

КЛАСИФІКАЦІЯ ОПЕРАТОРІВ ОДНІЄЇ ДИСКРЕТНОЇ АНТИСИПАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

С.В. ЛАЗАРЕНКО, О.С. МАКАРЕНКО

Сучасним напрямом математичного моделювання багатьох соціально-економічних чи екологічних процесів на сьогодні є моделювання обчислювальних систем із випередженням (антисипацією). За допомогою їх зручно формалізувати такі моделі як взаємодія популяцій, конфліктів за обмежені ресурси, руху натовпу тощо. У цій галузі моделювання останнім часом зосереджуються на побудові та дослідженні нових моделей із антисипацією для штучних нейронних систем, клітинних автоматів тощо. Роботу присвячено класифікації оператора дискретної квадратичної сильної антисипаційної системи першого порядку в просторі управляючих параметрів. Також сформульовано достатню умову виникнення атракторів таких системах у вигляді самоподібних структур, котрі в подальшому можна розглядати, як фрактали. В ході досліджень використано діаграми Ламерея та розроблене багатопоточне програмне забезпечення. Значний прикладний інтерес становить виведення залежності фрактальних розмірностей атракторів таких систем від управляючих параметрів.

ВСТУП

Ця робота є продовженням циклу робіт, присвячених досить новому та перспективному напрямку математичного моделювання — дослідженню систем із антисипацією (чи систем із випередженням, або антисипаційних систем, надалі — АС). Широкий клас процесів, що відбуваються у соціально-політичному житті суспільства так чи інакше можна формально виражати через системи із антисипацією. Це стосується, як моделювання поведінки натовпу, рефлексії, так і прийняття індивідуальних рішень при існуванні багатьох можливих варіантів, у тому числі й у фінансово-економічних сферах (теорії конфліктів, боротьбі за обмежені ресурси, тощо).

Початком розвитку напрямку з дослідження обчислювальних АС вважають роботу американського біолога Роберта Розена «Anticipatory Systems» [1]. Р. Розен відомий зокрема в математичній біології, як засновник класу реляційних моделей живих організмів, які називають системами метаболічних реплікацій і котрі формально представляють, як послідовні автомати.

У своїй роботі [1] Р. Розен дає визначення АС, як «системи, що містить прогнозу модель самої себе, та / чи оточуючого середовища, котра дозволяє системі змінювати стан в момент часу у відповідності із прогнозами цієї моделі, що належать до більш пізнього моменту часу». Вчений пов'язує деякі АС із циклами зі зворотнім зв'язком (тобто, іншими словами — майбутня причина могла б бути породжена дією теперішнього часу). Наступний крок у розумінні систем із антисипацією зробив на початку 90-х років минулого століття Даніель Дюбуа, який ввів у моделювання обчислювальних АС

поняття сильної антиципації, коли неможливо застосовувати прямі прогнозні моделі, на противагу слабкої антиципації, котра, як він стверджує, характеризує підхід Розена [2]. Д. Дюбуа запропонував ряд математичних моделей, збудованих із включенням антисипаційної складової, зокрема топологію нейронних мереж, та побудови пам'яті як стеку гіперінкурсій [3].

Робіт із дослідження конкретних АС до цього часу було запропоновано дуже мало. Наприклад, деякий вклад у дослідження таких обчислювальних систем вніс Марк Бюрк [4, 5]. Так, він у своїй роботі [5] проводить дослідження динаміки слабких АС, утворених із відповідних найпростіших неантисипаційних систем, та порівнює їх поведінку із відповідними неантисипаційною та сильною антисипаційною системами.

Теорія антисипації знаходить все більше застосувань у таких сферах моделювання, як клітинні автомати, нейронні мережі, штучні імунні системи, тощо. У цих галузях застосування антисипаційного підходу варто відзначити здобутки вітчизняних, що наведені у роботах [6–9]. Наприклад, у роботах [7, 8] подаються нові моделі клітинних автоматів, котрі передбачають наявність індивідуальних ментальних властивостей об'єктів, що моделюються.

