УДК 519/6
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.2.12

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА С НЕЧЕТКИМ КОМПЛЕКСНЫМ АРГУМЕНТОМ

И.Я. СПЕКТОРСКИЙ

Рассмотрены функциональные последовательности $f_n(A)$ комплексных аналитических функций с нечетким комплексным числом A в качестве аргумента; предполагается сходимость $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ и $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ как равномерная на каждом круге внутри $\operatorname{supp} A$. Вследствие аналитичности выполняются требования поточечной сходимости производных, а также конечности числа решений уравнения $f(z) = w$ относительно z для каждого w на каждом круге внутри $\operatorname{supp} A$. Предложены достаточные условия сходимости $f_n(A)$ как поточечной сходимости последовательности функций принадлежности $\mu_{f_n(A)}(w)$: доказана сходимость $\lim_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ в точках $w \in \mathbb{C}$, кроме таких $w = f(z)$, что z — точка разрыва $\mu_A(z)$, либо $f'(z) = 0$. Как частный случай последовательности $f_n(A)$ рассмотрено обобщение конструкции ряда Тейлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!}(z - z_0)^i$ для аналитической функции $f(z)$ для случая нечеткого комплексного аргумента $z = A$. Сходимость ряда рассмотрена как поточечная сходимость последовательности функций принадлежности частичных сумм $\mu_{S_n(A)}(w)$, где $S_n(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!}(z - z_0)^i$.

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие числа как частный случай нечетких множеств представляют мощное средство математического моделирования в условиях неполной информации об исходных объектах. Так, в работах [1, 2] описывается применение аппарата нечетких множеств (в частности, нечетких чисел) для разработки экспертных систем, решения задачи распознавания образов, представления знаний в системах искусственного интеллекта. Активно развивается теория нечетких систем управления [3].

Принцип обобщения, сформулированный Л.А. Заде для произвольных нечетких множеств [1, 8], определяет действие произвольной числовой функции конечного числа аргументов на нечеткие числа. В частности, для случая нечетких чисел можно обобщить стандартные арифметические операции «+», «·», «–» и «/». В работах [8, 9] вводится понятие нечеткого комплексного числа.

Для нечетких чисел, включая комплексный случай, сохраняются законы коммутативности и ассоциативности операций «+»и «·», однако в общем случае не выполняется дистрибутивность «·» относительно «+» (алгебраические свойства нечетких чисел изложены в работах [5–7]).

Наличие ассоциативности «+» и «·» позволяет рассматривать степенные ряды с нечетким аргументом, трактуя сходимость конечных сумм ряда как сходимость последовательности функций принадлежности. В частности, это касается рядов Тейлора с нечетким аргументом и сходимости такого ряда (в определенном смысле) к значению исходной функции над заданным нечетким аргументом. Так, в работе [10] рассматриваются ряды Тейлора с нечетким аргументом с компактным носителем; сходимость таких рядов трактуется как сходимость множеств уровня функций принадлежности частичных сумм по метрике Хаусдорфа. Однако анализ поточечной сходимости последовательности функций принадлежности в ряде случаев может оказаться существенно проще, чем анализ сходимости соответствующих множеств уровня по метрике Хаусдорфа (см. работу [1]) для случая действительного нечеткого аргумента).

Цель работы — представить достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким комплексным аргументом в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности и применить полученный результат к сходимости частичных сумм ряда Тейлора с нечетким комплексным аргументом. Полученные результаты могут помочь аппроксимировать сложные нечеткие модели более простыми с возможностью предельного перехода в топологии поточечной сходимости.

В работе приводятся в основном известные сведения из теории нечетких комплексных чисел, необходимые для изложения основного результата, а также анализируется возможность предельного перехода в последовательности отображений с нечетким комплексным аргументом, рассматривается сходимость рядов Тейлора с нечетким комплексным аргументом как поточечной сходимости функций принадлежности для частичных сумм.

ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ВЫПУКЛЫЕ НЕЧЕТКИЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Нечеткое комплексное число A является частным случаем нечеткого множества и определяется своей *функцией принадлежности* $\mu_A : \mathbb{C} \to [0,1]$. *Носителем* нечеткого комплексного числа A называют множество $\operatorname{supp} A = \{z \in \mathbb{C} : \mu_A(z) > 0\}$. Для заданного $\alpha \in (0;1]$ рассматривают *множество уровня* $[A]_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \mu_A(z) \ge \alpha\}$. Очевидно соотношение $\operatorname{supp} A = \bigcup\limits_{\alpha>0} [A]_\alpha$. Легко понять, что совокупность множеств уровня однозначно определяет функцию принадлежности μ_A (а значит и само нечеткое комплексное число A), так как $\mu_A{}^{-1}(\alpha_0)=\{z\in\mathbb{C}:\mu_A(z)=\alpha_0\}=$ $=[A]_{\alpha_0}\setminus\bigcup\limits_{\alpha>\alpha_0}[A]_\alpha$ для всех $0<\alpha_0\le 1$.

Нечеткое комплексное число A называют *нормальным*, если $\mu_A(z)=1$ для некоторого $z\in\mathbb{C}$. Так, нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu(z)=\begin{cases}1-|z|, & |z|\le 1;\\ 0, & |z|>1\end{cases}$ является нормальным, Также нормально нечеткое комплексное число с функцией принадлежности $\mu(z)=1$ ($z\in\mathbb{C}$), однако нечеткое комплексное число с функцией принадлежности $\mu(z)=0$ ($z\in\mathbb{C}$) не является нормальным. Заметим, что нормальность иногда требуется при определении нечеткого числа как действительного, так и комплексного, например, [8–10].

Важный класс представляют нечеткие комплексные числа с полунепрерывной сверху функцией принадлежности[1]. Полунепрерывность функции μ_A, которая определяется условием

$$\left(\lim_{n\to\infty} z_n=z\right)\Rightarrow\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_A(z_n)\le\mu_A(z)\right),$$

можно охарактеризовать в терминах множеств уровня нечеткого комплексного числа A.

Лемма 1. Функция принадлежности нечеткого комплексного числа A полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда все множества уровня $[A]_\alpha$ $(\alpha\in(0;1])$ замкнуты.

