УДК 519.8

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.Л. ГАРТ

Рассмотрен проекционно-итерационный метод, основанный на одном варианте метода условного градиента, для решения задачи минимизации с ограничениями в гильбертовом пространстве. Метод позволяет заменить исходную экстремальную задачу некоторой последовательностью вспомогательных аппроксимирующих ее экстремальных задач, заданных в гильбертовых пространствах, изоморфных подпространствам исходного пространства, и для каждой из «приближенных» задач находить с помощью метода условного градиента лишь несколько приближений, последнее из которых использовать для определения начального приближения в итерационном процессе для следующей «приближенной» задачи. Доказаны теоремы об осуществимости и сходимости проекционно-итерационного метода. Получены оценки скорости сходимости и погрешности.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время весьма актуальными стали вопросы наилучшего (в том или ином смысле) управления различными процессами физики, техники, экономики, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, задачи наилучшего приближения функций и многие другие. Все вышеупомянутые задачи можно трактовать как экстремальные задачи в подходящим образом выбранных функциональных пространствах и для их исследования использовать аппарат и методы функционального анализа. Такая трактовка позволяет выявить общие закономерности, присущие широким классам экстремальных задач, создавать и исследовать общие методы их решения.

Для решения экстремальных задач часто применяют методы аппроксимационного (проекционного) типа, позволяющие заменить исходную задачу некоторой последовательностью вспомогательных аппроксимирующих ее экстремальных задач. Вопросам аппроксимации различных классов экстремальных задач посвящены работы многих авторов. Исследования проекционных, а также проекционно-итерационных методов решения экстремальных задач с ограничениями в гильбертовых и рефлексивных банаховых пространствах, проводились, в частности, С.Д. Балашовой [1], в работах которой были предложены общие условия аппроксимации и сходимости последовательностей точных и приближенных решений аппроксимирующих экстремальных задач, рассматриваемых как в подпространствах исходного пространства, так и в некоторых пространствах, изоморфных им.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют свои недостатки. Хотя аппроксимирующие экстремальные задачи и проще исходной, тем не менее получение их точных решений практически затруднительно. Сложным является также вопрос о выборе такой задачи из всей последовательности «приближенных» экстремальных задач, который обеспечивал бы получение решения исходной задачи с заданной степенью точности. Если же решение некоторой «приближенной» задачи не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать следующую «приближенную» задачу, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Проекционно-итерационный подход к приближенному решению экстремальной задачи естественно устраняет трудности, возникающие при решении этой задачи обычным проекционным методом, так как основан на возможности применения итерационных методов к решению аппроксимирующих ее задач. При этом для каждой из «приближенных» экстремальных задач находится с помощью выбранного итерационного метода лишь несколько приближений и на основании последнего из них строится начальное приближение для следующей «приближенной» задачи.

Данная работа посвящена исследованию вопроса о сходимости и оценке скорости сходимости одного проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации функционала на множестве гильбертова пространства, основанного на методе условного градиента для минимизации аппроксимирующих функционалов в некоторых пространствах, изоморфных подпространствам исходного пространства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на некотором выпуклом замкнутом ограниченном множестве Ω вещественного гильбертова пространства H задан ограниченный снизу функционал $F(u)$:

$$\inf_{u\in\Omega} F(u) = F^* > -\infty . \qquad (1)$$

Для приближенного решения задачи минимизации $F(u)$ на Ω:

$$F(u) \to \inf,\ \mathrm{u} \in \Omega \subset H \qquad (2)$$

рассмотрим последовательность более простых, аппроксимирующих $F(u)$ функционалов $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, заданных соответственно на некоторых множествах $\widetilde{\Omega}_n$ вещественных гильбертовых пространств $\widetilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что пространства $\widetilde{H}_n$ изоморфны подпространствам H_n исходного пространства H ($H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots \subset H$) и Φ_n — линейный ограниченный оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждому элементу $u_n \in H_n$ элемент $\widetilde{u}_n \in \widetilde{H}_n$, причем

$$\|\Phi_n\| \le C,\ n = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

$C = \mathrm{const} > 0$; Φ_n^{-1} — оператор, осуществляющий обратное отображение $\widetilde{H}_n$ на H_n.

Предположим, что множества

$$\widetilde{\Omega}_n = \{\widetilde{u}_n \in \widetilde{H}_n : \widetilde{u}_\text{n} = \Phi_n u_n,\ u_\text{n} \in \Omega_n = \Omega \cap H_n\},\ \ n = 1, 2, \ldots,\ \widetilde{\Omega}_1 \neq \Theta$$

выпуклые и замкнутые в $\widetilde{H}_n$, при этом ограниченность каждого из них в $\widetilde{H}_n$ вытекает из ограниченности в H множества Ω. В самом деле, из существования $M = \text{const} > 0$ такого, что $\|u\|_H \leq M$ для всех $u \in \Omega$, ограниченности линейного оператора Φ_n и условия (3) получаем для любого $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$:

$$\|\widetilde{u}_n\|_{\widetilde{H}_n} = \|\Phi_n u_n\|_{\widetilde{H}_n} \leq \|\Phi_n\| \|u_n\|_H \leq C \cdot M,$$