В силу того, що широкий клас реальних задач, які постають при моделюванні різних соціальних, економічних та екологічних процесів необхідно розглядати зокрема із урахуванням антисипаційних складових, то маємо підстави говорити про великий прикладний інтерес до такого класу динамічних систем. Однак, на сьогодні АС із сильною антисипацією все ще залишаються мало дослідженими, оскільки їх моделювання представляє собою нову область математичного моделювання, а також є досить ресурсомісткою проблемою. Тому, запропонована робота присвячена дослідженню одного із найпростіших представників цього класу обчислювальних систем із антисипацією — а саме модифікації класичного логістичного рівняння, в якому врахована антисипація.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Мета роботи — проведення класифікації залежності поведінки розв'язків від параметрів відповідних рівнянь, що задають дискретну квадратичну АС (тобто з квадратичною нелінійністю) із сильною антисипацією першого порядку (тобто антисипацією, яка враховує значення не лише в поточний момент часу, а й у наступному кроці за часом), та виведення достатньої умови виникнення самоподібних структур у таких системах, які в подальшому можна було б розглядати, як елементи, з яких будуються фрактали.

КОРОТКИЙ ОПИС МОДЕЛІ, ЩО РОЗГЛЯДАЄТЬСЯ

Коротко нагадаємо основні поняття теорії АС. Даніель Дюбуа вводить поняття інкурсійності, як неявної рекурсійної системи [3], що задається в загальному випадку співвідношенням

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, \Lambda),$$

де, x_{t+i} , $i = 1, 2, \dots$ — майбутні стани системи, x_t — поточний стан та x_{t-i} , $i = 1, 2, \dots$ — минулі стани системи з управляючими параметрами (Λ). Розрізняють дві основні групи АС — слабкі та сильні. Слабкі АС із дискретним часом використовують модель, що працює в режимі «вперед», аби створити прогностні значення станів динамічної системи в наступні моменти часу (\hat{x}_{t+1}), а вже на основі цих прогностичних значень у режимі «реального часу» будуються стани динамічної системи в майбутні моменти часу. Таку систему формально представляють, як

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, \hat{x}_{t+1}, \dots, \Lambda).$$

Сильна ж АС при визначенні майбутнього стану системи не використовує побудовану модель для оцінки майбутніх станів, а є системою, що будується на основі самої себе (системи із зворотнім зв'язком). В залежності від того, чи допускає функціональний зв'язок f однозначні чи багатозначні розв'язки, вирізняють особливий клас інкурсійних АС — гіперінкурсійні АС, функція f яких допускає багатозначні відображення [2].

На сьогоднішній день сильні АС все ще залишаються малодослідженими. Для дослідження такого роду обчислювальних систем із антисипацією однією із головних задач є проведення досліджень кривих оператора у просторі параметрів, що задає наступні стани системи. Це класифікація типів розв'язків систем, та поведінка точок, що зображують, зокрема в частинних, але дуже цікавих випадках почергової чи одночасної стійкості/нестійкості нерухомих точок оператора, що визначає АС. Цим питанням і присвячено запропоновану роботу. Розглянемо квадратичну сильну АС першого порядку, котру в загальному вигляді можна представити як

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n+1}, \Lambda), \quad x_n \in R, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де Λ — двовимірний вектор управляючих параметрів $\Lambda = (\lambda; \alpha) \in R^2$. В якості найпростішого об'єкта дослідження такого виду АС будемо розглядати модифіковане логістичне рівняння із привнесеною антисипаційною складовою

$$x_{n+1} = \lambda \cdot x_n(1 - x_n) - \alpha \cdot x_{n+1}^2, \quad (2)$$

де λ — параметр, що визначає логістичну частину АС та α — параметр, що визначає антисипаційну частину АС. Це рівняння представляє значний інтерес, оскільки при управляючому векторі $\Lambda = (\lambda, 0)$ воно набуває вид добре відомого класичного логістичного рівняння, яке має, як відомо, «багату» динаміку, описуючи процес зміни чисельності популяції.

Неважко знайти нерухомі точки відображення (2) із рівняння $x = \lambda \cdot x(1 - x) - \alpha \cdot x^2$. Ними є $x_1^* = 0$ та $x_2^* = \frac{\lambda - 1}{\alpha + \lambda}$. Далі розглянемо ряд можливих видів оператора досліджуваної АС у просторі параметрів.

