

ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РЕЛЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Е.А. БАЙЗДРЕНКО, Е.А. ШУШЛЯПИН

Работа посвящена задаче определения моментов переключения ограниченных релейных управлений для нелинейных систем, позволяющих обеспечить достижение конечных состояний системы, близких к состояниям, которые получают под воздействием ограниченных в тех же пределах управлений произвольной формы. Показано, что количество моментов переключения ограниченного релейного управления задаётся порядком аппроксимации определенных в работе функций $h_i(t)$, зависящих от переходных функций и матрицы коэффициентов при управляющих воздействиях системы. Приведены выражения для вычисления значений моментов переключения в случае линейной аппроксимации функций $h_i(t)$. Для общего случая полиномиальной аппроксимации функций $h_i(t)$, значения моментов переключений релейного управления могут быть определены решением приведенной в работе системы уравнений. Определено, что получаемые значения моментов переключения ограниченного релейного управления зависят только от исходного, ограниченного в тех же пределах, управления произвольной формы. Приведен пример определения моментов переключения релейного управления для задачи разгона электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность задачи построения релейных управлений для линейных и нелинейных систем объясняется большей простотой физической реализации таких управлений, по сравнению с управлениями произвольной формы. При этом наиболее широко используемые методы расчета управляющих воздействий дают управления, которые имеют непрерывный или смешанный вид.

Таким образом, возникает задача преобразования ограниченного управляющего сигнала произвольной формы в релейный сигнал, оказывающий по своему воздействию эквивалентное влияние на результат управления.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕЛЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Для линейных нестационарных систем с двумя управляемыми координатами и векторным управлением методика нахождения моментов переключения эквивалентных терминальных релейных управлений получена в [1]. Методика описана для системы вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0. \quad (1)$$

$$\Phi(t, x(t)) \equiv A(t)x(t) + C(t)f(t). \quad (2)$$

Позднее, в [2] была рассмотрена задача получения эквивалентных по достигаемому конечному состоянию управлений нелинейными системами на основании релейных управлений, получаемых для линейных эквивалентов исходных нелинейных систем. При этом получение точных линейных эквивалентов нелинейных систем основано на преобразовании Бруновского, что накладывает ряд ограничений на математические модели рассматриваемых объектов. Так, математическая модель объекта управления должна относиться к классу аффинных систем, т.е. классу нелинейных динамических систем, линейных по управлению, а управление для данной системы должно быть задано скалярно. Кроме того, существует еще ряд ограничений, подробное описание которых приведено в [2].

В данной работе рассматривается задача нахождения моментов переключений эквивалентных релейных управлений нелинейными аффинными системами вида (1) в предположении непрерывности и дифференцируемости нелинейных вектор-функций Φ по всем своим аргументам.

Предполагая, что нормированный вектор управления $u \in [0,1]$ произвольной формы известен, ставится задача определения моментов переключения $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$ эквивалентного нормированного релейного управления $\tilde{u} \in \{0,1\}$, обеспечивающего одинаковые конечные состояния вектора состояний системы $x(t_f)$, достигаемого под воздействием исходного управления $u \in [0,1]$, и $\tilde{x}(t_f)$, достигаемого под воздействием $\tilde{u} \in \{0,1\}$.

Покажем, что для случая линейных систем количество моментов переключения релейного управления определяется порядком аппроксимации определенных ниже в (3) функций $h_i(t)$, зависящих от переходных функций и матрицы коэффициентов при управляющих воздействиях системы (1), (2).

