УДК 517.9, 519.816

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ СОГЛАСОВАННЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНКАХ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Н.И. НЕДАШКОВСКАЯ

Рассмотрены две группы методов парных сравнений для нахождения относительных весов альтернатив решений на основе экспертных оценок: методы типа «линия» и «треугольник». В методах типа «линия» веса n альтернатив вычислены на основании $n-1$ экспертных оценок парных сравнений, выполненных в шкале, и предполагается полная согласованность знаний эксперта. Методы типа «треугольник» для вычисления весов требуют избыточное количество $n(n-1)/2$ экспертных оценок, которые используются для оценивания согласованности знаний эксперта. Проведено сравнение результатов, полученных этими двумя группами методов. Используя моделирование работы эксперта высокой компетентности при оценивании альтернатив решений методами парных сравнений в шкале Саати, получены оценки ошибок весов, вычисленных методами типа «треугольник» и «линия». Показано, что условие полной согласованности экспертных оценок парных сравнений, которые выполнены в шкале, может внести дополнительную ошибку при построении матрицы парных сравнений и, следовательно, в результирующие веса.

ВВЕДЕНИЕ

Методы парных сравнений используются для вычисления относительных весов альтернатив решений по критерию решений на основании экспертных оценок. Суть этих методов состоит в том, что эксперт сравнивает все или некоторые пары альтернатив в предлагаемой ему шкале. В [1, 2] разработан метод, назовем его «треугольник», в соответствии с которым все альтернативы попарно сравниваются в шкале отношений и в результате эксперт дает $n(n-1)/2$ оценок, где n — количество альтернатив. Эти оценки записываются в матрицу $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ парных сравнений (МПС), $d_{ij} > 0$, для которой справедливо свойство обратной симметричности $d_{ji} = 1/d_{ij}$. Непротиворечивость экспертных оценок парных сравнений определяется с помощью показателей несогласованности *CR*, *GCI*, *HCR*, CI^{tr} МПС. Описание и анализ этих показателей выполнены в [3, 4]. Известен критерий, который определяет уровень допустимой несогласованности МПС [1, 2]. Метод «треугольник» обоснован только для допустимо несогласованных МПС. Для улучшения согласованности МПС применяют обратную связь с экспертом или подходы [5] без участия эксперта, которые корректируют МПС в зависимости от уровня ее согласованности.

Так как количество экспертных оценок, равное $n(n-1)/2$, избыточно, в [6–8] разработаны методы парных сравнений типа «линия», которые уменьшают нагрузку на эксперта. В этих методах предполагается полная согласованность знаний эксперта и поэтому от эксперта требуется только

$n-1$ оценок. В методах [6, 7] эксперт сравнивает все альтернативы решений с одним выбранным объектом. В методе [8] выбираются ведущие пары альтернатив, которые сравниваются.

Считается, что полная согласованность (непротиворечивость) оценок — идеальный случай, к которому следует стремиться эксперту, выполняя парные сравнения [6–8, 10]. Однако, если эксперт дал согласованные оценки, то они не обязательно отображают истинные веса сравниваемых альтернатив.

Цель работы — сравнение точности результатов, получаемых методом «линия» на основании полностью согласованных экспертных оценок парных сравнений и методом «треугольник» без наложения требования полной согласованности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано: $A=\{a_i \mid i=1,...,n\}$ — множество альтернатив решений; C — характеристика, по которой сравниваются эти альтернативы, в дальнейшем — критерий решений.

Необходимо определить $w=\{w_i \mid i=1,...,n\}$ — нормированные относительные веса (в дальнейшем — веса) альтернатив по критерию C, $w_i>0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Пусть высококомпетентный эксперт проводит оценивание альтернатив решений из A методом парных сравнений в шкале отношений. Одной из таких шкал, которая часто используется, является *шкала Саати 1–9*, в которой 1 соответствует одинаковой важности сравниваемых элементов, 3 — слабому превосходству, 5 — сильному превосходству, 7 — очень сильному превосходству, 9 — абсолютному превосходству и 2, 4, 6, 8 — промежуточным значениям [1, 2]. Если a_i превышает (важнее) a_j, то в соответствии со шкалой Саати, величина этого превосходства d_{ij} принимает значения из дискретного множества $\{2,\ldots,9\}$. В противном случае — с множества $\{1/9, 1/8,\ldots,1/2\}$.

