МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 519.85
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.12

НЕКОТОРЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю.А. ЗАК

Рассмотрены детерминированные эквиваленты различных постановок задач линейного программирования, в которых коэффициенты функции цели, ограничений и граничные значения переменных задачи и правых частей неравенств представлены нечеткими множествами. Предложены методы сравнения и определения предпочтения нечетких множеств. Решение задачи при поиске вектора переменных в виде вектора действительных чисел сводится к решению однокритериальной или многокритериальной задачи с существенно большим количеством ограничений. При решении задачи в виде вектора Fuzzy-множеств детерминировано эквивалент задачи — последовательность задач линейного программирования. Сформулированные задачи могут быть решены симплексным методом.

ВВЕДЕНИЕ

В литературе рассматривались различные постановки и математические модели задач нечеткого линейного программирования, когда коэффициенты функций цели, ограничений и граничные значения являются не действительными числами, а некоторыми нечеткими множествами (см., например, [1–9]), выбор среди множества альтернатив [16], а также анализ различных приложений [10] и алгоритмов решения этих задач [1, 2, 3, 8, 11]. Решение задачи можно искать в виде как вектора действительных, целочисленных, булевых переменных, так и нечетких множеств, функции принадлежности которых определены с точностью до неизвестных параметров. В зависимости от интерпретации условий выполнения ограничений, правые части которых представлены в виде Fuzzy-множеств, и принятых правил предпочтения в этих условиях одного из значений критериев оптимальности перед другими могут быть предложены и рассматривались в литературе различного вида детерминированные эквиваленты сформулированных задач нечеткого линейного программирования.

В отличие от известных публикаций в данной работе строится детерминированный эквивалент сформулированной задачи в общем виде: в условиях, когда коэффициенты функции цели и ограничений задачи — нечеткие множества, наличия двухсторонних ограничений на переменные задачи, представленных в виде нечетких множеств. Решение задачи ищется в виде как вектора детерминированных переменных, так и вектора нечетких множеств с функциями принадлежности, определенными с точностью до неизвестных параметров (в виде некоторого подмножества значений крайних точек их функций принадлежности). Показано, что для функций принадлежности нечетких множеств треугольного или трапециевидного вида и выбранного математического аппарата сравнения, ранжирования и проверки выполнения нечетких ограничений (сравнения различных сечений и дискретных α-уровней Fuzzy-множеств) исходная задача сводится к решению ряда детерминированных задач линейного программирования. В результате предложенных преобразований количество ограничений увеличивается как минимум в два раза, но полученную задачу уже можно решить симплексным методом. Обсуждаются методы решения сформулированных многокритериальных задач. В случае использования в качестве критерия оптимальности экстремального значения координаты абсцисс центра тяжести, полученного в результате решения задачи нечеткого множества, сформулированная задача может быть решена методами нелинейного программирования. Для задач нечеткого булевого программирования могут быть предложены эффективные детерминированные эквиваленты и более эффективные алгоритмы решения [11, 13].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Детерминированная задача линейного программирования может быть сформулирована, например, в виде:

$$f(X^{\bullet}) = \max_{X \in G} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, , \qquad (1)$$

$$G = \left\{ X \mid \varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,\ i = 1,...,m;\ \ h_j^1 \le x_j \le h_j^2 ,\ j = 1,...,n \right\}, \qquad (2)$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ — вектор действительных чисел, на каждую компоненту которого в общем случае накладываются двухсторонние ограничения вида $h_{1j} \le x_j \le h_{2j}$, $j = 1,...,n$, а c_j, a_{ij}, $j = 1,...,n$, $i = 1,...,m$, — соответственно коэффициенты линейных функций цели и ограничений.

В частных случаях на все или отдельные компоненты вектора оптимизируемых параметров X могут накладываться ограничения целочисленности, или требования принимать только булевы значения.

В условиях размытых данных, т.е. нечеткой постановки задачи, коэффициенты и параметры функции цели $f(X)$, функций ограничений $\varphi_i(X)$, $i = 1,...,m$, а также граничные значения h_j^1 и h_j^2, $j = 1,...,n$, могут быть представлены не детерминированными величинами, а нечёткими множествами. Кроме того, вектор оптимизируемых параметров X в соответствии с условиями задачи может быть также представлен в виде некоторого нечёткого множества, определенного с точностью до неизвестных детерминированных параметров.

Формы нечеткого описания исходной информации могут быть различными. Ниже приводятся наиболее часто встречающиеся в литературе постановки и математические формулировки таких задач в условиях размытых данных. Автору не известны рассматриваемые в литературе задачи Fuzzy-линейного программирования с двухсторонними ограничениями на переменные.

Задача 1. В задаче (1), (2) параметры функции цели и ограничений, а также допустимые граничные значения вектора переменных задачи — нечеткие множества с заданными функциями принадлежности. Решение задачи ищется в виде вектора действительных чисел.

