

ПОЧЕМУ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ОГРАНИЧЕНА

И.И. ГОРБАНЬ

Приведены результаты исследований, проясняющие механизм ограничения точности измерений реальных физических величин. Показано, что ключевую роль в ограничении точности играет неидеальный характер феномена статистической устойчивости, проявляющийся в отсутствии сходимости (несостоятельности) статистических оценок. Выявлены особенности действия закона больших чисел и центральной предельной теоремы теории вероятностей в условиях нарушения статистической устойчивости. Результаты теоретических исследований подтверждены экспериментально. Установлено, что реальные оценки носят гиперслучайный характер. Гиперслучайная природа реальных оценок проявляется при больших объемах выборки.

ВВЕДЕНИЕ

Научно-технический прогресс неразрывно связан с повышением точности измерений. Несмотря на колоссальные усилия, предпринимаемые на протяжении столетий, каждый шаг по повышению точности измерений дается с большим трудом. Естественно возникает вопрос: существует ли предел точности измерений реальных физических величин?

Вопрос не нов. Благодаря классическим работам Фишера, Крамера, Рао, Ван Триса, Тихонова и др. в XX веке в теории вероятностей сформировалось широко распространенное мнение, что точность, определяемая объемом выборки и свойствами помехи, при неограниченном увеличении объема выборки теоретически может возрасти до бесконечности [1–3].

Этот оптимистический вывод, к сожалению, не находит подтверждения на практике. Инженеры и физики знают, что путем увеличения объема выборки во многих случаях можно повысить точность измерений, но не беспредельно — рано или поздно начинают сказываться те или иные факторы, ограничивающие возможность повышения точности.

Исследование причин противоречия между теорией и практикой привело к пониманию, что известный издавна феномен статистической устойчивости массовых явлений, являющийся физической основой теории вероятностей, носит неидеальный (ограниченный) характер.

Теория вероятностей [4] изучает законы массовых явлений, описывая их с помощью случайных (стохастических) математических моделей. В основе их построения лежит физическая гипотеза абсолютной (идеальной) статистической устойчивости частоты реальных событий, из которой следует абсолютная статистическая устойчивость (статистическая прогнозируемость) параметров и характеристик любых физических явлений — реальных событий, величин, процессов и полей.

На протяжении столетий считалось, что гипотеза идеальной статистической устойчивости адекватно отражает реалии физического мира. Однако экспериментальные исследования различных физических величин и процессов на больших интервалах наблюдения показали [5–17], что эта гипотеза экспериментально не подтверждается.

При небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения увеличение объема статистических данных приводит к уменьшению уровня флуктуаций статистических оценок, что создает иллюзию идеальной статистической устойчивости. Но, начиная с некоторого критического объема данных, уменьшение уровня флуктуаций прекращается и они приобретают незатухающий характер. Дальнейшее увеличение числа данных либо практически не сказывается на уровне флуктуаций оценок, либо даже приводит к их росту.

Этот эффект можно объяснить изменчивостью характеристик и параметров реальных объектов и изменчивостью условий их наблюдения. Изменения происходят на всех уровнях, в том числе статистическом.

Происходящие изменения отражаются на физических закономерностях (в частности описываемых законом больших чисел и центральной предельной теоремой теории вероятностей) и приводят к нарушению статистической устойчивости, что влечет за собой ограничение потенциальной точности измерений.

Исследования нарушений статистической устойчивости явлений и разработка эффективных средств адекватного описания мира с учетом таких нарушений привели к построению новой физико-математической теории — теории гиперслучайных явлений [5, 6, 9].

Под гиперслучайным явлением (гиперслучайным событием, величиной или функцией) понимается множество G случайных явлений (случайных событий, величин или функций), ассоциируемых с различными условиями наблюдения $g \in G$. Для каждого g -го случайного элемента этого множества определена вероятностная мера, однако для самих условий вероятностная мера не определена.

Вопрос о потенциальной точности измерений с учетом нарушений статистической устойчивости исследовался в ряде работ, в частности [5, 6, 17–19].

Цель работы — обобщение, уточнение и детализация полученных результатов на основе недавно разработанных принципов описания расходящихся и многозначных функций (отображений) [20–22].

ОБОБЩЕННЫЙ ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В статьях [20–21] обобщены понятия предела и сходимости числовой последовательности $\{x_n\} = \{x_n\}_{n=1, \infty}$. Поясним суть этих обобщений.

Согласно классическим представлениям [23–24] последовательность $\{x_n\}$ считается сходящейся при $n \rightarrow \infty$, если существует необходимо единственный предел $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (в частности, бесконечно большой по модулю).

Последовательность, не имеющая единственного предела, считается расходящейся.

Расходящиеся последовательности можно описать различными способами. Один из них состоит в следующем.

Из любой последовательности можно сформировать множество частичных последовательностей (подпоследовательностей), получаемых из исходной последовательности вычеркиванием некоторых ее членов.

Известно, что если последовательность сходится, то сходятся все ее частичные последовательности. Если же последовательность расходится, то не обязательно расходятся все ее частичные последовательности. Некоторые из них могут сходиться к определенным пределам, называемые предельными точками или частичными пределами.

