УДК 519.711.2

ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ МНОГОЧЛЕНОВ ГЕГЕНБАУЭРА

Н.Д. ПАНКРАТОВА, И.В. БУЗАНЬ, В.А. ДАШУК

Приведено обоснование выбора аппроксимирующей функции в модели восстановления функциональных зависимостей в аддитивной и мультипликативной формах в виде полиномов Гегенбауэра. Дан сравнительный анализ применения полученных аппроксимирующих функций с результатами приближения с помощью полиномов Чебышева и Лежандра, которые являются частными случаями полиномов Гегенбауэра. Показано, что полиномы Гегенбауэра являются более универсальными и удобными, позволяющие при неизменной сложности вычислений добиваться высокой точности аппроксимации для более широкого спектра восстанавливаемых зависимостей.

ВВЕДЕНИЕ

Сложность задач принятия решений на различных стадиях жизненного цикла в автоматизированных системах испытания летательных аппаратов, системах автоматизированного контроля функционирования сложных динамических объектов в реальном времени, системах технического диагностирования и некоторых других обусловливает необходимость разработки эффективных методологических и математических средств анализа, структуризации и формализации противоречивых целей, формирования множества допустимых решений и выбора из них альтернативы. Особую значимость эти задачи приобрели для некоторых объектов, которые характеризуются условиями неполноты, неопределенности, неточности и противоречивости исходной разнородной и разнотипной информации (для слабоструктурированных и слабоформализуемых прикладных областей: медицина, социология, техническая диагностика нештатных и критических ситуаций сложных объектов и т.д.).

Одной из важнейших задач, возникающих при раскрытии концептуальной неопределенности, является задача восстановления функциональных зависимостей по экспериментально полученной дискретной выборке. Задачи восстановления функциональных зависимостей и выявления закономерностей по эмпирическим данным распространены в практике, и потому приемы и методы их решения постоянно совершенствуют и адаптируют к специфике конкретной предметной области и особенностей реальных задач [1–3].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая постановка указанных задач отличается от классических постановок задач интерполяции и статистической обработки ограниченной выборки. Так, в классической задаче интерполяции, требуется найти такую функцию, которая обеспечивает восстановление ее значений в заданных точках. В задачах выявления закономерностей необходимо найти функцию, которая как можно точнее характеризует истинную ее зависимость от наиболее важных факторов на всех интервалах задания исходных данных.

Это отличие обусловливает важные особенности рассмотренной задачи, а именно: построение регуляризирующего функционала при решении некорректных задач интерпретации косвенных экспериментов, выбор базовой аппроксимирующей функции, неформальный выбор структуры восстанавливаемых функций, определение рационального набора признаков и рационального объема выборки и т.д.

Вместе с тем, при решении реальных задач, в частности, на начальном этапе формирования концепции и замысла сложных изделий новой техники, известна лишь неполная, разнородная, исходная информация: эмпирические данные, экспертные оценки, априорная информация об аналогах и прототипах, некоторые сведения о назначениях и качественные показатели изделия, стандартные ограничения и данные, характеризующие условия производства и эксплуатации и т.д. На основе такой информации необходимо сформировать целевые функции создания нового изделия. При этих условиях выбор количества целевых функций, их аналитических форм, обоснования содержания и назначения является неформализуемой процедурой, которую должен выполнять только исследователь. Результат зависит от компетенции, умения, опыта, интуиции и других индивидуальных качеств исследователя, выполняющего данную процедуру.

Рассматриваемая задача принципиально отличается от типовой задачи восстановления функциональной зависимости, что обусловлено разнородностью не только исходной информации, но и свойствами групп факторов, которые определяют соответственно векторы x_1, x_2, x_3. Значения компонент вектора x_1 задано разработчиком и поэтому их можно изменить в процессе проектирования изделия. Значения компонент вектора x_2 — это требования, обусловленные назначением изделия, которые в случае его изменения могут быть откорректированы заказчиком изделия. В любом случае разработчик обязан выполнить требования заказчика. Значения компонентов вектора x_3 — требования, определенные стандартами на условия эксплуатации изделия. Разработчик должен их выполнять. Отсюда следует необходимость оценивать раздельно степень влияния каждой группы факторов на свойства функций приближения. Для этого функции приближения формируются в виде иерархической многоуровневой системы моделей.

