

КОНСТРУКЦІЇ МЕРЕЖ ПЕТРІ ІЗ СИЛЬНОЮ АНТИСИПАЦІЄЮ ЗА ПОЗИЦІЄЮ ТА ЗА ПЕРЕХОДОМ У ВИПАДКУ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ

В.М. СТАТКЕВИЧ

Анотація. Запропоновано розширити класичні мережі Петрі та врахувати сильну антисипацію в сенсі Д. Дюбуа двома способами. Пропонується ввести в правило запуску переходу новий доданок, який містить дійснозначну функцію від нової кількості фішок у даній позиції (сильна антисипація за позицією) та від нової кількості фішок у вхідній позиції для даного переходу (приклад сильної антисипації за переходом). На відміну від класичних мереж Петрі умови цілочисловості вагової функції та цілочисловості маркування не накладаємо аналогічно неперервним мережам Петрі. Розглянуто виконання таких мереж, указано важливі властивості, для декількох прикладів побудовано графи досяжності та сформульовано відмінності порівняно з класичними мережами Петрі. Також досліджено умови виконання рівності маркувань для послідовностей запусків переходів $t_j t_k$ і $t_k t_j$.

Ключові слова: мережа Петрі, сильна антисипація, правило запуску переходу, граф досяжності, цілочислова функція, функція наступного стану, послідовність запусків переходів, гранична досяжність.

ВСТУП

Мережі Петрі, запропоновані К.А. Петрі в 1962 р., є зручним та потужним інструментом для проектування, аналізу та моделювання різних процесів, мереж та систем [1–3]. Нині відомо багато різних модифікацій класичних мереж Петрі, зокрема, інгібіторні, стохастичні, кольорові, неперервні, часові та інші мережі [2–5], у яких правило запуску переходу може відрізнитись від класичного правила запуску переходу.

У неперервних мереж Петрі, запропонованих у праці [4] (див. детальніше монографію [3]), конструктивна відмінність від класичних мереж полягає в тому, що кількість фішок у позиції може бути будь-яким дійсним невід'ємним числом, а модифіковане правило запуску переходу дозволяє запускати перехід нецілу кількість разів, тобто вводиться поняття ступеня запуску переходу.

Відомі також часові неперервні мережі та інші типи мереж Петрі, у яких кількість фішок у позиції також може не бути цілим числом [3]. Зазначимо, що для стохастичних мереж Петрі середня кількість фішок у позиції природним чином може не бути цілим числом [2].

Поняття антисипації, коли новий стан об'єкта залежить не тільки від попередніх станів, а також від оцінок майбутніх станів, отриманих за допомогою внутрішньої прогнозної моделі, розглядалось багатьма авторами [6].

Д. Дюбуа у 1992 р. запропонував поняття сильної антисипації, коли замість оцінок майбутніх станів використовуються саме майбутні стани [7; 8]. У працях [7–10; 12] досліджувались системи різної природи із сильною антисипацією.

Модифікація класичних мереж Петрі із сильною антисипацією за позицією була запропонована в [11]: у правило запуску переходу вводився новий доданок, який містив цілочислову функцію $f: \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ від нової кількості фішок у позиції. Для такої функції кількість фішок у позиції залишається цілим невід'ємним числом, як і у випадку класичних мереж Петрі.

У роботі ідея врахування сильної антисипації в класичній мережі Петрі реалізується у двох напрямках. Пропонується ввести в правило запуску переходу новий доданок, який містить дійсну функцію $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ від нової кількості фішок

- у позиції (антисипація за позицією),
- у вхідній позиції для даного переходу (приклад антисипації за переходом).

Для такої функції вважається корисним відмовитись від умов цілочисловості вагової функції та цілочисловості маркування аналогічно неперервним мережам Петрі, але дозволити запускати перехід лише цілу кількість разів, як і у класичних мережах Петрі. Наскільки автору відомо, такі мережі Петрі з антисипацією не розглядалися.

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Мережа Петрі — це набір $\langle P, T, W, \mu_0 \rangle$, де $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ — скінченна множина позицій; $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ — скінченна множина переходів; $W = (T \times P) \cup (P \times T) \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ — вагова функція; $\mu_0: P \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ — початкове маркування. Мережу Петрі зображають у вигляді дводольного орієнтованого мультиграфу [1–3]. Перехід t називають дозволеним, якщо для кожної вхідної позиції p виконується нерівність $\mu(p) \geq W(p, t)$. Якщо перехід t дозволений, то він може (але не обов'язково має) бути запущеним, а кількість фішок у позиції p змінюється згідно з правилом запуску переходу

$$\mu_{k+1}(p) = \mu_k(p) - W(p, t) + W(t, p). \quad (1)$$

Функцію наступного стану позначають δ [1].