Под определением *«высококомпетентный»* понимается эксперт, который дает оценки альтернатив, наиболее соответствующие реальным весам $w_i^{\text{реал}}$ этих альтернатив. А именно, если эксперт оценивает отношение $w_i^{\text{реал}}/w_j^{\text{реал}}$ реальных весов, то наиболее соответствующая его оценка d_{ij}^{*} — это ближайшее к $w_i^{\text{реал}}/w_j^{\text{реал}}$ деление шкалы. Ошибки, присутствующие в оценках этого эксперта, обусловлены точностью используемой шкалы. Оценки такого эксперта будут моделироваться в данной работе.

Необходимо исследовать влияние требования полной согласованности (непротиворечивости) экспертных оценок парных сравнений, выполненных в шкале отношений Саати, на точность вычисленных весов w_i, а также оценить неопределенность, которую вносит шкала Саати в оценки эксперта. Точность будет оцениваться значением нормы отклонения вектора вычисленных весов от вектора известных реальных весов.

МЕТОДЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ «ТРЕУГОЛЬНИК» И «ЛИНИЯ»

Метод «треугольник». Эксперт попарно сравнивает все альтернативы в шкале Саати и по результатам строится матрица парных сравнений (МПС): $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$, $d_{ji} = 1/d_{ij}$, $d_{ij} \in L = \left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \cdots, 8, 9\right\}$. Элементы МПС показывают отношения неизвестных значений весов альтернатив по критерию решений:

$$d_{ij} = \frac{v_i}{v_j}\varepsilon_{ij}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_{ij} > 0$ — возмущение.

Вектор ненормированных весов v вычисляется методами EM (eigenvector method — метод главного собственного вектора), RGMM (row geometric mean method — метод геометрической средней по строкам) и др. [9]. В соответствии с методом EM, вектор весов v — это собственный вектор МПС, соответствующий ее наибольшему собственному значению [1, 2]. Среди оптимизационных наибольшее распространение получил метод логарифмических наименьших квадратов (другое название — метод геометрической средней RGMM). Согласно методу RGMM, вектор весов v — тот, при котором достигается минимальная суммарная ошибка в (1) [9]:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\ln \varepsilon_{ij})^2 \to \min \text{ при ограничениях } \prod_{i=1}^{n} v_i = 1 \text{ и } v_i > 0,\ i = 1,...,n,$$

тогда $v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij}\right)^{1/n}$.

Вычисленные на основании МПС веса v имеют смысл, если возмущение $\delta_{ij} = |\varepsilon_{ij} - 1|$ в (1) мало. Величина возмущения связывается с понятием согласованности МПС.

МПС $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ называется *полностью согласованной (далее с целью сокращения — согласованной)*, если $d_{ij} = d_{ik}d_{kj}$ для $\forall i, j, k = 1,..., n$.

МПС согласована тогда и только тогда, когда в (1) $\varepsilon_{ij} = 1$ $\forall i, j = 1,..., n$.

МПС согласована тогда и только тогда, когда $CR = 0$, $GCI = 0$, $HCR = 0$, $CI^{tr} = 0$.

Небольшой уровень несогласованности МПС приемлем на практике: *несогласованность МПС допустима,* если показатель несогласованности *CR* не превышает установленное для него пороговое значение [1].

МПС D согласована тогда и только тогда, когда ее ранг $\mathrm{rang}(D) = 1$ и $d_{ii} = 1$. Следовательно, согласованная МПС определяется одним своим столбцом (строкой).

В [6] разработан метод «линия», в котором эксперт выполняет парные сравнения альтернатив с одной выбранной альтернативой и имеет место полная согласованность знаний эксперта.

