

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ПОШУКУ СІДЛОВОЇ ТОЧКИ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

М.В. ДЕМЧИШИН, Є.Г. ЛЕВЧЕНКО, Д.І. РАБЧУН

Оптимізація розподілу ресурсів між об'єктами системи захисту інформації ускладнюється тим, що протистояння відбувається в умовах невизначеності, коли дії суперника невідомі. Одним з підходів до вирішення цієї проблеми є динамічне управління ресурсами, при якому захист оперативно реагує на дії суперника, змінюючи свою стратегію після кожного його кроку. Невизначеність викликає певні труднощі в організації захисту, що в деяких випадках взагалі унеможливають процес динамічного управління. Інший підхід ґрунтується на забезпеченні гарантованого результату, коли розподіл ресурсів захисту не є оптимальним для всіх стратегій суперника, проте дає упевненість, що втрати інформації не будуть перевищувати визначену величину при будь-яких його діях. Реалізацією цього підходу є сідлова точка матричної гри, котра відображає стан спокою динамічного протистояння двох сторін. У системі, котра містить два об'єкти, проаналізовано умови існування сідлової точки у залежності від вразливості об'єктів, розподілу ресурсів між ними, співвідношення між ресурсами сторін протистояння.

ВСТУП

Протистояння в інформаційній сфері відбувається в умовах невизначеності. Це приводить до того, що рішення про необхідну кількість ресурсів та їх розподіл між об'єктами доводиться приймати, не маючи відомостей щодо аналогічних рішень суперника. У зв'язку з цим виникає потреба у розробці такої стратегії, яка б забезпечувала виконання певних умов оптимальності за будь-яких дій протилежної сторони. Користуючись термінологією теорії ігор, необхідно знайти рішення гри з сідловою точкою. Ця точка характерна тим, що нижнє значення гри (мінімально можливе для захисту втрати інформації) дорівнює її верхньому значенню (максимально досяжній кількості здобутої нападом інформації). Така ситуація є рівноважною: жодна одна зі сторін не зацікавлена в її порушенні.

Пошук сідлової точки в наших умовах ускладнюється тим, що задача не може бути зведена до матричної гри із скінченим числом стратегій: кількість ресурсів, котрі виділяє кожна зі сторін, може приймати будь-які значення, звичайно, в певному розумному інтервалі. Наближений аналітичний розв'язок можна отримати, якщо розглянути дискретні набори розподілів ресурсів нападу та захисту, і послідовно уточнювати результати, зменшуючи інтервал дискретизації. Знаходження сідлової точки визначає відповідні розподіли ресурсів, які вважаємо оптимальними.

Аналітичний підхід до розв'язку задачі, в якій задіяно велику кількість параметрів і функціональних залежностей, не завжди дає можливість проаналізувати закономірності у великому масиві результатів. У [1] здійснено спробу геометричного тлумачення розв'язання задачі оптимального розпо-

ділу ресурсів нападу. Такий підхід дає можливість пояснити зміну стратегії, а саме: перехід від розподілу ресурсів між об'єктами до їх зосередження на одному з них. Проте графічне зображення розв'язку в тривимірному просторі можливе лише для системи з двох об'єктів, що в загальному випадку обмежує застосування наведеної методики.

Мета роботи — розробка методу оптимізації розподілу ресурсів у системі з довільною кількістю об'єктів, який включає геометричну інтерпретацію пошуку сідлової точки.

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКІВ І РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо у якості прикладу систему з чотирьох об'єктів (рис.1,а) та використаємо математичну модель [2], в якій цільова функція визначає частку втраченої інформації в системі:

$$i(x, y) = \sum_{k=1}^l i_k(x, y) = \sum_{k=1}^l g_k \cdot p_k \cdot q_k(x, y) f_k(x, y), \quad (1)$$

де x та y — ресурси нападу і, відповідно, захисту, $\sum_{k=1}^l x_k = X$, $\sum_{k=1}^l y_k = Y$; k — номер об'єкта; g_k — відносна вартість інформації на k -му об'єкті (через g_k також позначається сам об'єкт); p_k — імовірність нападу на k -й об'єкт; $q_k(x, y)$ — імовірність виділення нападом ресурсів x на k -ий об'єкт при заданому значенні y ; $f_k(x, y)$ — імовірність вилучення інформації з k -го об'єкта, яку розглядаємо як динамічну вразливість об'єкта.

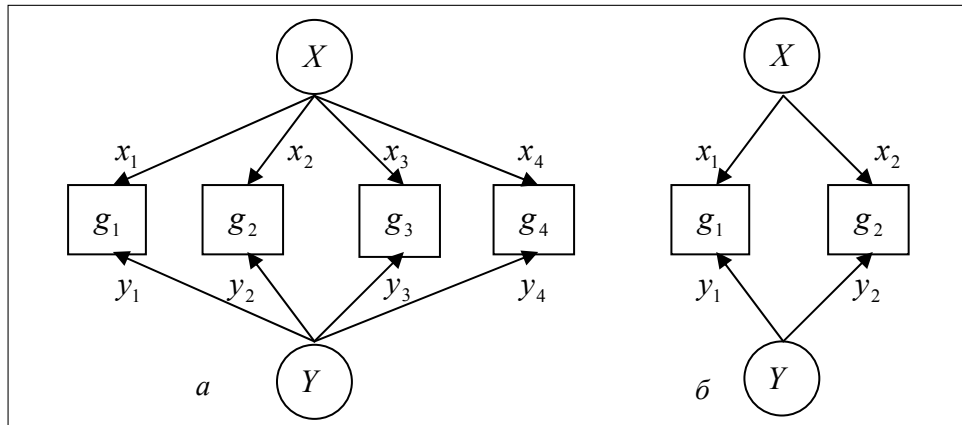


Рис. 1. Схеми інформаційного протистояння: а — в системі з чотирьох об'єктів; б — в системі з двох об'єктів