МЕРЕЖІ ПЕТРІ З АНТИСИПАЦІЄЮ ЗА ПОЗИЦІЄЮ ТА ДІЙСНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Розглянемо розширення класичної мережі Петрі

$$\langle P, T, W, \mu_0, \{f_{p_1}, \dots, f_{p_m}\} \rangle. \quad (2)$$

Тут $W = (T \times P) \cup (P \times T) \rightarrow [0; +\infty)$ є дійсною ваговою функцією, а $\mu_0: P \rightarrow [0; +\infty)$ — дійсним початковим маркуванням, тобто на відміну від класичних мереж Петрі умови цілочисловості вагової функції та цілочисловості маркування не накладаємо. Функція $f_{p_i}: [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ відповідає пози-

ції p_i , $1 \leq i \leq m$ (також будемо використовувати позначення f_i). Рівняння запуску переходу t (вважаємо перехід t дозволим):

$$\mu_{new}(p) = \mu_k(p) - W(p, t) + W(t, p) + f_p(\mu_{new}(p)), \quad (3)$$

де $\mu_{new}(p)$ — нова кількість фішок у позиції p , узагальнює правило запуску переходу (1) класичної мережі Петрі. Запропоноване розширення (2) назвемо мережею Петрі з антисипацією за позицією та дійсними функціями. Зазначимо, що випадок цілочислової вагової функції, цілочислових маркувань та цілочислових функцій f_i запропоновано у праці [11].

Розглянемо виконання таких мереж.

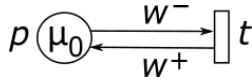


Рис. 1

Твердження 1. Нехай у мережі Петрі з антисипацією за позицією та дійсною функцією, яка зображена на рис. 1, $\mu_0 \in [0; +\infty)$, $w^- \in [0; +\infty)$, $w^+ \in [0; +\infty)$. Позиції p відповідає лінійна функція $f(x) = -ax + b$, $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$. Тоді:

1) якщо $\mu_0 \geq w^-$ і $b + w^+ \geq (1+a)w^-$, то послідовність запусків переходів $t^k \in$ дозволеною для всіх $k \in \mathbf{N}$, відповідна послідовність маркувань $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ має вигляд

$$\mu_k = (1+a)^{-k} \mu_0 + (b - w^- + w^+) (1 - (1+a)^{-k}) a^{-1}, \quad (4)$$

і збігається до $\mu^* = (b - w^- + w^+) a^{-1} \geq w^-$, причому швидкість збіжності є лінійною.

2) якщо $\mu_0 < w^-$ або $b + w^+ < (1+a)w^-$, то існує таке $K \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, що послідовність $t^k \in$ дозволеною для всіх $k \leq K$, але послідовність t^{K+1} вже не є дозволеною (тобто маркування $\mu_K \in$ тупиковим).

Доведення. Рівняння запуску переходу t з поточного маркування μ_k має вигляд

$$\mu_{k+1} = \mu_k - w^- + w^+ + f(\mu_{k+1}) = \mu_k - w^- + w^+ - a\mu_{k+1} + b; \quad (5)$$

$$\mu_{k+1} = (1+a)^{-1}(\mu_k - w^- + w^+ + b) = (1+a)^{-1}\mu_k + (1+a)^{-1}(b - w^- + w^+). \quad (6)$$

Доведемо методом математичної індукції, що $\mu_k \geq w^-$, якщо умови п. 1) виконані. База індукції: виконується нерівність $\mu_0 \geq w^-$ і перехід $t \in$ дозволим. Припущення індукції: нехай $\mu_k \geq w^-$. Тоді перехід $t \in$ дозволим, а з рівностей (6) впливає оцінка

$$\mu_{k+1} \geq (1+a)^{-1}(w^- - w^- + (1+a)w^-) = w^-,$$

яка доводить крок індукції. Тобто послідовність запусків переходів $t^k \in$ дозволеною для всіх $k \in \mathbf{N}$.

Доведемо методом математичної індукції рівність (4). База індукції впливає з рівностей (6), крок індукції набуває вигляду

$$\mu_{k+1} = (1+a)^{-1}\mu_k + (1+a)^{-1}(b - w^- + w^+) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1+a)^{-1}[(1+a)^{-k}\mu_0 + (b-w^- + w^+)(1-(1+a)^{-k})a^{-1}] + (1+a)^{-1}(b-w^- + w^+) = \\
 &= (1+a)^{-(k+1)}\mu_0 + (b-w^- + w^+)[(1+a)^{-1} - (1+a)^{-(k+1)} + (1+a)^{-1}a]a^{-1} = \\
 &= (1+a)^{-(k+1)}\mu_0 + (b-w^- + w^+)(1-(1+a)^{-(k+1)})a^{-1}.
 \end{aligned}$$

Зазначимо, що рівності (6) визначають арифметико-геометричну прогресію $u_{n+1} = qu_n + d$, тому рівність (4) також можна отримати із загальних міркувань.

Із рівності (4) граничним переходом за $k \rightarrow \infty$ отримуємо $\mu_k \rightarrow \mu^*$, якщо $k \rightarrow \infty$, а також $\mu^* \geq w^-$. Зазначимо, що збіжність $\mu_k \rightarrow \mu^*$ також можна довести за допомогою принципу стискальних відображень, не використовуючи рівність (4). Справді, оператор $T: \mathbf{R} \ni x \mapsto (1+a)^{-1}(x-w^- + w^+ + b) \in \mathbf{R}$ є стиском

$$\begin{aligned}
 |Tx - Ty| &= \left| (1+a)^{-1}(x-w^- + w^+ + b) - \right. \\
 &\quad \left. - (1+a)^{-1}(y-w^- + w^+ + b) \right| = (1+a)^{-1}|x-y|,
 \end{aligned}$$

