

КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ З ВІЛЬНИМИ ВУЗЛАМИ

І.А. КОРШУНОВА

У багатьох прикладних задачах дані, що були отримані на основі вимірювань певного процесу, концептуально можна розглядати як функції неперервного аргументу. Аналіз таких даних, що прийнято називати «функціональними», значно ускладнюється порівняно з аналізом багатовимірних даних. Функціональні дані за допомогою відображення у вектори вільних вузлів апроксимуючих сплайнів практично без втрати інформації можна звести до вигляду, зручного для традиційних статистичних алгоритмів. Знаходження вільних вузлів сплайна є складною задачею оптимізації, для вирішення якої в цій роботі представлено новий евристичний метод. Не менш важливим етапом є вибір кількості параметрів апроксимаційної моделі, для чого було розроблено підхід на основі багатокритеріальної оптимізації за часом обчислення вузлів та точності апроксимації. Застосування сплайнів для класифікації функціональних даних було продемонстровано на задачі діагностики артриту за формою кісток.

ВСТУП

Нині існує велика кількість прикладів з різних галузей науки (біометрики, економетрики, хемометрики, метеорології тощо), спостереження, які отримано, представляються або можуть бути змодельовані гладкими кривими. Класифікація таких даних є складною задачею з точки зору алгоритмів штучного інтелекту. Для формулювання проблеми в термінах статистичної класифікації в роботі [1] було запропоновано відобразити функції у вектори вузлів апроксимуючого сплайна. Вузли в цьому випадку розглядались як вільні параметри, що значно покращує якість апроксимації. Але їх знаходження є багатовимірною, нелінійною та мультимодальною задачею оптимізації з обмеженнями. Для розв'язку цієї задачі було розроблено ряд детерміністичних методів [2], однак їх основними недоліками є залежність результату від вибору початкового вузлового вектора а також обмеження на порядок гладкості функцій. Ефективнішими за часом обчислення та точністю апроксимації виявились метаевристики на основі генетичних алгоритмів [3] та методу рою часток [4]. Останній метод неможливо відтворити, оскільки автори не надали ключових деталей для його реалізації. Нестача дієвих підходів слугує потребою в розробці нових, тому в цій статті буде запропоновано спосіб знаходження вільних вузлів на основі методу диференціальної еволюції. Вибір цього методу обрано за його кращою результативністю для більшості тестових функцій порівняно з еволюційними алгоритмами та методом рою часток [5] а також малою кількістю параметрів.

Методи аналізу функціональних даних, які є аналогами класичних статистичних методів, детально описані в монографії [6]. В цій роботі буде проведено порівняння результатів класифікації, отриманих методом функціонального дискримінантного аналізу [7] та методом з використанням сплайнів з вільними вузлами для виявлення артриту за формою кісток.

Мета роботи — розробити ефективний метод знаходження вузлів апроксимуючих сплайнів, а також удосконалили спосіб, у який сплайни з вільними вузлами використовуються для класифікації функціональних даних.

АПРОКСИМАЦІЯ СПЛАЙНАМИ З ВІЛЬНИМИ ВУЗЛАМИ

Нехай маємо дані $\{x_i, y_i\}$, для абсцис $\{x_i\}$ яких виконується умова $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_m \leq b$, та $\{y_i\}$ є зашумленими вимірами функції $f(x_i) : y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = (1, \dots, m)$.

Мірою точності апроксимації функції сплайном $s \in$

$$\varphi = \sum_{i=1}^m (y_i - s(x_i))^2. \quad (1)$$

Функція s може бути вибрана з n -вимірного простору $S_{k,t}$, який складається з усіх поліноміальних сплайнів s порядку $k \geq 1$ з послідовністю вузлів

$$t = \{t_j\}, \text{ де } t_1 = \dots = t_k = a \leq t_{k+1} \leq \dots \leq t_n \leq b = t_{n+1} = \dots = t_{n+k} \quad (2)$$

та $m \gg n$. Сплайн s може бути представлений у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів: $s = \sum_{j=1}^n B_{j,k} \alpha_j$, де $B_{j,k}$ — послідовність нормалізованих В-сплайнів порядку k для заданої послідовності вузлів t . $B_{j,k}$ можуть бути обраховані за рекурсивною формулою Кокса-де Бура:

$$B_{j,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$B_{j,k}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1}(t) + \frac{t_{j+k} - t}{t_{j+k} - t_{j+1}} B_{j+1,k-1}(t)$$

