

**ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ
ПРОЦЕССОВ В КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ НА ОСНОВЕ
МОДЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ**

В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МИЛЯВСКИЙ

Рассмотрен вопрос о соответствии между когнитивными картами и моделями динамики процесса в пространстве состояний, а также об управлении когнитивной картой с целью обеспечения ее устойчивости. Предложен метод перехода от модели в пространстве состояний к когнитивной карте. Показано, каким образом введение регулятора состояния может быть отражено в соответствующей когнитивной карте. Также рассмотрен случай, когда вектор состояния неизмеряем и применяется наблюдатель Люенбергера. Доказано в каких случаях из асимптотической устойчивости модели в пространстве состояний следует абсолютная устойчивость когнитивной карты. Предложен также способ обратного перехода от когнитивной карты к пространству состояний. В результате получен способ стабилизации неустойчивой когнитивной модели с помощью введения управления на основе регулятора состояния. Рассмотрен практический пример, демонстрирующий практическое применение предложенных методов.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из подходов к решению сложноструктурированных слабоформализуемых задач является когнитивное моделирование, в основе которого лежит понятие когнитивной карты. Согласно [1, 2], когнитивная карта — это ориентированный граф, вершины (узлы) которого отражают некоторые факторы (понятия, сущности, концепты), а ребра — связи между этими факторами. Аксельрод [1] использовал эту методологию преимущественно в психологии (отсюда и название), а Робертс [2] в основном развивал математический аппарат теории графов для решения социально-экономических задач. Первым предложенным вариантом когнитивной карты являлся знаковый орграф, в котором знак «плюс» над ребром из вершины А в вершину Б означает, что увеличение значения в вершине А ведет к увеличению значения в вершине Б, а знак «минус» означает, что увеличение в А ведет к уменьшению в Б. Для нас более интересным является случай взвешенного орграфа, предложенного также Робертсом [2], когда над ребрами надписываются не знаки, а числа, характеризующие степень влияния фактора А на фактор Б.

В настоящее время зарубежные ученые уделяют много внимания изучению нечетких когнитивных карт и других многочисленных модификаций [5, 6]. Модификации включают в себя функциональные когнитивные карты (над ребрами надписываются не числа, а функции), динамические когнитивные карты, карты с запаздываниями и многие другие. В работах российских исследователей Г.В. Гореловой, З.К. Авдеевой, Н.А. Абрамовой, С.В. Ковриги, В.И. Максимова, А.А. Кулинича и прочих [3, 7, 8] рассматриваются более общие задачи когнитивного моделирования, связанные не только с анализом имеющихся когнитивных карт, а и с общей методологией построения когнитивных моделей. Не ставя здесь задачу подробного обзора всех достижений в этой области, следует отметить, что большинство исследований посвящено построению, моделированию, анализу, применению когнитивных карт, но задача стабилизации и управления в когнитивном моделировании остается, в принципе, нерешенной. Также ранее не предпринимались попытки установления взаимосвязей между когнитивными моделями и классическими моделями и методами теории управления.

Цель работы — установление взаимосвязей между когнитивными картами и моделями в пространстве состояний, а также построения алгоритма управления когнитивной картой на основе методов теории управления.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем некоторые обозначения, которые будут использоваться в данной статье. Пусть когнитивная модель задана взвешенным ориентированным графом $\langle Z, W \rangle$, где Z — множество из n вершин (факторов) с числовыми значениями в каждой вершине, W — множество ориентированных ребер с весами. Для единообразия будем обозначать также через $Z(k)$ вектор значений $z_i(k)$, $i = 1, \dots, n$, во всех вершинах в момент времени k , через W — матрицу смежности с весами связей, w_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, — вес связи ребра, исходящего из вершины x_i в вершину x_j . В [2] Робертс рассматривает «правило изменения значений параметров вершин», т.е. математическое выражение степени влияния изменения одного фактора на другой. Наиболее распространенное (но не единственное) правило изменения значений параметров вершин формулируется в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях [2, 3, 4]:

$$\Delta z_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ji} \Delta z_j(k), \quad (1)$$

где $\Delta z_i(k) = z_i(k) - z_i(k-1)$, $i = 1, \dots, n$. В векторной форме (1) можно записать как

$$\Delta Z(k+1) = W^T \Delta Z(k). \quad (2)$$

В дальнейшем мы будем использовать именно это правило. Отметим, что в правой части равенства (1) может находиться слагаемое с $\Delta z_i(k)$, т.е. в графе возможны петли (приращение в данной вершине может зависеть от приращения в этой же вершине на предыдущем шаге).

Одним из важнейших понятий при анализе когнитивных карт является понятие устойчивости. Существует много определений и критериев устойчивости когнитивных моделей. Мы будем использовать следующие наиболее общие и простые определения [2]. Вершина Z_i называется импульсно устойчивой, если последовательность $\{|\Delta Z_i(k)|: k = 0, 1, 2, \dots\}$ ограничена при импульсном процессе (1), определяемом произвольным набором начальных значений и импульсов (приращений). Вершина Z_i называется абсолютно устойчивой, если последовательность $\{Z_i(k): k = 0, 1, 2, \dots\}$ ограничена при произвольном импульсном процессе (1). Когнитивная карта называется импульсно (абсолютно) устойчивой, если все ее вершины импульсно (абсолютно) устойчивы.