а тому має єдину нерухому точку x^* , яку знаходимо з рівняння (5):

$$x^* = x^* - w^- + w^+ - ax^* + b, \quad x^* = (b-w^- + w^+)a^{-1}.$$

Оцінимо швидкість збіжності послідовності $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ до μ^* :

$$\begin{aligned}
 \left| \mu_{k+1} - \mu^* \right| &= \left| (1+a)^{-1}\mu_k + (1+a)^{-1}(b-w^- + w^+) - (b-w^- + w^+)a^{-1} \right| = \\
 &= \left| (1+a)^{-1}\mu_k - (b-w^- + w^+)a^{-1}(1+a)^{-1} \right| = (1+a)^{-1} \left| \mu_k - \mu^* \right| = \dots \\
 &\quad \dots = (1+a)^{-(k+1)} \left| \mu_0 - \mu^* \right|
 \end{aligned}$$

(згідно з принципом математичної індукції). Таким чином, швидкість збіжності є лінійною, доведення п. 1) завершено.

Для доведення п. 2) міркування такі. Якщо $\mu_0 < w^-$, то перехід t вже не є дозволеним у початковому маркуванні, тому $K=0$. Якщо ж $\mu_0 \geq w^-$, але $b+w^+ < (1+a)w^-$ (для зручності дві наведені нерівності можна об'єднати в одну подвійну нерівність $(b-w^- + w^+)a^{-1} < w^- \leq \mu_0$), то для певного K виконується оцінка $\mu_K < w^-$. Справді, рівність (4) виконується в даному разі для всіх $k \leq K$, тому

$$\mu_K = (1+a)^{-K}\mu_0 + (b-w^- + w^+)(1-(1+a)^{-K})a^{-1} < w^-,$$

$$(1+a)^{-K}(\mu_0 - (b-w^- + w^+)a^{-1}) < w^- - (b-w^- + w^+)a^{-1},$$

$$(1+a)^{-K} < \frac{w^- - (b-w^- + w^+)a^{-1}}{\mu_0 - (b-w^- + w^+)a^{-1}},$$

$$K > \log_{1+a} \frac{\mu_0 - (b - w^- + w^+)a^{-1}}{w^- - (b - w^- + w^+)a^{-1}},$$

$$K = \left\lceil \log_{1+a} \frac{a\mu_0 - b + w^- - w^+}{aw^- - b + w^- - w^+} \right\rceil + 1$$

(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x). Отже, перехід t стає недозволе-ним, маркування μ_k стає тупиковим, а послідовність маркувань $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ стає скінченною. Твердження 1 доведено.

Із твердження 1 випливають такі наслідки:

1) існують такі w^-, w^+, a, b та початкове маркування μ_0 , що μ^* може дорівнювати довільному наперед заданому невід'ємному числу;

2) для структури $\langle P, T, W \rangle$ класичної мережі Петрі показаного на рис. 1 вигляду, тобто для довільних ваг w^- і w^+ існує така функція $f(x) = -ax + b$ і таке початкове маркування μ_0 , що μ^* може дорівнювати довільному наперед заданому невід'ємному числу;

3) згідно з принципом стискальних відображень $(\mu_0 = \mu^*) \Rightarrow \Rightarrow (\forall k \in \mathbf{N} : \mu_k = \mu^*)$;

4) рівність (4) свідчить про те, що точка μ_k ділить відрізок $[\mu_0; \mu^*]$ або $[\mu^*; \mu_0]$ у заданому відношенні: $\mu_k = (1+a)^{-k} \mu_0 + (1 - (1+a)^{-k}) \mu^*$.

Нагадаємо, що у класичних мережах Петрі послідовність кількостей фішок у певній позиції має скінченну границю тоді і тільки тоді, коли ця послідовність стабілізується, починаючи з деякого номера (також послідовність кількостей фішок у певній позиції може мати нескінченну границю $\omega = +\infty$). Але з введенням антисипації за позицією з дійсною функцією послідовність μ_k може мати довільну скінченну границю μ^* і при цьому в загальному випадку $\mu_k \neq \mu^*$. Така властивість є характерною саме для неперервних мереж Петрі і називається граничною досяжністю або \lim -досяжністю [3, с. 135–136; 5].

Зазначимо, що випадок $a = 0$ відповідає класичній мережі Петрі без антисипації, якщо змінити вагу дуги $W(t, p) = b + w^+$ (за умови $b \geq -w^+$). У випадку $-1 < a < 0$ оператор T не є стиском, рівність (4) зберігається, але $\mu_k \rightarrow \infty$, якщо $k \rightarrow \infty$, і можна вводити символ $\omega = +\infty$. Випадок $a < -1$ не розглядаємо, оскільки значення μ_{k+1} згідно з рівнянням (5) може стати від'ємним. Випадок $a = -1$ розглянемо окремо у прикладі 1.

Приклад 1. Розглянемо мережу Петрі з антисипацією за позицією та дійсною функцією, зображену на рис. 1, де $\mu_0 = 4$, $w^- = 1$, $w^+ = 0$, $a = -1$, $b = -3$. Тоді рівняння запуску переходу t з початкового маркування μ_0 має вигляд $\mu_1 = 4 - 1 + \mu_1 - 3$ згідно з рівнянням (5), звідки $\mu_1 \geq 0$. Таким чином, отримуємо нове маркування $\mu_1 = [0; +\infty)$, яке взагалі не є маркуванням у класичному сенсі та яке не є зліченною множиною. Звернемо увагу, що за

антисипації за позицією та цілочислових функцій $f: \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ множина $\delta(\mu, t)$ зліченна і незліченною бути не може [11, с. 106].