Найважливішою характеристикою системи інформаційної безпеки є вразливість її об'єктів. У подальшому зосередимось на розгляді впливу цієї характеристики і покладемо $p_k = 1$ (напад відбувся) та $q_k(x, y) = \text{const} = 1$ (імовірності виділення нападом різної кількості ресурсів однакові).

Тоді цільова функція (1) матиме вигляд

$$i(x, y) = \sum_{k=1}^l g_k f_k(x, y). \quad (2)$$

Величини в правій частині (2) — відносні: $x, y, f_k(x, y)$ віднесені до вартості інформації на об'єкті, g_k — до вартості інформації системи.

У відповідності до моделі [2] вважаємо, що вразливість залежить від співвідношення ресурсів нападу і захисту, тобто від відношення x/y на конкретному об'єкті. Функції $f_k(x, y)$ мають задовольняти умовам: при $x/y \rightarrow 0$ $f_k(x, y) \rightarrow 0$, при $x/y \rightarrow \infty$ $f_k(x, y) \rightarrow 1$. Цим умовам відповідають дробово-степеневі та показникові функції [2]. Враховуючи, що ці залежності повинні мати близькі форми, обмежимося розглядом дробово-степеневих функцій:

$$f_k(x, y) = \frac{(x/y)^{n_k}}{(x/y)^{n_k} + c_k}. \quad (3)$$

У наступних розрахунках використаємо такі функції $f_k(x, y)$:

$$f_1(x, y) = \frac{x/y}{x/y + 4}, \quad f_2(x, y) = \frac{(x/y)^3}{(x/y)^3 + 32}, \quad (4) \quad (5)$$

$$f_3(x, y) = \frac{(x/y)^2}{(x/y)^2 + 8}, \quad f_4(x, y) = \frac{(x/y)^3}{(x/y)^3 + 16}. \quad (6) \quad (7)$$

Параметри у виразах (4)–(7) вибрані довільно — з метою максимально виразного представлення результатів. Форми наведених залежностей зображено на рис. 2 а, в (номери кривих відповідають виду залежностей (4)–(7)).

Пошук сідлової точки ведеться ітераційним методом, шляхом почергового розв'язання задач оптимізації розподілу власних ресурсів кожної зі сторін. Розподіл ресурсів суперника після попереднього кроку вважається відомим (антагоністична позиційна гра з повною інформацією) [3]. На першому кроці приймемо, що протилежна сторона поділила свої ресурси пропорційно розподілу інформації на об'єктах. У проведених розрахунках прийнято рівномірний розподіл інформації по об'єктах: $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 0,25$, $\sum_{k=1}^4 g_k = 1$. Вважаємо, що сторона з ресурсами $Y = \sum_{k=1}^4 y_k$ захи-

щає інформацію, а сторона з ресурсами $X = \sum_{k=1}^4 x_k$ прагне її вилучити.

Перший крок робить сторона X . Розподіл ресурсів Y на цьому кроці відповідно до розподілу $\{g_k\}$ вважаємо рівномірним: $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$.

Оптимальний розподіл ресурсів можна знайти шляхом перебору варіантів між усіма об'єктами. Проте з метою графічного зображення процесу оптимізації поділимо всю систему на пари об'єктів та розділимо процес оптимізації на два етапи. Перший етап направлено на пошук оптимальних

розподілів для кожної пари об'єктів, другий — для усієї системи, що включає, в нашому випадку, дві пари об'єктів.