Метод «линия». Рассмотрим метод «линия» с выбором эталонной альтернативы [6], когда экспертные оценки выполнены в шкале отношений. Эксперт выбирает a_e — эталонную альтернативу и, используя шкалу, сравнивает все остальные альтернативы $a_i \in A$, $i \neq e$ с эталонной a_e. По результатам формируется вектор $D_e = \{d_{ie} \mid i = 1,..., n\}$ степеней преобладания a_i над a_e. Ненормированные веса альтернатив выражаются через вес эталона: $v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie})$ $\forall i \neq e$, $\varphi_{mult}(1) = 1$, где φ_{mult} — монотонная функция. Часто используется функция $v_i = v_e d_{ie}$. Выполняется нормирование всех весов и вычисляются относительные веса альтернатив $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Веса, вычисленные описанным выше методом «линия» на основании вектора D_e при $v_i = v_e d_{ie}$, очевидно, совпадают с весами по методу «треугольник» на основании согласованной МПС, которая построена по вектору D_e.

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧАЕМЫХ МЕТОДАМИ «ТРЕУГОЛЬНИК» И «ЛИНИЯ»

Пример. Пусть известен вектор весов $w^{\text{реал}} = (0{,}45; 0{,}25; 0{,}10; 0{,}20)$ четырех альтернатив, $n = 4$. Не сообщая этих значений, высококомпетентного эксперта попросили попарно сравнить альтернативы в шкале Саати. По оценкам этого эксперта построена МПС D^*, такая что d_{ij}^* — ближайшее к матрице $\left(\frac{w_i^{\text{реал}}}{w_j^{\text{реал}}}\right)$ деление шкалы:

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Показатель несогласованности $CR(D^*) = 0{,}006 \neq 0$, поэтому D^* не является согласованной. Вектор весов по методу главного собственного вектора EM, на основе МПС D^* (2):

$$w^* = w^{EM}(D^*) = (0{,}455; 0{,}238; 0{,}092; 0{,}215), \quad (3)$$

$Cheb$ (чебышевская) и E (эвклидовая) нормы отклонения $w^{EM}(D^*)$ от $w^{\text{реал}}$ равны

$$Cheb(w^*, w^{\text{реал}}) = 0{,}015 \text{ и } E(w^*, w^{\text{реал}}) = 0{,}021. \quad (4)$$

Теперь оценим влияние требования согласованности экспертных оценок на точность результирующих весов. Пусть эксперт выбрал в качестве эталона a_e альтернативу a_4. Вектор оценок парных сравнений в шкале Саати, ближайших к отношениям истинных весов $\left(\dfrac{w_i^{\text{реал}}}{w_4^{\text{реал}}}\right)$:

$$d^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T \tag{5}$$

совпадает с четвертым столбцом МПС D^* (2). Вектор весов по методу «линия» на основе d^4:

$$w^4 = (0{,}444 \quad 0{,}222 \quad 0{,}111 \quad 0{,}222). \tag{6}$$

Вектор w^4, очевидно, равен вектору весов по методу главного собственного вектора, если на основании d^4 (5) построить согласованную МПС D^4:

$$D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad w^4 = w^{EM}(D^4). \tag{7}$$

Значения чебышевской и эвклидовой норм отклонения w^4 (6) от $w^{\text{реал}}$

$$Cheb(w^4, w^{\text{реал}}) = 0{,}075, \quad E(w^4, w^{\text{реал}}) = 0{,}094$$

значительно превышают соответствующие значения норм (4).

Таким образом, отказ от требования согласованности (полной согласованности) экспертных оценок (матрица (2)) привел к результатам (3) практически в 5 раз более точным, чем результаты (6) из согласованных оценок (5) и (7). МПС D^* (2) есть небольшое возмущение (так как $CR(D^*) = 0{,}006 \approx 0$) некоторой согласованной МПС X, недостижимой в шкале Саати.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕСОВ ПО МЕТОДАМ «ТРЕУГОЛЬНИК» И «ЛИНИЯ»

Для оценивания точности результирующих весов, получаемых методами типа «треугольник» и «линия», проведем компьютерное моделирование.