Исходя из того, что формула Коши-Лагранжа определяет конечное состояние линейной системы в виде:

$$x(t_f) = W(t_f, t)x(t) + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau)C(\tau)f(\tau)d\tau + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

выражение, определяющее зависящую от k -й компоненты вектора управления i -ю составляющую вектора конечного состояния линейной системы (1), (2), имеет вид:

$$x_{ik}(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t)B_{jk}(t)u_k(t)dt \equiv \int_{t_0}^{t_f} h_i(t)\xi(t)dt,$$

$$h_i(t) \equiv \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t)B_{jk}(t), \quad \xi(t) \equiv u_k(t). \quad (3)$$

Далее, в принятых обозначениях, можно записать следующую систему нелинейных уравнений относительно моментов переключений $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$:

$$\int_{\mathcal{G}_1}^{\mathcal{G}_2} h_i(t)dt + \int_{\mathcal{G}_3}^{\mathcal{G}_4} h_i(t)dt + \dots + \int_{\mathcal{G}_{m-1}}^{\mathcal{G}_m} h_i(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} h_i(t)\xi(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где, согласно (3), правые части отображают реакцию конечного состояния на произвольную, но ограниченную нулем и единицей, k -ю компоненту вектора управления.

Для общего случая полиномиальной аппроксимации функции $h_i(t)$

$$h_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j, \tag{5}$$

с учётом (4), значения моментов переключений релейного управления могут быть определены из системы уравнений:

$$\int_{g_1}^{g_2} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \int_{g_3}^{g_4} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \dots + \int_{g_{m-1}}^{g_m} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j \xi(t) dt. \tag{6}$$

Выполнив интегрирование (6), получаем:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{g_2^{j+1} - g_1^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{g_4^{j+1} - g_3^{j+1}}{j+1} + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{g_m^{j+1} - g_{m-1}^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} k_{j+1}, \tag{7}$$

где $k_{j+1} = \int_{t_0}^{t_f} t^j \xi(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых a_{ij} в левой и правой частях i -го уравнения (7), получаем систему, позволяющую определить значения моментов переключения нормированного релейного управления $\tilde{u} \in \{0, 1\}$ такие, что все n координат вектора конечного состояния системы $\tilde{x}(t_f)$, получаемые под его воздействием, приобретут значения, равные получаемым под воздействием произвольного нормированного управления:

$$x(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} h(t) \xi(t) dt, \quad x(t_f) = \{x_i(t_f)\}, \quad h(t) = \{h_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Указанная система уравнений, как следует из (7), имеет вид:

$$\begin{aligned} g_2 - g_1 + g_4 - g_3 + \dots + g_m - g_{m-1} &= k_1, \\ g_2^2 - g_1^2 + g_4^2 - g_3^2 + \dots + g_m^2 - g_{m-1}^2 &= 2k_2, \\ \dots & \\ g_2^m - g_1^m + g_4^m - g_3^m + \dots + g_m^m - g_{m-1}^m &= mk_m. \end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) должна быть дополнена неравенствами:

$$t_0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_m \leq t_f. \tag{9}$$

Для случая линейной аппроксимации функций $h_i(t)$ получено аналитическое решение для определения моментов переключения релейного управления. Согласно (5):

$$h_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t. \tag{10}$$

С учётом (7)–(10) значения моментов переключения:

$$g_1 = \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{2}, \quad g_2 = \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{2}. \quad (11)$$

Важно, что значения (11) (как и в общем случае (8)) не зависят от параметров управляемой системы, а только от «эталонного» управления $\xi(t)$.

Несмотря на то, что условия существования и аналитическое решение (8) для случая общей полиномиальной аппроксимации функции $h_i(t)$ не получены, однако очевидно, что, в случае разбиения $h_i(t)$ на нелинейные участки, на каждом из участков могут быть получены управляющие воздействия с количеством моментов переключений, определяемых степенью принятого полинома.

Из вышеприведенного очевидно, что при решении практических задач необходимо иметь эталонные управления, которые могут быть получены методом аналитического синтеза или численно. В частности, для получения терминального эталонного управления может быть использован метод конечных состояний [3].

Приведенные выше результаты, полученные для линейного случая, могут быть обобщены и на случай нелинейных систем вида (1) на основе приближенного представления нелинейных (по Алексею В.М.) переходных функций [3].