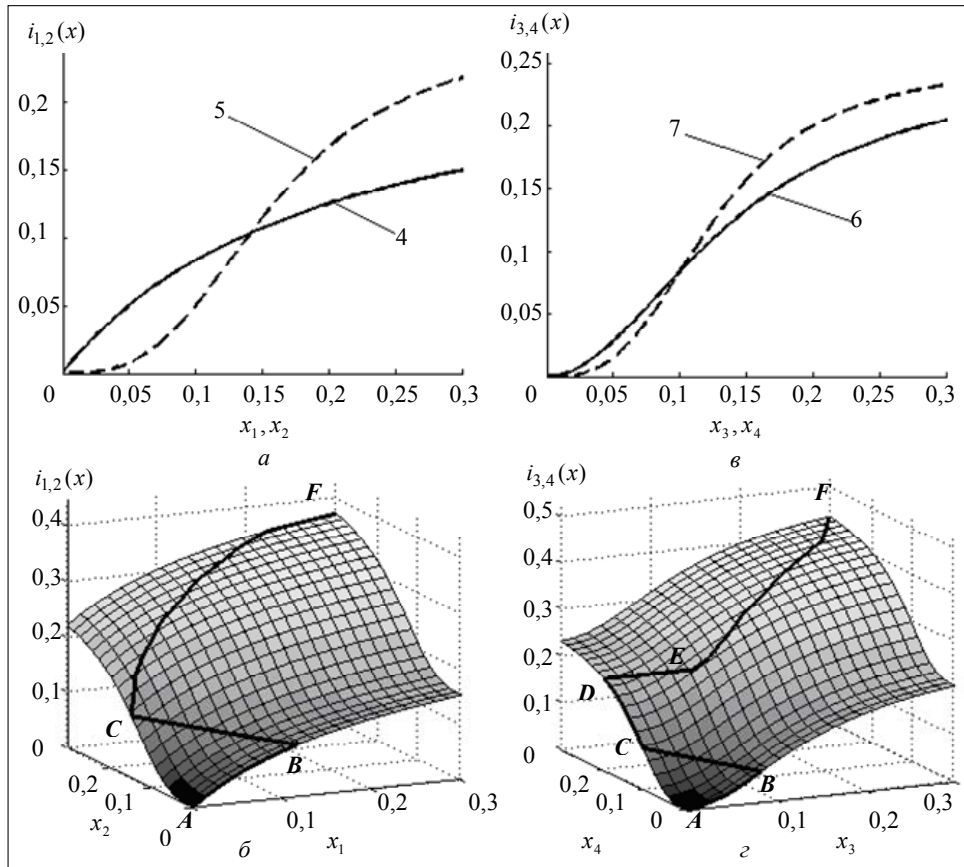


Рис. 2. Характеристики пар об'єктів g_1, g_2 (а, б) та g_3, g_4 (в, г): а, в — форми функцій вразливості об'єктів; б, г — оптимальний розподіл ресурсів між об'єктами (напівжирні лінії)

Результати розрахунків на першому етапі у всьому інтервалі зміни можливих значень $X = 0 \dots 0,3$ при незмінному і рівномірному розподілі ресурсів Y між об'єктами ($Y = 0,2, y_k = 0,05$) показано на рис. 2 б, г. Напівжирною кривою зображено лінію найкрутішого підйому, тобто найбільш ефективного розподілу ресурсів при різних значеннях X . Одержані результати дають змогу проаналізувати динаміку розподілу ресурсів між об'єктами при зростанні загальної кількості ресурсів нападу. Спочатку всі ресурси доцільно вкладати в x_1, x_3 , тобто в об'єкт g_1 для першої пари та g_3 для другої пари (відрізки AB на рис. 2, б, г). Потім більш ефективною стає стратегія розподілу ресурсів між двома об'єктами (відрізки BC). У точці C всі ресурси слід вкласти в один об'єкт — g_2 на рис. 2, б та g_4 на рис. 2, г. Для другої пари об'єктів точка C переходить у відрізок CD . При подальшому збільшенні X більш ефективним знову стає розподіл ресурсів, причому для першої пари об'єктів значення x_1 та x_2 зростають монотонно (відрізок CF на рис. 2, б), а в другій парі спочатку спостерігається перерозподіл ресурсів між

об'єктами — зростання x_3 відбувається при зменшенні x_4 (відрізок DE на рис. 2, z), а далі обидві величини зростають монотонно (відрізок EF).

Наведені результати являють собою частинні розв'язки поставленої задачі та входять як складові $i_1(x_1, x_2)$, $i_2(x_3, x_4)$ в цільову функцію $i(x_1, x_2, x_3, x_4)$, котра є сепарабельною:

$$i(x_1, x_2, x_3, x_4) = i^{(1)}(x_1, x_2) + i^{(2)}(x_3, x_4) = g_1 \frac{x_1}{x_1 + 4} + g_2 \frac{x_2^2}{x_2^2 + 32} + g_3 \frac{x_3^2}{x_3^2 + 8} + g_4 \frac{x_4^3}{x_4^3 + 16}. \quad (8)$$

Графічно функцію (8) можна представити у вигляді просторової фігури $i(X_1, X_2)$, де $X_1 = x_1 + x_2$, $X_2 = x_3 + x_4$, $X_1 + X_2 = X$ (рис. 3, b). Ребрами цієї фігури є функції $i^{(1)}(X_1)$, $i^{(2)}(X_2)$ з рис. 2, b , z (рис. 3, a).