т.е. $\widetilde{\Omega}_n$ — ограниченное множество в $\widetilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Будем предполагать в дальнейшем, что функционалы $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ для любых $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ связаны с исходным функционалом $F(u)$ условием близости

$$\left|\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)\right| \leq \widetilde{\beta}_n, \tag{4}$$

где $\widetilde{\beta}_n = \text{const} > 0$, $\widetilde{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для каждого из функционалов $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ будем рассматривать задачу минимизации на соответствующем множестве $\widetilde{\Omega}_n$:

$$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) \to \inf,\ \ \widetilde{\text{u}}_\text{n} \in \widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n,\ \ n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Заметим при этом, что в силу условия близости (4) и (1)

$$F^* - \widetilde{\beta}_n \leq F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n) - \widetilde{\beta}_n \leq \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n),\ \ n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

для любых $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$, т.е. функционалы $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ ограничены снизу на $\widetilde{\Omega}_n$:

$$\inf_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} \widetilde{F}_\text{n}(\widetilde{\text{u}}_\text{n}) = \widetilde{F}_\text{n}^* > -\infty,\ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Исследования проекционных методов решения задачи (2), основанных на указанной аппроксимации $F(u)$ последовательностью функционалов $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ и последующем точном решении задач минимизации (5), проводились в работах [1–3]. В них при определенных условиях установлена сходимость последовательности $\{\widetilde{F}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ к F^* при $n \to \infty$ и доказано, что в случае $\widetilde{F}_n^* = \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^*)$, где $\widetilde{u}_n^* \in \widetilde{\Omega}_n$, последовательность $\{\Phi_\text{n}^{-1}\widetilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ выступает в роли минимизирующей для функционала $F(u)$, а также в роли последовательности приближений к точке u^* минимума $F(u)$ на Ω, если такая точка существует. В работах [1–4] рассмотрены также некоторые проекционно-итерационные методы решения задачи минимизации (2), основанные на применении итерационных методов к решению задач минимизации (5). При этом для каждого из функционалов $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ с помощью выбранного итерационного метода находится лишь несколько приближений $\widetilde{u}_n^{(k)} \in \widetilde{\Omega}_n$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$ (k_n — целое положительное число) и на основании последнего из них строится начальное приближение для минимизации следующего функционала $\widetilde{F}_{n+1}(\widetilde{u}_{n+1})$. В качестве минимизирующей последовательности для исходного функционала $F(u)$ на множестве $\Omega \subset H$, а также в качестве последовательности приближений к точке $u^* \in \Omega$ (если она существует) принимается последовательность $\{\Phi_{\mathrm{n}}^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Цель работы — исследование сходимости проекционно-итерационного метода решения задачи (2), использующего для минимизации аппроксимирующих функционалов $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$, $n = 1, 2, ...$ один из вариантов метода условного градиента, описанный в [5].

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Предположим, что функционалы $F(u)$ и $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, $n = 1, 2, ...$ непрерывно дифференцируемы в смысле Фреше на множествах $\Omega \subset H$ и $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$, $n = 1, 2, ...$ соответственно. В качестве начального приближения в проекционно-итерационном процессе возьмем некоторый элемент $\widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1$. Следуя [6], если уже известно приближение $\widetilde{u}_n^{(k)} \in \widetilde{\Omega}_n$ ($k = 0, 1, ..., k_n - 1$, $n = 1, 2, ...$), берем главную линейную часть

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n) \equiv (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$$

приращения $\quad \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) = (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)}) + o\left(\left\| \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)} \right\|_{\widetilde{H}_n}\right),$

и определяем вспомогательное приближение $\overline{u}_n^{(k)} \in \widetilde{\Omega}_n$ из условия

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = \min_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} \widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n) = \min_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)}). \qquad (7)$$

Так как множество $\widetilde{\Omega}_n$ замкнуто, ограничено и выпукло в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}_n$, а линейный (и тем более, выпуклый) функционал $\widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n)$ непрерывен, то на основании теоремы 6.1.4 из [6] такой элемент $\overline{u}_n^{(k)} \in \widetilde{\Omega}_n$ существует. При этом, очевидно,

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = \min_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} \widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n) \le \widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n^{(k)}) = 0\,. \qquad (8)$$