ПЕРЕХОД ОТ МОДЕЛИ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ К МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ КОГНИТИВНОЙ КАРТЫ

Рассмотрим для начала простейшую двумерную модель динамики процесса в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= f_{11}x_1(k) + f_{12}x_2(k) + g_1u(k), \\x_2(k+1) &= f_{21}x_1(k) + f_{22}x_2(k) + g_2u(k), \\y(k) &= c_1x_1(k) + c_2x_2(k).\end{aligned}\quad (3)$$

Покажем каким образом ее можно представить в виде когнитивной карты, описываемой моделью (1). Во-первых, отметим, что модель не изменится, если записать ее в приращениях (естественно, при условии соответствующего выбора начальных значений):

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k+1) &= f_{11}\Delta x_1(k) + f_{12}\Delta x_2(k) + g_1\Delta u(k), \\ \Delta x_2(k+1) &= f_{21}\Delta x_1(k) + f_{22}\Delta x_2(k) + g_2\Delta u(k), \\ \Delta y(k) &= c_1\Delta x_1(k) + c_2\Delta x_2(k).\end{aligned}\quad (4)$$

Основное отличие модели (4) от модели (1) заключается в том, что в (1) невозможно отобразить мгновенные связи — уравнение измерения в (4). Преобразуем (4) следующим образом: запишем уравнение измерения на один шаг вперед, а потом подставим в него уравнения состояния. Получим

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k+1) &= f_{11}\Delta x_1(k) + f_{12}\Delta x_2(k) + g_1\Delta u(k), \\ \Delta x_2(k+1) &= f_{21}\Delta x_1(k) + f_{22}\Delta x_2(k) + g_2\Delta u(k),\end{aligned}\quad (5)$$

$$\Delta y(k+1) = (c_1f_{11} + c_2f_{21})\Delta x_1(k) + (c_2f_{12} + c_2f_{22})\Delta x_2(k) + (c_1g_1 + c_2g_2)\Delta u(k).$$

Пусть $Z = (u \ x_1 \ x_2 \ y)^T$. Тут и далее будем предполагать именно такую нумерацию вершин в графе: сначала вершины управления, затем состояния и потом наблюдения. Представим (5) в форме (2). В результате получим когнитивную карту, показанную на рис. 1, с такой весовой матрицей смежности:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & c_1g_1 + c_2g_2 \\ 0 & f_{11} & f_{21} & c_1f_{11} + c_2f_{21} \\ 0 & f_{12} & f_{22} & c_1f_{12} + c_2f_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

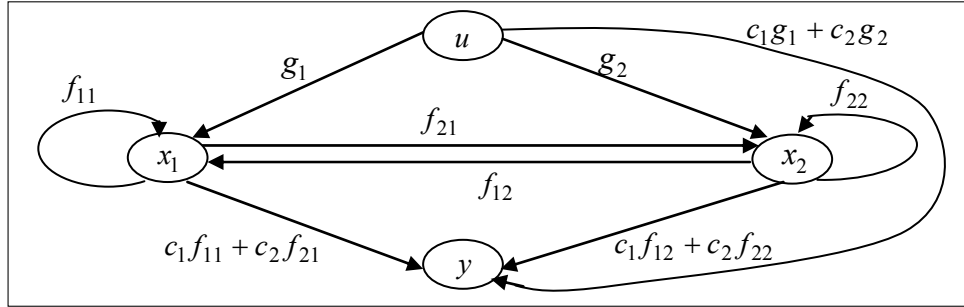


Рис. 1. Пример когнитивной карты

Абсолютная устойчивость графа, заданного матрицей (6), достигается, когда все ее собственные числа по модулю меньше единицы [2]. Раскрывая $\det(zI_4 - W)$, где I_4 — единичная матрица четвертого порядка, легко увидеть, что матрица W имеет два нулевых собственных числа, а остальные два — это собственные числа матрицы $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$. Следовательно, абсолютная устойчивость когнитивной карты обеспечивается асимптотической устойчивостью системы в пространстве состояний.

Покажем, что произвольную модель динамики в пространстве состояний можно представить в виде когнитивной модели. Пусть модель имеет вид

$$X(k+1) = FX(k) + GU(k), \quad Y(k) = CX(k). \quad (7)$$

Теорема 1. Динамика процесса в пространстве состояний (7) может быть представлена в виде когнитивной карты с весовой матрицей смежности W , где

$$W^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G & F & 0 \\ CG & CF & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Доказательство. Запишем (7) в приращениях переменных:

$$\Delta X(k+1) = F\Delta X(k) + G\Delta U(k), \quad \Delta Y(k) = C\Delta X(k),$$

где

$$\Delta X(k) = X(k) - X(k-1), \quad \Delta U(k) = U(k) - U(k-1), \quad \Delta Y(k) = Y(k) - Y(k-1).$$

Запишем уравнение измерения на один шаг квантования вперед и подставим в него правую часть уравнения состояния, после чего получим

$$\Delta X(k+1) = F\Delta X(k) + G\Delta U(k), \quad \Delta Y(k+1) = CF\Delta X(k) + CG\Delta U(k). \quad (9)$$

Непосредственные вычисления позволяют убедиться, что для того, чтобы полученное выражение (9) было эквивалентно (7), достаточно положить

$$X(0) = X_0, Y(0) = Y_0 = CX_0,$$

$$U(0) = U_0, \Delta X(1) = (F - I)X_0 + GU_0, \Delta U(1) = 0, \Delta Y(1) = C\Delta X(1),$$

где X_0, U_0, Y_0 — начальные значения в модели (7). Предполагается, что на систему в дальнейшем не действуют внешние импульсы, в том числе управленческие, т.е. $U(k) = U_0 \forall k \geq 0$ или иначе $\Delta U(k) = 0 \forall k > 0$. Случай, когда управление формируется в замкнутой системе, будет рассмотрен ниже.