КЛАСИФІКАЦІЯ ОПЕРАТОРА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЇ АС ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Проведемо класифікацію оператора дискретного відображення (2). Для цього перепишемо його наступним чином (при умовах $\lambda \neq -1/\alpha$, $\lambda \neq 0$ та $\alpha \neq 0$).

$$\frac{(x_n - 1/2)^2}{(\lambda + 1/\alpha)/4\lambda} + \frac{(x_{n+1} + 1/(2\alpha))^2}{(\lambda + 1/\alpha)/4\alpha} = 1. \quad (3)$$

Побудуємо області зміни знаків знаменників на площині $(\lambda; \alpha)$ (рис.1, а). У першій та третій чвертях площини матимемо обидва знаменника додатними, тому співвідношення (3) прийме вид еліптичної кривої (рис.1, б) із діаметрами по осям $\sqrt{1+1/\alpha\lambda}$ та $\sqrt{\lambda/\alpha + 1/\alpha^2}$. Коли ж $(\lambda; \alpha)$ належить другій чверті площини над зображеною кривою та у четвертій чверті під нею співвідношення (3) матиме вид гіперболи, у якій велика вісь паралельна осі x_n (рис. 1, в). Якщо ж $(\lambda; \alpha)$ знаходиться під зображеною кривою у другій чверті та над нею у четвертій чверті, то велика вісь гіперболи паралельна осі x_{n+1} (рис. 1, г).

Відстань між гілками гіперболи (великі осі) по осям x_n та x_{n+1} відповідно $\sqrt{1+1/\alpha\lambda}$ та $\sqrt{\lambda/\alpha + 1/\alpha^2}$ (рис.1, г та рис. 1, в — дві гіперболи).

Розглянемо особливі випадки. Для цього запишемо співвідношення (2) у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(x_n, x_{n+1}) &= \alpha x_{n+1}^2 + x_{n+1} - \lambda x_n(1 - x_n) = \\ &= k_{11}x_n^2 + k_{22}x_{n+1}^2 + 2k_{12}x_nx_{n+1} + 2k_{13}x_n + 2k_{23}x_{n+1} + k_{33}. \end{aligned}$$

Обчислимо детермінанти $\Delta_3 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda/2 \\ 0 & \alpha & 1/2 \\ -\lambda/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{\lambda}{4}(1 + \alpha\lambda) \text{ та } \Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix} = \alpha\lambda, \text{ слід матриці } S = \text{sp} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix} = \alpha + \lambda$$

та інваріант відносно повороту системи координат $R = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{13} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{23} & k_{33} \end{vmatrix} =$

$$= \frac{\lambda^2 - 1}{4}.$$

Випадок виродженої кривої другого порядку $\Delta_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \alpha\lambda = -1$. При $\lambda = 0$ и $\alpha\lambda \neq -1$ $\Delta_3 = \Delta_2 = 0$ та оскільки $R(\lambda = 0) = -1/4 < 0$, то маємо справу із виродженим випадком — двох паралельних прямих $x_{n+1} = 0$, $x_{n+1} = -1/\alpha$ (рис. 2, а). При $\lambda \neq 0$ та $\alpha\lambda = -1$ АС прийме вид виродженої гіперболи — пари двох прямих, що перетинаються із коефіцієнтом нахилу $\pm \lambda$ (рис. 2, б). Зрозуміло, що в такому випадку при $\lambda = 1$ одна із прямих співпадає із прямою $x_{n+1} = x_n$ (рис. 2, в), а при $\lambda = -1$ вона буде паралельною до $x_{n+1} = x_n$ (рис. 2, г).