Если окажется, что $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = 0$ при некотором $k < k_n$, то с учетом (7) для всех $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ будем иметь $(\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \widetilde{u}_n - \widetilde{u}_n^{(k)}) \ge 0$, откуда следует, что элемент $\widetilde{u}_n^{(k)}$ удовлетворяет необходимому условию минимума функционала $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на множестве $\widetilde{\Omega}_n$ [6]. В этом случае итерации для функционала $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$ прекращаются и для выяснения того, будет ли $\widetilde{u}_n^{(k)}$ точкой минимума $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$, а элемент $\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k)}$ — точкой минимума функционала $F(u)$ на множестве Ω, нужны дополнительные исследования поведения этих функционалов в окрестности указанных точек. В частности, если функционал $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ выпуклый на $\widetilde{\Omega}_n$ и $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) = 0$, то $\widetilde{u}_n^{(k)}$ в самом деле будет точкой минимума $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n$. Если же элемент $\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k)}$ точкой минимума функционала $F(u)$ на Ω не является, то следует положить $\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_{\text{n}}^{-1}\widetilde{u}_n^{(k)}$ (понятно, что $\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_{n+1}$) и продолжить итерации уже для следующего функционала $\widetilde{F}_{n+1}(\widetilde{u}_{n+1})$ на множестве $\widetilde{\Omega}_{n+1}$. В дальнейшем будем предполагать, что $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) < 0$. Тогда заведомо $\overline{u}_n^{(k)} \neq \widetilde{u}_n^{(k)}$, и в качестве следующего приближения можно принять

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \widetilde{u}_n^{(k)} + \widetilde{\alpha}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots, k_n - 1, \tag{9}$$

$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_{\text{n}}^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ может быть выбрано одним из следующих способов [6]:

а) $\widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n^{(k)}) = \min\limits_{0 \le \widetilde{\alpha}_n \le 1} \widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n)$, $\widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n) \equiv \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)} + \widetilde{\alpha}_n(\overline{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^{(k)}))$;

б) $$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k+1)}) \ge \widetilde{\varepsilon}_n\, \widetilde{\alpha}_{\text{n}}^{(\text{k})} \left|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})\right|, \quad 0 \le \widetilde{\alpha}_n^{(k)} \le 1, \tag{11}$$

где $\widetilde{\varepsilon}_n$ — заданный параметр алгоритма, $0 < \widetilde{\varepsilon} \le \widetilde{\varepsilon}_n < 1$;

в) если выполняется условие

$$\left\|\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n) - \widetilde{F}_n'(\widetilde{v}_n)\right\|_{\widetilde{H}_n} \le L\left\|\widetilde{u}_n - \widetilde{v}_n\right\|_{\widetilde{H}_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

при всех $\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n \in \widetilde{\Omega}_n$, $L = \text{const} > 0$, то $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ можно определить так:

$$\widetilde{\alpha}_n^{(k)} = \widetilde{\gamma}_n^{(k)}\widetilde{\eta}_n^{(k)}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{\eta}_n^{(k)} = \min\left\{1; \frac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{\|\overline{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^{(k)}\|_{\widetilde{H}_n}^2}\right\}; \quad \widetilde{\delta}_n \le \widetilde{\gamma}_n^{(k)} \le \frac{2(1-\widetilde{\varepsilon}_n)}{L}, \tag{14}$$

$\widetilde{\varepsilon}_n$ и $\widetilde{\delta}_n$ — заданные параметры алгоритма, $0 < \widetilde{\delta} \le \widetilde{\delta}_n \le \dfrac{2(1-\widetilde{\varepsilon}_n)}{L}$, $0 < \widetilde{\varepsilon} \le \widetilde{\varepsilon}_n < 1$.

В силу выпуклости множества $\widetilde{\Omega}_n$, очевидно, $\widetilde{u}_n^{(k+1)} \in \widetilde{\Omega}_n$ для всех $k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$.

Исследование сходимости одного из вариантов проекционно-итерационного метода решения задачи (2), определяемого формулами (7), (9), (10), с выбором величины $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ согласно п. а) проводилось в работе [4]. Здесь рассмотрим вопрос о сходимости и оценке скорости сходимости еще одного варианта проекционно-итерационного метода (7), (9), (10) с выбором $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ согласно пп. б), в) [5].

Теорема 1. Пусть Ω — выпуклое замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве H, а $\widetilde{\Omega}_n$ — выпуклые замкнутые множества в гильбертовых пространствах $\widetilde{H}_n$, $n=1,2,...$ соответственно. Пусть $F(u)\in C^1(\Omega)$, $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)\in C^1(\widetilde{\Omega}_n)$, $n=1,2,...$ и для каждого из указанных номеров n градиент $\widetilde{F}'_n(\widetilde{u}_n)$ на множестве $\widetilde{\Omega}_n$ удовлетворяет условию Липшица (12). Пусть выполнены условия (1) и (4), причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{\beta}_n<\infty$. Тогда последовательность $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (7), (9)–(11), существует и для всех $k=0,1,...,k_n-1$

$$\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})=(\widetilde{F}'_n(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \overline{u}_n^{(k)}-\widetilde{u}_n^{(k)})\to 0\quad(n\to\infty)$$

при любом выборе $\widetilde{u}_1^{(0)}\in\widetilde{\Omega}_1$.

Доказательство. Покажем осуществимость проекционно-итерационного процесса (7), (9)–(11).