Пусть в когнитивной карте количество вершин равно количеству переменных, в зависимости от принадлежности к векторам X, U, Y будем называть их вершинами состояния, управления и наблюдения соответственно. Коэффициенты матрицы G являются весами ребер, ведущих от управляющих вершин к вершинам состояний. Коэффициенты матрицы F присваиваются ребрам, связывающим вершины состояний между собой (диагональные элементы — веса петель). От вершин состояния к вершинам наблюдения ведут ребра с весами из коэффициентов матрицы CF , а от вершин управления к вершинам наблюдения — из коэффициентов матрицы CG . Поскольку система разомкнута, и динамика вектора управления не определена системой (7), у вершин управления нет входящих ребер, т.е. соответствующие столбцы матрицы смежности нулевые. Тогда

$$\begin{pmatrix} \Delta U(k+1) \\ \Delta X(k+1) \\ \Delta Y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G & F & 0 \\ CG & CF & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U(k) \\ \Delta X(k) \\ \Delta Y(k) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходя из (2), матрица смежности удовлетворяет (8). Теорема доказана.

Покажем в общем случае соответствие между собственными числами матрицы состояния и корнями характеристического полинома когнитивной карты.

Теорема 2. Все ненулевые собственные числа когнитивной карты, описываемой (8), равны собственным числам матрицы состояния модели (7).

Доказательство. Рассмотрим

$$\det(zI_n - W) = \det(zI_n - W^T) = \begin{vmatrix} zI_{n_u} & 0 & 0 \\ -G & zI_{n_x} - F & 0 \\ -CG & -CF & zI_{n_y} \end{vmatrix},$$

где нижний индекс при I означает размерность единичной матрицы, n_u, n_x, n_y — размерности векторов управления, состояния, наблюдения соответственно, $n = n_u + n_x + n_y$. Будем раскрывать определитель сначала по строкам сверху вниз и получим

$$\det(zI_n - W) = z^{n_u} \begin{vmatrix} zI_{n_x} - F & 0 \\ -CF & zI_{n_y} \end{vmatrix}.$$

Затем будем раскрывать определитель по столбцам справа и получим $\det(zI_n - W) = z^{n_u+n_y} \det(zI - F)$. Итак, корни характеристического полинома матрицы смежности (ее собственные числа) включают в себя ноль (крат-

ности $n_u + n_y$) и корни полинома $\det(zI - F)$, т.е. собственные числа матрицы состояния F модели (7). Теорема доказана.

Следствие 1. Если собственные числа матрицы F по модулю меньше единицы (т.е. модель (7) асимптотически устойчива), то когнитивная модель, определяемая матрицей смежности (8), будет абсолютно устойчивой.

Доказательство. Когнитивная модель абсолютно устойчива, если все собственные числа матрицы смежности по модулю меньше единицы. А из теории управления известно, что модель (7) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы состояния по модулю меньше единицы. Отсюда и из теоремы 2 получим требуемое утверждение.

ПЕРЕХОД ОТ МОДЕЛИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ С РЕГУЛЯТОРОМ СОСТОЯНИЯ К МОДЕЛИ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ В ВИДЕ КОГНИТИВНОЙ КАРТЫ

Самым простым способом стабилизации динамической модели, заданной в пространстве состояний, является регулятор состояния. Рассмотрим, каким образом систему с регулятором состояния (при некоторой заданной матрице усиления регулятора) можно представить в виде когнитивной карты. Продолжим предыдущий пример, добавив к (3) уравнение регулятора состояния:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_{11}x_1(k) + f_{12}x_2(k) + g_1u(k), \\ x_2(k+1) &= f_{21}x_1(k) + f_{22}x_2(k) + g_2u(k), \\ y(k) &= c_1x_1(k) + c_2x_2(k), \quad u(k) = -K_1x_1(k) - K_2x_2(k). \end{aligned} \quad (10)$$

После перехода к приращениям необходимо «избавиться» от мгновенного взаимодействия в регуляторе, не изменяя при этом динамики системы. Запишем уравнение регулятора на один шаг квантования вперед и подставим в правую часть уравнения состояния. После преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta x_1(k+1) &= f_{11}\Delta x_1(k) + f_{12}\Delta x_2(k) + g_1\Delta u(k), \\ \Delta x_2(k+1) &= f_{21}\Delta x_1(k) + f_{22}\Delta x_2(k) + g_2\Delta u(k), \\ \Delta y(k+1) &= (c_1f_{11} + c_2f_{21})\Delta x_1(k) + (c_1f_{12} + c_2f_{22})\Delta x_2(k) + \\ &\quad + (c_1g_1 + c_2g_2)\Delta u(k), \\ \Delta u(k+1) &= -(K_1f_{11} + K_2f_{21})\Delta x_1(k) - (K_1f_{12} + K_2f_{22})\Delta x_2(k) - \\ &\quad - (K_1g_1 + K_2g_2)\Delta u(k). \end{aligned} \quad (11)$$

Матрица смежности имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} -(K_1g_1 + K_2g_2) & g_1 & g_2 & c_1g_1 + c_2g_2 \\ -(K_1f_{11} + K_2f_{21}) & f_{11} & f_{21} & c_1f_{11} + c_2f_{21} \\ -(K_1f_{12} + K_2f_{22}) & f_{12} & f_{22} & c_1f_{12} + c_2f_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Получим когнитивную карту с управлением (рис. 2).