Формула Алексея В.М. определяет конечное состояние нелинейной системы (1) в виде:

$$x(t_f) = \bar{x}(t_f, t, x(t)) + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau, x(\tau)) B(\tau) u(\tau) d\tau,$$

где $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ — переменная конечного состояния системы, отображающая прогноз неуправляемого ($u(t) = 0$ на интервале $t \leq \tau \leq t_f$) конечного состояния системы (1), имеющей в момент времени t состояние $x(t)$.

Выражения, определяющие переменные конечного состояния \bar{x} и нелинейную переходную матрицу W , имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\theta, t, x(t))}{d\theta} &= \Phi(\theta, \bar{x}(\theta, t, x(t))), \\ \frac{dW(\theta, t, x(t))}{d\theta} &= \frac{\partial \Phi(\theta, x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(\theta, t, x(t))} \cdot W(\theta, t, x(t)), \\ \theta \in [t, t_f], \quad W(t, t, x(t)) &= I, \quad \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t), \quad t \in [t_0, t_f], \end{aligned} \quad (12)$$

где I — единичная матрица.

В работе [3] отмечено, что применение алгоритма (12) при расчете управления в реальном времени затруднено. Это объясняется необходимостью многократного численного интегрирования (на интервале $t \leq \theta \leq t_f$ при каждом t) дифференциальных уравнений для переменных конечного состояния и переходной матрицы, что связано с их определением как функций первого аргумента, а при расчете управления они нужны как функции второго аргумента.

В связи с этим в [3], где переменные конечных состояний и нелинейная переходная матрица используются в алгоритме терминального метода конечного состояния, предложен ускоренный алгоритм их расчета как функций второго аргумента, где показано, что переменные конечного состояния и элементы переходной матрицы могут быть приближенно представлены в виде степенного ряда с коэффициентами сложным образом зависящими от начального состояния. При этом функция h_i для случая нелинейной системы имеет вид:

$$h_i(t, x(t)) = \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t, x(t)) B_{jk}(t), \quad \xi(t) = u_k(t). \quad (13)$$

Из сравнения (13) с (3), видно, что выражения (13) отличаются от (3) тем, что в (13) используется нелинейная переходная матрица, зависящая от вектора состояний системы $x(t)$. Таким образом, в отличие от полиномиального представления (5), для нелинейного случая коэффициенты при степенях t будут функциями начального состояния.

Однако, поскольку уравнения (8) или (11) для моментов переключения не зависят от коэффициентов полиномиальных разложений, то они будут справедливы и для нелинейного случая.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

Рассмотрим пример нахождения моментов переключения релейного управления для задачи разгона электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения, математическая модель которого имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{di_A}{dt} &= -\frac{r_A}{L_A} i_A - \frac{k_1}{L_A} i_B \omega + \frac{1}{L_A} u_A, \\ \frac{di_B}{dt} &= -\frac{r_B}{L_B} i_B + \frac{1}{L_B} u_B, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{J_M} k_M \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A i_B, \end{aligned} \quad (14)$$

где i_B, i_A — токи возбуждения и якоря двигателя, ω — скорость двигателя, u_B, u_A — напряжение на обмотке возбуждения и на якоре двигателя, r_B, L_B, r_A, L_A — сопротивления и индуктивности обмоток возбуждения и якоря соответственно, k_1, k_2 — электрическая и механическая постоянные, k_M — коэффициент пропорциональности момента нагрузки и скорости, J_M — момент инерции.

Для случая разгона двигателя (14) начальные условия нулевые, а желаемые значения элементов вектора состояний удовлетворяют соотношениям:

$$i_A^* = \frac{U_{\text{АНОМ}}}{\frac{k_1 k_2}{k_M} (i_B^*)^2 + r_A}, \quad i_B^* = \frac{U_{\text{ВНОМ}}}{r_B}, \quad \omega^* = \frac{k_2}{k_M} i_B^* i_A^*.$$

Определению подлежат управляющие напряжения обмоток возбуждения и якоря $u_B(t), u_A(t)$.