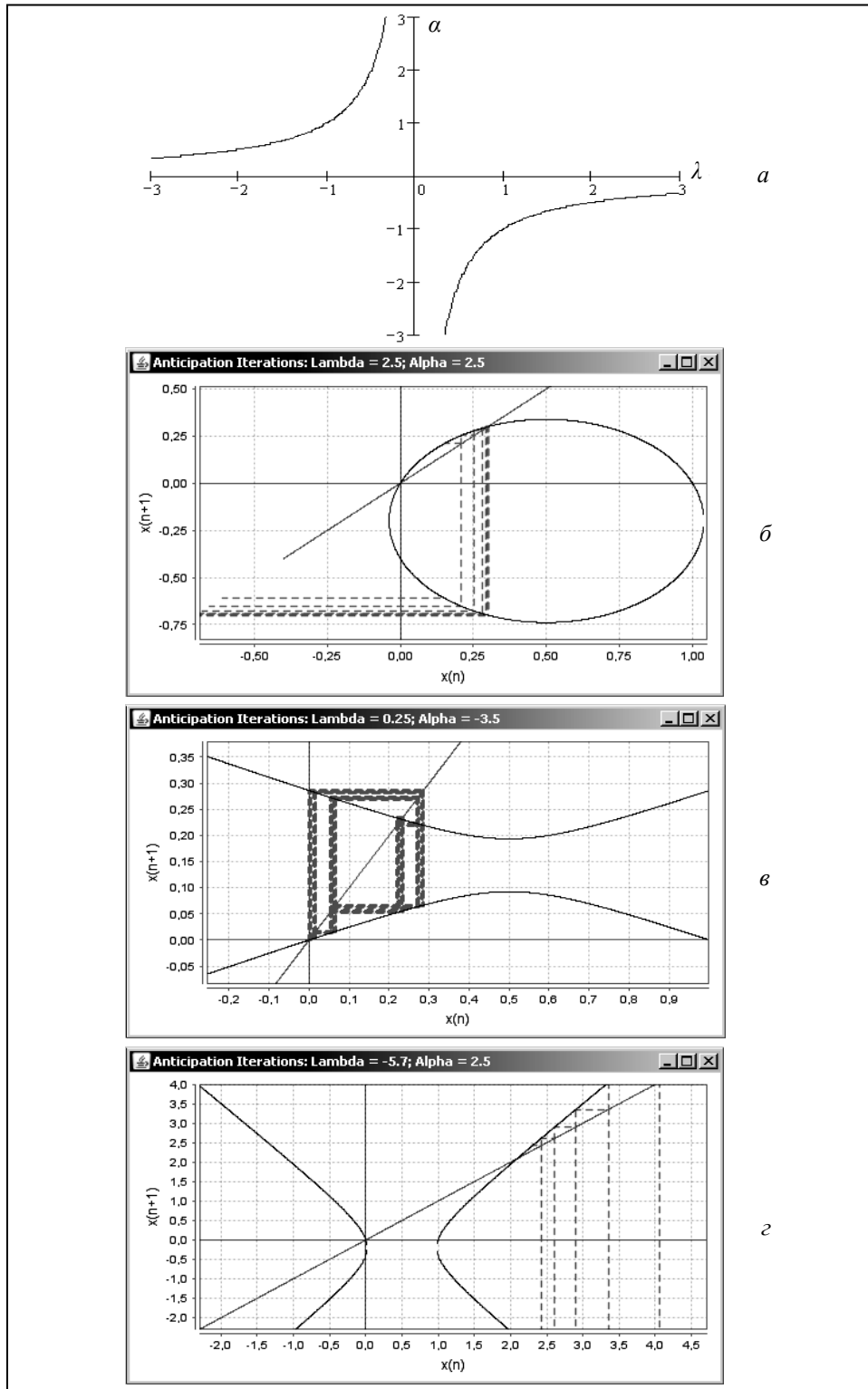


Рис. 1. Ітерації дискретного відображення за різних значень параметрів: а — крива зміни знаків коефіцієнтів кривої 2-го порядку (2); б–г кілька ітерацій дискретного відображення (3) у різних областях (λ ; α)

У випадку ж коли коефіцієнт антиципації має значення нуль — $\alpha = 0$, співвідношення (2) перетворюється на добре відоме логістичне відображення Ферхюльста.