Рівняння запуску переходу t з маркування μ_1 має вигляд $\mu_2 = \mu_1 - 1 + \mu_2 - 3$, воно має розв'язки $\mu_2 \geq 0$, якщо $\mu_1 = 4$, і не має розв'язків, якщо $\mu_1 \in [1; +\infty) \setminus \{4\}$ (перехід є дозволеним, якщо $\mu_1 \geq 1$). Тому нове маркування, яке збігається з уже отриманим раніше “маркуванням” $\mu_1 = [0; +\infty)$, отримане не класичним запуском переходу t , а умовним за умови $\mu_1 = 4$.

Отже, будемо граф досяжності (рис. 2). Для даної мережі граф є скінченним, не є деревом і містить єдине класичне маркування μ_0 та маркування μ_1 , яке не з'являється у класичних мережах Петрі. Граф не містить тупикових маркувань. Також у графі існують класичний запуск переходу t та умовний, причому умовні переходи характерні саме для неперервних мереж Петрі [3, с. 116–119].

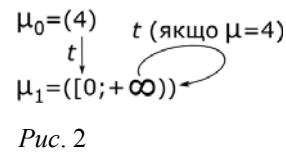


Рис. 2

Зауваження 1. У монографії [3, с. 115–116] зазначається, що у неперервних мережах Петрі кількість маркувань може бути нескінченною, а тому пропонується оригінальний механізм макромаркувань, кількість яких скінченна.

Розглянемо довільну мережу Петрі з антисипацією за позицією, у якій позиціям p_i відповідають лінійні функції $f_i(x) = -a_i x + b_i$, $1 \leq i \leq m$. Нехай $R(\mu)$ — множина маркувань, досяжних з маркування μ , $\bullet t$ і $t \bullet$ — множини вхідних та вихідних позицій переходу t відповідно [2, 3].

Твердження 2. Якщо $a_i > -1$, $1 \leq i \leq m$, то для кожного маркування $\mu \in R(\mu_0)$ та для кожного переходу t множина $\delta(\mu, t)$ містить не більше одного елемента.

Доведення випливає з твердження 1, оскільки рівняння вигляду (5) не може мати двох або більше розв'язків.

Теорема 1. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $a_i > -1$, $1 \leq i \leq m$;
- 2) для деяких j і k обидві послідовності запусків переходів $t_j t_k$ і $t_k t_j$ є дозволеними у поточному маркуванні $\mu \in R(\mu_0)$, а обидві множини $\delta(\mu, t_j t_k) = \{\mu_{jk}\} \neq \emptyset$ і $\delta(\mu, t_k t_j) = \{\mu_{kj}\} \neq \emptyset$ є непорожніми;
- 3) $p_i \in \bullet t_j$ або $p_i \in t_j \bullet$, $p_i \in \bullet t_k$ або $p_i \in t_k \bullet$.

Тоді виконується еквівалентність

$$(\mu_{jk}(p_i) = \mu_{kj}(p_i)) \Leftrightarrow (a_i = 0 \text{ або } -W(p_i, t_j) + W(t_j, p_i) = -W(p_i, t_k) + W(t_k, p_i)).$$

Доведення. Позначимо $W(p_i, t_j) = w_{ij}^-$, $W(t_j, p_i) = w_{ij}^+$, $W(p_i, t_k) = w_{ik}^-$, $W(t_k, p_i) = w_{ik}^+$. Двічі застосовуємо рівності (6) і отримуємо:

$$\delta(\mu, t_j t_k) = (1 + a_i)^{-1} ((1 + a_i)^{-1} (\mu - w_{ij}^- + w_{ij}^+ + b_i) - w_{ik}^- + w_{ik}^+ + b_i) ;$$

$$\delta(\mu, t_k t_j) = (1 + a_i)^{-1} ((1 + a_i)^{-1} (\mu - w_{ik}^- + w_{ik}^+ + b_i) - w_{ij}^- + w_{ij}^+ + b_i) .$$

Тоді

$$(\mu_{jk}(p_i) = \mu_{kj}(p_i)) \Leftrightarrow ((1 + a_i)^{-2} (-w_{ij}^- + w_{ij}^+) + (1 + a_i)^{-1} (-w_{ik}^- + w_{ik}^+) =$$

$$= (1 + a_i)^{-2} (-w_{ik}^- + w_{ik}^+) + (1 + a_i)^{-1} (-w_{ij}^- + w_{ij}^+) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-w_{ij}^- + w_{ij}^+ + (1 + a_i)(-w_{ik}^- + w_{ik}^+) = -w_{ik}^- + w_{ik}^+ + (1 + a_i)(-w_{ij}^- + w_{ij}^+) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_i(-w_{ik}^- + w_{ik}^+) = a_i(-w_{ij}^- + w_{ij}^+)).$$