Введемо наступні позначення: матриця спостережень $B = (B_{j,k}(x_i))_{\substack{i=1, \dots, m, \\ j=1, \dots, n}}$, вектор коефіцієнтів сплайну $\alpha = (\alpha_j)_{j=1, \dots, n}$, вектор значень функції $y = (y_i)_{i=1, \dots, m}$, враховуючи які формулу (1) можна переписати як:

$$\varphi = \varphi(t, \alpha) = \|y - B(t)\alpha\|^2. \quad (3)$$

Для фіксованої послідовності вузлів задача мінімізації виразу (2) є лінійною:

$$\min \{ \varphi = \varphi(t, \alpha) = \|y - B(t)\alpha\|^2 : \alpha \in \mathbf{R}^n \}. \quad (4)$$

Якщо вузли є вільними параметрами, то отримуємо нелінійну мультимодальну задачу оптимізації з обмеженнями на значення вузлів за нерівністю (2):

$$\min \{ \varphi = \varphi(\tilde{t}, \alpha) = \|y - B(\tilde{t})\alpha\|^2 : \alpha \in \mathbf{R}^n, \tilde{t} \in \mathbf{R}^l \}, \quad (5)$$

де $\tilde{t} = (t_{p(1)}, \dots, t_{p(l)})^T \in \mathbf{R}^l$ — вектор вільних вузлів з індексами $p = (p(1), \dots, p(l))$, які задовольняють нерівність $k < p(1) < \dots < p(l) < n + 1$. Остання умова означає, що лише вузли t_{k+1}, \dots, t_n можуть бути вільними, оскільки інтервал $[a; b]$ задано від початку.

Задача (4) називається повною апроксимаційною задачею, яка є еквівалентною до спрощеної задачі [2]:

$$\min \{ \psi(\tilde{\mathbf{t}}) = \|(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{t}})\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{t}})^+) \mathbf{y}\|^2 : \tilde{\mathbf{t}} \in \mathbf{R}^l \} \quad (6)$$

де було виконано підстановку $\alpha = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{t}})^+ \mathbf{y} \cdot \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{t}})^+$, що в даному випадку означає псевдоінверсію Мура-Пенроуза матриці \mathbf{B} .

МЕТОД ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Метод диференціальної еволюції призначено для знаходження глобального оптимуму недиференційованих, нелінійних, мультимодальних функцій багатьох змінних. Цей метод належить до класу метаевристик, тому не існує гарантії знаходження оптимального розв'язку. Але, як свідчать експериментальні розрахунки [8], для багатьох проблем він є робастним та у більшості випадках швидко збігається до оптимуму.

Нехай $P_{x,g} = (\mathbf{x}_{i,g})$, $i = 0, \dots, Np - 1$, $g = 0, \dots, g_{\max}$ — популяція з номером g з D -вимірних точок (векторів) $\mathbf{x}_{i,g} = (x_{j,i,g})$, $j = 0, \dots, D - 1$. Розмір популяції — Np .

Першим кроком алгоритму є генерування початкової популяції $P_{x,0}$, на якому координати кожної точки ініціалізуються наступними значеннями:

$$x_{j,i,0} = \text{rand}(0,1)(b_{j,U} - b_{j,L}) + b_{j,L}, \quad i = 0, \dots, Np - 1, \quad j = 0, \dots, D - 1,$$

де $b_{j,U}$ та $b_{j,L}$ — верхня та нижня межі j -тої координати.

Нове покоління векторів генерується у такий спосіб: для кожної точки $\mathbf{x}_{i,g}$ зі старого покоління g вибираються три різні випадкові точки $\mathbf{x}_{r0,g}$, $\mathbf{x}_{r1,g}$, $\mathbf{x}_{r2,g}$, що не дорівнюють $\mathbf{x}_{i,g}$, та генерується мутантний вектор за формулою:

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{r0,g} + F(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g}), \quad (7)$$

де $F \in (0, 1]$ — масштабний множник диференціального вектора.