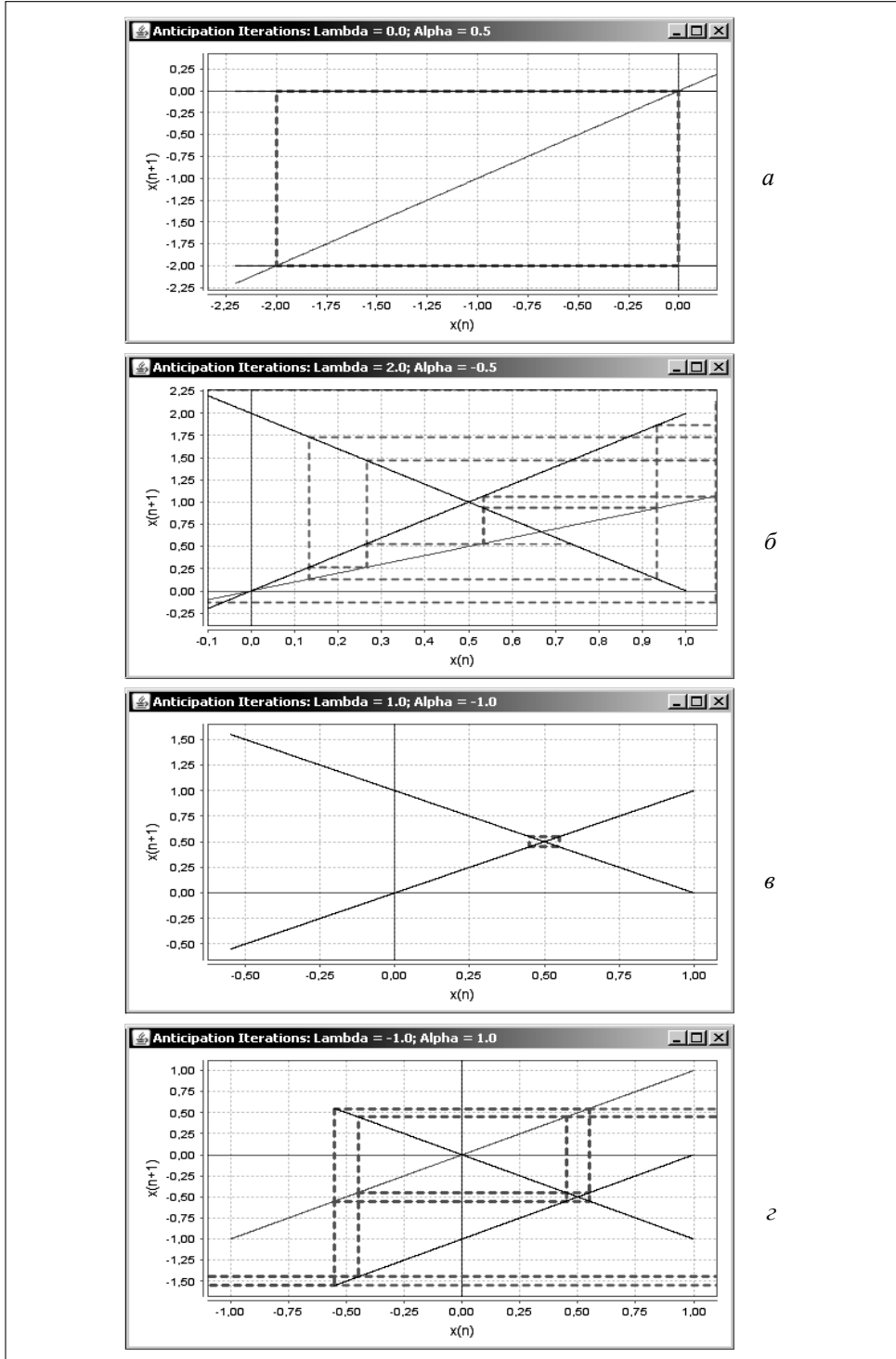


Рис. 2. Ітерації дискретного відображення в особливих випадках: а – г — кількість ітерацій за різних значень параметра α

ВИНИКНЕННЯ САМОПОДІБНИХ СТРУКТУР

Розглянемо тепер досить важливу і цікаву з практичної точки зору проблему — виникнення атрактора системи із самоподібною структурою, що в певній мірі може претендувати на фрактальність. Для початку дамо кілька необхідних для подальших міркувань визначень.

Визначення 1. Під дискретною динамічною системою у явному вигляді з антисипацією $D_{h,p}$ будимо розуміти четвірку (F, N_0, R, S) , де $F : N_0 \times R^h \times S^p \rightarrow S$ — правило, що визначає зміну станів динамічної системи; N_0 — множина цілих невід’ємних чисел, що задає дискретний час; R^h — множина параметрів ДС (h — вимірні дійсні вектори); $S \subset 2^R$ — множина станів ДС (2^R — множина всіх підмножин множини R); p — задає кількість минулих станів, від яких залежить оператор еволюції.