Рівність $-w_{ik}^- + w_{ik}^+ = -w_{ij}^- + w_{ij}^+$ означає рівність i -х елементів k -го та j -го рядків матриці A у класичному рівнянні стану мережі Петрі $A^T x = \Delta \mu$ (нагадаємо, що згідно з [2] рядкам матриці A відповідають переходи, стовпцям — позиції, вектор x є лічильником запусків переходів). У класичній мережі Петрі без антисипації рівність $\mu_{jk}(p_i) = \mu_{kj}(p_i)$ виконується завжди, якщо обидві послідовності запусків переходів $t_j t_k$ і $t_k t_j$ є дозволеними; це співвідноситься з рівностями $a_i = b_i = 0$ для всіх $1 \leq i \leq m$. З уведенням антисипації за позицією множини $\delta(\mu, t_j t_k)$ і $\delta(\mu, t_k t_j)$, $\mu \in R(\mu_0)$ у загальному випадку стають різними, більш того жодна з цих множин не обов'язково у загальному випадку має бути підмножиною іншої [11]. Теорема 1 важлива тим, що надає достатні умови рівності $\delta(\mu, t_j t_k) = \delta(\mu, t_k t_j)$ у випадку лінійних функцій.

Випадок $a_i = -1$ для деякого i розглянемо окремо в прикладі 2.

Приклад 2. Розглянемо мережу Петрі з антисипацією за позицією та дійсними функціями, зображену на рис. 3, де $w_{11}^- \in [0; +\infty)$, $w_{11}^+ \in [0; +\infty)$, $w_{12}^- \in [0; +\infty)$, $w_{12}^+ \in [0; +\infty)$, $\mu_0 \in [\max(w_{11}^-, w_{12}^-); +\infty)$, $a = -1$, $b \in \mathbf{R}$. Використаємо міркування прикладу 1.

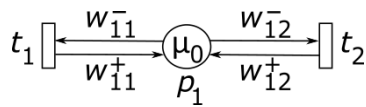


Рис. 3

Рівняння запуску переходу t_1 з початкового маркування μ_0 має вигляд $\mu_1 = \mu_0 - w_{11}^- + w_{11}^+ + \mu_1 + b$, звідки $\mu_1 \geq 0$, якщо виконується рівність $\mu_0 = w_{11}^- - w_{11}^+ - b$. Таким чином отримуємо нове маркування $\mu_1 = [0; +\infty)$. Рівняння запуску переходу t_2 з маркування μ_1 має вигляд $\mu_2 = \mu_1 - w_{12}^- + w_{12}^+ + \mu_2 + b$, воно має розв'язки $\mu_2 \geq 0$, якщо $\mu_1 = w_{12}^- - w_{12}^+ - b$, і не має розв'язків, якщо $\mu_1 \neq w_{12}^- - w_{12}^+ - b$ (перехід є дозволеним за $\mu_1 \geq w_{12}^-$). Тому нове маркування, яке збігається з уже отриманим раніше маркуванням $\mu_1 = [0; +\infty)$, отримане не класичним запуском переходу t_2 , а умовним за умови $\mu_1 = w_{12}^- - w_{12}^+ - b$.

Аналогічним чином, розглядаючи послідовність запусків переходів t_2t_1 , отримуємо:

1) якщо виконуються обидві рівності $\mu_0 = w_{11}^- - w_{11}^+ - b$ і $\mu_0 = w_{12}^- - w_{12}^+ - b$, то $\delta(\mu, t_1t_2) = \delta(\mu, t_2t_1) = [0; +\infty)$;

2) якщо не виконується перша (відповідно, друга) рівність, то перехід t_1 (відповідно, t_2) формально є дозволеним у класичному сенсі, але $\delta(\mu, t_1) = \emptyset$ (відповідно, $\delta(\mu, t_2) = \emptyset$).

Зауваження 2. Ситуацію, коли у мережі Петрі з антисипацією за позицією певний перехід t може бути дозволений у класичному сенсі, але рівняння його запуску не має розв'язків і $\delta(\mu, t) = \emptyset$, виявлено у праці [11].

ПРИКЛАДИ МЕРЕЖ ПЕТРІ З АНТИСИПАЦІЄЮ ЗА ПЕРЕХОДОМ ТА ДІЙСНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Розглянемо класичну мережу Петрі $\langle P, T, W, \mu_0 \rangle$, кожен перехід якої має не більше однієї вхідної позиції $|\bullet t| \leq 1$, і введемо інше розширення:

$$\langle P, T, W, \mu_0, \{f_{t_1}, \dots, f_{t_n}\} \rangle. \quad (7)$$

Як і раніше, $W = (T \times P) \cup (P \times T) \rightarrow [0; +\infty)$ — дійсна вагова функція, $\mu_0 : P \rightarrow [0; +\infty)$ — дійсне початкове маркування, тобто умови цілочисловості також не накладаємо. Проте на відміну від попереднього розширення (2) функція $f_{t_i} : [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ відповідає переходу t_i , $1 \leq i \leq n$, а не позиції p_i (також будемо використовувати позначення f_i , якщо це не буде призводити до конфлікту позначень). Якщо перехід t є дозволеним, то нова кількість фішок $\mu_{new}(p)$ у позиції $p \in \bullet t$ задовольняє рівняння запуску переходу

$$\mu_{new}(p) = \mu_k(p) - W(p, t) + W(t, p) + f_t(\mu_{new}(p)), \quad (8)$$

а кількість фішок у позиції $p \in t \bullet$ змінюється згідно з класичним правилом запуску переходу (1). Якщо ж позиція p є одночасно і вхідною, і вихідною позицією для переходу t , то також використовуємо рівняння (8). Рівняння (8) узагальнює класичне правило запуску переходу (1), але відрізняється від рівняння (3) — тому розширення (7) відрізняється від розширення (2). Структура мережі $\langle P, T, W \rangle$ є суттєвою — факт $|\bullet t| \leq 1$ ураховується у рівнянні (8). Запропоноване розширення (7) ілюструє приклад антисипації за переходом та дійсними функціями.