В работах [20–21] введено понятие обобщенного предела $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ последовательности $\{x_n\}$, под которым понимается множество всех ее предельных точек с мерами. Такое множество точек с мерами названо спектром предельных точек \tilde{S} :

$$\tilde{S} = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (1)$$

Здесь и далее факт многозначности подчеркнут знаком тильда над буквой, обозначающей многозначную величину или функцию.

Спектр \tilde{S} рассматривается как обобщение понятия предела на случай любой последовательности, в том числе расходящейся. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то спектр предельных точек состоит из одного элемента (числа), если же расходится, то спектр состоит из множества чисел. В последнем случае можно говорить о сходимости последовательности к множеству чисел (в частном случае — к интервалу).

Спектр может быть охарактеризован различными способами. Простейшими параметрами, характеризующими разброс предельных точек и их местоположение, являются граничные точки: минимальная a_i и максимальная a_s . Более полное описание спектра дает функция распределения предельных точек

$$\tilde{F}(x) = \text{LIM}_{N \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{N}, \quad (2)$$

где $n(x)$ — количество членов начального отрезка $\{x_n\}_{n=1, \overline{N}}$ последовательности $\{x_n\}$, меньших x .

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a , то функция распределения предельных точек представляет собой однозначную функцию $F(x)$ в виде функции единичного скачка в точке a (рис. 1 а) (тогда мера равна единице в точке a и нулю во всех остальных точках). Если же эта последовательность расходится (сходится к множеству чисел), то функция распределения предельных точек представляет собой или однозначную убывающую функцию $F(x)$, отличную от функции единичного скачка, (рис. 1 б), или многозначную функцию $\tilde{F}(x)$ (рис. 1 в).

На спектр предельных точек можно взглянуть под другим углом зрения. В первом случае (рис. 1 а) обобщенный предел (1) числовой последова-

тельности $\{x_n\}$ представляет собой детерминированную однозначную величину a (число без меры или множество чисел с единичной мерой в точке a и нулю во всех остальных точках), во втором случае (рис. 1 б) — случайную величину, а в третьем (рис. 1 в) — гиперслучайную величину.

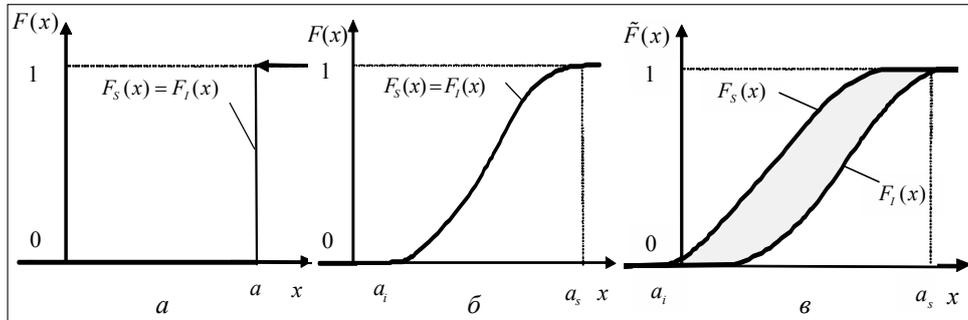


Рис. 1. Функция распределения $\tilde{F}(x)$ предельных точек и границы $F_I(x)$, $F_S(x)$ функции распределения предельных точек для последовательности $\{x_N\}$, сходящейся к числу a (а) и к множеству чисел $x \in [a_i, a_s]$, описываемому однозначной (б) и многозначной (в) функциями распределения (соответственно $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$)

Строго говоря, число, рассматриваемое как одноточечное множество без меры, и как множество чисел с мерой, равной единицы в одной точке и нулю — в остальных точках — разные понятия. Однако, поскольку для дальнейшего изложения это обстоятельство не является существенным, различие между ними не делается.

Для описания гиперслучайной величины можно использовать [5, 6, 9] различные однозначные характеристики и параметры, в частности, нижнюю $F_I(x)$ и верхнюю $F_S(x)$ границы функции распределения $\tilde{F}(x)$ (рис. 1), а также (при определенных условиях) — плотности распределения этих границ

$$f_I(x) = \frac{dF_I(x)}{dx}, \quad f_S(x) = \frac{dF_S(x)}{dx},$$

моменты границ (математические ожидания границ m_I , m_S , дисперсии границ D_I , D_S), границы моментов (границы математического ожидания m_i , m_s , границы дисперсии D_i , D_s) и другие характеристики и параметры теории гиперслучайных явлений [6, 9].

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ПРИ НАРУШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Закон больших чисел был открыт Я. Бернулли [25] и опубликован после его смерти триста лет назад (в 1713 г.). Известно несколько вариантов этого закона, один из которых был сформулирован Чебышевым в виде следующей теоремы [6, 26].