Как уже было указано выше, для получения релейного управления первоначально необходимо вычислить эталонное управление каким-либо из известных методов, например, методом конечных состояний [3] (МКС-управлением):

$$u_A = \frac{a_1}{zn} ch; \quad u_B = \frac{a_2}{zn} ch, \quad (15)$$

где

$$zn = a_1^2 + a_2^2,$$

$$ch = \frac{1}{2T} \left[J^* - F_1(\bar{i}_A - i_A^*)^2 - F_2(\bar{i}_B - i_B^*)^2 - F_3(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \right],$$

$$a_1 = \frac{1}{L_A} \left[F_1(\bar{i}_A - i_A^*)w_{11} + F_2(\bar{i}_B - i_B^*)w_{21} + F_3(\bar{\omega} - \omega^*)w_{31} \right],$$

$$a_2 = \frac{1}{L_B} \left[F_1(\bar{i}_A - i_A^*)w_{12} + F_2(\bar{i}_B - i_B^*)w_{22} + F_3(\bar{\omega} - \omega^*)w_{32} \right].$$

Входящие в составляющие (15) переменные конечного состояния $\bar{x} = \bar{x}(t_f, t, x(t))$, $x_1 \equiv i_A$, $x_2 \equiv i_B$, $x_3 \equiv \omega$, и элементы переходной матрицы $W = \{w_{ij}\}$, $w_{ij} = w_{ij}(t_f, t, x(t))$ определяются совместной системой уравнений:

$$\frac{d\bar{i}_A(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\frac{r_A}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t) - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_B(\vartheta, t) \bar{\omega}(\vartheta, t),$$

$$\frac{d\bar{i}_B(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\frac{r_B}{L_B} \bar{i}_B(\vartheta, t),$$

$$\frac{d\bar{\omega}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\frac{1}{J_M} k_M \bar{\omega}(\vartheta, t) + \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t) \bar{i}_B(\vartheta, t),$$

$$\frac{dw_{1j}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\frac{r_A}{L_A} w_{1j}(\vartheta, t) - \frac{k_1}{L_A} \bar{\omega}(\vartheta, t) w_{2j}(\vartheta, t) - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_B(\vartheta, t) w_{3j}(\vartheta, t),$$

$$\frac{dw_{2j}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\frac{r_B}{L_B} w_{2j}(\vartheta, t),$$

$$\frac{dw_{3j}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_B(\vartheta, t) w_{1j}(\vartheta, t) + \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t) w_{2j}(\vartheta, t) - \frac{1}{J_M} k_M w_{3j}(\vartheta, t),$$

$$j = 1, 2, \quad \vartheta \in [t, t_f],$$

$$\bar{i}_A(t, t) = i_A(t), \quad \bar{i}_B(t, t) = i_B(t), \quad \bar{\omega}(t, t) = \omega(t),$$

$$w_{11}(t, t) = w_{22}(t, t) = 1,$$

$$w_{12}(t, t) = w_{21}(t, t) = w_{31}(t, t) = w_{32}(t, t) = 0.$$

Значения $j=1,2$ показывают, что объект управляется по двум входам.

Таким образом, по указанным выражениям могут быть получены эталонные (произвольной формы) управляющие сигналы для вывода двигателя на номинальный режим. Далее, с учётом выражений (10), (11) могут быть рассчитаны моменты переключений релейных управлений, обеспечивающих аналогичный результат.

Для анализа был выбран двигатель постоянного тока П51 [3] мощностью 5кВт с номинальным напряжением 110 В и параметрами: $r_A = 0,7 \text{ Ом}$, $r_B = 60 \text{ Ом}$, $L_A = 0,6 \text{ Гн}$, $L_B = 15 \text{ Гн}$, $k_1 = 0,37 \text{ Ом} \cdot \text{с}$, $k_2 = 0,8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2}$, $J_M = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $k_M = 0,7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Параметры T , F_1 , F_2 , F_3 являются регулировочными.