Приклад 3. Розглянемо мережу Петрі з антисипацією за переходом та дійснозначними функціями, зображену на рис. 4. Нехай переходам t_1 і t_2 відповідають лінійні функції $f_i : [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, 2$), $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x - 7$. Якщо перехід t_i є дозволеним, то нова кількість фішок $\mu_{new}(p_1)$

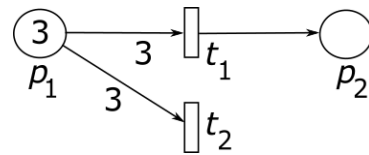


Рис. 4

у вхідній позиції p_1 задовольняє рівняння запуску переходу (8), окрім того, запуск переходу t_1 додає одну фішку у вихідну позицію p_2 .

Під час запуску дозволеного переходу t_1 з початкового маркування $\mu_0 = (3,0)$ рівняння (8) набуває вигляду $\mu_{new}(p_1) = 3 - 3 + f_1(\mu_{new}(p_1))$, звідки $\mu_{new}(p_1) = \mu_{new}(p_1)$, $\mu_{new}(p_1) \geq 0$. Таким чином, отримуємо нове маркування $\mu_1 = ([0; +\infty), 1)$, яке, як і у прикладі 1, не є класичним маркуванням і яке не є зліченною множиною. Із запуском дозволеного переходу t_2 з маркування μ_0 маємо $\mu_{new}(p_1) = 3 - 3 + f_2(\mu_{new}(p_1))$, звідки $\mu_{new}(p_1) = 2\mu_{new}(p_1) - 7$. Таким чином, отримуємо нове маркування $\mu_2 = (7,0)$.

Під час запуску переходу t_1 з маркування μ_1 маємо $\mu_{new}(p_1) = \mu_1(p_1) - 3 + \mu_{new}(p_1)$. Дане рівняння має розв'язки $\mu_{new}(p_1) \geq 0$ за умови $\mu_1(p_1) = 3$ і не має розв'язків, якщо $\mu_1(p_1) > 3$ (t_1 не є дозволеним у випадку $\mu_1(p_1) < 3$). Таким чином, нове маркування $\mu_3 = ([0; +\infty), 2)$ отримано не класичним запуском переходу t_1 , а умовним за умови $\mu_1(p_1) = 3$. За запуску переходу t_2 з маркування μ_1 маємо рівняння $\mu_{new}(p_1) = \mu_1(p_1) - 3 + 2\mu_{new}(p_1) - 7$, звідки $\mu_{new}(p_1) = 10 - \mu_1(p_1)$. Ураховуючи обмеження $\mu_{new}(p_1) \geq 0$, отримуємо нове маркування $\mu_4 = ([0; 7], 1)$ умовним запуском переходу t_2 за умови $3 \leq \mu_1(p_1) \leq 10$ (t_2 не є дозволеним, якщо $\mu_1(p_1) < 3$).

Під час запуску з маркування μ_2 переходу t_1 , який є дозволеним, отримуємо рівняння $\mu_{new}(p_1) = 7 - 3 + \mu_{new}(p_1)$, яке не має розв'язків. Аналогічно зауваженню 2 знайдена ситуація, коли перехід формально є дозволеним, але $\delta(\mu_2, t_1) = \emptyset$. За запуску з маркування μ_2 переходу t_2 , який також є дозволеним, маємо $\mu_{new}(p_1) = 7 - 3 + 2\mu_{new}(p_1) - 7$, звідки $\mu_{new}(p_1) = 3$. Таким чином, отримуємо маркування $(3,0)$, яке збігається з початковим. Зазначимо, що для класичних мереж Петрі послідовність маркувань $\mu_0 = (3,0)$, $\mu_2 = \delta(\mu_0, t_2) = (7,0)$, $\delta(\mu_2, t_2) = \mu_0 = (3,0)$ отримати не можна: у такому випадку $\delta(\mu_2, t_2)$ має дорівнювати $(11,0)$.

Нарешті, після запуску з маркування μ_4 переходу t_1 маємо рівняння $\mu_{new}(p_1) = \mu_4(p_1) - 3 + \mu_{new}(p_1)$, звідки отримуємо маркування μ_3 умовним запуском за умови $\mu_4(p_1) = 3$, а після запуску з маркування μ_4 переходу t_2 маємо рівняння $\mu_{new}(p_1) = \mu_4(p_1) - 3 + 2\mu_{new}(p_1) - 7$ і далі $\mu_{new}(p_1) = 10 - \mu_4(p_1)$, звідки отримуємо нове маркування $\mu_5 = ([3; 7], 1)$ умовним запуском за умови $\mu_4(p_1) \geq 3$. Із маркування μ_5 отримуємо вже існуюче маркування μ_3 умовним запуском переходу t_1 за умови $\mu_5(p_1) = 3$, отримуємо те саме маркування μ_5 класичним запуском переходу t_2 .