На первом, верхнем уровне реализуют модель, которая определяет зависимость функций приближения от переменных x_1, x_2, x_3. Искомые функции формируются в классе аддитивных функций и представляются в виде суперпозиции функций от переменных x_1, x_2, x_3. Возможность такого представления следует из теоремы А.Н. Колмогорова [4]. Таким образом, искомые функции $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$ будем формировать в таком виде [5]:

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = c_{i1}\Phi_{i1}(x_1) + c_{i2}\Phi_{i2}(x_2) + c_{i3}\Phi_{i3}(x_3), \; i = \overline{1, m} . \qquad (1)$$

На втором уровне формируются модели, которые определяют зависимость $\Phi_{is}(s=1,2,3)$ от компонентов переменных x_1, x_2, x_3. Для этого требуется перейти от функций векторов к суперпозициям функций компонентов этих векторов. Учитывая, что компоненты каждого вектора x_1, x_2, x_3 разнородные по физическому содержанию, целесообразно для слагаемых функций (1) выбрать класс обобщенных полиномов и представить их в виде

$$\Phi_{i1}(x_1) = \sum_{j_1=1}^{n_1} a_{i\,j_1}^{(1)} \Psi_{1\,j_1}(x_{1\,j_1}),\; \Phi_{i2}(x_2) = \sum_{j_2=1}^{n_2} a_{i\,j_2}^{(2)} \Psi_{2\,j_2}(x_{2\,j_2}),$$

$$\Phi_{i3}(x_3) = \sum_{j_3=1}^{n_3} a_{i\,j_3}^{(3)} \Psi_{3\,j_3}(x_{3\,j_3}). \qquad (2)$$

Предложено для всех $i=\overline{1,m}$ по каждой переменной $x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3}$ выбирать соответственно однотипные функции $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$, что позволяет упростить дальнейшее решение задачи.

На третьем уровне формируются модели, которые определяют функции $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$. На этом уровне важнейшим является выбор структуры функций $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$ и базовых аппроксимирующих функций. Структуры этих функций выбираем аналогично формуле (2). Представим функции в виде обобщенных полиномов

$$\Psi_{s\,j_s}(x_{j_s}) = \sum_{p=0}^{P_{j_s}} \lambda_{j_s\,p} \varphi_{j_s\,p}(x_{sj_s}),\; s=1,2,3. \qquad (3)$$

В ряде случаев функциональные зависимости формируются в классе мультипликативных функций, которые характеризуются последовательностью уровней:

$$y_i = \Phi_i(x);\; i=\overline{1,m};$$

$$\left[1+\Phi_i(x)\right] = \prod_{k=1}^{K_0} \left[1+\Phi_{ik}(x_k)\right]^{c_{ik}};$$

$$\left[1+\Phi_{ik}(x_k)\right] = \prod_{j_k=1}^{n_k} \left[1+\Psi_{kj_k}(x_{kj_k})\right]^{a_{ikj_k}};$$

$$\left[1+\Psi_{kj_k}(x_{kj_k})\right] = \prod_{p_{j_k}=1}^{P_{kj_k}} \left[1+\varphi_{p_{j_k}}(x_{kj_k})\right]^{\lambda_{kj_k}}.$$