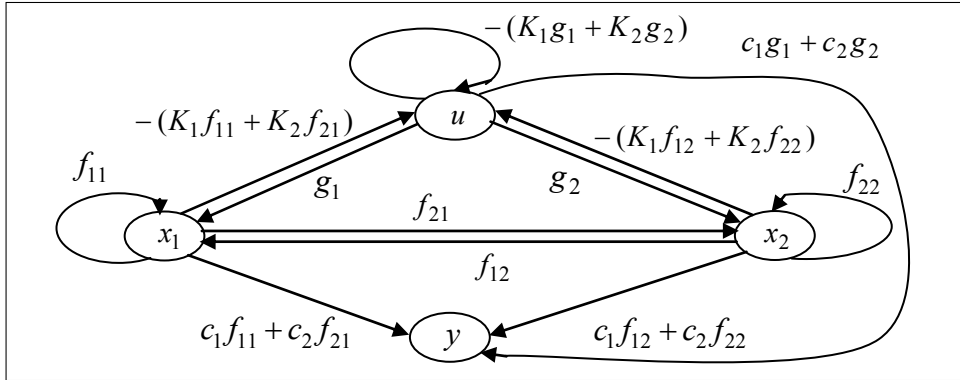


Рис. 2. Пример когнитивной карты с управлением

Найдем характеристическое уравнение этой модели (промежуточные преобразования опущены):

$$\det(zI_4 - W) = z^2(z^2 + z(K_1g_1 + K_2g_2 - f_{11} - f_{22}) + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + K_1g_2f_{12} + K_2g_1f_{21} - K_1g_1f_{22} - K_2g_2f_{11}). \quad (13)$$

Итак, уравнение (13) имеет два нулевых корня, а остальные два корня можно разместить желаемым образом, выбирая соответственно K_1, K_2 (метод синтеза регулятора по желаемому размещению полюсов). В данном случае это легко сделать с помощью теоремы Виета, а именно — пусть желаемые полюса замкнутой системы равны z_1, z_2 , тогда

$$K_1g_1 + K_2g_2 - f_{11} - f_{22} = -(z_1 + z_2),$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + K_1g_2f_{12} + K_2g_1f_{21} - K_1g_1f_{22} - K_2g_2f_{11} = z_1z_2.$$

Из системы с двух уравнений с двумя неизвестными несложно найти коэффициенты K_1, K_2 (если она совместна).

Для сравнения найдем характеристическое уравнение замкнутого контура системы (10):

$$\begin{aligned} \det\left(zI_2 - \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix}\right) = \\ = z^2 + z(K_1g_1 + K_2g_2 - f_{11} - f_{22}) + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + K_1g_2f_{12} + \\ + K_2g_1f_{21} - K_1g_1f_{22} - K_2g_2f_{11}. \end{aligned}$$

Итак, с учетом двух нулевых корней, получаем, что абсолютная устойчивость когнитивной карты с управлением обеспечивается асимптотической устойчивостью замкнутой системы с регулятором состояния. Таким образом, можно выбирать коэффициенты усиления K_1, K_2 так, чтобы когнитивная карта была устойчивой, что эквивалентно синтезу регулятора по заданному размещению полюсов замкнутой системы [9].

В общем случае, пусть замкнутая система с регулятором по состоянию имеет вид

$$X(k+1) = FX(k) + GU(k), \quad Y(k) = CX(k), \quad U(k) = -KX(k). \quad (14)$$

Теорема 3. Динамика замкнутой системы в пространстве состояний (14) может быть представлена в виде когнитивной карты с весовой матрицей смежности W , где

$$W^T = \begin{pmatrix} -KG & -KF & 0 \\ G & F & 0 \\ CG & CF & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Доказательство. Уравнения состояния и наблюдения эквивалентно преобразуются к виду (9). Для преобразования уравнения регулятора запишем его на один шаг вперед и, подставив в него правую часть (9), получим

$$\begin{aligned} \Delta X(k+1) &= F\Delta X(k) + G\Delta U(k), \\ \Delta Y(k+1) &= CF\Delta X(k) + CG\Delta U(k), \\ \Delta U(k+1) &= -KF\Delta X(k) - KG\Delta U(k), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} X(0) &= X_0, Y(0) = Y_0 = CX_0, \\ U(0) &= -KX_0, \Delta X(1) = (F - I)X_0 + GU(0), \Delta U(1) = -K\Delta X(1), \\ \Delta Y(1) &= C\Delta X(1). \end{aligned}$$

Эти условия необходимы для эквивалентности динамики (16) и (14).

Итак, введение в модель в пространстве состояний (7) управляющего воздействия ведет к появлению дополнительных ребер в когнитивной карте. А именно: от вершин состояния к вершинам управления идут ребра с весами, определяющимися коэффициентами матрицы KF , а вершины управления соединяются ребрами с коэффициентами матрицы KG .

$$\begin{pmatrix} \Delta U(k+1) \\ \Delta X(k+1) \\ \Delta Y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -KG & -KF & 0 \\ G & F & 0 \\ CG & CF & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U(k) \\ \Delta X(k) \\ \Delta Y(k) \end{pmatrix}.$$

На основании (2) следует, что матрица смежности удовлетворяет (15).

Теорема доказана.

Следствие 2. Если собственные числа матрицы $F - GK$ по модулю меньше единицы (т.е. замкнутая система (14) асимптотически устойчива), то когнитивная модель, заданная матрицей смежности (15), будет абсолютно устойчивой.

Доказательство. Как известно из теории управления, модель в пространстве состояний (14) будет асимптотически устойчивой, если собственные числа матрицы $F - GK$ по модулю меньше единицы, поскольку, подставив закон управления в уравнение состояния, получим уравнение замкнутой системы $X(k+1) = (F - GK)X(k)$. Если система (14) устойчива, все входящие в нее переменные будут ограничены. С другой стороны, согласно теореме 3, когнитивная модель (15) имеет в точности ту же динамику, что и модель в пространстве состояний (14), т.е. все ее переменные также будут ограничены, а это и есть определение абсолютной устойчивости когнитивной карты.