Над мутантним вектором (7) виконується операція «схрещування», яка полягає в заміщенні його координат відповідними координатами з початкового вектора $\mathbf{x}_{i,g}$ (кожна координата заміщається з деякою ймовірністю Cr , але хоча б одна змінюється завжди):

$$\mathbf{u}_{i,g} = \mathbf{u}_{j,i,g} = \begin{cases} \mathbf{v}_{j,i,g}, & \text{якщо } \text{rand}_j(0,1) \leq Cr \text{ або } j = j_{\text{rand}} \\ \mathbf{x}_{j,i,g} & \text{в іншому випадку} \end{cases}. \quad (8)$$

Отриманий після схрещування вектор $\mathbf{u}_{i,g}$ називається пробним вектором. Якщо його значення цільової функції краще, то в новому поколінні вектор $\mathbf{x}_{i,g}$ замінюється на пробний вектор:

$$\mathbf{x}_{i,g+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,g}, & \text{якщо } f(\mathbf{u}_{i,g}) \leq f(\mathbf{x}_{i,g}) \\ \mathbf{x}_{i,g} & \text{в іншому випадку} \end{cases}. \quad (9)$$

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Багатокритеріальна оптимізація — це процес одночасної оптимізації двох або більше конфліктуючих цільових функцій у заданій області визначення. Задача формулюється наступним чином: $\min\{f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})\}$, де $\bar{x} \in S$, $f_k : R^n \rightarrow R$, $k = 2, \dots, K$. Вона полягає в пошуці оптимального за Парето вектора цільових змінних, тобто такого $\bar{x}^* \in S$, що не існує $\bar{x} \in S$, для якого виконується $f_k(\bar{x}) \leq f_k(\bar{x}^*)$ при $k = 1, \dots, K$ та $f_k(\bar{x}) < f_k(\bar{x}^*)$ для будь-якого k . Множину оптимальних за Парето розв'язків називають Парето-фронтом. Цю множину, як показано в [8], можна знайти методом диференціальної еволюції, де умову (9) замінено на:

$$x_{i,g+1} = \begin{cases} u_{i,g}, & \text{якщо } \forall k \in \{1, \dots, K\}: f_k(u_{i,g}) \leq f_k(x_{i,g}), \\ x_{i,g} & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

РОЗРОБЛЕНИЙ МЕТОД

Найголовнішим етапом роботи є пошук вільних вузлів сплайна, тобто знаходження розв'язку задачі (6). Бажано, щоб метод їх обрахунку був нечутливим до похибок виміру вхідних даних, мав невеликий час роботи та збігався до точки глобального оптимуму. На жаль, останню умову виконати найважче, тому що цільова функція зазвичай має велику кількість локальних мінімумів.

Для розв'язку задачі (6) в порівнянні з класичним методом диференціальної еволюції у зв'язку з необхідністю виконання умови (2) було введено наступні зміни:

- Точки початкової популяції ініціалізуються значеннями лише з допустимої області, що відповідає виконанню нерівності (2).
- Під час генерації мутантного вектора враховуються межі зміни абсцис:

$$v_{i,g} = v_{j,i,g} = \begin{cases} x_{j,r0,g} + \text{rand}(0,1)(a - x_{j,r0,g}), & \text{якщо } v_{j,i,g} \leq a, \\ x_{j,r0,g} + \text{rand}(0,1)(b - x_{j,r0,g}), & \text{якщо } v_{j,i,g} \geq b, \\ v_{j,i,g}, & \text{якщо } a < v_{j,i,g} < b. \end{cases}$$

- У разі виходу мутантної або пробної точки за межі допустимої області відбувається симетричне відображення відносно площини $x_{0,i,g} = x_{1,i,g} = \dots = x_{D-1,i,g}$.

- Масштабний множник та ймовірність схрещування на кожній ітерації змінюються за наступними формулами [9]:

$$F = \frac{\min(f_g^{\text{best}}, \bar{f}_g)}{\max(f_g^{\text{best}}, \bar{f}_g)} F_{\text{const}}, \quad Cr = \frac{\min(f_g^{\text{best}}, f_{g-1}^{\text{best}})}{\max(f_g^{\text{best}}, f_{g-1}^{\text{best}})} Cr_{\text{const}},$$

де $f_g^{\text{best}}, f_{g-1}^{\text{best}}$ — найкраще значення цільової функції в g -ій та $(g-1)$ -ій популяції, \bar{f}_g — середнє значення функції в g -ій популяції. $F_{\text{const}}, Cr_{\text{const}}$ — ста-

лі значення параметрів класичної диференціальної еволюції обрані з [10] залежно від розмірності задачі.