Данная последовательность для удобства вычислений после несложных преобразований представляется в форме аддитивных функций:

$$\Phi_i(x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{K_0} c_{ik} \ln[1+\Phi_{ik}(x_k)]\right\} - 1;\; i=\overline{1,m};\; k=\overline{1,K_0}; \qquad (4)$$

$$\Phi_{ik} = \exp\left\{\sum_{j_k=1}^{n_k} a_{ikj_k} \ln[1+\Psi_{kj_k}(x_{kj_k})]\right\} - 1;\quad x_k = \left\langle x_{kj_k},\, j_k=\overline{1,n_k}\right\rangle; \qquad (5)$$

$$\Psi_{kj_k}(x_{kj_k}) = \exp\left\{ \sum_{p_{j_k}=1}^{P_{kj_k}} \lambda_{kj_k} \ln[1+\varphi_{pj_k}(x_{kj_k})] \right\} - 1\,;\; p_{j_k} = \overline{1, P_{kj_k}}\,. \quad (6)$$

Выбор структуры функций (4)–(6) обусловлен рядом факторов. Во-первых, априорно неизвестно являются ли компоненты векторов x_1, x_2, x_3 зависимыми или независимыми. Поэтому применение аддитивных функций (1)–(3) при наличии зависимых компонентов векторов x_1, x_2, x_3 может привести к большим отклонениям полученных функций от истинных многофакторных закономерностей исследуемых процессов. Во-вторых, применение мультипликативных функций позволяет учитывать влияния на свойства искомых функций $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1, m}$ не только группы компонентов каждого вектора x_1, x_2, x_3, но и взаимные воздействия компонентов разных векторов x_1, x_2, x_3 x_1, x_2, x_3 в пределах каждого вектора. В-третьих, представление искомых функциональных зависимостей в форме последовательности уровней (4)–(6) позволяет при решении задачи использовать типовой математический аппарат для системы уравнений из аддитивных функций.

Задача выбора класса и структуры функций приближения является основной и определяет требования к другим задачам. В частности, искомые функции должны быть не только максимально приближенными к эмпирическим данным по определенному критерию, но и иметь экстремальные свойства. Специфика экстремальных свойств обусловлена ограниченностью интервала задания исходных данных и состоит в том, что возмущения на границах интервала существенно сказываются на экстремальных свойствах функции. Эта особенность является принципиальной и обусловливает более сложную структуру функций приближения, чем в задачах интерполяции. Отсюда следует практическая значимость задачи рационального выбора класса функций приближения. Важная особенность этой задачи состоит в необходимости выбора рационального компромисса между противоречивыми требованиями: максимизации уровня достоверности процедуры выявления искомой закономерности, что обусловливает необходимость повышения сложности класса функций приближения, и минимизации сложности и трудоемкости процедуры формирования искомой функциональной зависимости.

При реализации различных прикладных задач наиболее часто в качестве базовой аппроксимирующей функции используют полиномы Чебышева, Лагерра, Лежандра, Эрмита и др., применение которых не всегда позволяет получить одинаково требуемую точность приближения. Актуальным является нахождение такого общего вида полиномов, которые за счет вариации своих параметров смогли бы не допустить снижения точности приближения при аппроксимации различного вида функций. Последнее обуславливает целесообразность рассмотрения более общей структуры базовых аппроксимирующих функций. Одним из представителей наиболее общего класса функций являются многочлены Гегенбауэра. Следует заметить, что исследуемые полиномы Гегенбауэра не являются крайней точкой обобщения. Существует еще более общая структура — многочлены Якоби, а также функции Гаусса. Однако их использование для решения задач поиска функциональных зависимостей не является рациональным, поскольку оперирование этими интерполяционными полиномами является достаточно громоздким, а потребность на каждой итерации искать сумму приводит к усложнению работы программного обеспечения. Именно поэтому предлагается рассмотреть полиномы Гегенбауэра, как золотую средину между универсальностью и простотой реализации, которые широко используются в научных исследованиях [6–8].