Отже, можемо побудувати граф досяжності, зображений на рис. 5. Для спрощення запису умовних переходів на рис. 5 використаємо позначення $\mu_k^1 = \mu_k(p_1)$, $\mu_k^2 = \mu_k(p_2)$ для $k \in \mathbb{N}$. Для даної мережі граф нескінченний ($\mu_{3k} = ([0; +\infty), k + 1)$, $\mu_{3k+1} = ([0; 7], k)$, $\mu_{3k+2} = ([3; 7], k)$ для $k \in \mathbb{N}$), не є де-

ревом і не містить жодного тупикового маркування, хоча без уведення антисипації за переходом класична мережа Петрі на рис. 4 мала б два тупикові маркування $(0,0)$ і $(0,1)$. Існують тільки два класичні маркування μ_0 і μ_2 , інші маркування в класичних мережах Петрі не з'являються. Також у графі існують як класичні запуски переходів t_1 , t_2 , так і умовні.

Твердження 1 для мережі на рис. 1 в точності переноситься для випадку з антисипацією за переходом та дійсними функціями, оскільки t має в точності одну вхідну позицію. Наведемо аналог теореми 1 для часткового випадку мережі, зображеної на рис. 3.

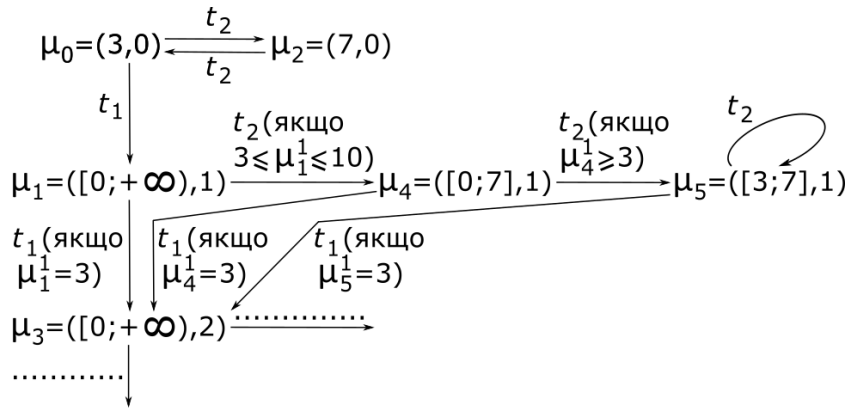


Рис. 5

Твердження 3. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $\mu_0 \in [0; +\infty)$, $w_{11}^- \in [0; +\infty)$, $w_{11}^+ \in [0; +\infty)$, $w_{12}^- \in [0; +\infty)$, $w_{12}^+ \in [0; +\infty)$;
- 2) переходам t_i відповідають функції $f_i(x) = -a_i x + b_i$, $a_i > -1$, $b_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2$);
- 3) обидві послідовності запусків переходів $t_1 t_2$ і $t_2 t_1$ є дозволеними у поточному маркуванні $\mu \in R(\mu_0)$, а обидві множини $\delta(\mu, t_1 t_2) = \{\mu_{12}\} \neq \emptyset$ і $\delta(\mu, t_2 t_1) = \{\mu_{21}\} \neq \emptyset$ є непорожніми.

Тоді виконується еквівалентність

$$(\mu_{12} = \mu_{21}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} a_1 & -w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1 \\ a_2 & -w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2 \end{array} \middle| = 0 \right).$$

Доведення. За запуску переходу t_1 з поточного маркування μ маємо рівняння

$$\mu_1 = \mu - w_{11}^- + w_{11}^+ + f_1(\mu_1) = \mu - w_{11}^- + w_{11}^+ - a_1 \mu_1 + b_1; \quad (9)$$

$$\mu_1 = (1 + a_1)^{-1} (\mu - w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1).$$

Після запуску переходу t_2 з маркування μ_1 маємо рівняння

$$\mu_{12} = \mu_1 - w_{12}^- + w_{12}^+ + f_2(\mu_{12}) = \mu_1 - w_{12}^- + w_{12}^+ - a_2 \mu_{12} + b_2; \quad (10)$$

$$\mu_{12} = (1 + a_2)^{-1} ((1 + a_1)^{-1} (\mu - w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1) - w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2).$$

Аналогічним чином отримуємо

$$\mu_{21} = (1 + a_1)^{-1} ((1 + a_2)^{-1} (\mu - w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2) - w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1).$$

Тоді

$$\begin{aligned} & (\mu_{12} = \mu_{21}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow ((1 + a_1)^{-1} (1 + a_2)^{-1} (-w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1) + (1 + a_2)^{-1} (-w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2) = \\ & = (1 + a_1)^{-1} (1 + a_2)^{-1} (-w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2) + (1 + a_1)^{-1} (-w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (-w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1 + (1 + a_1)(-w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2) = \\ & = -w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2 + (1 + a_2)(-w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (a_1(-w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2) = a_2(-w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1)) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a_1 - w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1 \\ a_2 - w_{12}^- + w_{12}^+ + b_2 \end{array} \right) = 0. \end{aligned}$$

Зазначимо, що в класичній мережі Петрі без антисипації, яка зображена на рис. 3, рівність $\mu_{12} = \mu_{21}$ виконується завжди, якщо обидві послідовності запусків переходів $t_1 t_2$ і $t_2 t_1$ є дозволеними, це співвідноситься з рівностями $a_i = b_i = 0$ для всіх $1 \leq i \leq n$. Твердження 3 важливе тим, що надає достатні умови рівності $\delta(\mu, t_1 t_2) = \delta(\mu, t_2 t_1)$ у випадку лінійних функцій.