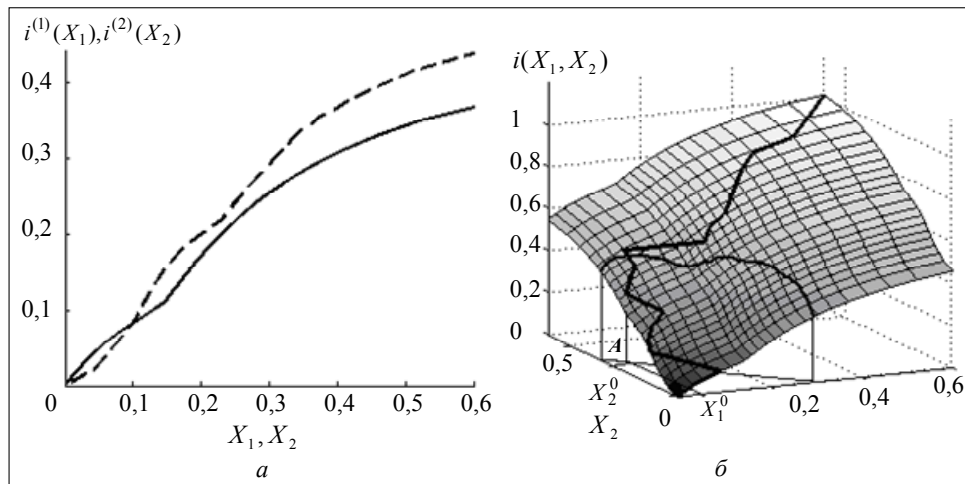


Рис. 3. Оптимальний розподіл ресурсів X для пар об'єктів

Лінія найкрутішого підйому на рис. 3, b разом із відповідними лініями на рис. 2, b , z дозволяє визначити множину значень цільової функції (8), котрі відображають оптимальний розподіл ресурсів між чотирма об'єктами для всіх можливих значень X . Для цього в площині $X_1 O X_2$ (рис. 3, b) слід провести пряму $X_1 + X_2 = X$ та через неї побудувати вертикальну площину, паралельну осі $i(X_1, X_2)$. Перетин площини з лінією найшвидшого підйому дає точку оптимізації, а її проекція на площину $X_1 O X_2$ — точку A на прямій $X_1 + X_2 = X$, яка і визначає оптимальний розподіл ресурсів X_1^0 , X_2^0 . Виходячи зі значень X_1^0 , X_2^0 , аналогічним методом знаходимо оптимальний розподіл ресурсів x_1 , x_2 (рис. 2, b) та x_3 , x_4 (рис. 2, z).

Далі розглядаємо хід протилежної сторони: вважаючи відомим розподіл $\{x_k\}$, знаходимо оптимальний розподіл $\{y_k\}$. Для цього, виходячи із заданого значення Y , будуємо просторові фігури $i(y_1, y_2)$, $i(y_3, y_4)$, знаходимо лінії найшвидшого спуску та оптимальний розподіл ресурсів захисту

між об'єктами. Почергові кроки, в яких напад розподіляє свої ресурси з метою максимізації вилученої інформації $i(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а захист розподіляє свої ресурси з метою мінімізації $i(y_1, y_2, y_3, y_4)$, приводять до ситуації, коли ці значення зрівнюються — суперникам не вигідно змінювати власні стратегії, що і є сідловою точкою.

Як приклад, зобразимо графічну інтерпретацію пошуку сідлової точки в системі з двох об'єктів (рис. 1, б). Враховуючи, що умови існування сідлової точки суттєво залежать від форми функцій вразливості, розглянемо два варіанти. У першому випадку вразливості об'єктів виражаються дробово-лінійними функціями, в другому — дробово-нелінійними. Оберемо дробово-лінійні функції у вигляді:

$$f_1^{(1)}(x, y) = \frac{x/y}{x/y + 2}; \quad f_2^{(1)}(x, y) = \frac{x/y}{x/y + 4}, \quad (9)$$

а дробово-нелінійні:

$$f_1^{(2)}(x, y) = \frac{(x/y)^2}{(x/y)^2 + 32}; \quad f_2^{(2)}(x, y) = \frac{(x/y)^3}{(x/y)^3 + 192}. \quad (10)$$

Цільова функція для першої пари вразливостей має вигляд:

$$i^{(1)}(x, y) = g_1 \frac{x_1/y_1}{x_1/y_1 + 2} + g_2 \frac{x_2/y_2}{x_2/y_2 + 4}, \quad (11)$$

для другої:

$$i^{(2)}(x, y) = \frac{(x_1/y_1)^2}{(x_1/y_1)^2 + 32} + \frac{(x_2/y_2)^3}{(x_2/y_2)^3 + 192}. \quad (12)$$

Розподіл інформації між об'єктами вважаємо рівномірним: $g_1 = g_2 = 0,5$. Перший крок робить напад. Розподіл ресурсів захисту на цьому кроці встановимо пропорційно розподілу інформації на об'єктах, тобто також рівномірним. Для першої системи маємо: $X = 0,2$, $Y = 0,05$, $Z = X/Y = 4$; для другої — $X = 0,3$, $Y = 0,05$, $Z = X/Y = 6$. Вибір розрахункових параметрів обумовлений, як і у попередньому випадку, прагненням найбільш виразного представлення результатів і не обмежує загальність застосування методики.

Графічне зображення кроків $i(x_1, x_2)$ та $i(y_1, y_2)$ має вигляд просторових фігур (рис. 4), одержаних із використанням пакету Optimization Toolbox програмного комплексу Matlab. Кожен крок являє собою розв'язок задачі умовної оптимізації: знаходження максимуму або мінімуму цільової функції за обмежень, котрі накладаються на ресурси нападу і, відповідно, захисту. На першому кроці перетин просторової фігури $i(x_1, x_2)$ з вертикальною площиною, що проходить через обмежувальну пряму $X = 0,2$, дає лінію перерізу (вона позначається напівжирною лінією на рис. 4, а). Ця лінія визначає множину усіх можливих значень $i(x_1, x_2)$, котра відповідає різним розподілам $\{x_1, x_2\}$ при заданому обмеженні X . На наступному кроці аналогічну процедуру здійснюємо відносно просторової фігури $i(y_1, y_2)$ і об-

межувальної прямої $Y = 0,05$ (рис. 4, б). Точки оптимізації на кожному кроці позначаються квадратиками.