Обозначим через $D=\sup\limits_{u,v\in\Omega}\|u-v\|_H$ диаметр множества $\Omega\subset H$, а через $\widetilde{D}_n=\sup\limits_{\widetilde{u}_n,\widetilde{v}_n\in\widetilde{\Omega}_n}\|\widetilde{u}_n-\widetilde{v}_n\|_{\widetilde{H}_n}$ — диаметр множества $\widetilde{\Omega}_n\subset\widetilde{H}_n$. Поскольку множества Ω и $\widetilde{\Omega}_n$ ограничены, то $D<\infty$, $\widetilde{D}_n<\infty$ и, кроме того, с учетом (3) имеем:

$$\widetilde{D}_n=\sup_{\widetilde{u}_n,\widetilde{v}_n\in\widetilde{\Omega}_n}\|\widetilde{u}_n-\widetilde{v}_n\|_{\widetilde{H}_n}=\sup_{u_n,v_n\in\Omega_n}\|\Phi_n u_n-\Phi_n v_n\|_{\widetilde{H}_n}\le$$
$$\le\|\Phi_n\|\cdot\sup_{u_n,v_n\in\Omega_n}\|u_n-v_n\|_H\le C\cdot D,\quad n=1,2,.... \tag{15}$$

Пусть начальное приближение $\widetilde{u}_1^{(0)}\in\widetilde{\Omega}_1$ в проекционно-итерационном процессе (7), (9)–(11) выбрано произвольно. Предположим, что при некотором значении n ($n=1,2,...$) уже известно приближение $\widetilde{u}_n^{(0)}\in\widetilde{\Omega}_n$. Аналогично тому, как это сделано в [6] для минимизации функции многих переменных, можно показать для функционала $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на множестве $\widetilde{\Omega}_n\subset\widetilde{H}_n$ гильбертова пространства возможность построения последовательности приближений $\{\widetilde{u}_n^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям (7), (9) для $k=0,1,...$ и (11), при которой $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})=(\widetilde{F}'_n(\widetilde{u}_n^{(k)}),\ \overline{u}_n^{(k)}-\widetilde{u}_n^{(k)})\to 0$ ($k\to\infty$).

Сначала покажем, что при выполнимости условий теоремы величину $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$ из (11) можно искать в виде (13), (14). Заметим из (14), что для любого $k=0,1,...$ возможно, или $\widetilde{\eta}_n^{(k)}=1\le\dfrac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{\|\overline{u}_n^{(k)}-\widetilde{u}_n^{(k)}\|_{\widetilde{H}_n}^2}$, или $\dfrac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C^2D^2}\le$ $\le\dfrac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{\widetilde{D}_n^2}\le\widetilde{\eta}_n^{(k)}=\dfrac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{\|\overline{u}_n^{(k)}-\widetilde{u}_n^{(k)}\|_{\widetilde{H}_n}^2}<1$ с учетом (15). В обоих случаях имеем

$$0<\tilde{\eta}_n^{(k)}\frac{\left\|\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)}\right\|^2_{\tilde{H}_n}}{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}\le 1,\ \ \min\left\{1;\frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C^2D^2}\right\}\le\tilde{\eta}_n^{(k)}\le 1\ \ (k=0,1,\ldots).\ (16)$$

На основании леммы 2.1.1 из [6] с учетом (8), (13), (14), (16) получим

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})\ge$$

$$\ge-\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}(\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}),\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)})-\frac{L\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})2}}{2}\left\|\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)}\right\|^2_{\tilde{H}_n}=$$

$$=\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}\,|\tilde{F}_n'^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|-\frac{L\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})2}}{2}\left\|\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)}\right\|^2_{\tilde{H}_n}=\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}\,|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|\times$$

$$\times\left(1-\frac{L\tilde{\gamma}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}}{2}\tilde{\eta}_n^{(k)}\frac{\left\|\bar{u}_n^{(k)}-\tilde{u}_n^{(k)}\right\|^2_{\tilde{H}_n}}{\left|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\right|}\right)\ge\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}\left|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\right|\left(1-\frac{L\tilde{\gamma}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}}{2}\right)\ge$$

$$\ge\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\alpha}_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{k})}\,|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|\ge\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n\,\min\left\{1;\frac{\left|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})\right|}{C^2D^2}\right\}|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|,\ k=0,1,\ldots.\ (17)$$

Отсюда для всех $k=0,1,\ldots$ будем иметь

$$0\le\min\left\{1;\frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C^2D^2}\right\}|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|\le\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}\left[\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})\right].$$

Так как последовательность $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$ не возрастает и в силу (6) ограничена снизу на $\tilde{\Omega}_n$, то она сходится и $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})\to 0$ при $k\to\infty$. Поэтому из последнего соотношения получаем, что предел $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})$ существует и равен нулю при каждом фиксированном значении n ($n=1,2,\ldots$).