Теорема. Пусть X_1, X_2, \dots, X_N — начальный отрезок последовательности попарно независимых случайных величин с математическими ожи-

данными m_1, m_2, \dots, m_N и ограниченными дисперсиями. Тогда при устремлении объема выборки N к бесконечности среднее $m_{xN}^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$ случайных величин X_1, X_2, \dots, X_N (выборочное среднее) стремится по вероятности к среднему $m_{xN} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m_n$ математических ожиданий m_1, m_2, \dots, m_N :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|m_{xN}^* - m_{xN}| > \varepsilon\} = 0 \quad (\varepsilon > 0). \quad (3)$$

При конечном объеме выборки N величина m_{xN}^* — случайная величина, а величина m_{xN} — детерминированная величина (число). Величина m_{xN}^* описывается функцией распределения $F_{m_{xN}^*}(x)$, а m_{xN} — функцией распределения $F_{m_{xN}}(x)$ в виде функции единичного скачка в точке m_{xN} .

Обратим внимание на одно чрезвычайно важное обстоятельство, долгое время остававшееся незамеченным: закон больших чисел не гарантирует, что при $N \rightarrow \infty$ выборочное среднее m_{xN}^* и среднее математических ожиданий m_{xN} имеют обычные пределы. Этот закон утверждает лишь сходимость по вероятности выборочного среднего к среднему математических ожиданий, не требуя при этом их сходимости к определенным числам.

Пределы последовательностей $\{m_{xN}^*\}$ и $\{m_{xN}\}$ могут быть многозначными величинами — случайными или гиперслучайными. В дальнейшем, следуя указанной выше договоренности, касающейся обозначений однозначных и многозначных величин и функций, однозначные пределы последовательностей $\{m_{xN}^*\}$ и $\{m_{xN}\}$ будем обозначать m_x^* и m_x , а многозначные — \tilde{m}_x^* и \tilde{m}_x .

Заметим, что различные варианты сходимости последовательности гиперслучайных величин (в частном случае рассматриваемой здесь числовой последовательности) к гиперслучайной величине и сходимости последовательности гиперслучайных функций (в частном случае рассматриваемой ниже последовательности детерминированных функций) к гиперслучайной функции рассмотрены в монографии [6].

Вне зависимости от того, являются ли рассматриваемые обобщенные пределы однозначными или многозначными, согласно выражению (3) по мере увеличения объема выборки N выборочное среднее m_{xN}^* приближается к среднему математических ожиданий m_{xN} .

При $N \rightarrow \infty$ возможны два случая:

1. Величина m_{xN}^* сходится к однозначному выборочному среднему математических ожиданий m_x (числу).
2. Величина m_{xN}^* , становясь в пределе многозначной величиной \tilde{m}_x^* , сходится к многозначной величине \tilde{m}_x .

Случай 1 — идеализированный, рассматриваемый в теории вероятностей [1–3]. В этом случае предел m_x среднего математических ожиданий описывается функцией распределения $F_{m_x}(x)$ в виде функции единичного скачка в точке m_x . К ней стремится функция распределения $F_{m_{xN}}^*(x)$ выборочного среднего m_{xN}^* при $N \rightarrow \infty$ (рис. 2 а).

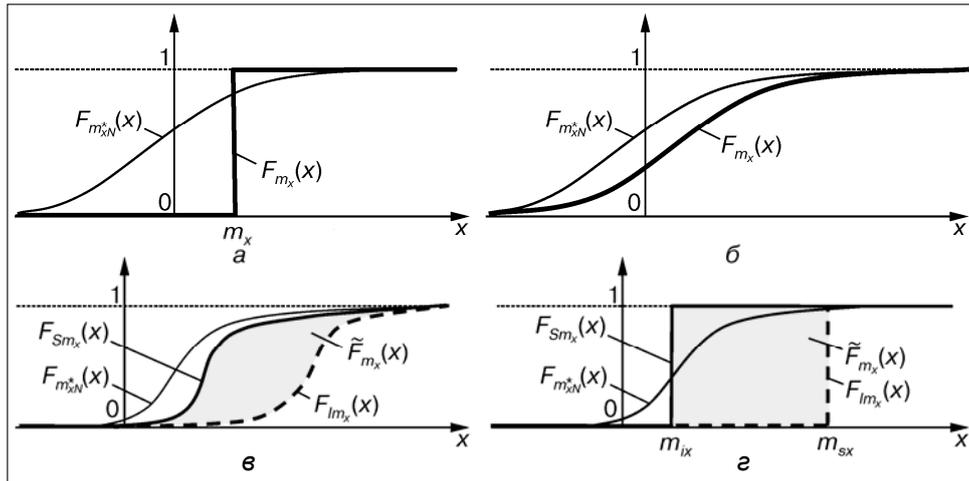


Рис. 2. Формирование предельной функции распределения $F_{m_x}^*(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \rightarrow \infty$, когда предельные выборочное среднее и среднее математических ожиданий — числа (а), когда они — случайные величины (б) и когда они — гиперслучайные величины (в, з) (в — общий случай, з — частный случай)

Случай 2 более реалистичен. Здесь предельное выборочное среднее \tilde{m}_x^* и предельное среднее математических ожиданий \tilde{m}_x описываются многозначными спектрами $\tilde{S}_{m_x}^*$ и \tilde{S}_{m_x} . При этом возможны два варианта.