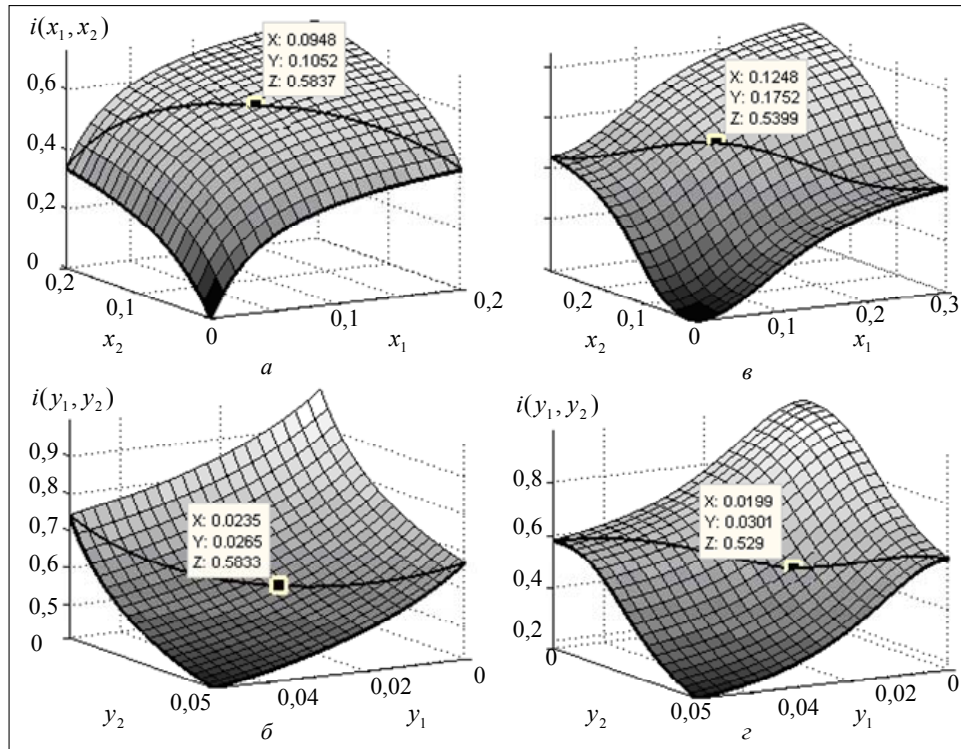


Рис. 4. Графічне зображення розв'язку задач максимізації вилучення (а, в) і мінімізації втрат (б, г) інформації в системі з двох об'єктів у випадку дробово-лінійних (а, б) та дробово-нелінійних (в, г) функцій вразливості

Просторові фігури $i(x_1, x_2)$ та $i(y_1, y_2)$ являють собою множини розв'язків цільової функції в межах загальних ресурсів нападу X та захисту Y за умови незмінності обсягу ресурсів протилежної сторони: на першому кроці $Y = \text{const}$, $X — \text{var}$, на другому $X = \text{const}$, $Y — \text{var}$. У цьому випадку має місце умовна оптимізація: умову накладено на обсяги ресурсів X та Y , тобто пошук оптимального розв'язку відбувається серед числових значень діагонального перерізу (рис. 4 — діагональна напівжирна лінія), що собою і являє накладення вищезгаданої умови.

Обмежувальні напівжирні лінії, які одержано в результаті перерізу просторової фігури координатними площинами, зображають функції вразливості, на котрих побудована фігура: на рис. 4, а при $x_2 = 0$ це $f_1^{(1)}(x_1)$ (9), розрахована при $y_1 = \frac{Y}{2} = 0,025$, при $x_1 = 0$ це $f_2^{(1)}(x_2)$ та $y_2 = 0,025$. На рис. 4, в це функції $f_1^{(2)}(x_1)$ та $f_2^{(2)}(x_2)$ (10). На рис. 4, б, г маємо відповідні функції $f(y)$ з (9), (10) при знайдених значеннях x_1, x_2 .

Залежності $i(x_1, x_2)$ та $i(y_1, y_2)$ дають змогу знайти оптимальні значення цільових функцій кожної зі сторін і відповідні розподіли своїх ресурсів при заданих величинах ресурсів протилежної сторони. Динамічне проти-

стояння, яке призводить до сідлової точки (якщо вона існує), можна спостерігати в системі координат, де враховано зміну ресурсів обох сторін. З цією метою на рис. 5 зображено функції $i(z_1, z_2)$, де $z_1 = x_1/y_1$, $z_2 = x_2/y_2$. Проаналізуємо умови появи сідлової точки.