В данной работе проводится исследование выбора базовой аппроксимирующей функции $\varphi_{j_s p}$, применяемой на третьем уровне в модели восстановления функциональных зависимостей в аддитивной (3) и мультипликативной (6) формах, в виде полинома Гегенбауэра. Далее проводится сравнительный анализ наиболее часто используемых полиномов Чебышева, Лагранжа и Лагерра с целью подбора для многочленов Гегенбауэра оптимального значения параметра α при аппроксимации различных функций (тригонометрических, экспоненциальных). Для решения этой задачи приведем некоторые сведения о полиномах Гегенбауэра.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ГЕГЕНБАУЭРА

Гипергеометрическая функция (функция Гаусса) определяется внутри круга $\|z\| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [8]:

$$F(a,b,c,z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{l=0}^{k-1}\frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)}\right]z^k = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots .$$

Когда параметр c не равен нулю и отрицательным целым числам, регулярное в нуле решение уравнения Эйлера

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz} - abw = 0$$

можно будет записать через гипергеометрический ряд

$${}_2F_1(a,b,c,z) \equiv F(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots .$$

Из приведенных выше функций Гаусса можно получить полиномы Якоби (иногда называют гипергеометрическими полиномами) — это один из классов ортогональных полиномов с весом $W(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Полиномы Якоби получаются из гипергеометрических функций в тех случаях, когда приведенные ниже ряды сходятся

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)}{n!}{}_2F_1\left(-n; 1+\alpha+\beta+n; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right), \qquad (7)$$

где $(\alpha+1)_n$ — символ Похгаммера, который выражается через Гамма-функцию

$$(\alpha+1)_n = \frac{\Gamma((\alpha+1)+n)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Подставляя последнее в (7), получаем

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^m.$$

Если же в многочленах Якоби приравнять параметры α и β, то получим полиномы Гегенбауэра:

$$C_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(2\alpha+n)\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+n+1/2)}P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}, \tag{8}$$

которые являются ортогональными на промежутке $[-1,1]$ с весом:

$$W(x)=(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

В рекуррентном виде полиномы Гегенбауэра можно представить в виде

$$(n+1)C_{n+1}^{(\alpha)}(x)=2(n+\alpha)xC_n^{(\alpha)}(x)-(n+2\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Частным случаем полиномов Гегенбауэра при $\alpha=1/2$ являются многочлены Лежандра [9]

$$P_n(x)=C_n^{(1/2)}(x)$$

или в рекуррентном виде

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x).$$

Частным случаем нормированного многочлена Гегенбауэра для параметра $\alpha\to 0$ являются многочлены Чебышева:

$$T_n(x)=\lim_{\alpha\to 0} n\Gamma(\alpha)C_n^{(\alpha)}$$

или в рекуррентном виде:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ГЕГЕНБАУЭРА

Проведем исследования точности аппроксимации некоторых наиболее часто используемых функций полиномами Гегенбауэра для различных значений коэффициента α (Чебышева, Лагранжа и Лагерра). Сначала рассмотрим экспоненциальную зависимость вида

$$f_1(x)=\frac{x^3e^{x^{4/3}}-x^4e^{x^2}+e^{2x}-x^{\frac{4}{3}}}{x^2e^x}. \tag{9}$$

При использовании полиномов Гегенбауэра (8) для разных значений коэффициента α получены следующие результаты, приведенные в табл. 1.

Как видно из табл. 1, наименьшее отклонение от точного значения получено при использовании полиномов Гегенбауэра с коэффициентом $\alpha=0{,}75$.

Проведем аналогичное исследование для других наиболее часто используемых функций. Рассмотрим тригонометрическую зависимость вида

$$f_2(x) = 0{,}08x^2 \sin(2\pi x) - \frac{0{,}05x}{\cos(\sin(2\pi x))} + \sin\sqrt{\frac{1}{x+1}} + e^x \sin(2\pi x) + \sin(e^x)\,. \quad (10)$$

Таблица 1. Сопоставление результатов аппроксимации полиномами Гегенбауэра зависимости (9) при разных значений коэффициента α

Значение α	**Максимальное отклонение**
0 (Полиномы Чебышева)	0,0052
0,25	0,0038
0,5 (Полиномы Лежандра)	0,0045
0,75	0,0031
1	0,0033
1,25	0,0059
1,5	0,0041
1,75	0,0077
2	0,0072
2,25	0,0062
2,5	0,0056
Полиномы Лагерра	0,0067

При использовании полиномов Гегенбауэра для разных значений коэффициента α мы получим следующие результаты, приведенные в табл. 2.