Утверждение леммы (в эквивалентной формулировке) доказано, например, в работе [12, с. 385–388], а в [13] приведено в виде упражнения.

Следствие. Пусть функция принадлежности нечеткого комплексного числа A полунепрерывна сверху. Тогда компактность множества уровня $[A]_\alpha$ при $0<\alpha\le 1$ эквивалентна ограниченности $[A]_\alpha$

Пример 1. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z)=\begin{cases}|z|, & |z|<0{,}3;\\ |z|+0{,}2; & 0{,}3\le|z|\le 0{,}8;\\ 1, & z>0{,}8.\end{cases}$

Очевидно, что $\mu_A(z)$ полунепрерывна сверху, и все множества уровня $[A]_\alpha$ $(\alpha\in(0;1])$ замкнуты. Так, замкнутым является $[A]_{0.4}=\{z:|z|\ge 0{,}3\}$.

Пример 2. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z)=e^{-|z|^2}$. Функция $\mu_A(z)$ полунепрерывна сверху (и даже непрерывна), все множества уровня $[A]_\alpha$ $\left(\alpha\in(0;1]\right)$ ограничены и в силу следствия из леммы 1 компактны. Отметим, что носитель $\operatorname{supp}A=\mathbb{C}$ при этом неограничен.

---

[1] Здесь и далее под непрерывностью и полунепрерывностью сверху подразумеваем непрерывность (полунепрерывность сверху) на $\mathbb{C}$.

Заметим, что при определении нечеткого комплексного числа, наряду с нормальностью, иногда требуется полунепрерывность сверху для функции принадлежности, а также накладываются условия связности для множеств уровня [8, 9].

ОТОБРАЖЕНИЯ НЕЧЕТКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть $f:\mathbb{C}^n \supset D \to \mathbb{C}$ — функция с областью определения $D_f \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$[2]. В соответствии с принципом обобщения Заде [1–10] образ набора нечетких комплексных чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ при отображении *f* определяется как нечеткое комплексное число $B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ с функцией принадлежности

$$\mu_B(w) =$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(z_1,\ldots,z_n)\in D_f: \\ f(z_1,\ldots,z_n)=w}} \min(\mu_{A_1}(z_1),\ldots,\mu_{A_n}(z_n)), & \text{если } \exists (z_1,\ldots,z_n)\in D_f : f(z_1,\ldots,z_n)=w; \\ 0, & \text{если } \forall (z_1,\ldots,z_n)\in D_f : f(z_1,\ldots,z_n)\neq w. \end{cases} \quad (1)$$

Пример 3. Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=-z$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольного нечеткого комплексного числа *A* получаем функцию принадлежности для нечеткого комплексного числа $-A$: $\mu_{-A}(w) = \mu_A(-w)$ ($w \in \mathbb{C}$).

Пример 4. Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=z^2$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольного нечеткого комплексного числа *A* получаем функцию принадлежности для A^2: $\mu_{A^2}(w) = \max(\mu_A(\sqrt{w}), \mu_A(-\sqrt{w}))$ ($w \in \mathbb{C}$).

Пример 5. Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=e^z$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольного нечеткого комплексного числа *A* получаем функцию μ_{e^A}:

$$\mu_{e^A}(w) = \begin{cases} \sup\{\mu_A(\ln r + i(\varphi + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}, & w \neq 0; \\ 0, & w = 0, \end{cases}$$

где $w = re^{i\varphi}$, $r \geq 0$, $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Пример 6. Пусть $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, f(z_1,z_2) = z_1 + z_2$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольных нечетких комплексных чисел A_1, A_2 получаем функцию принадлежности для $A_1 + A_2$: $\mu_{A_1+A_2}(w) = \sup\limits_{\substack{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2: \\ z_1+z_2=w}} \min\left(\mu_{A_1}(z_1), \mu_{A_2}(z_2)\right)$.

[2] Здесь и далее символы «$\subset$» и «$\supset$» допускают равенство множеств.

Из примеров 3–6 видно, что при использовании равенства (1) необходимо решать уравнение $f(z_1,\dots,z_n)=w$ для каждого $w\in\mathbb{C}$. Если это уравнение имеет небольшое количество решений (примеры 3 и 4), равенство (1) немедленно дает значение $\mu_B(w)$. Но прямое использование равенства (1) весьма проблематично, если уравнение $f(z_1,\dots,z_n)=w$ имеет бесконечно много решений (примеры 5 и 6), что особенно типично при $n\ge 2$ (пример 6). Приводимая ниже теорема 1 (с предварительной технической леммой) позволяет вычислять множества уровня нечеткого комплексного числа B непосредственно по множествам уровня $A_1,A_2,\dots,A_n$, минуя прямое использование равенства (1).

Лемма 2. Пусть все множества уровня нечетких комплексных чисел $A_1,A_2,\dots,A_n$ компактны и функция $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ непрерывна на $\mathbb{C}^n$. Тогда равенство (1) можно записать в виде

$$\mu_B(w)=$$
$$=\begin{cases}\max\limits_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\\ f(z_1,\dots,z_n)=w}}\min(\mu_{A_1}(z_1),\dots,\mu_{A_n}(z_n)), & \text{если } \exists(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n: f(z_1,\dots,z_n)=w;\\ 0, & \text{если } \forall(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n: f(z_1,\dots,z_n)\neq w.\end{cases}\tag{2}$$

Доказательство. Необходимо доказать, что супремум в правой части равенства (1) достигается и поэтому может быть заменен на максимум.

Пусть $\min(\mu_{A_1}(z_1),\dots,\mu_{A_n}(z_n))=0$ для любого набора $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ такого, что $f(z_1,\dots,z_n)=w$. Тогда $\mu_B(w)=0$ и утверждение леммы справедливо. Аналогично, если $f(z_1,\dots,z_n)\neq w$ для любого набора $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, также имеем $\mu_B(w)=0$ и утверждение леммы справедливо.