Визначення 2. Під станом дискретної динамічної системи із антисипацією $D_{h,p}$ розумітимемо підмножину $X_n \in S$ в момент часу $n \in N_0$.

Зазначимо, що часто під станом антисипаційної ДС розуміють саме x_i із (1), однак, без втрати узагальненості міркувань, будемо притримуватись саме такого визначення 2.

Визначення 3. Під траєкторією дискретної ДС із антисипацією $D_{h,p}$ розумітимемо відображення $N_0 \rightarrow S$, тобто іншими словами — послідовність станів X_0, X_1, X_2, \dots .

Визначення 4. Оператор динамічної системи $D_{h,p}$, що описує явну залежність її стану X_{n+p} у майбутній момент часу від набору станів $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p-1})$ у попередні моменти називатимемо оператором еволюції такої динамічної системи (правило зміни станів).

Оператор зв’язку динамічної системи (1) у загальному вигляді може мати багатозначність розв’язків, і якщо можемо його переписати через явний, у загальному випадку багатозначний оператор $F_{\text{expl}} : R \times R^h \rightarrow 2^R$, який кожній парі (x_n, Λ) ставить у відповідність множину точок $\{x_{n+1}\}$ із R , то запишемо $F_{\text{expl}}(\cdot, \cdot) = \bigcup_{i \in I} f_{\text{expl}}^i(\cdot, \cdot)$, де $f_{\text{expl}}^i : R \times R^h \rightarrow R$ — однозначна гілка (переріз, селектор). Тепер можна записати й оператор еволюції для (1)

$$X_{n+1} = F(X_n, \Lambda) = \bigcup_{x \in X_n} F_{\text{expl}}(x, \Lambda)$$

чи через селектори $X_{n+1} = \bigcup_{x \in X_n} F_{\text{expl}}(x, \Lambda) = \bigcup_{x \in X_n} \bigcup_{i \in I} f_{\text{expl}}^i(x, \Lambda)$.

Розглянемо АС (2) із параметрами $(\lambda = 0,25; \alpha = -3,5)$. У цьому випадку маємо для дискретної ДС із антисипацією $D_{2,1}$ два селектори

$$f_{\text{expl}}^{1,2}(x_n, (\lambda, \alpha)) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda\alpha x_n(1 - x_n)}}{2\alpha}, \quad (\lambda, \alpha) \in R^2. \text{ Можемо переконатися}$$

ся, що обидві нерухомі точки цієї системи за таких параметрів будуть стійкими (їх мультиплікатори не перевищують по модулю 1). Кілька перших ітерацій такої системи представлено на рис. 3, а, де ітерування станів (пунктирні лінії) здійснювалось за допомогою (2) у вигляді $y_\alpha(x_{n+1}) = y_\lambda(x_n)$, де $y_\alpha(x_{n+1}) = \alpha \cdot x_{n+1}^2 + x_{n+1}$ та $y_\lambda(x_n) = \lambda \cdot x_n(1 - x_n)$.

Із цього видно, що при старті із точки $x_0 = 0,35$, що належить обом басейнам притягання нерухомих точок x_1^* та x_2^* , матимемо гіперінкурсійне відображення, котре породжує самоподібну структуру, що в свою чергу може в деяких випадках перетворюватись на фрактал (у випадку нецілої розмірності). Припустимо, що початкова точка x_0 належить обом басейнам притягання до нерухомих точок, але кожна з цих нерухомих точок не належить до басейну притягання іншої. На рис. 3, б схематично зображено області притягання до нерухомих точок, та початкове значення x_0 . У такому випадку послідовність $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ по кожній із гілок у випадку існування багатозначного розв'язку системи (2) прямуватиме як завгодно близько до відповідної нерухомої точки (пунктирні стрілки), однак у момент, коли x_i покидатиме басейн притягання другої точки, послідовність $\{x_{i_j}\}_{j=0}^\infty$, породжена початковою точкою $x_{i_0} = x_i$ та визначена другим селектором вже не прямуватиме до x_2^* . Таким чином, атрактор такої АС не володітиме самоподібністю, властивою для фрактальної структури. Сформулюємо одну з достатніх умов породження фракталу атрактором АС (2).