Також відслідкуємо умови, за яких обидві послідовності запусків переходів $t_1 t_2$ і $t_2 t_1$ є дозволеними у твердженні 3:

- 1) якщо $\mu \geq w_{11}^-$, перехід t_1 є дозволеним (див. рівність (9));
- 2) якщо $\mu_1 = (1 + a_1)^{-1} (\mu - w_{11}^- + w_{11}^+ + b_1) \geq w_{12}^-$, послідовність переходів $t_1 t_2$ є дозволеною (див. рівність (10));
- 3) отже, з урахуванням двох аналогічних нерівностей достатньо вимагати $\mu \geq \max(w_{11}^-; w_{12}^-; w_{11}^- + w_{12}^- - w_{11}^+ - b_1 + a_1 w_{12}^-; w_{11}^- + w_{12}^- - w_{12}^+ - b_2 + a_2 w_{11}^-)$.

ВИСНОВКИ

Запропоновано дві модифікації класичних мереж Петрі: із сильною антисипацією за позицією та дійсними функціями та із сильною антисипацією за переходом та дійсними функціями. Розглянуто виконання таких мереж, указано важливі властивості, а також досліджено умови виконання рівності маркування для послідовностей запусків переходів $t_j t_k$ і $t_k t_j$.

ЛІТЕРАТУРА

1. J. Peterson, *Theory of Petri nets and system modeling*. М.: Mir, 1984, 264 p.
2. T. Murata, "Petri nets: Properties, analysis, applications," *TIHER*, vol. 77, no. 4, pp. 41–85, 1989.
3. R. David and H. Alla, *Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
4. R. David and H. Alla, "Continuous Petri Nets", *8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Zaragoza, Spain*, pp. 275–294, 1987.

5. C.R. Vazquez, C. Mahulea, J. Julvez, and M. Silva, "Introduction to Fluid Petri nets", Chapter in Book: "Control of Discrete-Event Systems", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 433, Eds. C. Seatzu, M. Silva, J.H. van Schuppen, Springer-Verlag, London, pp. 365–386, 2013. doi: 10.1007/978-1-4471-4276-8_18.
6. R. Rosen, *Anticipatory Systems: Philosophical, Mathematical and Methodological Foundations*. Pergamon Press, 1985. doi: 10.1016/C2009-0-07769-1.
7. D. Dubois, "Incursive and hyperincursive systems, fractal machine and anticipatory logic," *Computing Anticipatory Systems: CASYS 2000 — Fourth International Conference. AIP Conference Proceedings*, vol. 573, pp. 437–451, 2001. doi: 10.1063/1.1388710.
8. D. Dubois, "Generation of fractals from incursive automata, digital diffusion and wave equation systems," *Biosystems*, vol. 43, pp. 97–114, 1997. doi: 10.1016/S0303-2647(97)01692-4.
9. A. Makarenko, "Multivaluedness Aspects in Self-Organization, Complexity and Computations Investigations by Strong Anticipation", *Chapter in Book: Recent Advances in Nonlinear Dynamics and Synchronization*; Eds. K. Kyamakya, W. Mathis, R. Stoop, J. Chedjou, Z. Li, Springer, Cham, pp. 33–54, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-58996-1_3.
10. A. Makarenko, "Toward Multivaluedness Aspects in Self-Organization, Complexity and Computations Investigations," *Fourth International Workshop on Nonlinear Dynamics and Synchronization INDS'15, Klagenfurt, Austria, Alpen-Adria University, July 31, 2015*, pp. 84–93.
11. V.M. Statkevych, "A modification of Petri nets with anticipation on a position," *System Research & Information Technologies*, no. 1, pp. 102–112, 2023. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2023.1.08.
12. S.V. Lazarenko, O.S. Makarenko, *Discrete systems with anticipation*. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2020.

Надійшла 01.07.2023

INFORMATION ON THE ARTICLE

Vitalii M. Statkevych, ORCID: 0000-0001-5210-9890, Educational and Research Institute for Applied System Analysis of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: mstatckevich@yahoo.com

DESIGNING PETRI NETS WITH STRONG PLACE AND TRANSITION ANTICIPATION FOR REAL-VALUED FUNCTIONS / V.M. Statkevych

Abstract. We propose extending the classic Petri nets and considering D. Dubois's strong anticipation in two ways. We propose to add a new term into a transition rule that contains a real-valued function of a new marking in a certain place (strong place anticipation) or of a new marking in the input place of a certain transition (an example of strong transition anticipation). Any integer constraints are not applied either to the weight function or to the marking in contrast to the classic Petri nets (as in continuous Petri nets). The execution of the mentioned nets is investigated, and important properties are stated. Several examples of reachability graphs are given, and differences from classic Petri nets are formulated. We also investigate the conditions of the equality of the markings, which are obtained by firing the sequences of transitions $t_j t_k$ and $t_k t_j$.

Keywords: Petri net, strong anticipation, transition rule, reachability graph, real-valued function, next-state function, sequence of transition firings, limit reachability.