Следствие 3. Если система в пространстве состояний (7) стабилизируема, то эквивалентная ей когнитивная модель (8) также стабилизируема

в том смысле, что возможно обеспечить ее абсолютную устойчивость путем приведения ее к виду (15).

Доказательство. Система в пространстве состояний (7) стабилизируема, если существует такая матрица K , при которой замкнутая система (14) будет устойчивой [10]. Поскольку системы (14) и (15) эквивалентны согласно теореме 3, а устойчивость (14) влечет за собой абсолютную устойчивость (15) согласно следствию 2, то из стабилизируемости (14) следует стабилизируемость (15).

УПРАВЛЕНИЕ В КОГНИТИВНОЙ МОДЕЛИ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ СОСТОЯНИЯ

Для синтеза управления приведенным выше способом необходимо, чтобы все вершины состояния были измеряемы. Это не всегда так. В теории управления в случае ненаблюдаемости вектора состояния вводят наблюдатель Люенбергера [9], а для управления используют оцененные с его помощью значения. Покажем, каким образом эту методику можно применить в когнитивном моделировании (в предположении о наличии необходимых свойств стабилизируемости и обнаруживаемости [10]).

Запишем систему с наблюдателем и регулятором в пространстве состояний:

$$X(k+1) = FX(k) + GU(k), \quad Y(k) = CX(k),$$

$$\hat{X}(k+1) = F\hat{X}(k) + GU(k) + L(Y(k) - C\hat{X}(k)), \quad U(k) = -K\hat{X}(k), \quad (17)$$

где $\hat{X}(k)$ — вектор оценок состояния, L — матрица наблюдателя Люенбергера, выбираемая из соображений устойчивости контура оценивания, а именно таким образом, чтобы корни полинома $\det(F - LC)$ были по модулю меньше единицы. Преобразуем (17) к следующему виду:

$$X(k+1) = FX(k) + GU(k),$$

$$Y(k+1) = CFX(k) + CGU(k),$$

$$\hat{X}(k+1) = (F - LC)\hat{X}(k) + GU(k) + LY(k), \quad (18)$$

$$U(k+1) = -K(F - LC)\hat{X}(k) - KGU(k) - KLY(k).$$

Для того, чтобы представить (18) в виде когнитивной карты, необходимо ввести дополнительные вершины — вершины оценок $\hat{X}(k)$. Это увеличивает размерность карты, но позволяет сформировать обратные связи по управлению в случае неизмеряемости вершин состояния. Переходя, как обычно, к приращениям переменных, с учетом соответственного выбора начальных значений для оценок и управлений, в итоге получим:

$$\begin{pmatrix} \Delta U(k+1) \\ \Delta X(k+1) \\ \Delta \hat{X}(k+1) \\ \Delta Y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -KG & 0 & -K(F - LC) & -KL \\ G & F & 0 & 0 \\ G & 0 & F - LC & L \\ CG & CF & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U(k) \\ \Delta X(k) \\ \Delta \hat{X}(k) \\ \Delta Y(k) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в данном случае

$$W^T = \begin{pmatrix} -KG & 0 & -K(F-LC) & -KL \\ G & F & 0 & 0 \\ G & 0 & F-LC & L \\ CG & CF & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Проиллюстрируем такой подход на предыдущем примере (10). Введем наблюдатель Люенбергера:

$$x_1(k+1) = f_{11}x_1(k) + f_{12}x_2(k) + g_1u(k),$$

$$x_2(k+1) = f_{21}x_1(k) + f_{22}x_2(k) + g_2u(k),$$

$$y(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k),$$

$$\hat{x}_1(k+1) = f_{11}\hat{x}_1(k) + f_{12}\hat{x}_2(k) + g_1u(k) + L_1(y(k) - c_1\hat{x}_1(k) - c_2\hat{x}_2(k)),$$

$$\hat{x}_2(k+1) = f_{21}\hat{x}_1(k) + f_{22}\hat{x}_2(k) + g_2u(k) + L_2(y(k) - c_1\hat{x}_1(k) - c_2\hat{x}_2(k)),$$

$$u(k) = -K_1\hat{x}_1(k) - K_2\hat{x}_2(k).$$

Запишем уравнение динамики вершин когнитивной карты:

$$\begin{pmatrix} \Delta u(k+1) \\ \Delta x_1(k+1) \\ \Delta x_2(k+1) \\ \Delta \hat{x}_1(k+1) \\ \Delta \hat{x}_2(k+1) \\ \Delta y(k+1) \end{pmatrix} = W^T \begin{pmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta x_1(k) \\ \Delta x_2(k) \\ \Delta \hat{x}_1(k) \\ \Delta \hat{x}_2(k) \\ \Delta y(k) \end{pmatrix},$$

где

$$W^T = \begin{pmatrix} -(K_1g_1 + K_2g_2) & 0 & 0 & -K_1f_{11} - K_2f_{21} + K_1L_1c_1 + K_2L_2c_1 & -K_1f_{12} - K_2f_{22} + K_1L_1c_2 + K_2L_2c_2 & -(K_1L_1 + K_2L_2) \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & f_{11} - c_1L_1 & f_{12} - c_2L_1 & L_1 \\ g_2 & 0 & 0 & f_{21} - c_1L_2 & f_{22} - c_2L_2 & L_2 \\ c_1g_1 + c_2g_2 & c_1f_{11} + c_2f_{21} & c_1f_{12} + c_2f_{22} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПЕРЕХОД ОТ КОГНИТИВНОЙ МОДЕЛИ К МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В большинстве практических ситуаций, когда процесс описывается когнитивной моделью (на основе когнитивной карты), для исследования импульсных процессов необходимо выполнить переход к модели в пространстве состояний. Это позволит применить для решения задачи стабилизации

импульсного процесса в когнитивной модели известные методы современной теории управления, а затем перейти обратно к когнитивной карте с помощью вышеописанных методов.