2.1. Предельное выборочное среднее \tilde{m}_x^* и предельное среднее математических ожиданий \tilde{m}_x являются случайными величинами. При этом спектры $\tilde{S}_{m_x}^*$ и \tilde{S}_{m_x} характеризуются однозначными функциями распределения $F_{m_x}^*(x)$ и $F_{m_x}(x)$ (рис. 2 б).

2.2. Величины \tilde{m}_x^* , \tilde{m}_x являются гиперслучайными величинами. При этом спектры $\tilde{S}_{m_x}^*$ и \tilde{S}_{m_x} характеризуются многозначными функциями распределения $\tilde{F}_{m_x}^*(x)$ и $\tilde{F}_{m_x}(x)$ (рис. 2 в).

Т.к. сходимость по распределению последовательности случайных величин менее сильная, чем сходимость по вероятности [3, 26], в варианте 2.1 предельная функция распределения $F_{m_x}^*(x)$ совпадает с предельной функцией распределения $F_{m_x}(x)$.

Сходимость по распределению последовательности гиперслучайных величин также менее сильная, чем сходимость по вероятности [6]. Поэтому в варианте 2.2 предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}^*(x)$ совпадает с предельной функцией распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$. При этом нижняя граница $F_{Im_x}^*(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}^*(x)$ совпадает с нижней границей $F_{Im_x}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$, а верхняя граница $F_{Sm_x}^*(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}^*(x)$ — с верхней границей $F_{Sm_x}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$. На рис. 2 в расположенная между указанными границами область неопределенности затемнена.

В статье [21] доказана теорема, из которой следует, что, если функция распределения, описывающая спектр последовательности средних детерминированных величин — многозначная функция, то соответствующая область неопределенности непрерывная. На основании этой теоремы область неопределенности функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ — непрерывная.

Интервал, в котором флуктуирует выборочное среднее m_{xN}^* при $N \rightarrow \infty$, характеризуется нижней границей m_{ix}^* достижения функцией $F_{Sm_x}^*(x)$ минимального (нулевого) значения и верхней границей m_{sx}^* достижения функцией $F_{Im_x}^*(x)$ максимального (единичного) значения. Естественно эти границы совпадают с соответствующими границами m_{ix}, m_{sx} функций $F_{Sm_x}(x), F_{Im_x}(x)$: $m_{ix}^* = m_{ix}, m_{sx}^* = m_{sx}$. Указанные границы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Заметим, что в работах [6, 18] исследован частный случай, когда верхняя $F_{Sm_x}^*(x)$ и нижняя $F_{Im_x}^*(x)$ границы функции распределения $\tilde{F}_{m_x}^*(x)$ описываются функциями единичного скачка соответственно в точках m_{ix}^*, m_{sx}^* , а верхняя $F_{Sm_x}(x)$ и нижняя $F_{Im_x}(x)$ границы функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ — функциями единичного скачка соответственно в точках m_{ix}, m_{sx} (рис. 2 з).

Таким образом, теоретически среднее случайной выборки может сходиться к определенному числу, стремиться к плюс или минус бесконечности или флуктуировать в пределах интервала $[m_{ix}, m_{sx}]$. В последнем случае имеет место сходимость выборочного среднего к интервалу.

Особый интерес представляют первый и третий случаи. В первом случае при увеличении объема выборки флуктуации среднего затухают и погрешность измерения стремится к нулю, а в третьем случае — эти флуктуации не затухают и погрешность ограничена снизу длиной интервала $[m_{ix}, m_{sx}]$.

Для выяснения характера сходимости реальных физических процессов была проанализирована динамика поведения выборочных средних множества процессов различной физической природы на больших интервалах наблюдения.

Исследовались [6–17] колебания напряжения городской электросети на 60-ти часовых интервалах наблюдения; колебания магнитного поля Земли за 13 лет; колебания высоты морских волн и периода их следования за 15 месяцев; колебания температуры воздуха и количества осадков в различных регионах за многие десятки лет, колебания скорости ветра в районе Чернобыля за 11 лет; колебания температуры воды в Тихом океане за 8 месяцев; колебания интенсивности излучения разных астрофизических объектов за 16 лет и др.

Выяснилось, что интервал статистической устойчивости всех исследованных реальных физических процессов ограничен, в результате чего все процессы проявляют выраженную тенденцию сходимости не к конкретным числам, а к интервалам.

Незатухающими флуктуациями при больших объемах выборки N выборочного среднего m_{xN}^* в пределах этих интервалов можно объяснить ограниченную точность реальных измерений.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ПРИ НАРУШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Более глубокое понимание описанного эффекта дает центральная предельная теорема теории вероятностей для случайных величин.

Рассмотрим центральную предельную теорему в варианте, изложенном в работе [26].