Наконец, пусть $\min(\mu_{A_1}(z_1),\dots,\mu_{A_n}(z_n))=\alpha>0$ и $f(z_1,\dots,z_n)=w$ для некоторого набора $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$. Тогда равенство (1) можно записать в виде

$$\mu_B(w)=\sup_{\substack{(z_1,\dots,z_n)\in([A_1]_\alpha\times[A_2]_\alpha\times\dots\times[A_n]_\alpha):\\ f(z_1,\dots,z_n)=w}}\min(\mu_{A_1}(z_1),\dots,\mu_{A_n}(z_n)).$$

Поскольку множество $X_\alpha=[A_1]_\alpha\times[A_2]_\alpha\times\dots\times[A_n]_\alpha$ компактно в $\mathbb{C}^n$, а множество $f^{-1}(w)=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n : f(z_1,\dots,z_n)=w\}$ замкнуто вследствие непрерывности f, получаем ограниченность и замкнутость (а значит и компактность[3]) множества $X_\alpha\cap f^{-1}(w)$. Наконец, функция $\min(\mu_{A_1}(z_1),\dots$

[3] В конечномерном пространстве, в частности в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, компактность множества эквивалентна его ограниченности и замкнутости, однако в бесконечномерных метрических пространствах ограниченность и замкнутость являются лишь необходимыми, но не достаточными условиями компактности.

$\ldots,\mu_{A_n}(z_n))$ полунепрерывна сверху на $\mathbb{C}^n$ и аналогично теореме Вейерштрасса [12, 13] достигает максимума на компакте $X_\alpha \cap f^{-1}(w)$. □

Теорема 1. Пусть все множества уровня нечетких комплексных чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ компактны и $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ непрерывна на $\mathbb{C}^n$. Тогда при $0<\alpha\le 1$ множества уровня $[B]_\alpha$ равно образу множеств уровня $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \ldots, [A_n]_\alpha$:

$$[B]_\alpha = f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \ldots, [A_n]_\alpha) =$$

$$= \{f(x_1,\ldots,x_n) : (x_1,\ldots,x_n) \in ([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \cdots \times [A_n]_\alpha)\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $0<\alpha\le 1$. Поскольку условия леммы 2 выполнены, можем, воспользовавшись равенством (2), записать эквивалентность

$$\left(w \in [B]_\alpha\right) \Leftrightarrow \left(\exists (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n : \begin{cases} f(z_1,\ldots,z_n) = w; \\ \mu_{A_1}(z_1) \ge \alpha; \\ \vdots \\ \mu_{A_n}(z_n) \ge \alpha. \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(w \in f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \ldots, [A_n]_\alpha)\right),$$

что доказывает утверждение теоремы. □

Пример 7. Рассмотрим нечеткие комплексные числа A_1 и A_2 с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(z_1) = \begin{cases} 1 - \frac{|z_1 - c_1|}{\delta_1}, & |z_1 - c_1| \le \delta_1; \\ 0, & |z_1 - c_1| > \delta_1, \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(z_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|z_2 - c_2|}{\delta_2}, & |z_2 - c_2| \le \delta_2; \\ 0, & |z_2 - c_2| > \delta_2, \end{cases}$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $\delta_i > 0$ ($i \in \{1;2\}$). Поскольку все множества уровня A_1 и A_2 компактны, а отображение $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ непрерывно на $\mathbb{C}^2$, для вычисления множеств уровня нечеткого комплексного числа $B = A_1 + A_2$ можем использовать теорему 1. Для A_1 и A_2 имеем $[A_i]_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z - c_i| \le \delta_i\}$ ($i \in \{1;2\}$) и для B получаем:

$$[B]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z - (c_1 + c_2)| \le \delta_1 + \delta_2\},$$

где $0<\alpha\le 1$. Теперь по виду $[B]_\alpha$ ($0<\alpha\le 1$) легко определить функцию принадлежности нечеткого комплексного числа $B = A_1 + A_2$:

$$\mu_{A_1 + A_2}(w) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|w - (c_1 + c_2)|}{\delta_1 + \delta_2}, & |w - (c_1 + c_2)| \le \delta_1 + \delta_2; \\ 0, & |w - (a_1 + a_2)| > \delta_1 + \delta_2. \end{cases}$$

Пример 8. Рассмотрим нечеткие комплексные числа A_1 и A_2 с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(z_1)=\begin{cases}\frac{x_1}{x_1+1}, & x_1\ge 0;\\ 0, & x_1<0,\end{cases}\quad \mu_{A_2}(z_2)=\begin{cases}\frac{x_2}{x_2-1}, & x_2\le 0;\\ 0, & x_2>0,\end{cases}$$

$$x_i=\operatorname{Re} z_i>0\ \ (i\in\{1;2\}).$$

Поскольку множества уровня нечетких комплексных чисел A_1 и A_2 неограничены (а значит и некомпактны), условия теоремы 1 (как и леммы 2) не выполнены. Применяя формулу (1) (см. также пример 6), получаем:

$$\mu_{A_1+A_2}(w)=\sup_{\substack{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\\ z_1+z_2=w}}\min(\mu_{A_1}(z_1),\mu_{A_2}(z_2))=\sup_{x_1\ge\max(0,u)}\min\left(\frac{x_1}{x_1+1},\frac{u-x_1}{u-x_1-1}\right)=1$$

для всех $w\in\mathbb{C}$, $u=\operatorname{Re} w$. Заметим, что равенство $[A_1+A_2]_\alpha=[A_1]_\alpha+[A_2]_\alpha$, постулируемое теоремой 1, выполняется для всех $\alpha\in(0;1)$, однако не выполняется для $\alpha=1$: $[A_1+A_2]_1=\mathbb{C}$, $[A_1]_1+[A_2]_1=\varnothing$.

Важным фактом для нечетких комплексных чисел является сохранение полунепрерывности сверху для их функций принадлежности при непрерывном отображении. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 2. Пусть $A_1,A_2,\ldots,A_n$ — нечеткие комплексные числа с полунепрерывными сверху функциям принадлежности, все множества уровня $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ограничены, функция $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ непрерывна на $\mathbb{C}^n$ и $B=f(A_1,A_2,\ldots,A_n)$. Тогда μ_B также полунепрерывна сверху.