Генерация ненормированных весов $v_i^{\text{реал}} \in R$, $i = 1,\ldots,n$ случайным образом

Если для $v_i^{\text{реал}}$ использовать равномерный закон распределения в интервале [1, 9], то отношение $\dfrac{v_i^{\text{реал}}}{v_j^{\text{реал}}}$ двух равномерно распределенных величин будет иметь более сложное распределение со значениями, сконцентрированными около середины интервала [1/9, 9].

Для получения МПС с более равномерно распределенными элементами в данной работе предлагается метод генерирования весов, в соответствии скоторым значения $v_i^{\text{реал}}$ выбираются случайным образом из подинтервалов интервала $[1, b]$: $v_i^{\text{реал}} \in \text{random}\ [1+(i-1)\,dx;\ 1+i\,dx]$, $dx = \dfrac{b-1}{n}$, $i = 1,\ldots,n$, где величина b подобрана эмпирически и зависит от n (рисунок). При таком генерировании, без потери общности, предполагается, что альтернативы перенумерованы в порядке убывания важности.

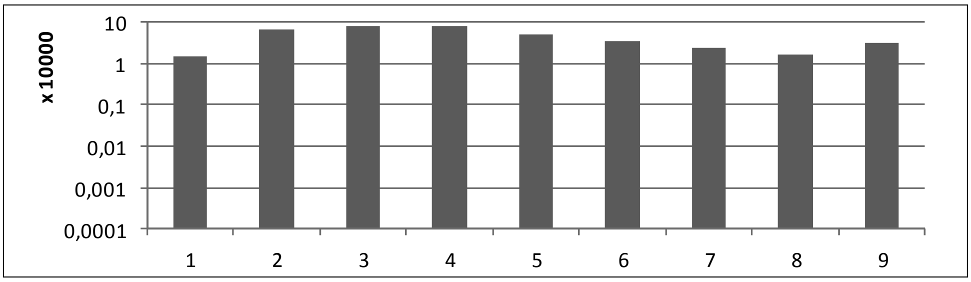

Рисунок. Гистограмма распределения количества элементов моделируемых МПС по делениям шкалы Саати (значения по горизонтальной оси), интервал [1,15], выборка 10^5 МПС, $n = 5$

После нормировки $w_i^{\text{реал}} = v_i^{\text{реал}} / \sum\limits_k v_k^{\text{реал}}$ вектор $w^{\text{реал}}$ будем называть вектором реальных весов. Далее, на основании $w^{\text{реал}}$, вычисляется входная информация для исследуемых методов.

Моделирование весов по методу «треугольник»

Вычисляется МПС D^*, которая наиболее близка к реальным отношениям весов $\dfrac{v_i^{\text{реал}}}{v_j^{\text{реал}}}$ в том понимании, что элемент d_{ij}^* этой МПС — округленное к ближайшему делению шкалы значение отношения $\dfrac{v_i^{\text{реал}}}{v_j^{\text{реал}}}$. Например, для $n = 7$, сгенерированный вектор ненормированных весов $v^{\text{реал}}$ и соответствующая ему МПС D^* равны:

$$v^{\text{реал}} = \begin{pmatrix} 2{,}125 \\ 3{,}260 \\ 7{,}009 \\ 9{,}024 \\ 10{,}099 \\ 12{,}867 \\ 15{,}924 \end{pmatrix}, \quad D^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 3 & 2 & 1 & & & & \\ 4 & 3 & 1 & 1 & & & \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 1 & & \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 7 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Методами главного собственного вектора EM и геометрической средней RGMM на основании МПС D^* вычисляются векторы весов v^{EM} и v^{RGMM}, затем — нормированные векторы w^{EM} и w^{RGMM}. Вычисляются показатели несогласованности CR и GCI МПС D^*, эвклидовая и чебышевская нормы отклонений найденных векторов w^{EM} и w^{RGMM} от вектора реальных весов $w^{\text{реал}}$:

$$\| w^{EM} - w^{\text{реал}} \|_2 ,\ \| w^{RGMM} - w^{\text{реал}} \|_2 ,\ \| w^{EM} - w^{\text{реал}} \|_\infty$$

и

$$\| w^{RGMM} - w^{\text{реал}} \|_\infty . \tag{8}$$

Генерируется $M = 10^5$ векторов $w^{\text{реал}}$, исследуется уровень несогласованности МПС D^* и точность вычисленных весов. Результаты (табл. 1) показывают, что все моделируемые МПС D^* допустимо несогласованны. Более того, показатели несогласованности CR и GCI этих МПС, в основном, меньше своих пороговых значений на порядок (для $n \geq 5$ пороговое значение показателя CR равно 0,1), что говорит о малом уровне несогласованности моделируемых МПС.