Критерієм закінчення пошуку є $|f_g^{\text{best}} - f_g^{\text{worst}}| < \varepsilon$, де f_g^{worst} — найгірше значення цільової функції в g -й популяції, а $\varepsilon = 10e - 7$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

Тестування методу диференціальної еволюції для знаходження вільних вузлів проводилось на наборі функцій [4] наведених на рис. 1, які можуть містити точки розриву (функції № 2, 6) та каспи (функція № 3). Аналітичні вирази функції наведено в табл. 1.

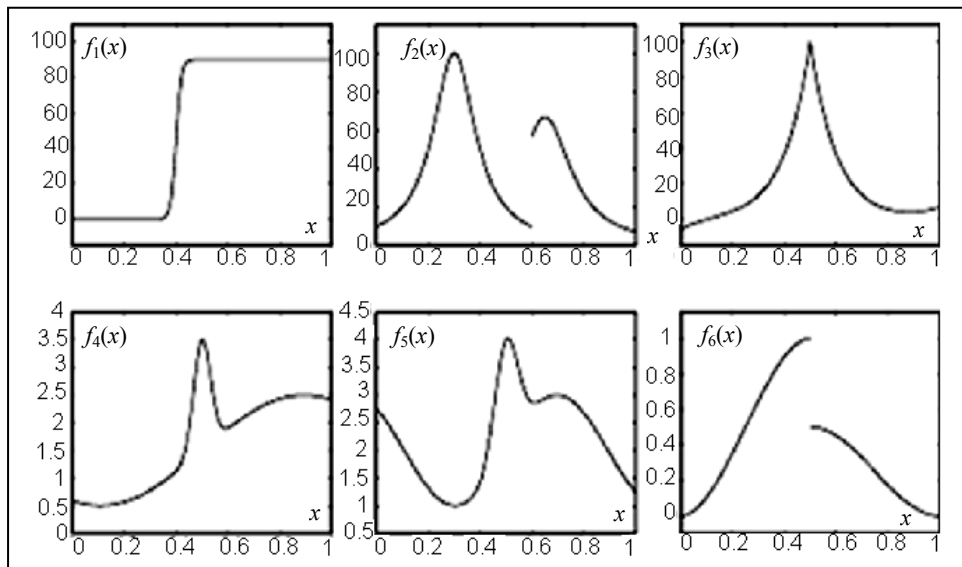


Рис. 1. Графік тестових функцій

В усіх випадках функція вимірювалась в 201 точці та область визначення зводилась до $[0;1]$. Похибка вимірів (шум) ε розподілений за нормальним законом $N(0, \sigma^2)$. Наведена в табл. 1 кількість вільних вузлів є оптимальною згідно роботи [4] при порядку сплайна 4. Цільовою функцією виступав інформаційний критерій Байеса (BIC):

$$BIC = m \ln(\psi) + \ln(m)(2l + k + 1),$$

де m — кількість вимірів функції, ψ — значення цільової функції, l — кількість вільних вузлів, k — порядок сплайна.

Отримані усереднені за 30 дослідів значення BIC для тестових функцій: $BIC(f_1) = 1134$, $BIC(f_2) = 1129$, $BIC(f_3) = 1133$, $BIC(f_4) = -36$, $BIC(f_5) = -15$, $BIC(f_6) = -280$. Час обчислення вузлів в середньому становить 2с (CPU 2,4 GHz).

Графічні результати апроксимації сплайнами з вільними вузлами, що знаходяться за допомогою розробленого методу, наведено на рис. 2.