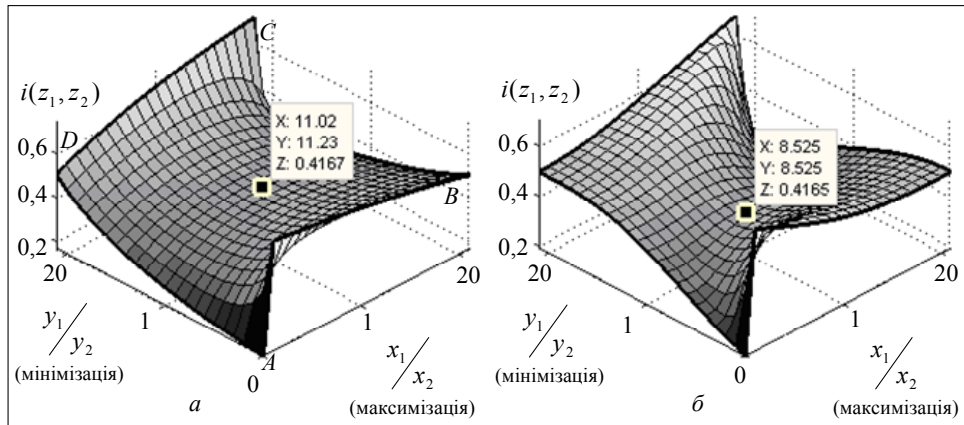


Рис. 5. Поява сідлової точки при зміні розподілу ресурсів і використанні різних типів функцій вразливості: *a* — дробово-лінійних (9) при $X = 0,2$, $Y = 0,05$, $Z = 4$, *б* — дробово-нелінійних (10) при $X = 0,25$, $Y = 0,05$, $Z = 5$

Лінія AB на рис. 5,*a* відображає ситуацію, за якої усі ресурси захисту зосереджено на другому об'єкті ($y_1/y_2 = 0$), а ресурси нападу поступово перерозподіляють, збільшуючи частку ресурсів x_1 на першому об'єкті. У початковій області значення i стрибком зростає до максимального, оскільки при $y_1 = 0$ з першого об'єкта вилучається вся інформація при будь-якому $x_1 > 0$. Частка інформації, яка вилучається з другого об'єкта при зростанні відношення x_1/x_2 , поступово зменшується через те, що збільшення величини x_1 відбувається за рахунок зменшення x_2 . В результаті лінія AB демонструє зменшення загальної величини $i = i_1 + i_2$.

Лінію AD одержано при $x_1 = 0$ — всі ресурси нападу направлено на другий об'єкт і вилучення інформації відбувається тільки з другого об'єкта. Зростання відношення y_1/y_2 вздовж лінії AD відбувається за рахунок збільшення кількості ресурсів y_1 на першому об'єкті за одночасного зменшення y_2 на другому. В результаті величина i зростає.

Лінія DC відповідає ситуації, коли переважну кількість ресурсів захисту зосереджено на першому об'єкті: $y_1/y_2 = 20$. Другий об'єкт практично не захищений, і з нього вилучається майже вся інформація. При збільшенні x_1 зростає i_1 , а за ним сумарне значення i , причому ці величини перевищують відповідні значення на кривій AB , одержані за тих самих співвідношень x_1/x_2 . Це пояснюється тим, що на лінії AB зростання x_1 не дає корисного ефекту, оскільки при $y_1 = 0$ з першого об'єкту вилучається вся інформація при будь-якому значенні x_1 . Ефект, як зазначалось, зворотній — за рахунок зменшення x_2 і, відповідно, зменшення i_2 .

Для лінії BC маємо велике відношення x_1/x_2 ($x_1/x_2 = 20$), тобто переважну кількість ресурсів нападу зосереджено на першому об'єкті. При збільшенні ресурсів захисту y_1 на цьому об'єкті величина i_1 зменшується, в той час, як i_2 змінюється несуттєво через низьке значення x_2 . Під час наближення до точки C значення y_2 стає настільки малим, що різко зростає i_2 , а з ним величина i . В результаті маємо просторову фігуру, в якій дві протилежні границі AB та CD мають опуклість направлену вгору, а дві інші — AD та BC — опуклість, направлену донизу. Така форма границі й забезпечує появу сідлової точки.

Зазначимо, що наведені особливості фігури $i(z_1, z_2)$ спостерігаються у випадку, коли вразливості об'єктів $f(x, y)$ описуються дробово-лінійними функціями. Якщо хоча б одна з функцій є дробово-нелінійною, то за певних Z напрямком окремих опуклостей може зміститися, і сідлова точка не матиме місця. У цьому випадку пошук сідлової точки зводиться до нескінченно-циклічного процесу почергового розв'язання задач максимізації та мінімізації. На рис. 6, а показано цей процес у системі з двох об'єктів, вразливості котрих описуються дробово-нелінійними функціями (11), (12), але на відміну від рис. 5, при $Z = 7$. Кружечками зображено граничні точки циклу. На рис. 6, б представлено просторове зображення цього процесу.

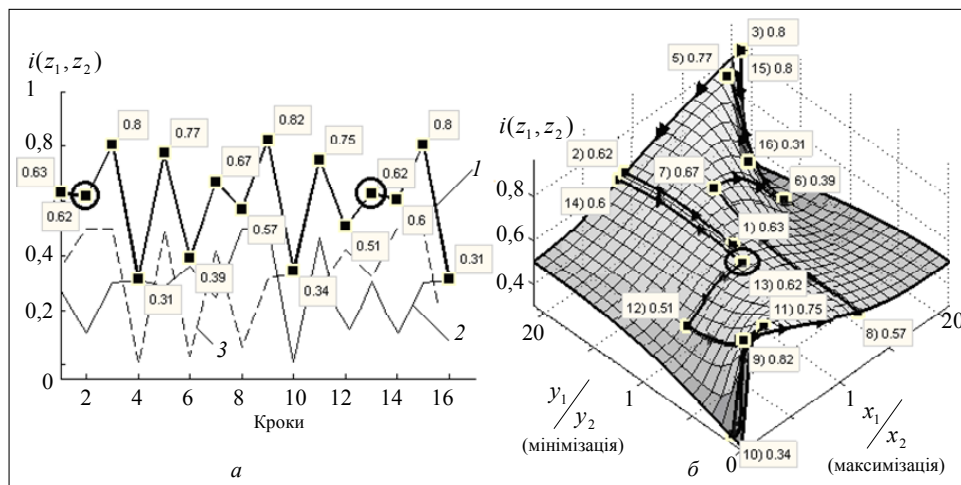


Рис. 6. Циклічний процес пошуку сідлової точки (а) і його просторове зображення (б): ламана 1 — $i_{\text{опт}}(z_1, z_2)$, 2 — $i_{1\text{опт}}(z_1, z_2)$, 3 — $i_{2\text{опт}}(z_1, z_2)$