Теорема (Линдберга–Феллера). Пусть X_1, X_2, \dots, X_N — в общем случае неоднородная случайная выборка, элементы которой взаимно независимы и описываются функциями распределения $F_{x_n}(x)$ с математическими ожиданиями m_{x_n} и дисперсиями D_{x_n} ($n = \overline{1, N}$). Выполняется условие Линдберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{B_N^2} \sum_{n=1}^N \int_{|x-m_{x_n}| > \varepsilon B_N} (x-m_{x_n})^2 dF_{x_n}(x) = 0 \quad (4)$$

где $B_N^2 = \sum_{n=1}^N D_{x_n}$ — сумма дисперсий D_{x_n} случайных величин X_n ($n = \overline{1, N}$).

Тогда функция распределения $F_{m_{xN}^*}(x)$ выборочного среднего m_{xN}^* сходится равномерно к гауссовской функции распределения

$$F(x/m_{xN}, D_{xN}) = \Phi \left(\frac{x-m_{xN}}{\sqrt{D_{xN}}} \right) \quad (5)$$

с математическим ожиданием m_{xN} и дисперсией $D_{xN} = B_N^2 / N^2$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{m_{xN}}^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(x/m_{xN}, D_{xN}), \quad (6)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz$.

Условие (4) является необходимым и достаточным условием сходимости выборочного среднего к гауссовскому распределению.

Используя описанную в [26] схему вывода равенства (6), можно доказать более общее утверждение, а именно: разность между функцией распределения $F_{m_{xN}}^*(x)$ выборочного среднего m_{xN}^* и гауссовской функцией распределения $F(x/m_{xN}, D_{xN})$, описываемое выражением (5), сходится равномерно к нулю:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [F_{m_{xN}}^*(x) - F(x/m_{xN}, D_{xN})] = 0. \quad (7)$$

Между формулами (6) и (7) имеется существенное различие. Формула (6) предполагает наличие у выборочного среднего m_{xN}^* однозначной предельной функции распределения $F_{m_x}^*(x)$, к которой стремится функция $F_{m_{xN}}^*(x)$ при $N \rightarrow \infty$, и наличие однозначной предельной функции распределения $F_{m_x}(x) = F(x/m_x, D_x)$, к которой стремится функция $F(x/m_{xN}, D_{xN})$ при том же условии, где m_x и D_x — соответственно математическое ожидание и дисперсия предельной гауссовской функции распределения.

Формула же (7) допускает, что рассматриваемые предельные функции распределения — многозначные функции.

Многозначность предельной функции распределения, к которой стремится функция $F(x/m_{xN}, D_{xN})$, обусловлена многозначностью математического ожидания и (или) дисперсии. Поэтому в выражении $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$, представляющем предельную функцию распределения, фигурируют многозначные параметры \tilde{m}_x и \tilde{D}_x . Поскольку эти параметры в общем случае гиперслучайные, гиперслучайной оказывается и функция $\tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$. Ее можно трактовать как множество однозначных гауссовских функций распределения с различными однозначными математическими ожиданиями $m_x \in \tilde{m}_x$ и дисперсиями $D_x \in \tilde{D}_x$.

Выражение (7) означает, что имеет место сходимость по распределению последовательности детерминированных функций $F_{m_{xN}}^*(x)$ к гиперслучайной функции $\tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$. Иными словами многозначные предельные функции распределения $\tilde{F}_{m_x}^*(x)$, $\tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$ описываются одинаковыми множествами однозначных функций распределения.

Когда параметры m_x и D_x — числа, причем $D_x = 0$, предельная гауссовская функции распределения $F_{m_x}(x) = F(x/m_x, D_x)$ имеет вид функции единичного скачка, изображенной на рис. 2 а полужирной линией. Когда m_x и D_x — однозначные величины, но $D_x \neq 0$, то эта функция распределения имеет вид кривой, изображено на рис. 2 б полужирной линией.

Когда предельное математическое ожидание \tilde{m}_x — многозначная величина или когда и предельное математическое ожидание \tilde{m}_x и предельная дисперсия \tilde{D}_x — многозначные величины, то предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$ — многозначная функция. На рис. 2 в, г она изображена в виде затемненной области.

Когда предельное математическое ожидание m_x — число, а предельная дисперсия \tilde{D}_x — многозначная величина, предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x/m_x, \tilde{D}_x)$ — тоже многозначная функция. При этом она имеет определенную специфику: состоит из двух областей, соприкасающихся в одной точке (затемненные области на рис. 3). Абсцисса точки соприкосновения этих областей равна математическому ожиданию m_x .

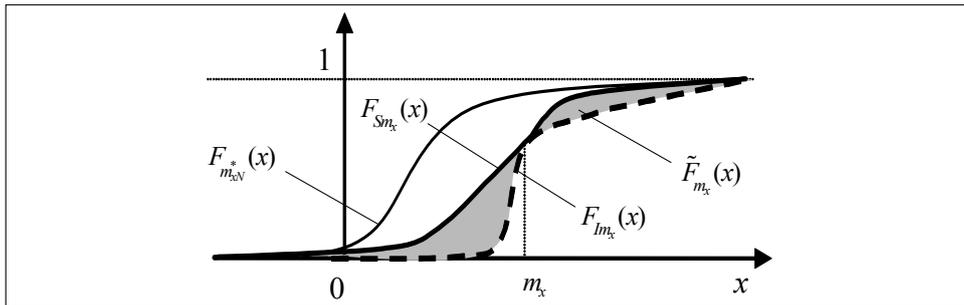


Рис. 3. Формирование предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \rightarrow \infty$, когда математическое ожидание m_x — число, а дисперсия \tilde{D}_x — многозначная величина