Доказательство. Пусть функции $\mu_{A_1},\mu_{A_2},\ldots,\mu_{A_n}$ полунепрерывны сверху. Тогда в соответствии с леммой 1 множества уровня $[A_1]_\alpha,[A_2]_\alpha,\ldots,[A_n]_\alpha$ замкнуты для любого $\alpha\in(0;1]$. По теореме 1 для произвольного $0<\alpha\le 1$ имеем равенство $[B]_\alpha=f([A_1]_\alpha,[A_2]_\alpha,\ldots,[A_n]_\alpha)$, откуда вследствие непрерывности f и компактности множеств $[A_1]_\alpha,[A_2]_\alpha,\ldots$ $\ldots,[A_n]_\alpha$ множество $[B]_\alpha$ также компактно (а значит и замкнуто). Таким образом, все множества уровня нечеткого комплексного числа B замкнуты, и в соответствие с леммой 1 функция μ_B полунепрерывна сверху. □

Аналог теоремы 1 доказан в работе [10] для действительных нечетких чисел и непрерывной унарной функции $f(x)$, сохранение выпуклости при операциях «+», «–» и «·» доказано, например, в работе [5].

Пример 9. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z)=\begin{cases}1-\frac{|z|}{\delta}, & |z|\le\delta;\\ 0, & |z|>\delta.\end{cases}$

Непосредственно из равенства (1) (см. также пример 4) найдем $\mu_{|A|}(z)$:

$$\mu_{|A|}(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{\delta}, & z\in[0;\delta);\\ 0, & z\notin[0;\delta).\end{cases}$$

Отметим, что функция $\mu_{|A|}(z)$ полунепрерывна сверху, но ненепрерывна при непрерывной функции $\mu_A(z)$ и непрерывном отображении $f(z)=|z|$.

Пример 10. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu(z)=1$ ($z\in\mathbb{C}$). Тогда функция $\mu_{e^A}(z)=\begin{cases}1, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$ не полунепрерывна сверху; теорема 2 не применима, так как множества уровня нечеткого комплексного числа A неограничены.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 легко обобщить на случай, когда f непрерывна на $\operatorname{supp}A_1\times\operatorname{supp}A_2\times\cdots\times\operatorname{supp}A_n$. Так, если функции принадлежности нечетких комплексных чисел A_1 и A_2 полунепрерывны сверху и $0\notin\operatorname{supp}A_2$, то функция $\mu_{\frac{A_1}{A_2}}$ также полунепрерывна сверху.

Замечание 2. Очевидно, что свойство нормальности сохраняется при произвольном отображении: если нечеткие комплексные числа $A_1,A_2,\dots,A_n$ нормальны и $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ определено на $\mathbb{C}^n$, то $f(A_1,A_2,\dots,A_n)$ также нормально.

Замечание 3. В отличие от действительного случая [5, 10, 11] выпуклость множеств уровня нечетких комплексных чисел при произвольном непрерывном отображении может не сохраняться. Так, для нечеткого комплексного числа с функцией принадлежности $\mu_A(z)=\begin{cases}1, & z=1+it,\ t\in[0;2\pi);\\ 0, & \operatorname{Re}z\neq 1 \text{ или } \operatorname{Im}z\notin[0;2\pi)\end{cases}$ все множества уровня имеют вид $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=1,\operatorname{Im}z\in[0;2\pi)\}$, т.е. выпуклы, однако для нечеткого комплексного числа $\mu_{e^A}(z)=\begin{cases}1, & z=e^{i\varphi},\ \varphi\in[0;2\pi);\\ 0, & |z|\neq 1\end{cases}$ все множества уровня являются окружностью $\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, т.е. не выпуклы.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕЧЕТКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Вспомогательные утверждения

Докажем несколько утверждений, обобщающих известные факты из действительного анализа на комплексный случай. Здесь все аналитические функции предполагаются однозначными.

Длина кривой в $\mathbb{C}^2$, заданной аналитической функцией. Пусть функция $f:D\to\mathbb{C}$ аналитична на открытом множестве $D\subset\mathbb{C}$. Тогда кривую в $\mathbb{C}^2$ $\gamma:t\mapsto(z(t),f(z(t)))$, $z(t)\in D$, $t\in[t_1;t_2]$ можно рассматривать как кривую в $\mathbb{R}^4$: $t\mapsto(x(t),y(t),u(x(t),y(t)),v(x(t),y(t)))$, где $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$, $u=\operatorname{Re}f$, $v=\operatorname{Im}f$ Обозначим через $|\gamma|$ длину кривой γ.

Лемма 3. Пусть $z(t)$ дифференцируема для $t \in [t_1; t_2]$. Тогда

$$|\gamma| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + |f'(z(t))|^2}\, |z'(t)| dt .$$

Доказательство. Используя формулу для длины кривой в $\mathbb{R}^n$, запишем:

$$|\gamma| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{A(t)} dt, \text{ где } A(t) = (u'_x(x(t), y(t))x'(t))^2 + (u'_y(x(t), y(t)y'(t)))^2 +$$

$$+ (v'_x(x(t), y(t))x'(t))^2 + (v'_y(x(t), y(t))y'(t))^2 + (x'(t))^2 + (y'(t))^2.$$

Из условий Коши–Римана аналитичности f [14, 15] получаем

$$A(t) = ((u'_x(x(t), y(t)))^2 + (v'_x(x(t), y(t)))^2 + 1)\,((x'(t))^2 + (y'(t))^2) .$$

Наконец, учитывая равенство $f' = u'_x + iv'_x$ [14, 15], окончательно получаем

$$A(t) = (1 + |f'(z(t))|^2)|z'(t)|^2 ,$$

что доказывает утверждение леммы. □

Область определения обратной функции. Известно, что функция $f : D \to \mathbb{C}$, аналитичная на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$, обратима в некоторой окрестности точки $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$. При этом, в отличие от функций на $\mathbb{R}$, комплексная функция может не быть обратимой на всей окрестности z_0, где $f'(z_0) \neq 0$. Так, функция $f(z) = e^z$ аналитична на $\mathbb{C}$ и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$, однако f^{-1} определена не на всем $\mathbb{C}$ вследствие периодичности исходной функции: $f(z) = f(z + 2\pi i)$.