Таблица 2. Сопоставление результатов приближения зависимости (10) при использовании различных аппроксимирующих полиномов и значений коэффициента α

Значение α	**Максимальное отклонение**
0 (Полиномы Чебышева)	0,0032
0,25	0,0035
0,5 (Полиномы Лежандра)	0,0037
0,75	0,0038
1	0,0025
1,25	0,0049
1,5	0,0027
1,75	0,0033
2	0,0045
2,25	0,0058
2,5	0,0033
Полиномы Лагерра	0,0062

В данном случае наилучшее приближение оказывается при значении коэффициента $\alpha = 1$, то есть ни полиномы Лежандра, ни полиномы Чебышева, ни полиномы Лагерра не дают ту же точность, что полиномы Гегенбауэра при значении $\alpha = 1$.

Для рассмотренных тестовых функций полиномы Гегенбауэра позволили получить более точную аппроксимацию, нежели полиномы Чебышева, Лежандра и Лагерра. Это можно объяснить тем, что для каждой функции можно подобрать такое значение коэффициента α полиномов Гегенбауэра, который даст возможность получить наилучший результат.

Для демонстрации возможного применения полиномов Гегенбауэра в качестве базовой аппроксимирующей функции $\varphi_{j_s p}$ при восстановлении функциональных зависимостей (3) или (6) в реальной ситуации были использованы данные о динамике изменения курсов валют на протяжении тридцати двух дней (данные были взяты с официального сайта НБУ) (рисунок). Как и при работе с описанными выше функциями, вариации коэффициента α и степеней полиномов (8) позволяют с большей точностью аппроксимировать исследуемые функциональные зависимости, в то время как полиномы Лежандра и Чебышева позволяют добиться такой же точности лишь для более высоких степенях полиномов.

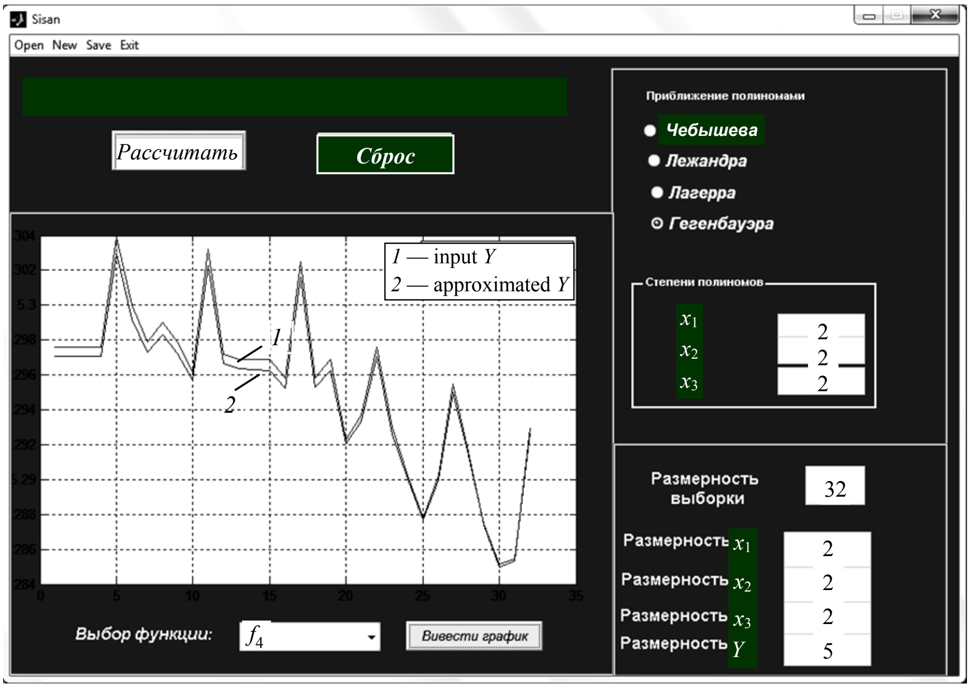

Рисунок. Распределение восстановленных зависимостей курсов валют с привлечением в качестве базовой аппроксимирующей функции $\varphi_{j_s p}$ полиномов Гегенбауэра