Теорема. Для того, аби такого виду АС породжувала самоподібну структуру своїм атрактором достатньо, щоб басейни обох нерухомих точок співпадали.

Покажемо це. Нехай нерухомі точки x_0^* та x_1^* є стійкими, та їхні басейни притягання є A , та ітерації АС починаємо із довільної $X_0 = \{x_0\}$, $x_0 \in A$. Перша ітерація АС (2) буде $X_1 = \{x_1^0, x_1^1\}$, де, точки, отримані по селекторам f_{expl}^1 та f_{expl}^2 відповідно. Кожна з них належить спільному басейну притягання нерухомих точок x_0^* та x_1^* , оскільки є образами точки із спільного басейну притягання. Аналогічно і образ оператора еволюції $X_2 = \{x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3\}$ від X_1 по обом селекторам належить A , тобто кожна нова підмножина, породжена від X_1 під дією одного із селекторів прямуватиме до відповідної нерухомої точки. Кожна наступна множина X_i буде прямувати по кожному селектору до відповідної нерухомої точки, породжуючи самоподібність, що власне і є складовою процедури отримання фракталу. Нагадаємо, що під фракталом розуміють самоподібну структуру з нецілою розмірністю (меншою за топологічну розмірність). Однак варто відзначити, що це визначення досить умовне, оскільки існують фрактали із

цілою фрактальною розмірністю, наприклад, границя множини Мандельброта. Зазначимо, що аналогічним чином будуються і фрактали, що представляють фігури Серпінського різної розмірності (множина Кантора, трикутник та куб Серпінського, тощо).

У такому випадку кожна $x_0 \in A$ буде породжувати самоподібну структуру. Зрозуміло, що не лише при таких умовах можуть виникати фрактальні структури (при наявності нецілої розмірності).

Варто зазначити, що при старті траєкторія такої АС із множини, що є перетином басейну притягнення однієї нерухомої точки (At) та басейном відштовхування іншої (Rp) динаміка такої АС може бути досить не простою, оскільки будуть існувати «підтраєкторії» (підпоследовності x_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, $x_0 \in At \cap Rp$, утворені як $x_j = f_{\text{expl}}^{i_j}(x_{j-1}, \Lambda)$, де $i_j \in \{0, 1\}$) АС, що можуть прямувати або у нескінченність, або перериватимуться, чи повертатимуться назад у області спільних басейнів притягнення та покидатимуть їх знову.

Так, на рис. 3, в представлена п'ятидесята ітерація такої АС (ліворуч) та скейлінг (збільшення малюнку) її частини (праворуч), що демонструє чисельно фрактальність структури атратора АС із такими параметрами.