Пусть $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$. Для оценки области определения f^{-1}, пользуясь непрерывностью $f(z)$ в D, выберем такое $r > 0$, что $f(z) \neq 0$ при $0 < |z - z_0| \le r$, и согласно теореме Вейерштрасса о функции, непрерывной на компакте, можем ввести $\mu = \min\{|f(z) - f(z_0)| : |z - z_0| = r\} > 0$.

Лемма 4. Функция f^{-1} определена в круге $F = \{w : |w - f(z_0)| < \mu\}$ и $f^{-1}(F) \subset E = \{z : |z - z_0| < r\}$.

Доказательство (основано на идее из работы [14, с. 210–213]). Функция $f(z) - f(z_0)$ имеет в E лишь один нуль: $z = z_0$. Зафиксируем $\xi \in F$ и рассмотрим функцию $\tilde{f}(z) = f(z) - \xi$. Поскольку $|f(z_0) - \xi| < \mu \le$ $\le |f(z) - f(z_0)|$ для $|z - z_0| = r$, к функции $\tilde{f}(z) = (f(z) - f(z_0)) + (f(z_0) - \xi)$ применима теорема Руше: $\tilde{f}(z)$ и $f(z) - f(z_0)$ имеют одинаковое количество нулей (ровно один нуль) внутри круга E. Таким образом, $f(z)$ принимает каждое значение $\xi \in F$ в точности для одного $z \in E$ и $f^{-1}(w)$ определена для каждого $w \in F$, причем $f^{-1}(w) \in E$.

Сходимость последовательности обратных функций

Рассмотрим последовательность функций $f_n : D \to \mathbb{C}$ ($n \ge 1$), аналитических на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$. Также предполагаем сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ для всех $z \in D$, где функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична на $D \subset \mathbb{C}$. Зафиксировав $z_0 \in D$, введем $\varphi(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ и $\varphi_n(z) = \dfrac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0}$ ($n \ge 1$), доопределив $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ и $\varphi_n(z_0) = f_n'(z_0)$ ($n \ge 1$).

Лемма 5. Пусть $r > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, причем сходимость равномерна на $\overline{E} = \{z : |z - z_0| \le r\} \subset D$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z_0) = f'(z_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$, причем сходимость $\varphi_n(z)$ ($n \ge 1$) равномерна на $\overline{E}$.

Доказательство. Сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z_0) = f'(z_0)$ легко получить, применяя формулу Коши для производных [14, 15] и учитывая равномерную на $\overline{E}$ сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$: $f_n'(z_0) - f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} (f_n(z) - f(z))dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, где контур $\gamma = \{z : |z - z_0| = \frac{1}{2} r\}$ ориентирован против часовой стрелки.

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ для всех $z \in \overline{E}$, причем сходимость равномерна в любом кольце $0 < \delta < |z - z_0| \le r$. Равномерную на $\overline{E}$ сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ в малой окрестности z_0 можно доказать, рассмотрев разложение в ряд Тейлора $f_n(z) = f_n(z_0) + \dfrac{1}{k!}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < \delta$ при достаточно малом $\delta \in (0; r]$. Тогда $\varphi_n(z) = f_n'(z_0) + \dfrac{1}{k!}\sum\limits_{k=2}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{k-1}$ и, используя неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора [14, 15], $\left|\varphi_n(z) - f_n'(z_0)\right| \le \sum\limits_{k=2}^{\infty} M_n(\delta)(z - z_0)^{k-1}$, где $M_n(\delta) = \max\limits_{|z - z_0| = \delta} \left|f_n(z)\right|$. Поскольку сходимость f_n ($n \ge 1$) на $\overline{E}$ равномерная, существует конечное $M(\delta) = \sup\limits_{n\ge1} M_n(\delta)$. Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ можем выбрать $0 < \delta_0 < \delta$ так, чтобы $\left|\varphi_n(z) - f_n'(z_0)\right| \le \frac{1}{3}\varepsilon$ при $\left|z - z_0\right| \le \delta_0$ для всех $n \ge 1$, и такое $N \ge 1$, что $\left|f'(z) - f_n'(z_0)\right| \le \frac{1}{3}\varepsilon$ при $\left|z - z_0\right| \le \delta_0$ и $n \ge N$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ ($z \in \overline{E}$) и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z_0) =$

$=f'(z_0)$, переходим в неравенстве $\left|\varphi_n(z)-f_n'(z_0)\right|\le\frac{1}{3}\varepsilon$ к пределу по $n\to\infty$, получая $\left|\varphi(z)-f'(z_0)\right|\le\frac{1}{3}\varepsilon$ при $\left|z-z_0\right|\le\delta_0$. Окончательно

$$\left|\varphi_n(z)-\varphi(z)\right|\le\left|\varphi_n(z)-f_n'(z_0)\right|+\left|f_n'(z_0)-f'(z_0)\right|+\left|f'(z_0)-\varphi(z)\right|\le\varepsilon$$

при $\left|z-z_0\right|\le\delta_0$ и $n\ge N$, что завершает доказательство леммы. □

Лемма 6. Пусть $f'(z_0)\ne 0$, $r>0$, сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ равномерна на $\overline{E}=\{z:|z-z_0|\le r\}$, $\varphi(z)\ne 0$ при $z\in\overline{E}$. Тогда найдется такое $N\ge 1$, что $W=\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} f_n(\overline{E})$ содержит некоторую окрестность W_0 точки $f(z_0)$, определены $f_n^{-1}:W_0\to E=\{z:|z-z_0|<r\}$ ($n\ge 1$), причем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{-1}(w)=$ $=f^{-1}(w)$ для всех $w\in W_0$.