Покажем теперь, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})$ также существует и равен нулю для всех интересующих нас в методе (7), (9)–(11) значений $k=0,1,\ldots,k_n-1$. С этой целью установим сходимость последовательности $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^{\infty}$ при $n\to\infty$. Запишем для произвольного $n>1$

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})-\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})=\sum_{k=0}^{k_n-1}(\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})-\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}))+$$

$$+\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)})-\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}).$$

С учетом неравенства (17) получим

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})-\tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\le-\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n\sum_{k=0}^{k_{\mathrm{n}}-1}\min\left\{1;\frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C^2D^2}\right\}|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|+$$

$$+\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(0)})-\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}),\quad n>1.$$

В силу условия близости (4) и формулы (10) будем иметь

$$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(0)})-\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})=\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(0)})-F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(0)})+F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(0)})-$$

$$-F(\Phi_{n-1}^{-1}\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})+F(\Phi_{n-1}^{-1}\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})-\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\le$$

$$\le\widetilde{\beta}_n+\widetilde{\beta}_{n-1}+F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(0)})-F(\Phi_{n-1}^{-1}\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})=\widetilde{\beta}_n+\widetilde{\beta}_{n-1},\quad n>1,$$

поэтому

$$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})-\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})\le$$

$$\le-\widetilde{\varepsilon}_n\widetilde{\delta}_n\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{k_n-1}}\min\left\{1;\ \frac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C^2D^2}\right\}|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|+\widetilde{\beta}_n+\widetilde{\beta}_{n-1}\qquad(18)$$

для всех $n>1$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})\le\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})+\widetilde{\beta}_n+\widetilde{\beta}_{n-1},\quad n>1.\qquad(19)$$

Далее, поскольку $\widetilde{\beta}_n\to0$ при $n\to\infty$, то из оценки (6) замечаем, что последовательность $\{\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу: $F^*-\widetilde{\beta}_1\le\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})$, $n=1,2,\dots$. Это в совокупности с условием теоремы $\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\beta}_n<\infty$ означает, что числовая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n=\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})-\sum_{i=1}^{n-1}(\widetilde{\beta}_{i+1}+\widetilde{\beta}_i)$, которая в силу (19) монотонно убывает, также ограничена снизу, а значит, имеет конечный предел. Но тогда имеет предел и последовательность $\{\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^{\infty}$.

Воспользуемся этим фактом, условиями $\widetilde{\varepsilon}_n\ge\widetilde{\varepsilon}>0$, $\widetilde{\delta}_n\ge\widetilde{\delta}>0$ ($n=1,2,\dots$) и получим из (18) для всех $n>1$ следующее соотношение:

$$0\le\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{k_n-1}}\min\left\{1;\frac{\left|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})\right|}{C^2D^2}\right\}|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|\le$$

$$\le\frac{1}{\widetilde{\varepsilon}\,\widetilde{\delta}}[\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})-\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})+\widetilde{\beta}_n+\widetilde{\beta}_{n-1}].$$

Так как $\widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})-\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})\to0$, $\widetilde{\beta}_n\to0$ при $n\to\infty$, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, будем иметь: $\lim_{n\to\infty}\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})=0$ для всех значений $k=0,1,\dots,k_n-1$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть сохраняют силу все условия теоремы 1. Пусть, кроме того, функционалы $F(u)$ и $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, $n = 1, 2,...$ выпуклы на $\Omega \subset H$ и $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$ соответственно и выполнено условие (А): для каждого $u^* \in \Omega$ ($F(u^*) = F^*$) существует последовательность $\{\widetilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{\text{n}}^{-1}\widetilde{u}_n = u^*$.

Пусть $\widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1$ выбрано произвольно и последовательность $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ определена согласно условиям (7), (9)–(11). Тогда для всех $k = 1, 2,..., k_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) = F^*$, последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ является минимизирующей для $F(u)$ и любая ее слабая предельная точка есть точка минимума $F(u)$ на Ω, причем в случае единственности точки минимума к ней слабо сходится вся последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Если к тому же, начиная с некоторого $n \ge N \ge 1$

$$k_n < \frac{C^2 D^2}{\widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}, \tag{20}$$

то справедлива оценка

$$F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le \sigma_{\text{n}}, \quad n > N, \tag{21}$$

где $\sigma_{\text{n}} = M \prod\limits_{j=N+1}^{n} q_j + 4 \sum\limits_{i=N+2}^{n} \widetilde{\beta}_{\text{i}-1} \prod\limits_{j=i}^{n} q_j + 2\widetilde{\beta}_{\text{n}}$, $q_n = 1 - \dfrac{k_n \widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{4C^2 D^2}$, $\widetilde{\varepsilon}_n, \widetilde{\delta}_n$ — заданные числа, $0 < \widetilde{\varepsilon} \le \widetilde{\varepsilon}_n < 1$, $0 < \widetilde{\delta} \le \widetilde{\delta}_n \le \dfrac{2(1-\widetilde{\varepsilon}_n)}{L}$, $M > 0$ — постоянная, не зависящая от n, D — диаметр множества Ω.