Таблиця 1. Аналітичні вирази тестових функцій та контрольні параметри

Вираз функції	Область визначення	$N(0, \sigma^2)$	Кількість вузлів
$f_1(t) = \frac{90}{1 + e^{-100(t-0,4)}}$	$t \in [0;1]$	$\sigma = 1$	4
$f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{0,01 + (t-0,3)^2} \\ \frac{1}{0,015 + (t-0,65)^2} \end{cases}$	$0 \leq t < 0,6$ $0,6 \leq t \leq 1$	$\sigma = 1$	8
$f_3(t) = \frac{100}{e^{ 10t-5 }} + \frac{(10t-5)^2}{500}$	$t \in [0;1]$	$\sigma = 1$	5
$f_4(t) = \sin(t) + 2e^{-30t^2}$	$t \in [-2;2]$	$\sigma = 0,06$	5
$f_5(t) = \sin(2t) + 2e^{-16t^2} + 2$	$t \in [-2;2]$	$\sigma = 0,06$	6
$f_6(t) = \begin{cases} 4t^2(3-4t) \\ \frac{4}{3}t(4t^2-10t+7) - \frac{3}{2} \\ \frac{16}{3}t(t-1)^2 \end{cases}$	$0 \leq t < 0,5$ $0,5 \leq t < 0,5$ $0,75 \leq t \leq 1$	$\sigma = 0,03$	4

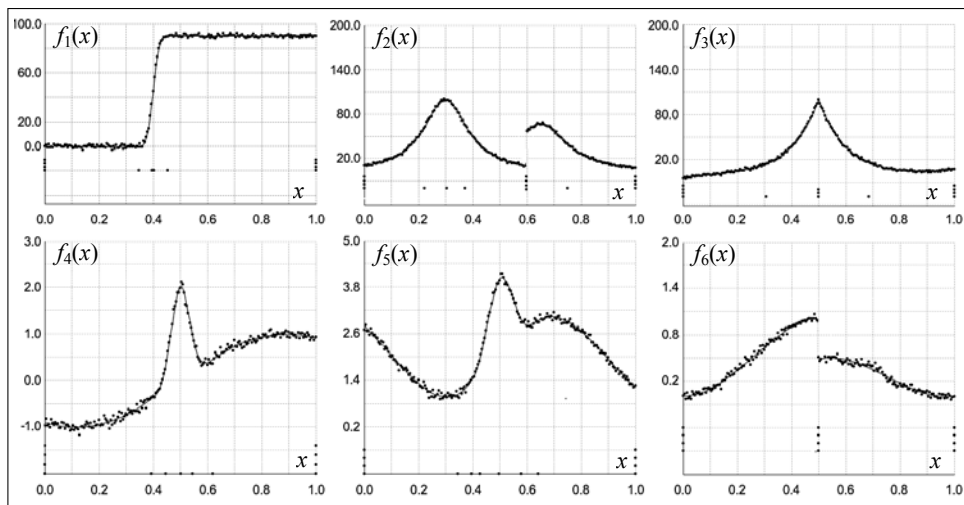


Рис. 2. Графічні результати апроксимації сплайнами з вільними вузлами (розташування вузлів та їх кратність позначено точками під графіком)

Оскільки метою роботи є аналіз функціональних даних, то проілюструємо алгоритм на конкретному прикладі класифікації пацієнтів за формою мицелка стегнової кістки на два класи: хворих на артрит та здорових [7].

Перші кроки алгоритму, що детально описані в [7], включають параметризацію за довжиною кривої початкових даних (рис. 3). Результат на рис. 4 ілюструє отримані рівномірно розподілені по довжині контуру точки параметричної функції