Доказательство. В соответствие с леммой 4 функция f^{-1} определена в круге $F=\{w:\left|w-f(z_0)\right|<\mu\}$, где $\mu=\min\{\left|f(z)-f(z_0)\right|:|z-z_0|=r\}>0$, причем $f^{-1}(w)\in E$ для всех $w\in F$. Вследствие компактности $\overline{E}$ и непрерывности $\varphi(z)$ и $f'(z)$ на $\overline{E}$ существует $\delta=\min(\{|\varphi(z)|,\ \left|f'(z)\right|:z\in\overline{E}\})>0$ и (в соответствие с леммой 5) равномерной на $\overline{E}$ сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi(z)$ и сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z_0)=f'(z_0)$ можем выбрать такое $N_1\ge 1$, что $\left|\varphi_n(z)\right|\ge\delta/2>0$ и $\left|f_n'(z)\right|\ge\delta/2>0$ для всех $n\ge N_1$ при $z\in\overline{E}$.

Учитывая равномерную на $\overline{E}$ сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$, можем выбрать $N_2\ge N_1$ так, что $\min\{\left|f_n(z)-f_n(z_0)\right|:|z-z_0|=r\}\ge\frac{2}{3}\mu>0$ для всех $n\ge N_2$. Наконец выберем $N\ge N_2$ так, что $\left|f_n(z_0)-f(z_0)\right|\le\frac{1}{3}\mu$ для всех $n\ge N$. Теперь в соответствие с леммой 4 каждая f_n^{-1} ($n\ge N$) определена в круге $F_n=\{w:\left|w-f_n(z_0)\right|<\frac{2}{3}\mu\}$ и можно выбрать $W_0=\{w:\left|w-f(z_0)\right|<$ $<\frac{1}{3}\mu\}$, при этом $W_0\subset F_n\subset F$ для всех $n\ge N$.

Введя $\hat{w}\in W_0$, $\hat{z}=f^{-1}(\hat{w})$, $z_n=f_n^{-1}(\hat{w})$ и $w_n=f_n(\hat{z})$, для $n\ge N$ получаем

$$\left|f_n^{-1}(\hat{w})-f^{-1}(\hat{w})\right|=\left|(z_n,\hat{w})-(\hat{z},\hat{w})\right|=$$
$$=\left|(z_n,\hat{w})-(\hat{z},\hat{w})+(\hat{z},w_n)-(\hat{z},w_n)\right|\le\left|(z_n,\hat{w})-(\hat{z},w_n)\right|+\left|w_n-\hat{w}\right|,$$

причем расстояние $\left|(z_n,w_0)-(z_0,w_n)\right|$ в $\mathbb{C}^2$ можно, применяя лемму 3 для функции $f^{-1}(w)$, ограничить длиной кривой $\gamma:t\mapsto(f_n^{-1}(w_0+t(w_n-w_0)),$ $w_0+t(w_n-w_0))$, $t\in[0;1]$, соединяющей точки $(z_n,\hat{w})=(f_n^{-1}(\hat{w}),\hat{w})$ и $(\hat{z},w_n)=(f_n^{-1}(w_n),w_n))$:

$$\left|(z_n,\hat{w})-(\hat{z},w_n)\right|=\left|\int_0^1\sqrt{1+((f_n^{-1})'(\hat{w}+t(w_n-\hat{w})))^2}\,\left|(w_n-\hat{w})\right|dt\right|\le$$

$$\le\sqrt{1+\frac{4}{\delta^2}}\left|w_n-\hat{w}\right|.$$

Таким образом, для $n\ge N$ окончательно имеем

$$\left|f_n^{-1}(\hat{w})-f^{-1}(\hat{w})\right|\le\left(1+\frac{4}{\delta^2}\right)\left|w_n-\hat{w}\right|+\left|w_n-\hat{w}\right|=\left(2+\frac{4}{\delta^2}\right)\left|f_n(\hat{z})-f(\hat{z})\right|,$$

что, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\hat{z})=f(\hat{z})$, доказывает сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}f_n^{-1}(\hat{w})=$ $=f^{-1}(\hat{w})$. □

Сходимость функций принадлежности

Для функции $f:D\to\mathbb{C}$, аналитической на открытом множестве $D\subset\mathbb{C}$, и нечеткого комплексного числа A с носителем $\operatorname{supp}A\subset D$ введем обозначения:

$$X_{f,\operatorname{supp}A}=\{z\in\operatorname{supp}A: f'(z)=0\};$$

$$X_{A,\operatorname{supp}A}=\{z\in\operatorname{supp}A: z \text{ — точка разрыва функции } \mu_A(z)\}.$$

Для нечеткого комплексного числа A с полунепрерывной сверху функцией принадлежности и ограниченными множествами уровня и последовательности аналитических функций $f_m:D\to\mathbb{C}$ ($n\ge1$) получаем согласно теореме 2 последовательность нечетких комплексных чисел $A_n=f_m(A)$ ($n\ge1$), функции принадлежности которых полунепрерывны сверху.

Теорема 3. Пусть A — нечеткое комплексное число, все множества уровня которого компактны; $f_n:D\to\mathbb{C}$ ($n\ge1$) — последовательность функций, аналитичных на $D\supset\operatorname{supp}A$; $f:D\to\mathbb{C}$ — функция, аналитичная на $D\supset\operatorname{supp}A$, и для любого компакта $K\subset\operatorname{supp}A$ выполнены условия:

$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)=f(z)$, причем сходимость равномерна на K;

для всех $w\in\mathbb{C}$ множество $f^{-1}(w)\cap K=\{z\in K: f(z)=w\}$ конечно.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{f_n(A)}(w)=\mu_{f(A)}(w)$ для любого $w\in\mathbb{C}\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup$ $\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $w_0\in\mathbb{C}\setminus f(X_{f,\operatorname{supp}A}\cup$ $\cup X_{A,\operatorname{supp}A})$ и $\varepsilon>0$. Пусть $f^{-1}(w_0)\cap\operatorname{supp}A\ne\varnothing$, тогда $f^{-1}(w_0)\cap[A]_{\alpha_0}\ne$ $\ne\varnothing$ для некоторого $0<\alpha_0\le1$. По условию $X_0=f^{-1}(w_0)\cap[A]_{\alpha_0}$ конечно; пусть $X_0=\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ и $X_{0,\delta}=\bigcup\limits_{j=1}^{k}\{z:|z-z_j|\le\delta\}$ для $\delta>0$. Поскольку $\mu_A(z)$ и $f'(z)$ непрерывны в каждой точке $z_j\in X_0$, $\mu_A(z_j)>0$ и $\left|f'(z_j)\right|>0$, можем выбрать такое $\delta_0>0$, что $\mu_A(z)>0$, $\left|\mu_A(z_j)-\mu_A(z)\right|\le\varepsilon$ и $\left|f'(z)\right|>0$ для любого $z\in X_{0,\delta_0}$.