Доказательство. Выпуклые непрерывные функционалы $F(u)$ и $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на замкнутых ограниченных выпуклых множествах $\Omega \subset H$ и $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$, $n = 1, 2,...$ гильбертовых пространств соответственно достигают на них своей нижней грани [6]:

$$\inf_{u\in\Omega} F(u) = F^* = F(u^*),$$

$$\inf_{\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n} \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) = \widetilde{F}_n^* = \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^*), \ \ n = 1, 2, ...,$$

причем из непрерывности $F(u)$ на Ω, условий (А) и (4) вытекает [2], что $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^*) = F^*.$

Так же, как в работе [6], для выпуклого функционала $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) \in C^1(\widetilde{\Omega}_n)$ на выпуклом множестве $\widetilde{\Omega}_n$, $n = 1, 2,...$ с помощью условия (7) можно получить

$$0 \le \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k+1)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^*) \le \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^*) \le (\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}), \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{u}_n^*) =$$

$$= -\widetilde{F}_n^{(k)}(\widetilde{u}_n^*) \le -\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) ,\ k = 0,1,\dots,k_n - 1 .$$

На основании этого соотношения и оценки (6) будем иметь

$$| \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) - F^* | \le | \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^*) | + | \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) - F^* | \le$$

$$\le -\widetilde{F}_n^{(k-1)}(\overline{u}_n^{(k-1)}) + \widetilde{\beta}_n \qquad (22)$$

для всех $k = 1, 2,\dots, k_n$, $n = 1, 2,\dots$. Поскольку $\widetilde{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$ и в силу теоремы 1 $\widetilde{F}_n^{(k-1)}(\overline{u}_n^{(k-1)}) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $k = 1, 2,\dots, k_n$, то, переходя к пределу в неравенстве (22), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)}) = F^*$, $k = 1, 2,\dots, k_n$.

Далее, из соотношения

$$F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* = F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)}) + \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*,\ \ n = 1, 2,\dots \qquad (23)$$

с учетом условия близости (4) и неравенства (22) можно получить

$$0 \le F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le -\widetilde{F}_n^{(k_n-1)}(\overline{u}_n^{(k_n-1)}) + 2\widetilde{\beta}_n ,\ \ n = 1, 2,\dots, \qquad (24)$$

откуда при $n \to \infty$ вытекает предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) = F^*$, т.е. $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность для функционала $F(u)$.

В силу теоремы 6.1.2 из [6] выпуклое замкнутое ограниченное множество Ω в гильбертовом пространстве H слабо компактно, поэтому существует хотя бы одна подпоследовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty} \in \Omega$, которая слабо сходится к некоторому элементу $v^* \in \Omega$. Поскольку выпуклый непрерывный функционал $F(u)$ на выпуклом множестве $\Omega \subset H$ слабо полунепрерывен снизу [6], то

$$F^* = \lim_{n\to\infty} F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) = \underline{\lim}_{i\to\infty} F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}) \ge F(v^*) \ge F^*,$$

т.е. $F(v^*) = F^*$. Если $F(u)$ достигает своего минимума в единственной точке $u^* \in \Omega$, то вся последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к u^*.

Докажем оценку (21). С помощью неравенств (18) и (4) можно получить

$$F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) = F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)}) +$$

$$+ \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - \widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) + \widetilde{F}_{n-1}(\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le$$

$$\le -\widetilde{\varepsilon}_n\widetilde{\delta}_n \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{k_n}-1} \min\left\{1; \frac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C^2D^2}\right\} |\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})| + 2\widetilde{\beta}_n + 2\widetilde{\beta}_{n-1} ,\ n > 1 .$$

В силу теоремы 1 $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) \to 0$ при $n \to \infty$ для любых $k =$ $= 0, 1, \ldots, k_n - 1$, поэтому найдется число $N_0 \geq 1$ такое, что при всех $n > N_0$

$$\min\left\{1; \frac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C^2 D^2}\right\} = \frac{|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|}{C^2 D^2}, \; k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$$

и для указанных $n > N_0$ будем иметь

$$F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\widetilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq -\frac{\widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{k_n}-1} |\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|^2 + 2\widetilde{\beta}_n + 2\widetilde{\beta}_{n-1}.$$

Введем для краткости обозначение

$$a_n = F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*$$

и перепишем последнее неравенство в виде

$$a_n - a_{n-1} \leq -\frac{\widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2} \sum_{k=0}^{k_n-1} |\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})|^2 + 2\widetilde{\beta}_n + 2\widetilde{\beta}_{n-1}, \; n > N_0.$$

Так как $\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)}) \to 0$ с ростом k при каждом фиксированном $n > N_0$, то при условии $|\widetilde{F}_n^{(k)}(\overline{u}_n^{(k)})| \geq |\widetilde{F}_n^{(k_n-1)}(\overline{u}_n^{(k_n-1)})|$, $k = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ получим

$$a_n - a_{n-1} \leq -\frac{\widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2} k_n |\widetilde{F}_n^{(k_n-1)}(\overline{u}_n^{(k_n-1)})|^2 + 2\widetilde{\beta}_n + 2\widetilde{\beta}_{n-1}, \; n > N_0.$$

Согласно оценке (24) $|\widetilde{F}_n^{(k_n-1)}(\overline{u}_n^{(k_n-1)})| \geq a_n - 2\widetilde{\beta}_n$, поэтому

$$a_{n-1} - a_n \geq \frac{\widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2} \mathrm{k_n} (a_n - 2\widetilde{\beta}_n)^2 - 2\widetilde{\beta}_n - 2\widetilde{\beta}_{n-1}, \; n > N_0, \tag{25}$$