Интегрирование систем дифференциальных уравнений выполнялось методом Рунге-Кутты с шагом 1 мс до времени $t_f = 1 \text{ с}$ при управлении (15), преобразованном, согласно (10), (11), в релейное, и далее продолжалось до $t_{f1} = 5 \text{ с}$ при номинальных значениях напряжений возбуждения и якоря 110 В. Регулировочные параметры приняты равными: $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 25$, $T = 0,2$.

Для построения релейного управления интервал МКС-управления $t_f = 1 \text{ с}$ разбит на четыре отрезка, на которых производится аппроксимация функции $h_i(t)$ полиномами вида (10), что позволяет построить релейное управление с восемью переключениями.

Полученные графики напряжений, токов и скорости при разгоне двигателя показаны на рис. 1 а, 1 б, 2 а и 2 б соответственно.

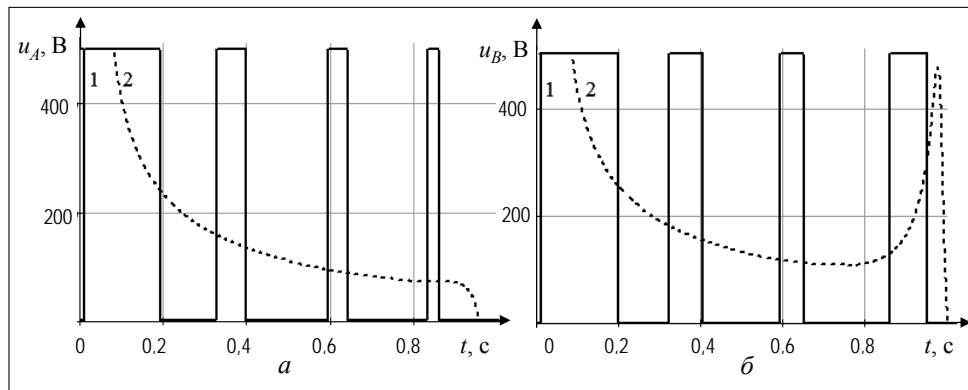


Рис. 1. Управляющие напряжения

На графиках напряжений (рис. 1) кривые 1 (сплошные) соответствуют случаю релейного управления, а кривые 2 (пунктирные) — отражают изменение управляющего сигнала согласно эталонному МКС-управлению. На графиках токов и скорости (рис. 2) кривые 1 (сплошные) — изменение управляемых координат под воздействием релейного управления, кривые 2 (пунктирные) — под воздействием подаваемого на вход МКС-управления, кривые 3 (штрих-пунктирные) — под воздействием поданного на вход номинального напряжения.