Положим $X_j = \{z : \left|z_j - z\right| \le \delta_0\}$, $W_j = f(X_j)$ для $z_j \in X_0$. Тогда в соответствие с леммой 6 найдутся $W_0 \subset \bigcap_{j=1}^{k} W_j$ и $N_1 \ge 1$, что для всех $n \ge N_1$ определена $f_n^{-1,j} : W_0 \to X_j$, причем $w_0 \in W_0$ и $\lim_{n\to\infty} f_n^{-1,j}(w) = f^{-1,j}(w)$ для всех $w \in W_0$; подчеркнем, что $f^{-1,j}$ и $f_n^{-1,j}$ ($n \ge 1$) – обратные функции к сужениям f и f_n на X_j Поскольку $\widetilde{X}_0 = [A]_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \{z : | z - z_j | < \delta_0\}$ компактно, $| f(z) - w_0 | > 0$ для $z \in \widetilde{X}_0$, а сходимость $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ равномерна на $\widetilde{X}_0$, выберем $N_2 \ge N_1$ так, что $| f_n(z) - w_0 | \ge \ge \frac{1}{2} \min\{\left|f(z) - w_0\right| \mid z \in \widetilde{X}_0\} > 0$ для всех $z \in \widetilde{X}_0$ и $n \ge N_2$. Итак, каждое уравнение $f_n(z) = w_0$ относительно z при $n \ge N_2$ имеет на $[A]_{\alpha_0}$ ровно k корней: $f_n^{-1,j}(w_0)$ ($1 \le j \le k$). Из равенства (1) получаем:

$$\mu_{f_n(A)}(w_0) = \max_{1\le j\le k} \mu_A(f_n^{-1,j}(w_0)) \text{ при } n \ge N_2,$$

$$\mu_{f(A)}(w_0) = \max_{1\le j\le k} \mu_A(f^{-1,j}(w_0)).$$

Выбрав $N \ge N_2$ так, что $\max_{1\le j\le k} \left|f_n^{-1,j}(w_0) - f^{-1,j}(w_0)\right| \le \delta_0$ при $n \ge N$, получаем: $\left|\mu_{f_n(A)}(w_0) - \mu_{f(A)}(w_0)\right| \le \varepsilon$ для $n \ge N$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(w_0) = = \mu_{f(A)}(w_0)$.

Наконец, при $f^{-1}(w_0) \cap \operatorname{supp} A = \varnothing$ имеем, очевидно, $\mu_{f(A)}(w_0) = 0$. Для произвольного $0 < \alpha_0 \le 1$ вследствие компактности $[A]_{\alpha_0}$ существует $\varepsilon = \min_{z\in[A]_{\alpha_0}} | f(z) - w_0 | > 0$ и с учетом равномерной сходимости $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ на $[A]_{\alpha_0}$ можем выбрать N так, что $| f_n(z) - w_0 | \ge \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ для всех $z \in [A]_{\alpha_0}$ и $n \ge N$. Таким образом, при $n \ge N$ $f_n^{-1}(w_0) \cap [A]_{\alpha_0} = \varnothing$ и из равенства (2) $\mu_{f_n(A)}(w_0) < \alpha_0$. Вследствие произвольности $0 < \alpha_0 \le 1$ получаем, что $\mu_{f_n(A)}(w_0) = 0$ при $n \ge N$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(w_0) = \mu_{f(A)}(w_0) = 0$. Теорема полностью доказана. □

Пример 11. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|z|}{2\delta}, & |z| \le \delta; \\ 0, & |z| > \delta, \end{cases}$ где $\delta > 0$ — фиксированная константа.

Рассмотрим последовательность функций $f_n(z) = z + \frac{i^n}{n}$ ($n \geq 1$). Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) = z$ равномерно на $\operatorname{supp} A = \{z : |z| < \delta\}$. Непосредственно из равенства (1) для $n > \frac{1}{\delta}$ получаем

$$\mu_{f_n(A)}(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left|z + \dfrac{i^n}{n}\right|}{2\delta}, & \left|z + \dfrac{i^n}{n}\right| \leq \delta; \\ 0, & \left|z + \dfrac{i^n}{n}\right| > \delta. \end{cases}$$

Поскольку $X_{f,\operatorname{supp} A} = \varnothing$ и $X_{A,\operatorname{supp} A} == \{z : |z| = \delta\}$, теорема 3 гарантирует сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(z) = \mu_{f(A)}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, кроме $f(z) = z$ при $|z| = \delta$. Заметим, что при $|z| = \delta$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{f_n(A)}(z)$ не существует.

РЯД ТЕЙЛОРА С НЕЧЕТКИМ КОМПЛЕКСНЫМ АРГУМЕНТОМ: СХОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — функция, аналитическая на непустом открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного $z_0 \in D$ получаем разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{i!}(z - z_0)^k\,, \tag{3}$$

причем ряд (3) сходится равномерно в любом круге $\overline{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$.

Лемма 7. Пусть $c \in \mathbb{C}$ и уравнение $f(z) = c$ имеет бесконечно много корней на $\overline{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$. Тогда $f(z) = c$ для всех $z \in \overline{E}$.

Доказательство. Вследствие компактности $\overline{E}$ множество корней уравнения $f(z) = c$ имеет на $\overline{E}$ предельную точку. Теперь, применяя теорему о единственности [14, 15], получаем: $f(z) = c$ для всех $z \in \overline{E}$. □

Пусть $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$ ($n \geq 0$) — частичные суммы ряда в равенстве (3). Ясно, что равенство (3) означает сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = f(z)$.