или

$$\frac{\widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2} \mathrm{k_n} (a_n - 2\widetilde{\beta}_n)^2 + (a_n - 2\widetilde{\beta}_n) - (a_{n-1} + 2\widetilde{\beta}_{n-1}) \leq 0, \; n > N_0.$$

Решение этого неравенства относительно a_n с учетом того, что $a_n \geq 0$, дает

$$0 \leq a_n \leq \frac{C^2 D^2}{2\,\mathrm{k_n} \widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}(-1 + \sqrt{\Delta_n}) + 2\widetilde{\beta}_n, \;\; n > N_0, \tag{26}$$

где $\Delta_n = 1 + 4\dfrac{k_n \widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2}(a_{n-1} + 2\widetilde{\beta}_{n-1})$.

Применим формулу бинома Ньютона для оценки снизу величины $\sqrt{\Delta_n}$. Обозначим $z_n = 4\dfrac{\mathrm{k_n} \widetilde{\varepsilon}_n \widetilde{\delta}_n}{C^2 D^2}(a_{n-1} + 2\widetilde{\beta}_{n-1})$, так что $\sqrt{\Delta_n} = (1 + z_n)^{1/2}$, $n > N_0$. Поскольку $a_n \to 0$, $\widetilde{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$, то найдется число $N \geq N_0$ такое, что при всех $n > N$ будут выполнены одновременно условие (21) и неравенство

$$0 \leq a_{n-1} + 2\widetilde{\beta}_{n-1} \leq \frac{1}{4}. \tag{27}$$

Тогда для указанных номеров n будет $|z_n|\le 1$, что гарантирует сходимость ряда

$$(1+z_n)^r = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r(r-1)...(r-m+1)}{m!} z_n^m, \ n>N$$

при любом значении r. Легко видеть, что при $r=1/2$ в силу неотрицательности z_n сумма каждых двух соседних членов этого ряда

$$\frac{r(r-1)...(r-m+1)}{m!} z_n^m + \frac{r(r-1)...(r-m)}{(m+1)!} z_n^{m+1} \ge 0, \ m = 2\ell+1.$$

Поэтому, удерживая три первых члена ряда, будем иметь $1+\frac{1}{2}z_n - \frac{1}{8}z_n^2 \le \sqrt{\Delta_n}$, и неравенство (26) при $n>N$ заведомо будет выполненным, если

$$0 \le a_n \le a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \frac{k_n\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}{C^2D^2}(a_{n-1}+2\tilde{\beta}_{n-1})^2 + 2\tilde{\beta}_n, \ n>N. \quad (28)$$

Далее, для всех $n>N$ из формулы (27), очевидно, следует $-\frac{1}{4}(a_{n-1}+2\tilde{\beta}_{n-1}) \le -(a_{n-1}+2\tilde{\beta}_{n-1})^2$, так что выполнимость неравенства

$$0 \le a_n \le \left(1 - \frac{k_n\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}{4C^2D^2}\right)(a_{n-1}+2\tilde{\beta}_{n-1}) + 2\tilde{\beta}_n, \ n>N \quad (29)$$

автоматически влечет выполнимость (28), а значит, и (25) при всех $n>N$.

Принимая в формуле (29) обозначение $q_n = 1 - \frac{k_n\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}{4C^2D^2}$, получаем

$$a_n \le q_n(a_{n-1}+2\tilde{\beta}_{n-1}) + 2\tilde{\beta}_n \le q_n q_{n-1}(a_{n-2}+2\tilde{\beta}_{n-2}) + 4q_n\tilde{\beta}_{n-1} + 2\tilde{\beta}_n \le$$

$$\le \ldots \le (a_N + 2\tilde{\beta}_N)\prod_{j=N+1}^{n} q_j + 4\sum_{i=N+2}^{n}\tilde{\beta}_{i-1}\prod_{j=i}^{n} q_j + 2\tilde{\beta}_n, \ n>N.$$

Наконец, пользуясь теоремой 2.6.2 из [6], условием (4) и оценкой (6), находим

$$a_N + 2\tilde{\beta}_N = F(\Phi_N^{-1}\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) + \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N^* +$$

$$+\tilde{F}_N^* - F^* + 2\tilde{\beta}_N \le \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N^* + 4\tilde{\beta}_N \le \frac{B}{k_N} + 4\tilde{\beta}_N = M,$$

где $\tilde{F}_N^* = \inf_{\tilde{u}_N\in\tilde{\Omega}_N} \tilde{F}_N(\tilde{u}_N)$, $B = \max\left\{\frac{C^2D^2}{\tilde{\varepsilon}_N\tilde{\delta}_N}; \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(0)}) - \tilde{F}_N^*\right\}$. Таким образом, справедливость оценки (21) установлена. Остается заметить, что в силу (20) $0<q_n = 1-\frac{k_n\tilde{\varepsilon}_n\tilde{\delta}_n}{4C^2D^2}<1$ при всех $n>N$ так, что $\sigma_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема доказана.