Рассмотрим определенный класс когнитивных карт, для которых такой переход легко осуществим. Пусть среди множества вершин Z можно выделить непустое подмножество вершин U , которые не имеют входящих ребер (являются истоками) и, при этом, с точки зрения предметной области, могут рассматриваться как такие, которыми можно управлять, т.е. значения которых могут изменяться лицом, принимающим решения. Это требует вмешательства человека — эксперта, что, впрочем, является нормальной практикой в когнитивном моделировании, поскольку сама когнитивная карта также строится при участии эксперта. Если такое подмножество U существует, задача перехода от когнитивной карты к модели в пространстве состояний решается. Если такого подмножества не существует, можно построить модель свободного движения без управляющего воздействия (типа $X(k+1) = FX(k)$), однако в целях стабилизации системы такая модель не представляется полезной.

Итак, пусть U существует. Обозначим остальные вершины через X и упорядочим вершины так, чтобы вначале шли вершины из U (назовем их управляющими), а затем из X (назовем их вершинами состояния). Поскольку управляющие вершины являются истоками, при таком упорядочивании матрицу смежности можно записать в следующем блочном виде:

$$W^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G & F \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тогда на основе (2) динамику процесса можно представить так:

$$\Delta X(k+1) = F\Delta X(k) + G\Delta U(k). \quad (21)$$

Поскольку переход от модели в приращениях к модели в абсолютных величинах неоднозначен, мы не будем вводить дополнительные предположения о начальных значениях, а вместо этого положим, что приращения в вершинах модели сами по себе являются переменными в пространстве состояний. Это вполне естественно, если учесть, что обычно в когнитивном моделировании рассматриваются именно импульсы, т.е. приращения, а не абсолютные величины, и потому управлять непосредственно приращениями (как в вершинах управления, так и состояния) оказывается удобно. К тому же, в таком случае не требуются те дополнительные ограничения на начальные значения, которые мы вводили при доказательстве предыдущих теорем, поскольку вместо моделей (7), (14), (17) мы будем сразу же иметь соответственные модели в приращениях. Заметим, что все остальные выкладки из предыдущих подразделов останутся практически без изменений, поэтому мы не будем их повторять.

Итак, (21) — это уравнение состояния, описывающее когнитивную модель с матрицей смежности (20). Уравнение измерения нужно не всегда. В частности, если мы строим управление по состоянию на основе теоремы 3, то уравнение измерения не нужно. Легко убедиться, что его, как и соответственные части матрицы смежности графа, можно просто удалить из доказательства теоремы и ее следствий. Но в случае ненаблюдаемости части

вершин состояния для управления необходимо применить наблюдатель Люенбергера и теорему 4, для чего уравнение измерения необходимо. Как и в случае с выбором вершин управления, здесь необходимо вмешательство человека — эксперта, который установит, какие именно вершины из множества X являются наблюдаемыми. Обозначим их подмножество через Y (мощностью n_y) и перенумеруем вершины так, чтобы они следовали в векторе X вначале (для удобства). Тогда с учетом (21) полная модель в пространстве состояний будет иметь вид:

$$\Delta X(k+1) = F\Delta X(k) + G\Delta U(k), \quad \Delta Y(k) = C\Delta X(k), \quad (22)$$

где $C = (I_{n_y} \quad \mathbf{0})$, $\mathbf{0}$ — нулевая матрица размерности $n_y \times (n_x - n_y)$.

Если использовать уравнения (22), полученные описанным образом, в качестве первых двух уравнений системы (17) (отождествив ΔX с X , ΔY с Y , ΔU с U), можно построить регулятор с наблюдателем по описанному способу и перейти обратно к когнитивной модели. При этом, кроме дополнительных вершин оценок \hat{X} , формально появятся новые вершины, соответствующие искусственно введенным переменным Y . Этого можно избежать, перестроив модель для случая матрицы C специального вида, а также применив наблюдатель пониженного порядка вместо полного, но это уже выходит за рамки данной статьи. Здесь же важно подчеркнуть, что предложенный метод позволяет перейти от когнитивной модели к модели в пространстве состояний и обратно, применив к системе один из методов синтеза регулятора состояния.

Теорема 4. Когнитивная карта с матрицей смежности (20) может быть эквивалентно представлена моделью (22) в пространстве состояний. При этом если собственные числа матрицы F в модели (22) по модулю меньше единицы (система (22) асимптотически устойчива), то соответствующая когнитивная модель, определяемая матрицей смежности (20), будет импульсно устойчивой.

Доказательство. Выше уже была доказана эквивалентность динамики систем (22) и (20). Из устойчивости системы (22) следует, что все ее переменные ограничены. По построению переменные (22) являются импульсами (приращениями) в когнитивной модели с матрицей смежности (20), а ограниченность последовательности импульсов является определением импульсной устойчивости когнитивной карты, что завершает доказательство.