$$z(t) = \{x(t), y(t)\}.$$

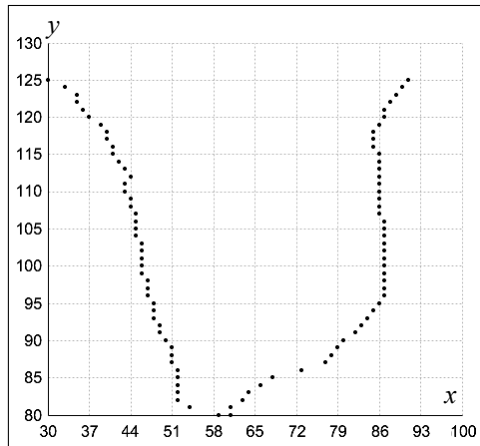


Рис. 3. Початкові дані

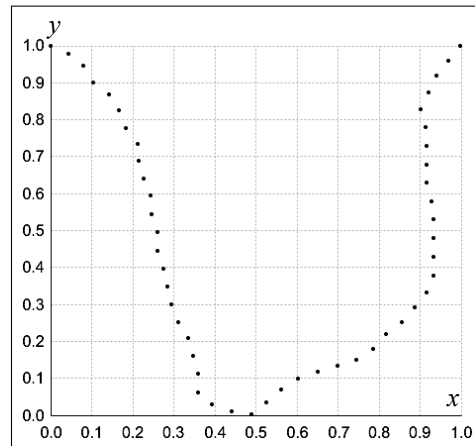


Рис. 4. Параметризовані дані

З рис. 4 очевидно, що функція є неоднозначною, тому її безпосередня сплайн-апроксимація неможлива. Варіантом вирішення цієї проблеми є апроксимація $x(t)$ та $y(t)$ окремо (їх приклади наведено на рис. 5 та рис. 6 відповідно).

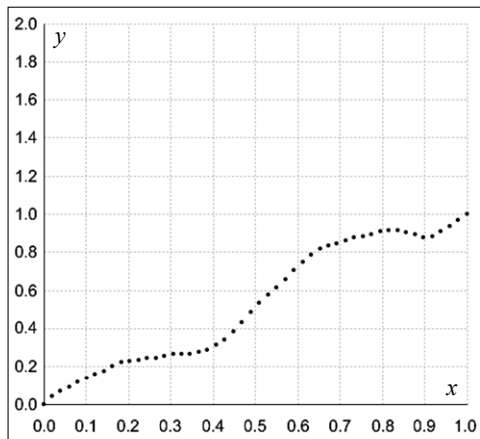


Рис. 5. Параметризовані абсциси

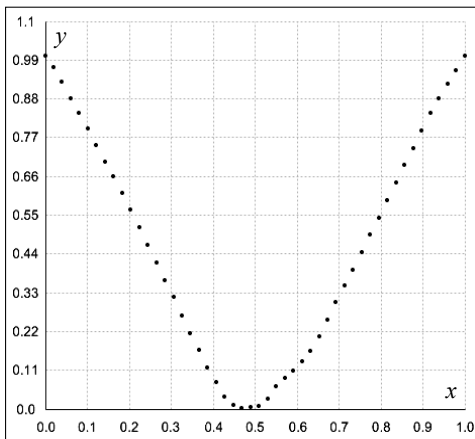


Рис. 6. Параметризовані ординати

Щоб визначити кількість параметрів моделі — число вільних вузлів та порядок сплайну було проведено багатокритеріальну оптимізацію за конфліктуючими критеріями — часом обрахунку та значеннями ВІС для середніх кривих $\bar{x}(t)$ та $\bar{y}(t)$. Це дозволяє знайти найбільш просту модель з оптимальним для нас часом обрахунку, що важливо для великих наборів даних. Для обох випадків кількість вузлів було обрано рівною 6, а порядок сплайну для $\bar{x}(t)$ та $\bar{y}(t)$ — 4 та 3 відповідно.

Класифікація контурів кісток відображених у вектори вільних вузлів апроксимуючих сплайнів здійснювалась методом k найближчих сусідів. Для оцінки точності класифікатора було проведено перехресну перевірку. Тестовий набір складає 96 екземплярів, з яких 21 — хворий. Кращі результати було отримано під час врахування лише вільних вузлів функцій $x(t)$ та при кількості найближчих сусідів $k = 4$.

Для оцінки якості класифікації доцільним є використання кореляційного коефіцієнту Метью (у термінах прикладної статистики — фі-коефіцієнт) [11]:

$$MCC = \frac{TP \cdot TN - FP \cdot FN}{\sqrt{(TP + FP)(TP + FN)(TN + FP)(TN + FN)}}$$

де TP (true positives) та TN (true negatives) — кількість істиннопозитивних та істиннонегативних результатів класифікації, FP (false positives) та FN (false negatives) — кількість помилок першого та другого роду відповідно. На основі перелічених показників можна поррахувати наступні характеристики класифікатора, які зазвичай застосовуються для оцінки медичних тестів:

- TPR (True Positive Rate) — ймовірність позитивного результату (наявність артриту), якщо пацієнт хворий;
- TNR (True Negative Rate) — ймовірність негативного результату (відсутність артриту), якщо пацієнт не хворий;
- PPV (Positive Predictive Value) — ймовірність наявності хвороби при позитивному результаті тесту;
- NPV (Negative Predictive Value) — ймовірність відсутності хвороби при негативному результаті тесту.