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для иллюстрации сходимости выборочных средних реальных процессов к интервалам ниже приведено описание и результаты двух из упомянутых выше экспериментов, касающихся исследований статистической устойчивости напряжения городской электросети и колебаний интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 в рентгеновском диапазоне частот. Выбор именно этих примеров связан с тем, что колебание напряжения сети — одно из наиболее неустойчивых колебаний, а колебание интенсивности излучения пульсара — одно из наиболее устойчивых.

При изучении колебаний напряжения электросети напряжение подавалось на вход 16 разрядного аналого-цифрового преобразователя компьютера

через понижающий трансформатор и согласующее устройство (делитель напряжения).

Снятие данных осуществлялось с частотой дискретизации 5 кГц. По каждым 1024 отсчетам вычислялись действующие (эффективные) значения напряжения, записываемые в память компьютера. Запись велась сеансами на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней. Продолжительность каждого сеанса составляла около 60 часов. За время сеанса записывалось $N = 2^{20} \approx 1$ млн отсчетов напряжения.

Обработка полученных записей сводилась к вычислению и анализу выборочных средних m_{xN}^* , оценок параметров статистической неустойчивости (в частности описанных в статьях [16, 17] параметров γ_N^* , μ_N^* , h_N^* и Γ_N^* , M_N^* , H_N^* , позволяющих оценить интервал статистической неустойчивости), оценок функций распределения колебания напряжения $F_g^*(x)$ на прилегающих друг к другу интервалах наблюдения длительностью около часа ($g = \overline{1,64}$) и оценок функций распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$.

Результаты обработки одной из записей приведены на рис. 4.

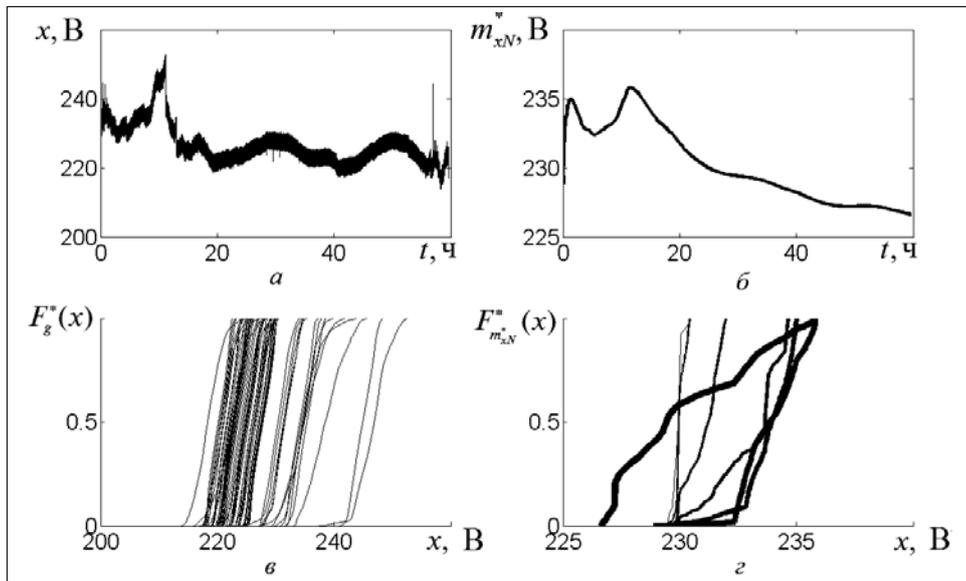


Рис. 4. Колебание напряжения x городской электросети (а) и его выборочного среднего m_{xN}^* (б), оценки функции распределения напряжения $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (в) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ при различном объеме выборки $N = 2^r$ ($r = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$) (г) (толщина линий возрастает с увеличением значения параметра r)

Как видно из рис. 4 а, качество электросети низкое. В данном случае напряжение колеблется между $x_i = 215$ В и $x_s = 255$ В.

На рассматриваемом временном интервале выборочное среднее не проявляет тенденции к стабилизации (рис. 4 б), что свидетельствует о явном нарушении статистической устойчивости процесса.

Кривые функции распределения $F_g^*(x)$, соответствующие разным значениям параметра g , сильно отличаются друг от друга (в первую очередь по своему местоположению) (рис. 4 в), что свидетельствует о выраженной нестационарности исследуемого колебания.

Кривые функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}}^*(x)$, полученные для нарастающих по экспоненциальному закону объемов выборки (рис. 4 з), демонстрируют полное отсутствие тенденции стремления этой функции распределения к какой-то определенной предельной функции распределения $F_{m_x}(x)$ и, тем более, стремления выборочного среднего m_{xN}^* к какому-то определенному предельному значению m_x .