По аналогии с теоремой 2 и ее следствиями также доказывается, что если в стабилизируемую систему (21) или (22) ввести управление $\Delta U(k) = -K\Delta X(k)$, то полученная когнитивная карта (без учета несущественных здесь вершин измерения) будет иметь матрицу смежности

$$W^T = \begin{pmatrix} -KG & -KF \\ G & F \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В таком случае импульсная устойчивость полученной когнитивной карты гарантируется тем, что собственные числа матрицы $F - GK$ по модулю меньше единицы.

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Рассмотрим когнитивную карту для анализа кадровой политики в морском флоте (рис. 3), приведенную в классической работе [2].

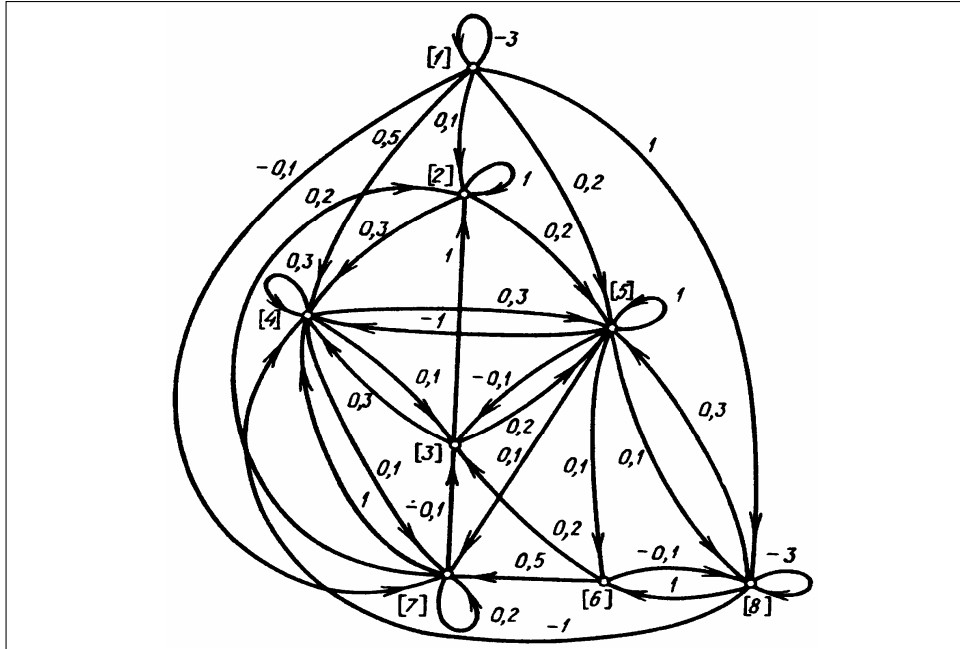


Рис. 3. Когнитивная карта для анализа кадровой политики на флоте, где: 1 — жалование, рацион, пособия; 2 — состояние окружающей среды; 3 — возможности повышения квалификации; 4 — удовлетворенность работой; 5 — степень постоянства кадров; 6 — военнослужащие; 7 — сохранность оборудования; 8 — общий бюджет для личного состава

Все вершины (рис. 3) считаются измеряемыми, поэтому уравнение измерения в данном случае не имеет смысла, и мы не будем вводить дополнительных вершин измерения. Матрица смежности имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} -3 & 0,1 & 0 & 0,5 & 0,2 & 0 & -0,1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 & -1 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,1 \\ 0 & 0,2 & -0,1 & 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0,3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы W таковы: $-3,00$; $-2,97$; $0,78 \pm 0,31i$; $-0,15$; $0,79$; $0,26$; 0 . Итак, данная когнитивная карта неустойчива, т.к. матрица смежности имеет два собственных числа, по модулю больших единицы. В этом можно убедиться, например, промоделировав подачу единичного импульса на все вершины.

Поскольку в данной карте нет вершин-истоков, невозможно сразу применить методику, описанную в предыдущем разделе. Введем новую вер-

шину, являющуюся управлением U , а именно «выделение государственных средств на нужды кадрового состава флота». Положим, что этот фактор (обозначим его через «0») непосредственно влияет только на одну из восьми вершин, а именно на вершину 1 (жалование, рацион, пособия). Пусть соответствующий весовой коэффициент равен единице. В таком случае матрица смежности расширенной карты принимает вид:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0,1 & 0 & 0,5 & 0,2 & 0 & -0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 & -1 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 & -0,1 & 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0,3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

По вышеописанной методике получаем в уравнении (21):

$$F = W^T, \quad G = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Система является управляемой, поскольку $\text{rank}(G \ FG \ F^2G \ F^3G \ F^4G \ F^5G \ F^6G \ F^7G) = 8$. Тогда в зависимости от выбора желаемых полюсов замкнутой системы можно получить различные значения матрицы регулятора K и соответственно различные устойчивые переходные процессы. Например, можно оставить без изменения устойчивые полюса и потребовать следующий вектор собственных значений матрицы $F - GK$ (а соответственно и матрицы (23), как показано в теореме 4): $-0,5; -0,6; 0,78 \pm 0,31i; -0,15; 0,79; 0,26; 0$. В этом случае получим такую матрицу усиления:

$$K = (-4,874 \ 0,0064 \ 0,0064 \ 0,0136 \ -0,1496 \ 0,1984 \ 0,0041 \ 5,8952).$$

Матрица смежности замкнутой системы согласно (23) имеет вид:

$$W_2 = \begin{pmatrix} 4,87 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20,5 & -3 & 0,1 & 0 & 0,5 & 0,2 & 0 & -0,1 & 1 \\ 0,02 & 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,02 & 0 & 1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0 \\ -0,45 & 0 & 0 & -0,1 & -1 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,59 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,1 \\ -0,01 & 0 & 0,2 & -0,1 & 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 17,53 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0,3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Если с точки зрения практической реализации такое управление покажется слишком сложным, его можно упростить, например, положив коэффициенты, близкие к нулю, равными нулю:

на рис. 5. Абсолютные значения в вершинах на самом деле являются результатом определенной нормировки, поскольку нулевые начальные значения и единичные импульсы — математическая абстракция. Главный результат проведенного моделирования заключается в том, что стабилизация наступает достаточно быстро и переходной процесс имеет небольшую амплитуду как по состоянию, так и по управлению. Таким образом, можно утверждать, что предложенный в работе способ стабилизации неустойчивой когнитивной карты показал приемлемые результаты на практическом примере.