Т а б л и ц а 1. Распределение значений CR МПС D^*

а

$n = 3$	**Значения *CR***					
	0	(0; 0,01]	(0,01; 0,02]	(0,02; 0,03]	(0,03; 0,06]	>0,06
Количество МПС D^*	29198	44176	21557	2696	2373	0

б

$n = 5$	**Значения *CR***				
	0	(0; 0,01]	(0,01; 0,02]	(0,02; 0,03]	>0,03
Количество МПС D^*	100	50704	48624	572	0

в

$n = 7$	**Значения *CR***			
	$CR = 0$	$CR \in (0; 0,01]$	$CR \in (0,01; 0,02]$	$CR > 0,02$
Количество МПС D^*	0	71514	28486	0

г

$n = 9$	**Значения *CR***			
	$CR = 0$	$CR \in (0; 0,01]$	$CR \in (0,01; 0,02]$	$CR > 0,02$
Количество МПС D^*	0	70383	29617	0

Вычисляются средние значения $\overline{CR}$, $\overline{GCI}$ показателей несогласованности и средние значения $\overline{E}(w^{EM})$, $\overline{E}(w^{RGMM})$, $\overline{Cheb}(w^{EM})$, $\overline{Cheb}(w^{RGMM})$ норм отклонений (8) по всем $M = 10^5$ экспериментам (табл. 2).

Таблица 2. Средние значения показателей несогласованности и норм отклонений вычисленных весов от реальных весов в зависимости от размерности n МПС

n	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\overline{CR}$	0,008	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009
$\overline{GCI}$	0,026	0,034	0,036	0,036	0,036	0,035	0,035
$\overline{E}(w^{EM})$ ($\overline{E}(w^{RGMM})$)	0,045	0,037	0,029	0,025	0,022	0,019 (0,018)	0,017 (0,016)
$\overline{Cheb}(w^{EM})$ ($\overline{Cheb}(w^{RGMM})$)	0,034	0,028	0,022	0,019	0,016	0,013	0,012 (0,011)
$\overline{E}(w^{\text{линия}})$	0,057	0,066	0,067	0,065	0,062	0,059	0,057
$\overline{Cheb}(w^{\text{линия}})$	0,056	0,060	0,063	0,061	0,060	0,058	0,052

Моделирование весов по методу «линия»

Для каждой эталонной альтернативы a_e, $e = 1,\ldots,n$ вычисляется вектор $D_e = \{(d_{ie}) \mid i = 1,\ldots,n\}$, где d_{ie} — округленное к ближайшему делению шкалы значение отношения $\dfrac{v_i^{\text{реал}}}{v_e^{\text{реал}}}$. Методом «линия» находятся векторы весов v^e, затем нормированные векторы w^e, $e = 1,\ldots,n$.

Вычисляются эвклидовая и чебышевская нормы отклонений векторов w^e, $e = 1,\ldots,n$ от вектора реальных весов $w^{\text{реал}}$:

$$\| w^e - w^{\text{реал}} \|_2 \text{ и } \| w^e - w^{\text{реал}} \|_\infty, \quad e = 1,\ldots,n. \tag{9}$$

Точность результатов оценивается по средним значениям $\overline{E}(w^{\text{линия}})$ и $\overline{Cheb}(w^{\text{линия}})$ норм отклонений (9) по всем $M = 10^5$ экспериментам и по всем эталонам $e = 1,\ldots,n$ (табл. 2):

$$\overline{E}(w^{\text{линия}}) = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^{M} \sum_{e=1}^{n} \| w^e(i) - w^{\text{реал}}(i) \|_2 ,$$

$$\overline{Cheb}(w^{\text{линия}}) = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^{M} \sum_{e=1}^{n} \| w^e(i) - w^{\text{реал}}(i) \|_\infty .$$