Оскільки метод пошуку вузлів належить до метаевристик, то збіжність до одного мінімуму при неоднократному перерахунку не гарантовано. Цей факт впливає на результати класифікації. За результатами 100 експериментів основні статистичні показники розподілу ймовірності MCC, TPR, TNR, PPV та NPV наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Статистичні показники характеристик класифікатора

Характеристики класифікатора	Медіана	Мінімум	Максимум	Перша квартиль	Третя квартиль	Викиди
TPR	0,429	0,286	0,571	0,381	0,476	—
TNR	0,92	0,84	0,973	0,893	0,933	0,84, 0,853
PPV	0,588	0,4	0,8	0,529	0,667	0,8
NPV	0,848	0,815	0,885	0,841	0,864	0,885
MCC	0,397	0,133	0,638	0,304	0,466	—

ПОРІВНЯННЯ З ІНШИМИ РОБОТАМИ

Для порівняння ефективності розробленого методу знаходження вільних вузлів сплайна було обрано лише ті алгоритми, що можуть працювати з усіма наведеними тестовими функціями. Як свідчать результати з табл. 3, модифікований метод диференціальної еволюції переважно має кращі показники ніж генетичний алгоритм, але гірші за метод рою часток. Однак, як вже зазначалось, наведені в [4] результати складно відтворити, оскільки автори не надали детальний опис методу.

Таблиця 3. Порівняння методів знаходження вільних вузлів апроксимуючого сплайна

Автор та посилання	Основа методу	Кількість ітерацій	Значення ВІС	Час обчислення
Yoshimoto [3]	Генетичні алгоритми	200–300	$BIC(f_1, f_2, f_3) = 1150 - 1170$ $BIC(f_4) = -193$ $BIC(f_5) = 49$ $BIC(f_6) = -231$	Десятки секунд
Galvez [4]	Метод рою часток	10	$BIC(f_1) = 1101$ $BIC(f_2) = 1027$ $BIC(f_3) = 1012$ $BIC(f_4) = -279$ $BIC(f_5) = -63$ $BIC(f_6) = -340$	$10^{-1} - 1$ с.
Розроблений метод (2012)	Метод диференціальної еволюції	50	$BIC(f_1) = 1134$ $BIC(f_2) = 1129$ $BIC(f_3) = 1133$ $BIC(f_4) = -36$ $BIC(f_5) = -15$ $BIC(f_6) = -280$	1-4 с.

Наведемо результати перехресної перевірки отримані методом дискримінантного аналізу на основі 6 головних компонент [7]: $MCC = 0,360$, $TPR = 0,667$, $TNR = 0,747$, $PPV = 0,424$, $NPV = 0,889$. На рис. 7 візуально продемонстровані характеристики класифікатора на основі вільних вузлів апроксимуючих сплайнів (результати з роботи [7] відмічено лініями).