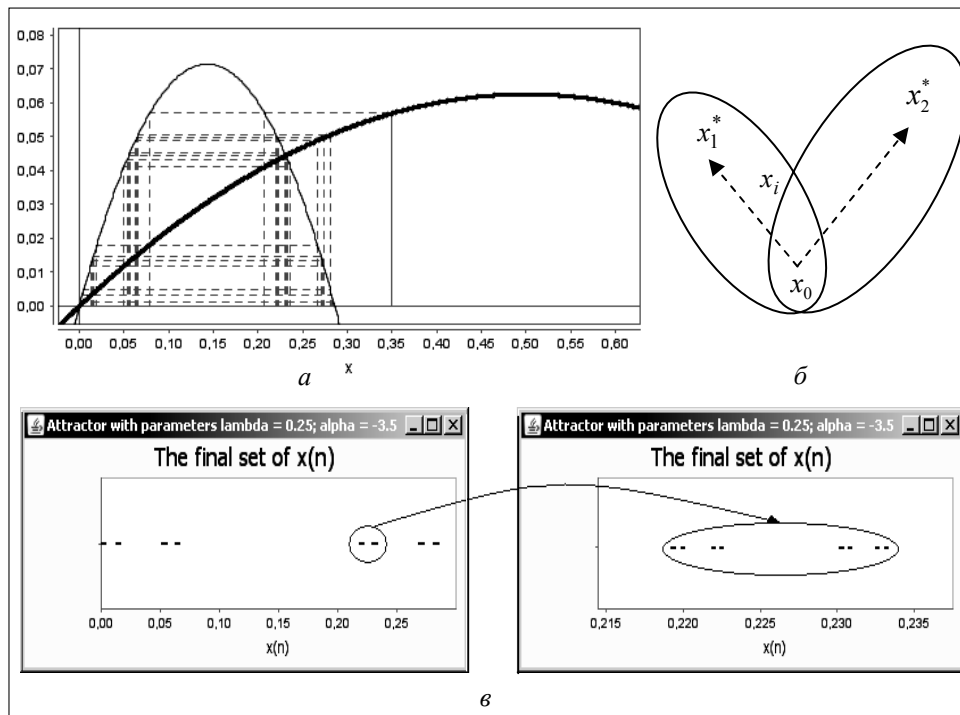


Рис. 3. Ітерації відображень та структура скейлінгу атратора: а — послідовність перших п'яти ітерацій АС із параметрами ($\lambda = 0,25$; $\alpha = -3,5$), y_α зображено тонкою кривою, y_λ — жирною кривою; б — схематичне зображення ітерування початкової точки x_0 до нерухомих точок системи (2); в — демонстрація скейлінгу атратора такої АС

ВИСНОВКИ

Проведено класифікацію оператора в просторі параметрів, що задає дискретну квадратичну обчислювальну АС із сильною антисипацією першого порядку. Сформульована достатня умова виникнення самоподібної структури атрактора, що є притаманною фрактальним утворенням. У роботі для чисельного моделювання динаміки АС, описаної оператором, що визначається двома селекторами, використовувалися діаграми Ламерея та спеціально розроблене програмне забезпечення.

АС такого виду можуть представляти широкий клас реальних систем. Зокрема систем, що описують конфліктну боротьбу за ресурси. Дослідження таких систем представляє особливе значення при моделюванні соціально-економічних та фінансових процесів.

У подальшому, доцільно було б дослідити динаміку таких систем при побудові клітинних автоматів та агентів із антисипацією. Значний прикладний інтерес становить залежність фрактальної розмірності атракторів таких АС від їх параметрів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Rosen Robert*. Anticipatory systems. Philosophical, mathematical and methodological foundations. — NY: Pergamon Press. — 1985. — P. 436.
2. *Dubois Daniel M*. Computing anticipatory systems with incursion and hyperincursion // Computing ANTICIPATORY SYSTEMS: CASYS'97, First international conference. edited by Daniel M. Dubois, Published by the american institute of physics, alp conference proceedings 437. — 1998. — P. 3–29.
3. *Dubois D.M*. Boolean soft computing by non-linear neural networks with hyperincursive stack memory // Invited paper in computing intelligence: Soft computing and fuzzy-neuro integration with applications, Edited by Okayay Kaynak, Lotfi A. Zadeh, Burhan Turksen, Imre J. Rudas, NATO ASI Series, Series F: Computer and system science. — 1998. — **162**. — Springer-Verlag. — P. 333–351.
4. *Burke M.E*. Properties of derived scalar anticipatory systems // Computing anticipatory systems: CASYS'1. — 2002. — **627**. — P. 49–58.
5. *Mark E. Burke*. Scalar Weak anticipatory systems, computing anticipatory systems: CASYS 2001. — Fifth international conference, Conf. Proc. — 2001. — **627**. — P. 85–94.
6. *Makarenko A*. Toward decision-making considerations on the base of society models with anticipation. Proceed. third int. conf. human centered process, June 2008, Delft, The Netherland, Ed.: Telecom Bretagne. — 2008. — P. 25–34.
7. *Makarenko A., Goldengorin B., Krushinskii D*. Game «Life» with anticipation property. lecture notes computer science, № 5191, Springer, Berlin-Heidelberg. — 2008. — P. 77–82.
8. *Krushinski D., Makarenko A*. Cellular automata with anticipation: examples and pre-sumable applications // Computing anticipatory systems, AIP Conf. Proceed. Series. ed. D. Dubois. — 2010. — **1303**. — P. 246–254.
9. *Lazarenko S., Makarenko A*. Investigation of Complex Multivalued Solutions in Discrete Dynamical Systems with Anticipation // Book of Abstract 10th. International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS'11. — Liege, 8–13 August, 2011. — P. 2.

Надійшла 23.08.2012