При небольших значениях параметра r (8 и 10) по виду кривых функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}}^*(x)$ (рис. 4 з) можно предположить наличие стремления ее к гауссовскому распределению (причем, как и предсказывает теория вероятностей, с уменьшающейся дисперсией при росте объема выборки). Однако при больших значениях r (начиная с 10 до 20), как видно из рисунка, предполагаемая тенденция не наблюдается — закон распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}}^*(x)$ становится явно негауссовским.

Дисперсия выборочного среднего m_{xN}^* с увеличением объема выборки то нарастает (для значений r от 8 до 14 и от 18 до 20), то спадает (для значений r от 14 до 18). В целом при переходе от малых к большим объемам выборки дисперсия не только не проявляет тенденции стремления к нулю, предсказываемой теорией вероятностей, а возрастает, причем во много раз (размах выборочного среднего увеличивается примерно от 1 В до 8 В).

Судя по полученным результатам, функция распределения выборочного среднего стремится к многозначной функции $\tilde{F}_{m_x}(x)$ общего вида (типа рис. 2 в). К такому же выводу приводит анализ результатов обработки данных, полученных в других сеансах записи колебаний напряжения электро-сети.

Результаты аналогичных расчетов для колебаний интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 приведены на рис. 5.

Исходные данные взяты с [27]. Измерения интенсивности x проводились в период с 1 января 1996 г. по 31 декабря 2011 г. Средняя периодичность измерений составляла 2,8 часов.

Колебание интенсивности пульсара, как следует из рис. 5а, напоминает белый шум. Показание прибора, регистрирующего интенсивность излучения, меняется в диапазоне от $x_i = -15$ В до $x_s = 15$ В.

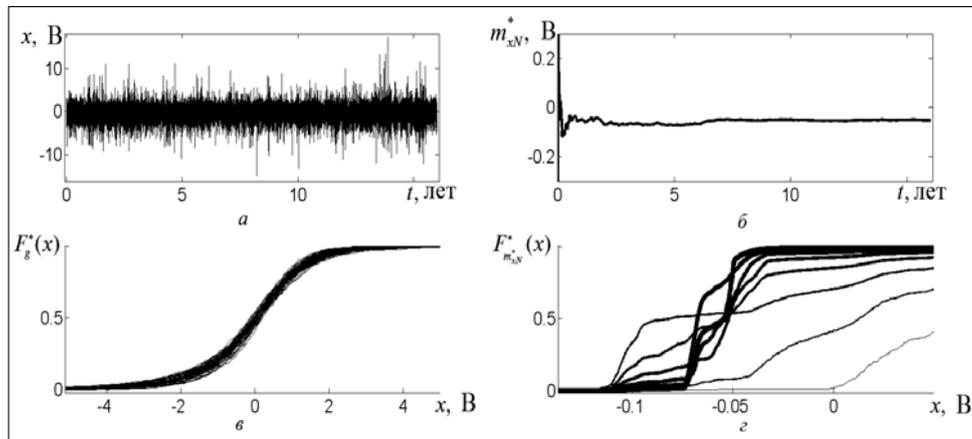


Рис. 5. Колебание интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 (а) и его выборочного среднего m_{xN}^* (б), оценки функции распределения $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (в) и оценки функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ при различном объеме выборки $N = 2^r$ ($r = \overline{8,15}$) (г) (толщина линий возрастает с увеличением значения параметра r)

На рис. 5 б кривая выборочного среднего на первый взгляд проявляет тенденцию к стабилизации, что говорит об отсутствии явно выраженных нарушений статистической устойчивости процесса. На отсутствие явных нарушений статистической устойчивости указывает и близость кривых оценок функций распределения напряжения $F_g^*(x)$, рассчитанных для прилегающих друг к другу интервалов наблюдения длительностью три месяца ($g = \overline{1,64}$) (рис. 5 в).

Однако кривые оценок функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$, полученные для нарастающих по экспоненциальному закону объемов выборки (рис. 5 г), демонстрируют отсутствие стремления выборочного среднего m_{xN}^* к какому-то определенному предельному значению m_x и даже отсутствие тенденции стремления функции распределения $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ к какой-то определенной предельной функции распределения $F_{m_x}(x)$.

По динамике изменения функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ при небольших значениях параметра r (от 8 до 13) можно предположить наличие стремления этой функции распределения к гауссовскому распределению (причем, как и предсказывает теория вероятностей с уменьшающейся дисперсией при росте объема выборки). Но при больших значениях r (начиная с 13 до 15) предполагаемая тенденция не прослеживается — закон распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ становится явно негауссовским.

При переходе от малых к большим объемам выборки дисперсия выборочного среднего m_{xN}^* вначале проявляет тенденцию к уменьшению (при изменении r от 8 до 13), но затем перестает уменьшаться. Размах выборочного среднего остается примерно на одном и том же уровне (примерно 0,04 В).

Судя по виду кривых функции распределения выборочного среднего, можно предположить стремление функции $F_{m_{xN}}^*(x)$ к многозначной функции $\tilde{F}_{m_x}(x)$ типа, изображенной на рис. 3.

