно рассматривать как пример существования неопределенности в матричной схеме принятия решений.

В случае схем финансовых ситуаций условность, связанная с численной оценкой последствий принимающим решения индивидом не играет роли, так как исходная ситуация содержит только денежные последствия, и мы вправе допустить, что все принимающие решения предпочитают большие денежные суммы меньшим. Следовательно, уже сами значения денежных сумм можно принять в качестве последствий.

Воспользуемся следующим формальным описанием финансового рынка, восходящим к модели рынка ценных бумаг Эрроу-Дебре [10–12].

Определение 7. Пара (A, p), $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $p \in \mathbb{R}^n$ называется финансовым рынком с безрисковым активом (или просто рынком), если $A_{1j} = 1$ для любого $j \in \{1,...,m\}$ и $p_1 \le 1$.

Элементы множества $\Theta = \{1,2,...,m\}$ будем называть состояниями рынка. Матрица A содержит платежи по n базовым активам для каждого состояния рынка, так что $A_{i\theta}$ есть платеж по активу i в состоянии рынка θ. Актив с номером 1 называется безрисковым. Вектор p составлен из цен базовых активов. Без потери общности можно считать $p_1 = 1$. Действительно, если $p_1 < 1$, можно преобразовать исходные цены в цены расчетного периода, умножив p на $\left(1 + \dfrac{1-p_1}{p_1}\right) = \dfrac{1}{p_1}$, и тем самым включить затраты на пользование деньгами в цены базовых активов. Портфель есть вектор $x \in \mathbb{R}^n$, платежи по портфелю x для каждого состояния рынка есть элементы вектора $A^T x$.

Далее, для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ $x \le y$ обозначает $x_i \le y_i$ для всех $i \in \{1,...,n\}$, $x < y$ обозначает $x \le y$ и $x \ne y$.

Определение 8. Портфель $x \in \mathbb{R}^n$ называется арбитражным на рынке (A, p), если ($p^T x \le 0$ и $A^T x > 0$) или ($p^T x < 0$ и $A^T x \ge 0$).

Обычно, за этим определением следует теорема об отсутствии арбитражной возможности, которая устанавливает, что на рынке не существует арбитражного портфеля тогда и только тогда, когда найдется вектор $\psi \in \mathbb{R}^m$ с положительными компонентами, для которого $p = A\psi$ [10–12]; компоненты ψ называют ценами состояний. Однако, данная теорема не является предметом внимания настоящей статьи, польку здесь наша цель состоит в установлении связи между отсутствием возможности арбитража и существованием неопределённости в матричной схеме.

Представим рынок с помощью матричной схемы (Θ, D). Пусть матрица $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = A - [p\ p \dots p]$, содержит прибыли от базовых активов в различных состояниях рынка. Множество действий $D = \{B^T x : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ состоит из векторов прибылей, доступных на рынке. Такую матричную схему (Θ, D) назовем соответствующей рынку (A, p).

Лемма. На рынке (A, p) существует арбитражный портфель тогда и только тогда, когда в соответствующей матричной схеме (Θ, D) найдется такое действие $d \in D$, что $d > 0$.

Доказательство. Для арбитражного портфеля x в обоих случаях из определения имеем $a_\theta^T x - p^T x \geq 0$ для любого $\theta \in \Theta$ и $a_{\theta^*}^T x - p^T x > 0$ для некоторого $\theta^* \in \Theta$, поэтому $d = B^T x$ удовлетворяет условию $d > 0$. Обратно, если есть в наличии $d > 0$, то для некоторого портфеля x имеем $B^T x = d > 0$. Определим $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ как $\bar{x}^T = x^T - [p^T x\, 0 \dots 0]$, тогда

$$A^T \bar{x} = A^T x - [p^T x\, p^T x \dots p^T x]^T = B^T x > 0,$$

$$p^T \bar{x} = 0.$$

Таким образом, портфель $\bar{x}$ является арбитражным по первому условию из определения. Лемма доказана. Заметим, что $\bar{x}$ отличается от x лишь тем, что средства на его приобретение взяты в долг.

Теорема 2. На рынке (A, p) не существует арбитражного портфеля тогда и только тогда, когда для соответствующей матричной схемы (Θ, D) и для любого $D' \subseteq D$, для которого $|D'| \geq 2$, матричная схема (Θ, D') содержит неопределенность.

Доказательство. Будем оперировать с отрицаниями утверждений, логическую эквивалентность которых устанавливает теорема. Заметим, что доминирование из определения 4 для векторов тождественно с $(<, D)$. Если на рынке (A, p) существует арбитражный портфель, тогда по лемме $0 < d$ для некоторого $d \in D$. Но тогда матричная схема $(\Theta, \{d, 0\})$ не содержит неопределенности, поскольку в ней существует лишь одна проекция предпочтения последствий $(\prec^P, D)$, а именно: для любых $x, y \in \{d, 0\}$ $x \prec^P y$ тогда и только тогда, когда $x = 0, y = d$. Обратно, если для некоторого $D' \subseteq D$, $|D'| \geq 2$ матричная схема (Θ, D') не содержит неопределенности, тогда, по утверждению 2 теоремы 1, доминирование в ней связно, и возможно выбрать различные $d^1, d^2 \in D'$, для которых, скажем, $d^1 < d^2$. Если

$d^1 = B^T x^1$ и $d^2 = B^T x^2$, где $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, то $\overline{d} = B^T(x^2 - x^1) \in D$ и $\overline{d} > 0$, что, согласно лемме, означает существование арбитражного портфеля.