Замечание. В условиях теоремы 2 может быть получена оценка, характеризующая скорость сходимости последовательности $\{\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^{\infty}$ к F^*. А именно, из соотношения (23) с учетом условия близости (4) и оценки (21) следует

$$| \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* | \le \sigma_n + \widetilde{\beta}_n, \ n > N.$$

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и условие (A). Пусть, кроме того, $F(u)$ — сильно выпуклый функционал на $\Omega \subset H$, а функционалы $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ выпуклы на $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ соответственно. Тогда последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\widetilde{u}_n^{(k_n)}$ определяются согласно условиям (7), (9)–(11), сходится к единственной точке u^* минимума $F(u)$ на Ω по норме пространства H при любом выборе $\widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1$. Если к тому же, начиная с некоторого номера $n \ge N \ge 1$, выполняется условие (20), то справедлива оценка

$$\left\| \Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)} - u^* \right\|_H^2 \le \frac{2}{\chi}\sigma_n, \ n > N, \tag{30}$$

где $\sigma_n > 0$ определяется формулой (21), $\chi = \text{const} > 0$.

Доказательство. Из сильной выпуклости непрерывного функционала $F(u)$ следует его выпуклость и ограниченность снизу на замкнутом выпуклом множестве $\Omega \subset H$ [6], так что выполняются все условия теоремы 2. Кроме того, $F(u)$ достигает минимума на Ω в единственной точке u^* и при этом справедливо неравенство

$$\left\| \Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)} - u^* \right\|_H^2 \le \frac{2}{\chi}(\mathrm{F}(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F(u^*)), \ n = 1, 2, \ldots,$$

где $\chi > 0$ — константа сильной выпуклости $F(u)$ [6]. Отсюда в силу теоремы 2 вытекает сходимость $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ к u^* по норме пространства H. Оценка (30) является следствием последнего неравенства и оценки (21).

Теорема доказана.

ВЫВОДЫ

В данной работе проведено исследование проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации с ограничениями (2) в гильбертовом пространстве H, основанного на одном варианте метода условного градиента. При достаточно общих условиях аппроксимации задачи (2) рассмотрены вопросы осуществимости и сходимости проекционно-итерационного процесса приближений, возникающего в результате проектирования в гильбертовы пространства, изоморфные подпространствам исходного пространства.

В работе сформулированы и доказаны три теоремы, в которых установлены условия существования проекционно-итерационной последовательности приближений $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, определяемой формулами (7), (9)–(11), условия, при которых соответствующая последовательность элементов $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ является в H минимизирующей для исходного функционала $F(u)$, а также условия слабой и сильной сходимости по норме пространства H этой последовательности к точке $u*$ минимума $F(u)$ на множестве $\Omega \subset H$.

Получены теоретические оценки скорости сходимости и погрешности проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации функционала $F(u)$ на множестве $\Omega \subset H$, основанного на методе условного градиента с выбором итерационного параметра согласно формулам (11), (12).

Сформулированные и доказанные в работе теоремы могут быть использованы при исследовании практической сходимости и вычислительной эффективности рассмотренного варианта проекционно-итерационного метода применительно к различным экстремальным задачам с ограничениями, а также при численном анализе и приближенном решении практически важных задач оптимизации сложных систем [7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балашова С.Д.* О решении задач минимизации проекционно-итерационными методами // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. — Д.: Изд-во ДГУ, 1996. — С. 99–104.
2. *Балашова С.Д., Тавадзе Э.Л.* О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. — Д.: Изд-во ДГУ, 1996. — С. 128–134.
3. *Тавадзе Л.Л.* Применение проекционно-итерационного метода к решению задачи об оптимальном нагреве стержня. — Днепропетровск, 1997. — 16 с. — Деп. в ГНТБ Украины 27.10.97, № 534–Ук 97.
4. *Тавадзе Э.Л., Тавадзе Л.Л.* Проекционно-итерационный метод решения задачи минимизации с ограничениями, основанный на методе условного градиента // Математическое моделирование. — Днепродзержинск: Изд-во ДГТУ, 1998. — № 3. — С. 128–134.
5. *Данилин Ю.М.* Методы минимизации, основанные на аппроксимации исходного функционала выпуклым // ЖВМ и МФ. — 1970. — **10**, № 5. — С. 1067–1080.
6. *Васильев Ф.П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 374 с.
7. *Гарт Л.Л., Гарт Э.Л.* Проекционно-итерационный метод решения одной задачи оптимального управления теплофизической системой // Вісник Дніпропетровського університету. — Д.: Изд-во ДГУ, 2000. — Т. 1. Вип. 3. — С. 112–118.
8. *Гарт Л.Л., Поляков Н.В.* Применение проекционно-итерационного метода к решению задач оптимального управления колебательными процессами // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: Вид-во ДНУ, 2010. — С. 71–80.

Поступила 19.03.2012