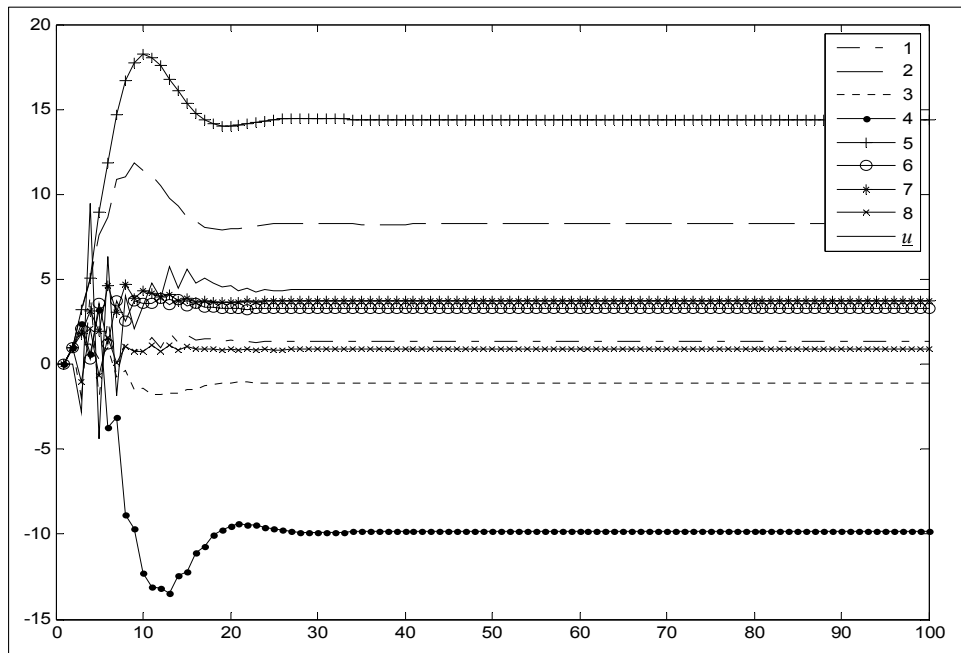


Рис. 5. Результаты моделирования (1–8 — графики изменения вершин состояния; u — график изменения вершины управления)

ВЫВОДЫ

В данной работе исследована взаимосвязь моделей динамики системы в пространстве состояний и в форме когнитивных карт, а также изучен вопрос обеспечения устойчивости когнитивной карты методами современной теории управления. Основные результаты исследования можно сформулировать так:

- Показано, что модель в пространстве состояний (в том числе с регулятором состояния в контуре обратной связи) может быть эквивалентно представлена как когнитивная карта.
- Доказано, что из асимптотической устойчивости системы в пространстве состояний следует абсолютная устойчивость соответствующей когнитивной модели. Этот вывод получен как для разомкнутой системы, так и для замкнутой системы с регулятором состояния.
- Получен новый способ стабилизации систем, представленных в виде когнитивных моделей, который заключается во введении обратных связей

от вершин состояния к вершинам управления. В случае, если вершины состояния неизмеряемы, предложен способ, основанный на наблюдателе состояния.

- Приведен способ перехода от когнитивной модели к модели в пространстве состояний для определенного класса когнитивных карт. Это позволяет стабилизировать процесс, представленный когнитивной моделью, путем перехода к пространству состояний, введения регулятора состояния и обратного перехода к когнитивной модели.

- С помощью предложенной методики решен практический пример стабилизации когнитивной модели кадровой политики в морском флоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Axelrod R.* The Structure of Decision: Cognitive Maps of Political Elites. — Princeton University Press, 1976. — 404 p.
2. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. Пер. с англ. — М.: Наука, 1986. — 496 с.
3. *Авдеева З.К., Коврига С.В., Макаренко Д.И., Максимов В.И.* Когнитивный подход в управлении // Проблемы управления. — 2002. — № 3. — С. 2–8.
4. *Максимов В.И.* Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций // Проблемы управления. — 2005. — № 3. — С. 30 – 38.
5. *Kosko B.* Fuzzy Cognitive Maps // International Journal of Man-Machine Studies. — 1986. — № 24. — P. 65–75.
6. *Aguilar J.* A Survey about Fuzzy Cognitive Maps Papers // International Journal of Computational Cognition. — 2005. — 3. — № 2. — P. 27–33.
7. *Независимое экспертное обозрение.* — 2012. — Вып. 4. — 85 с. — <http://www.sovschola.ru/sites/default/files/userfiles/NEO/Vol.4.rar>.
8. *Кулинич А.А.* Когнитивные карты в поддержке принятия решений // Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'11». — М.: Физматлит, 2011. — В 4 т., т. 1. — С. 557 – 564.
9. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 541 с.
10. *Григорьев В.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А.* Анализ систем автоматического управления: Учебное пособие. — СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. — 105 с.

Поступила 13.08.2013