Проаналізуємо зміну станів протягом декількох кроків, починаючи з точки 1 (вона визначається початковим розподілом ресурсів і відповідає значенню $i(z_1, z_2) = 0,63$). Перший крок, який робить захист, зображає перехід з точки 1 у точку 2 вздовж лінії $x_1/x_2 = \text{const}$, y_1/y_2 — var. Мінімальне значення $i = 0,62$ за такого руху досягається на границі області — в точці 2, де $y_1/y_2 = 20$ (майже усі ресурси захисту зосереджено на першому об'єкті). Наступний крок, котрий робить напад, направлено на максимізацію значення i та зображається рухом вздовж лінії $y_1/y_2 = 20$ з точки 2 в точку 3, що знаходиться на перетині граничних ліній і відповідає значенню $i = 0,8$.

У подальшому рух відбувається вздовж лінії $x_1/x_2 = 20$, і через декілька кроків ми переходимо на ще одну граничну лінію $y_1/y_2 = 0$ та зрештою повертаємось у початкову точку. Той факт, що у своєму русі робоча точка періодично виходить на границі області, свідчить про те, що процес не є збіжним, оскільки сідлова точка відсутня (сідлові точки розглядаємо лише в чистих стратегіях).

На форму просторової фігури і наявність сідлової точки впливає: форма функцій вразливості $f_k(x, y)$, яка визначається параметрами n, c та співвідношенням ресурсів нападу і захисту $Z = X/Y$, яке обмежує можливі значення x/y в функціях вразливості, а також розподіл інформації g_1/g_2 між об'єктами.

Найбільший вплив на інтервал ΔZ серед інших чинників мають вразливості об'єктів, а саме ступінь нелінійності функцій $f(x, y)$, яка, в основному, визначається параметром n . При дробово-лінійних функціях ($n = 1$), а також при $n < 1$ сідлова точка існує при всіх значеннях Z . Вплив обох параметрів — n та c — показано на рис. 7, а, де зображено інтервали існування сідлової точки в системі з двох однакових об'єктів ($g_1 = g_2, n_1 = n_2 = n$) за різних n для двох значень c . Величини Z на рис. 7, а показані до значень $Z = 20$, величини n — до $n = 3$. При $n > 1$ інтервал ΔZ стає обмеженим, при $n = 1$ з'являється нижня межа, котра при $c = 32$ та зростанні n монотонно рухається в бік збільшення Z , а потім (при $n = 1,5$) нижня межа починає опускатись і виникає верхня межа, яка рухається в бік малих Z , поступово звужуючи інтервал ΔZ й переміщуючи його в бік менших Z .

При $c = 192$ форма лінії, яка зображає верхню межу, практично не змінюється, проте сама лінія зміщується в бік більших n . Поведінка нижньої межі виражена більш яскраво: в інтервалі значень n від 1 до 1,35 спостерігається різке зростання, а при $n > 1,35$ — поступовий спад. Ширина інтервалу ΔZ існування сідлової точки поступово спадає зі збільшенням n , а самі інтервали зміщуються в бік більших значень n .

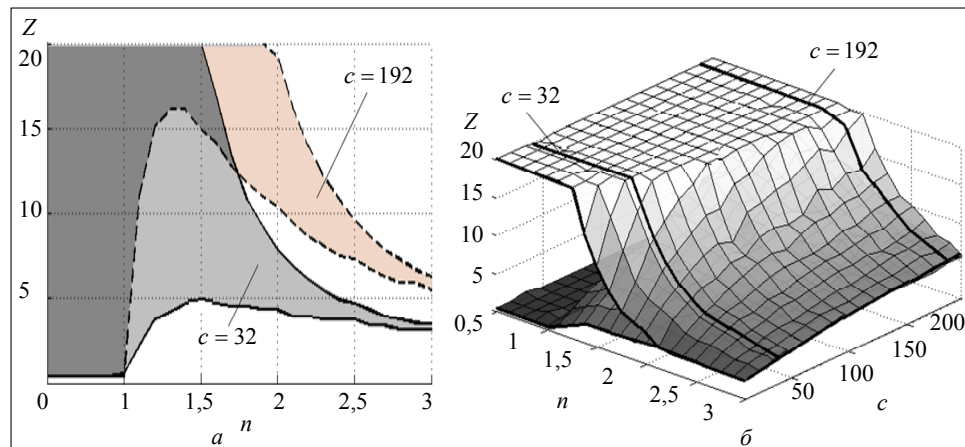


Рис. 7. Інтервали існування сідлових точок при $g_1 = g_2$ та: а — при різних n та двох значеннях c ; б — при різних n та різних c

Значення Z , необхідні для існування сідлової точки, в залежності від обох параметрів n та c при їх неперервній зміні, показано у вигляді просторової фігури на рис. 7, б. Інтервали ΔZ знаходяться між нижньою і верхньою поверхнями. Напівжирними лініями виділено верхні межі зображених на рис. 7, а, залежностей $Z(n)$ для двох значень $c = 32$ та $c = 192$. Попередні результати отримані для випадку, коли інформацію розподілено між об'єктами порівну: $g_1 = g_2$.