Использование полиномов Гегенбауэра при восстановлении функциональной закономерности в виде базовой аппроксимирующей функции $\varphi_{j_s p}$ позволяет получить минимальное отклонение от исходной выборки по сравнению со своими частными случаями (для разных значений коэффициента α), не увеличивая при этом сложность вычисления.

ВЫВОДЫ

В данной статье был проведен анализ применения полиномов Гегенбауэра для аппроксимации наиболее часто используемых экспоненциальных и тригонометрических зависимостей, а также сравнение полученных аппроксимирующих функций с результатами приближения с помощью полиномов Чебышева и Лежандра, которые являются частными случаями полиномов Гегенбауэра. При этом было показано, что последние позволяют приблизить с более высокой точностью рассматриваемые функции, чем полиномы

Чебышева или Лежандра за счет изменения коэффициента α в зависимости от вида функциональной зависимости. Так, для приближения экспоненциальных функций более эффективными оказались полиномы Гегенбауэра со значением $\alpha = 1/2$, что соответствует полиномам Лежандра. При аппроксимации тригонометрических функций более высокая точность была получена при использовании полиномов Гегенбауэра со значением α=1, то есть при таком α используемая аппроксимирующая функция лучше приближает искомую функциональную зависимость, чем при привлечении полиномов Чебышева или Лежандра.

Полученные результаты были подтверждены при восстановлении реальных функциональных зависимостей курсов валют, применяя полиномы Гегенбауэра в качестве базовой аппроксимирующей функции $\varphi_{j_s p}$. Таким образом, исследуемые полиномы Гегенбауэра являются более универсальными и удобными для использования в задачах восстановления функциональных зависимостей, поскольку при неизменной сложности вычислений позволяют добиться высокой точности аппроксимации для более широкого спектра восстанавливаемых зависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гесте Т., Тибширани Р., Фридман Д.* Элементы статистического обучения // Интеллектуальный анализ данных, вывода и прогнозирование последовательностей Спрингера в статистике. Springer. — 2008. — 764 с.
2. *Жучко О.В., Пытьев Ю.П.* Восстановление функциональной зависимости теоретико-возможностными методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2003. — **43**, № 5. — С. 767–783.
3. *Mihaila B., Mihaila I.* Numerical approximations using Chebyshev polynomial expansions: El-gendi’s method revisited // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — **35**(**43**), № 5. — P. 731–746.
4. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения // ДАН СССР. — 1957. — **114**, № 5. — С. 953–956.
5. *Панкратова Н.Д.* Формирование целевых функций в системной задаче концептуальной неопределенности // Доп. НАН України. — 2000. — № 9. — С. 67–73.
6. *Sayyed K.A.M., Metwally M.S., Batahan R.S.* Gegenbauer matrix polynomials and second order matrix differential equations, DepartmentofMathematics // Divulgaciones Matem´aticas. — 2004. — **12**, № 2. —P. 101–115.
7. *David Gottlieb, Chi-Wang Shu.* Recovering exponential accuracy in a subinterval from a Gegenbauer partial sum of a piece wiseanalytic function // Math. Comp. — 1995. — **64**. — P. 1081–1095.
8. *Guo Ben-yu.* Gegenbauer approximation and its applications to differential equations on the whole line // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1998. — **226**, № 1 — P. 180–206.
9. *Boyd John P.* Trouble with Gegenbauer reconstruction for defeating Gibbs phenomenon: Runge phenomenon in the diagonal limit of Gegenbauer polynomial approximations // Journal of Computational Physics. — 2005. — **204**. — P. 53–264.

Поступила 30.04.2015