Подобным образом были исследованы выборочные средние и других перечисленных выше процессов. В этих исследованиях ни разу не была зафиксирована тенденция стремления оценки функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}}^*(x)$ к какому-то определенному закону распределения, а тем более к гауссовскому закону с дисперсией, стремящейся к нулю.

Полученные результаты экспериментальных исследований показывают, что, хотя на небольших интервалах усреднения выборочные средние реальных физических величин хорошо описываются стохастическими моделями, в действительности эти средние носят гиперслучайный характер и на больших интервалах наблюдения, превосходящих интервал статистической устойчивости, представляются стохастическими моделями неадекватно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования проясняют механизм ограничения потенциальной точности измерения реальных физических величин и подтверждают результаты предыдущих исследований, касающихся действия закона больших чисел и центральной предельной теоремы в условиях нарушения статистической устойчивости [5, 6, 18, 19].

Ограничение точности можно объяснить неидеальным характером феномена статистической устойчивости, проявляющимся в отсутствии сходимости (несостоятельности) статистических оценок. При возрастании объема статистических данных вначале при небольших интервалах усреднения уровень флуктуаций статистических оценок уменьшается. Но из-за нарушения статистической устойчивости, начиная с некоторого критического объема данных (интервала статистической устойчивости), эти флуктуации приобретают незатухающий характер, что приводит к ограничению точности реальных измерений.

Потенциальная точность измерений определяется диапазоном, в котором флуктуирует оценка. При большом объеме выборки описать реальные оценки случайными моделями, характеризуемыми определенными однозначными функциями распределения, невозможно. Адекватное описание обеспечивают гиперслучайные модели, характеризуемые многозначными функциями распределения.

Экспериментальные исследования подтверждают, что при небольших интервалах усреднения гиперслучайная природа реальных выборочных средних практически не проявляется и поэтому эти выборочные средние

хорошо описываются стохастическими моделями. Однако при больших интервалах усреднения проявляется гиперслучайная их природа и тогда для их описания приходится использовать более сложные гиперслучайные модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
2. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. — М.: Советское радио, 1972, Т. 1. — 743 с.
3. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. — К.: ПІММС НАН України, 2003. — 245 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: ОНТИ, 1974. — 120 с.
5. Горбань І.І. Теория гиперслучайных явлений. — К.: НАН Украины, 2007. — 181 с.
6. Горбань І.І. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. — К.: Наукова думка, 2011. — 320 с.
7. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability / In the book “Information Models of Knowledge”. Kiev — Sofia: ITHEA, 2010. — P. 410.
8. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability (part II) // Information Theories and Applications. — 2011. — **18**, № 4. — P. 321–334.
9. Gorban I.I. Hyper-random Phenomena: Definition and Description // Information Theories and Applications. — 2008. — **15**, № 3. — P. 203–211.
10. Горбань І.І. Нарушение статистической устойчивости физических процессов // Математические машины и системы. — 2010. — № 1. — С. 171–184.
11. Горбань І.І. Эффект статистической неустойчивости в гидрофизике // Труды десятой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». — СПб: Наука, 2010. — С. 199–201.
12. Горбань І.І. Статистическая устойчивость колебаний температуры воздуха и осадков в районе Москвы // Математические машины и системы. — 2011. — № 3. — С. 97–104.
13. Горбань І.І., Горбань Н.І., Новотрясов В.В., Яроцук І.О. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры шельфовой зоны окраинных морей // Материалы докладов седьмого всероссийского симпозиума «Физика геосфер». — Владивосток: Дальнаука, 2011. — С. 542–547.
14. Горбань І.І. Статистическая устойчивость излучения астрофизических объектов // Математические машины и системы. — 2012. — № 2. — С. 155–160.
15. Горбань І.І. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2012. — **55**, № 3. — С. 3–18.
16. Горбань І.І. Критерии и параметры статистической неустойчивости // Математические машины и системы. — 2012. — № 4. — С. 106–114.
17. Горбань І.І. Феномен статистической устойчивости // Журнал технической физики. — 2014. — № 3 — С. 22–30.
18. Горбань І.І. Особенности закона больших чисел при нарушениях статистической устойчивости // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — № 7. — С. 31–42.
19. Горбань І.І. Закон больших чисел при нарушениях статистической устойчивости // Математические машины и системы. — 2011. — № 4. — С. 107–115.

20. *Gorban I.I.* Divergent and multiple-valued sequences and functions // Problems of Computer Intellectualization. Book 28. — Kyiv–Sofia: ITHEA, 2012. — P. 395.
21. *Горбань И.И.* Расходящиеся последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 1. — С. 106–118.
22. *Горбань И.И.* Многозначные величины, последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 3. — С. 147–161.
23. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.-Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958. — Т. 1. — 607 с.
24. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. — М.: Изд-во московского ун-та, 1985. — Т. 1. — 660 с.
25. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986. — 176 с.
26. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. — 448 с.
27. *All-Sky Monitor (ASM) team at the Kavli Institute for Astrophysics and Space Research at the Massachusetts Institute of Technology.* — http://xte.mit.edu/ASM_lc.html.

Поступила 16.04.2014