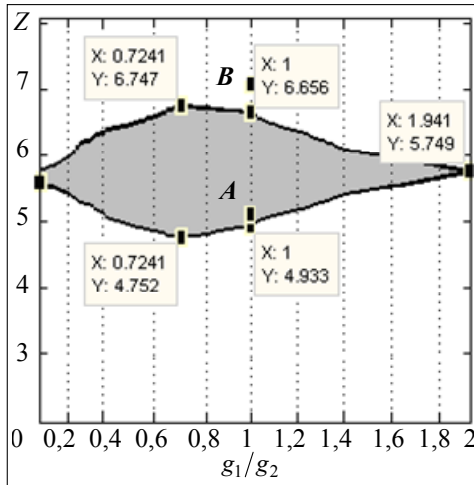


Рис. 8. Область існування сідлових точок у випадку дробово-нелінійних функцій $f(x, y)$

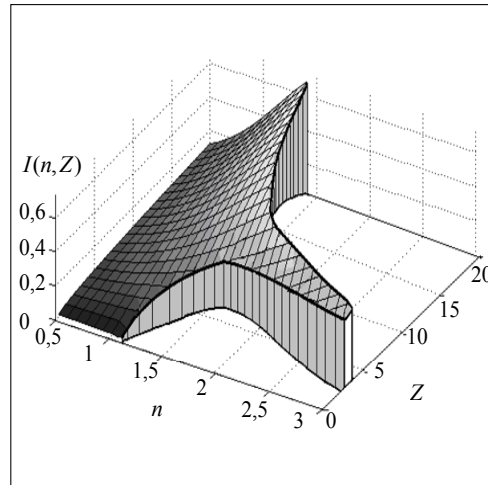


Рис. 9. Значення $i(n, Z)$ в області існування сідлової точки при $c = 32$

На рис. 8 показано інтервали існування сідлових точок у залежності від відношення g_1/g_2 для системи з дробово-нелійними функціями вразливості. При певному співвідношенні g_1/g_2 інтервал ΔZ існування сідлової точки досягає максимуму (на рис. 8 цей інтервал має місце при $g_1/g_2 = 0,7241$ і становить $(\Delta Z)_{\max} = 6,747 - 4,752 = 1,995$). Зазначимо, що просторова фігура (рис. 5, б) відповідає точці А на рис. 8 з $g_1/g_2 = 1$, $Z = 5$, котра знаходиться в області існування сідлових точок, а фігура, зображена на рис. 6, б — точці В з $Z = 7$ поза межами цієї області.

Ще один важливий показник — значення $i(Z)$ в інтервалі існування сідлової точки. Ці величини показано у вигляді просторової фігури $i(n, Z)$ на рис. 9, б. Поверхня $i(n, Z)$ має досить складну форму, вигнуту в обох напрямках.

Швидкість досягнення сідлової точки в процесі почергової оптимізації залежить від того, наскільки близько знаходиться початкова точка від сідлової. Проаналізуємо вплив початкових умов на кількість кроків, необхідних для досягнення сідлової точки в системі, сформованій дробово-нелійними функціями $f(x, y)$ (6), (7) (рис. 2, в). Результати рис. 10, а, б одержані за початкових умов $y_1 = y_2 = Y/2 = 0,025$, результати рис. 10, б, г — при $y_1 = 0,0225$, $y_2 = 0,0275$. Кількість кроків при цьому зросла з чотирьох до дванадцяти.

вості об'єктів. Ці залежності мають найбільший вплив на інформаційну безпеку системи. Визначення їх форми і ступеня відповідності реальним системам є важливим завданням математичного моделювання процесу протистояння двох сторін в інформаційній сфері.

ЛІТЕРАТУРА

1. Демчишин М.В. Геометрична інтерпретація оптимізації розподілу ресурсів між об'єктами захисту інформації, *Захист інформації*. — 2011. — № 2(51). — С. 21–28.
2. Левченко Є.Г., Рабчун А.О. Оптимізаційні задачі менеджменту інформаційної безпеки // *Сучасний захист інформації*. — 2010. — № 1. — С. 16–23.
3. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операций. — М.: Проспект. — 2006. — 280 с.
4. Левченко Є.Г., Демчишин М.В., Рабчун А.О. Математичні моделі економічного менеджменту інформаційної безпеки // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2011. — № 4. — С. 88–96.
5. Gordon L.A., Loeb M.P. The Economics of Information Security Investment // *ACM Transactions on Information and System Security*. — 2002. — 5, № 4. — P. 438–457.
6. Liu W., Tanaka H., Matsuura K. Empirical-Analysis Methodology for Information-Security Investment and Its Application to a Reliable Survey of Japanese Firms // *Information Processing of Japan Digital Courier*, Sep. 2007. — 3. — P. 585–599.

Надійшла 29.10.2012