В табл. 2 совмещены результаты по методам EM и RGMM, так как они в основном одинаковы. Это следствие относительно хорошей согласованности моделируемых МПС, а именно, средние значения $\overline{CR}, \overline{GCI}$ показателей несогласованности, в основном, на порядок меньше своих пороговых значений ($\overline{CR}$=0,01<<CR^{porog}=0,1; $\overline{GCI}$=0,04<<GCI^{porog}=0,37 для $n \geq 5$). Поэтому первый вывод состоит в том, что уровень несогласованности МПС, обусловленный шкалой Саати, относительно мал. Шкала Саати вносит относительно малую ошибку в вычисленные векторы весов w^{EM} и w^{RGMM}, так как нормы отклонений w^{EM} и w^{RGMM} от вектора реальных весов $w^{\text{реал}}$ принимают значения порядка 10^{-2}.

Сравнивая средние значения норм отклонений $\overline{E}(w^{EM})$, $\overline{E}(w^{RGMM})$, $\overline{Cheb}(w^{EM})$, $\overline{Cheb}(w^{RGMM})$ для весов по методу «треугольник» с соответствующими значениями норм $\overline{E}(w^{\text{линия}})$ и $\overline{Cheb}(w^{\text{линия}})$ для весов по методу «линия» (табл. 2), приходим к выводу, что требование полной согласованности МПС в методе «линия» вносит дополнительную ошибку в вычисляемые веса. А именно, нормы $\overline{E}(w^{\text{линия}})$ и $\overline{Cheb}(w^{\text{линия}})$ принимают *в несколько раз большие значения* по сравнению с нормами $\overline{E}(w^{EM})$, $\overline{E}(w^{RGMM})$ и $\overline{Cheb}(w^{EM})$, $\overline{Cheb}(w^{RGMM})$ в методе «треугольник» без наложения требования полной согласованности. Различие в значениях соответствующих норм возрастает с увеличением количества сравниваемых альтернатив.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сделана попытка моделирования работы эксперта высокой компетентности при оценивании альтернатив решений методами парных сравнений в шкале Саати. Основным определяющим критерием работы эксперта при выполнении парных сравнений являются показатели согласованности оценок эксперта.

В результате моделирования получены оценки уровня несогласованности экспертных парных сравнений, которая вносится шкалой Саати. Также получены оценки ошибок весов, вычисленных методами типа «треугольник» и «линия». Установлено, что когда эксперт выполняет оценивание в шкале Саати, относительно малый уровень несогласованности $(CR = 10^{-2})$ его оценок не только приемлем, но и желателен, поскольку требование полной согласованности экспертных оценок парных сравнений $(CR = 0)$ может внести дополнительную ошибку при построении матрицы парных сравнений и, следовательно, в результирующие веса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саати Т.Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 360 с.

2. *Saaty T.L.* Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary // European Journal of Operational Research. — 2003. — **145**, № 1. — P. 85–91.
3. *Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І.* Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: навч. посіб. — К.: Політехніка, 2010. — 371 с.
4. *Pankratova N., Nedashkovskaya N.* The Method of Estimating the Consistency of Paired Comparisons // International Journal «Information Technologies and Knowledge». — 2013. — **7**, № 4. — P. 347—361.
5. *Недашківська Н.І.* Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 4. — С. 67–79.
6. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — К.: Наук. думка, 2002. — 381 с.
7. *Beynon M.J.* Understanding local ignorance and non-specificity within the DS/AHP method of multi-criteria decision making // European Journal of Operational Research. — 2005. — **163**, № 2. — P. 403–417.
8. *Ногин В.Д.* Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — **44**, № 7. — С. 1261–1270.
9. *Srdjevic B.* Combining different prioritization methods in the analytic hierarchy process synthesis // Computers & Operations Research. — 2005. — **32**. — P. 897–1919.

Поступила 15.07.2013