Теорема доказана.

Условие отсутствия арбитражной возможности на рынке (A, p) можно ослабить, считая портфель x арбитражным лишь в случае ($p^T x < 0$ и $A^T x \geq 0$). Для рынка, на котором отсутствуют такие портфели (его еще называют слабо-безарбитражным [11]), теорема об отсутствии арбитражной возможности гарантирует лишь неотрицательность цен состояний. Для такого определения арбитражного портфеля утверждение, аналогичное теореме 2, получается, если в определении проекции предпочтения последствий в матричной схеме отношение доминирования заменить усиленным вариантом: для любых $d_1, d_2 \in D$

$$d_1 \prec^* d_2 \Leftrightarrow d_1(\theta) < d_2(\theta) \text{ для любого } \theta \in \Theta .$$

Теорема 2 утверждает, что отсутствие арбитражной возможности на финансовом рынке эквивалентно наличию неопределенности в любой матричной схеме, полученной путем сужения множества действий из матричной схемы, соответствующей этому рынку. Другими словами, в этом случае неопределенность в соответствующей рынку матричной схеме не искореняется путем удаления из неё каких-либо действий. Если на рынке имеется арбитражный портфель, то найдется множество действий, которое образует матричную схему, не содержащую неопределенность.

Таким образом, теорема 2 дает возможность говорить об одном из фундаментальных понятий финансовой теории не выходя за рамки теории решений и, в то же время, не обращаясь к понятию отношения принимающего решения к риску. С другой стороны, основываясь на определении 6 и теореме 2, можно распространить понятие о возможности арбитража с финансовых рынков на общую ситуацию принятия решений. А именно, любую матричную схему, которая не удовлетворяет условия теоремы 2, можно называть содержащей возможность арбитража. Иными словами, понятие «арбитраж» отождествляется с однозначным переносом предпочтения последствий на предпочтение действий. Возможность арбитража означает возможность такого однозначного переноса для некоторой пары действий в схеме (Θ, D).

4. ВЫВОДЫ

Таким образом, в этой статье дано определение понятия «неопределённость» в матричной схеме ситуации принятия решений и доказана теорема о критерии её существования. Эта формализация понятия неопределённости является развитием соответствующих определения и теоремы, предложенных в [2] для лотерейной схемы ситуации принятия решений. Совокупность этих результатов составляет альтернативу Найтовскому подходу к формализации понятия неопределённости и, в то же время, соответствует принципу внутренней согласованности М. Алле.

Предлагаемый подход к понятию неопределённости в схеме ситуации принятия решений тесно связан с понятием отсутствия арбитражной возможности на финансовом рынке. Показано, что, с одной стороны, отсутствие арбитражной возможности (т.е. отсутствие арбитражного портфеля) на финансовом рынке есть частным случаем существования неопределённости в матричной схеме ситуации принятия решений, и что, с другой стороны, можно распространить понятие арбитражной возможности на общую, не обязательно финансовую, ситуацию принятия решений.

Авторы благодарны профессору В.И. Иваненко за плодотворные дискуссии, замечания и комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наукова думка, 1990. — 136 с.
2. *Иваненко В.И., Михалевич В.М.* К вопросу о неопределенности в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 116–120.
3. *Knight F.H.* Risk, uncertainty and profit. — Boston: Houghton Mifflin, 1921. — 381 p.
4. *Savage L.J.* The foundations of statistics. — NY: Wiley & Sons, 1954. — 294 p.
5. *Bell D.E., Raiffa H., Tversky A.* (eds.) Decision making: descriptive, normative, and prescriptive interactions. — NY: Cambridge University Press, 1988. — 623 p.
6. *Ellsberg D.* Risk, ambiguity and the Savage axioms // Quarterly Journal of Economics. — 1961. — № 75. — P. 643–669.
7. *Bouyssou D., Dubois D., Prade H., Pirlot M.* (eds.) Decision-Making Process: Concepts and methods. — NY: John Wiley & Sons, 2010. — 928 p.
8. *Allais M.* Le comportement de l'homme rationel devant le risque // Econometrica. — 1953. — № 21 (4). — P. 503–546.
9. *Ivanenko V.I.* Decision systems and nonstochastic randomness. — NY: Springer, 2010. — 272 p.
10. *Avellaneda M., Laurence P.* Quantitative modeling of derivative securities: from theory to practice. — NY: Chapman and Hall /CRC, 2000. — 322 p.
11. *Duffie D.* Dynamic asset pricing theory, 3rd ed. — Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2010. — 472 p.
12. *Varian H.R.* The arbitrage principle in financial economics // The Journal of Economic Perspectives. — 1987. — **1**, № 2. — P. 55–72.
13. *DeGroot M.H.* Uncertainty, information, and sequential experiments // Annals of Mathematical Statistics. — 1962. — **33**, № 2. — P. 404–419.
14. *Marschak J.* Towards an economic theory of organization and information. — 1954. — http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p00b/p0095.pdf.
15. *Михалевич В.М., Иваненко В.И.* К неопределенности в непараметрических схемах ситуаций задач принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 1. — С. 61–76.
16. *Иваненко В.И., Михалевич В.М.* К неопределенности в параметрических схемах ситуаций задач принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 30–42.
17. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

Поступила 18.11.2013