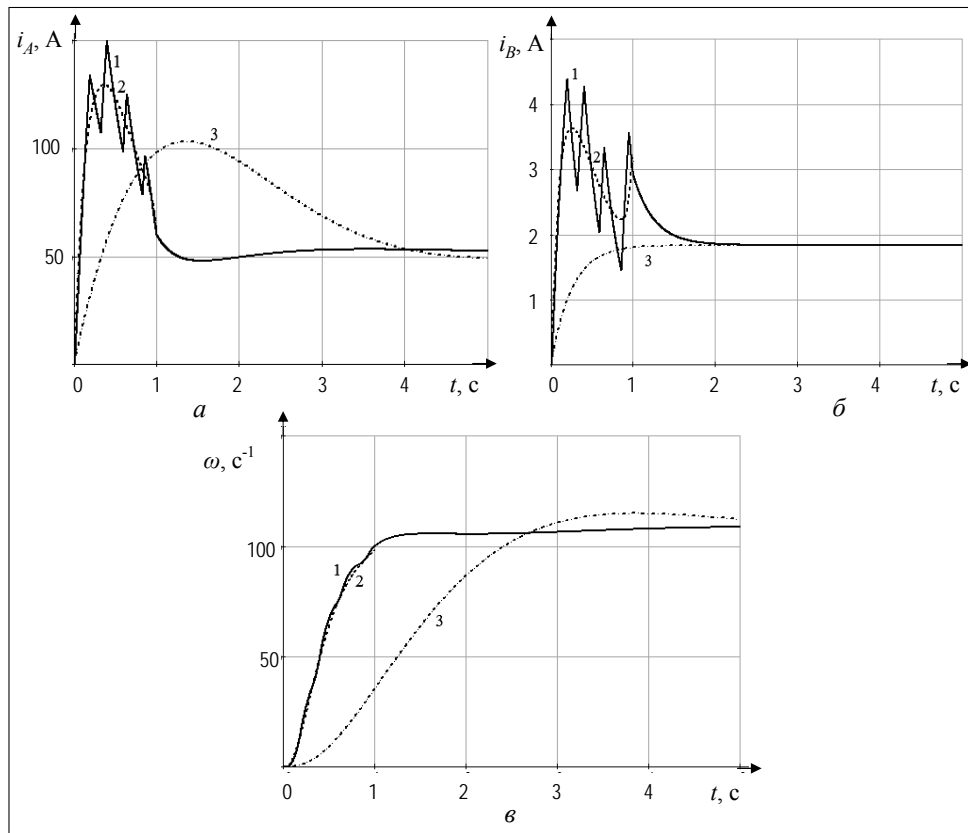


Рис. 2. Управляемые токи и скорость двигателя

Из графиков (рис. 2) видно, что значения управляемых координат в терминальный момент управления ($t_f = 1$ сек), достигаемые под воздействием релейного управления, достаточно близки к значениям, получаемым под воздействием эталонного МКС-управления. В таблице приведены полученные в терминальный момент управления $t_f = 1$ сек значения управляемых координат.

Таблица. Результаты вычислений

Номинальное значение		i_A, A	i_B, A	ω, c^{-1}
		51,856	1,833	108,65
Управляющий сигнал	Номинальное напряжение	98,317	1,800	35,199
	Эталонное МКС-управление	60,892	2,961	99,265
	Релейное управление (8 переключений)	59,888	2,920	99,890

Из графиков управляемых координат (рис. 2) и таблицы видно, что подача на вход объекта управления номинального напряжения (кривая 3 на рисунках) не позволяет вывести управляемые координаты к заданным номинальным значениям за заданный промежуток времени — 1 сек. В то же

время, подача на вход эталонного МКС-управления позволяет получить значения управляемых координат, близкими к заданным номинальным. Предлагаемое же релейное управление, в свою очередь, также обеспечивает достаточно точное достижение заданных номинальных значений.

При этом необходимо заметить, что возникающее перерегулирование по токам (рис. 2а, 2б) определяется наличием перерегулирования в эталонном МКС-управлении и находится в допустимых для пускового режима двигателя пределах.

Таким образом, предложенный метод замены управляющего сигнала произвольной формы релейным управлением достаточно эффективен.

ВЫВОДЫ

В работе описаны теоретические основы получения релейного управления нелинейными системами. Предложенный метод позволяет получить управляющее воздействие, заданное в релейной форме, количество переключений которого определяется порядком полиномиальной аппроксимации функции h_i .

Задача нахождения релейного управления для различных нелинейных объектов актуальна, поскольку физическая реализация таких управлений проще и зачастую экономически выгоднее, чем реализация непрерывных управляющих сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шушляпин Е.А. Модели конечного состояния и их применение в задачах анализа и синтеза систем управления: дис. д-ра техн. наук: спец. 05.13.03: «Системы и процессы управления» защищ. 03.10.02: утв. 09.04.03. — Севастополь, 2003. — 323 с. — Инв.номер 0408U002219.
2. Шушляпин Е.А., Безуглая А.Е., Байздренко Е.А. Построение релейных управлений нелинейными системами на основе линейных эквивалентов по Бруновскому // Вестник СевНТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2010. — Вып. 108. — С. 89–93.
3. Шушляпин Е.А., Шушляпина (Безуглая) А.Е. Управление дифференциальными нелинейными системами на основе идентифицированных моделей конечного состояния. Труды III Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления», г. Москва, 28–30 января 2004 г. — М.: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, 2004. — С. 607–635.

Поступила 07.06.2011