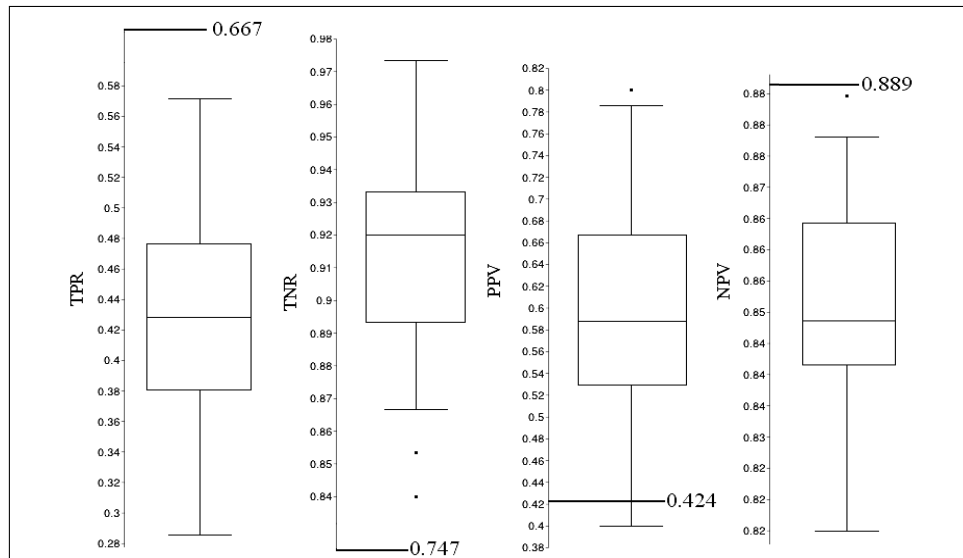


Рис. 7. Графіки статистичних показників результатів класифікації

З наведених даних не впливає однозначної оцінки розробленого класифікатора. Завдяки високому TNR класифікатор є більш специфічним, тоб-

то він краще діагностує достеменно хворих. Наприклад, це важливо у випадку, коли гіпердіагностика пацієнтів небажана. Також отримане середнє значення МСС на 10% краще за попередній результат.

ВИСНОВКИ

В роботі представлено метод класифікації функціональних даних на основі вільних вузлів апроксимуючих сплайнів. Описаний підхід є універсальним для даних представлених не лише гладкими кривими але й такими, що містять точки розриву або каспи. Це узагальнення стало можливим внаслідок розробки нового методу пошуку вільних вузлів. На цей час це один із небагатьох методів, який може впоратись із подібною задачею за порівняно невеликий час та досягти високої точності. Однак за результативністю він уступає методу рою часток, тому потребує подальшої доробки. Напрямоком удосконалення методу є підбір оптимальних параметрів диференціальної еволюції, значення яких значно впливають на час та точність обчислення.

Варто відмітити, що порівняно з попередніми роботами, де кількість вузлів та порядок сплайна підбирались лише з мінімізації ВІС, у цьому дослідженні здійснювався вибір цих параметрів із урахуванням також часу обчислення. Як один з етапів аналізу функціональних даних за допомогою сплайнів з вільними вузлами, запропонований спосіб розрахунку кількості параметрів апроксимаційної моделі є доцільним, оскільки він здійснюється одноразово для типового представника з набору даних і зменшує час виконання найбільш трудомісткого процесу — апроксимації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Molinari N.* Free Knot Splines for Supervised Classification // *Journal of Classification*. — 2007. — № 24. — P. 221–234.
2. *Schwetlick H., and Schutze T.* Least squares approximation by splines with free knots // *BIT Numerical mathematics*. — 1995. — № 35. — P. 361–384.
3. *Yoshimoto F., Harada T., Yoshimoto Y.* Data fitting with a spline using a real-coded algorithm // *Journal Computer-Aided Design*. — 2003. — № 35. — P. 751–760.
4. *Galvez A., Iglesias A.* Efficient particle swarm optimization approach for data fitting with free knot B-splines // *Journal Computer-Aided Design*. — 2011. — № 43. — P. 1683–1692.
5. *Vesterstrom J., Thomsen R.* A comparative study of differential evolution, particle swarm optimization, and evolutionary algorithms on numerical benchmark problems // *Evolutionary Computation, 2004. CEC2004. Congress on*. — 2004. — № 2. — P. 1980–1987.
6. *Ramsay J.O., Silverman B.W.* *Functional Data Analysis* // NY: Springer, 2005.
7. *Ramsay J.O., Silverman B.W.* *Applied functional data analysis: methods and case studies* // New York: Springer-Verlag, 2002. — P. 115–130.
8. *Price K., Storn R.M., Eds.* *Differential Evolution. A practical approach to global optimization* // Germany: Springer-Verlag Berlin, 2005.
9. *Guo Zhenyu, Cheng Bo, Eds.* *Self-Adaptive Chaos Differential Evolution* // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2006. — № 4221. — P. 972–975.
10. *Pedersen M.* Good Parameters for Differential Evolution // *Hvass Laboratories, Technical Report no. HL1002*. — 2010.
11. *Cramer H.* *Mathematical Methods of Statistics* // Princeton: Princeton University Press, 1946. — P. 282.

Надійшла 22.05.2012