Теорема 4. Пусть A — нечеткое комплексное число, все множества уровня которого компактны, а носитель линейно связный; функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична на непустом открытом множестве $D \supset \operatorname{supp} A$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{S_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ для любого $w \in \mathbb{C} \setminus f\left(X_{f,\operatorname{supp} A} \cup X_{A,\operatorname{supp} A}\right)$.

Доказательство. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = f(z)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n(z) = f'(z)$, причем обе сходимости равномерны в любом круге $\overline{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset$

$\subset \operatorname{supp} A$. Пусть для некоторого $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f,\operatorname{supp} A} \cup \cup X_{A,\operatorname{supp} A})$ и $\overline{E} \subset \operatorname{supp} A$ множество $f^{-1}(w_0) \cap \overline{E}$ бесконечно. Тогда по лемме 7 имеем $f(z) = c$ для всех $z \in \overline{E}$, а в силу единственности аналитического продолжения – для всех $z \in \operatorname{supp} A$, и утверждение теоремы очевидно. Если же множество $f^{-1}(w_0) \cap \overline{E}$ конечно для всех $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f,\operatorname{supp} A} \cup X_{A,\operatorname{supp} A})$ и $\overline{E} \subset \operatorname{supp} A$, выполнены все условия теоремы 3, откуда следует требуемое равенство $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_{S_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$. Теорема полностью доказана. □

Пример 12. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - |z|, & |z| \le 1; \\ 0, & |z| > 1, \end{cases}$ и функцию $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Непосредственно из равенства (1) найдем $\mu_{f(A)}(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|z-1|}{|z|}, & \operatorname{Re} z \ge \dfrac{1}{2}; \\ 0, & -\infty \le \operatorname{Re} z < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Область аналитичности $f(z)$ включает $\operatorname{supp} A = \{z : |z| < 1\}$ и разложение в ряд Тейлора при $z_0 = 0$ имеет вид $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} z^i$; ряд сходится при $|z| < 1$. Частичные суммы $S_n(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} z^i$ при $z \ne 1$ представимы в виде $S_n(x) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1-z}$. Так как $\mu_A(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$ и $f'(z) \ne 0$ для $z \in \operatorname{supp} A$ (и даже для $z \in \mathbb{C}$), теорема 4 гарантирует сходимость $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_{S_n(A)}(z) = \mu_{\frac{1}{1-A}}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Следует отметить, что $(0; 0{,}5] \subset \operatorname{supp} S_n(A)$ по крайней мере для всех $n = 2k+1$ ($k \ge 0$), хотя $\operatorname{supp} f(A) = \{z : \operatorname{Re} z > 0{,}5\}$. В таблице приведен ряд значений $\mu_{S_n}(0{,}5)$, демонстрирующий сходимость $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_{S_n(A)}(0{,}5) = 0$.

Значения $\mu_{S_n}(0{,}5)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu_{S_n}(0{,}5)$	0,50	0,00	0,35	0,00	0,28	0,00	0,24	0,00	0,20	0,00	0,18	0,00	0,16	0,00	0,15	0,00	0,14	0,00	0,13	0,00

ВЫВОДЫ

1. Для функциональной комплекснозначной последовательности $f_n(z)$, сходящейся к $f(z)$, и нечеткого комплексного аргумента A представлены достаточные условия сходимости функций $\mu_{f_n(A)}(z)$ во всех точках, кроме образов точек разрыва $\mu_A(z)$ и нулей $f'(z)$. Принципиальным

является условие конечности количества решений уравнения $f(z)=w$ относительно z для всех $w \in \mathbb{C}$ в любом круге $\{z : |z - z_0| \subset \operatorname{supp} A$.

2. Для аналитической функции $f(z)$ представлены достаточные условия сходимости функций $\mu_{S_n(A)}(z)$, где $S_n(z)$ — частичные суммы ряда Тейлора для $f(z)$. При этом для любой нетривиальной аналитической $f(z)$ уравнение $f(z)=w$ относительно z для всех $w \in \mathbb{C}$ в любом круге $\{z : |z - z_0| \subset \operatorname{supp} A$ всегда имеет лишь конечное количество решений.

3. Темой дальнейшего исследования предполагается возможность восстановления $\mu_{f(A)}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ с использованиям полунепрерывности $\mu_{f(A)}(z)$ сверху.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
2. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др., под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 312 с.
3. *Passino Kevin M.* Fuzzy Control / Kevin M. Passino, Stephen Yurkovich. — Addison Wesley Longman, Menlo Park, CA, 1998. — 522 p.
4. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А.Заде. — М.: Мир, 1976. — 176 с.
5. *Mizumoto M.* Algebraic Properties of Fuzzy Numbers / M. Mizumoto, K. Tanaka // Proceedings of IEEE International Conference on Cybernetics and Society. — 1976. — P. 559–563.
6. *Delgado M.* Fuzzy Numbers, Definitions and Properties / M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila // Mathware & Soft Computing 1. — 1994. — N 1 (1). — P. 31–43.
7. *Dubois D.* Fuzzy Real Algebra: Some Results / D. Dubois, H. Prade // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — N 4 (2). — P. 327–348.
8. *Buckley J.J.* Fuzzy Complex Numbers / J.J. Buckley // Fuzzy Sets and Systems. — 1989. — N 33. — P. 333–345.
9. *Dong Qiu*. Notes on fuzzy complex analysis / Dong Qiu, LanShu, Zhi-WenMo // Fuzzy Sets and Systems. — 2009. — N 160. — P. 1578–1589.
10. *Inaida J.* Taylor Series on the Fuzzy Number Space / J. Inaida // Special Issue on Biometrics And Its Applications. — 2010. — N 16 (1). — P. 15–25.
11. 1. *Спекторский И.Я.* Последовательности функций и ряды Тейлора с нечетким аргументом / И.Я. Спекторский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 2. — С. 125–140.
12. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — 3 изд. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
13. *Кадец В.М.* Курс функционального анализа / В.М. Кадец. — Х.: Харьк. нац. ун-т им. В.Н. Каразина, 2006. — 607 с.
14. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ / Б.В.Шабат. — М.: Наука, 1985. — Ч. 1. — 336 с.
15. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. — М.: Наука, 1978. — 416 с.

Поступила 03.02.2016