Частным случаем рассматриваемой задачи является задача нечёткого линейного (Fuzzy-линейного) программирования в виде

$$\bar{C}_1 x_1 \oplus \bar{C}_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \bar{C}_j x_j \oplus \ldots \oplus \bar{C}_n x_n \to \max, \qquad (3)$$

$$\overline{\Psi}_i = \overline{A}_{i1} x_1 \oplus \overline{A}_{i2} x_2 \oplus \ldots \oplus \overline{A}_{ij} x_j \oplus \ldots \oplus \overline{A}_{in} x_n \leq_{\mathrm{Re}} \overline{B}_i, \ i = 1,\ldots,m, \qquad (4)$$

$$\overline{H}_j^1 \leq_{\mathrm{Re}} x_j \leq_{\mathrm{Re}} \overline{H}_j^2, \ \ j = 1,\ldots,n. \qquad (5)$$

Здесь $\overline{C}_j$, $\overline{H}_j^1, \overline{H}_j^2$, $j = 1,\ldots,n$; $\overline{B}_i$, $i = 1,\ldots,m$; $\overline{A}_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, — нечёткие множества с заданными функциями принадлежности; $\overline{C}_j x_j$ и $\overline{A}_{ij} x_j$ — операции умножения нечётких множеств на действительное число, результатом выполнения которых является также нечёткое множество; $\overline{C}_j x_j \oplus \overline{C}_p x_p$ — операции сложения двух нечётких множеств, результатом которой также является нечёткое множество.

Обобщением задачи (3)–(5) является многокритериальная задача нечёткого линейного программирования, в которой не один, а несколько критериев оптимальности

$$\overline{F}_p = \overline{C}_{p1} x_1 \oplus \overline{C}_{p2} x_2 \oplus \ldots \oplus \overline{C}_{pj} x_j \oplus \ldots \oplus \overline{C}_{pn} x_n \to \max, \ \ p = 1,\ldots,P. \qquad (6)$$

Рассмотрим задачу нечёткого линейного программирования вида (3)–(5) в условиях, когда $X \in \widetilde{H}$ — вектор детерминированных переменных, на которые наложены двухсторонние ограничения:

$$\widetilde{H} = \{X \in \Re^n \mid h_j^1 \leq x_j \leq h_j^2, j = 1,\ldots,n\}. \qquad (7)$$

Здесь $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_j, \ldots, \overline{C}_n$ — Fuzzy-числа (нечёткие множества), представленные LR-интервалами $\{a_1(c_j), m_1(c_j), m_2(c_j), a_2(c_j)\}_{LR}$, $j = 1,\ldots,n$; $\overline{A}_{ij}$ — также нечёткие множества, представленные LR-интервалами вида

$$\{a_1(a\overline{A}_{ij}), m_1(\overline{A}_{ij}), m_2(\overline{A}_{ij}), a_2(\overline{A}_{ij})\}_{LR}, \ i = 1,\ldots,m, \ \ j = 1,\ldots,n;$$

$\overline{B}_i$ — нечёткие множества, представленные LR-интервалами вида

$$\{a_1(\overline{B}_i), m_1(\overline{B}_i), m_2(\overline{B}_i), a_2(\overline{B}_i)\}_{LR}, \ i = 1,\ldots,m.$$

Определенный интерес представляет постановка задачи (задача 2), в которой a_{ij} и c_j, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, — действительные числа, а граничные значения $\overline{B}_i$, $i = 1,\ldots,m$, а также $\overline{H}_j^1$ и $\overline{H}_j^2$, $j = 1,\ldots,n$, и вектор переменных задачи $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_j, \ldots, \overline{X}_n)$ — нечеткие множества.

Задача 2.

$$c_1 \overline{X}_1 \oplus c_2 \overline{X}_2 \oplus \ldots \oplus c_j \overline{X}_j \oplus \ldots \oplus c_n \overline{X}_n \to \max, \qquad (8)$$

$$\overline{\Psi}_i = a_{i1} \overline{X}_1 \oplus a_{i2} \overline{X}_2 \oplus \ldots \oplus a_{ij} \overline{X}_j \oplus \ldots \oplus a_{in} \overline{X}_n \leq_{\mathrm{Re}} \overline{B}_i, \ i = 1,\ldots,m; \qquad (9)$$

$$\vec{H}_j^1 \le_{\mathrm{Re}} \overline{X}_j \le_{\mathrm{Re}} \vec{H}_j^2,\ j = 1,...,n.$$

Функции принадлежности таких нечётких множеств $\overline{A}$, представленных трапециевидными LR-интервалами, вычисляются по формулам, приведенным, например, в работе [9].

Условия $\overline{\le}_{\mathrm{Re}}$ или $\overline{\ge}_{\mathrm{Re}}$ определяют условия доминирования (предпочтения) двух нечётких множеств соответственно в сторону уменьшения или увеличения их значений. Знаком $\oplus$ определяется алгебраическая сумма двух нечётких множеств.

В результате выполнения соответствующих операторов Fuzzy-арифметики для выражений (8) рассчитываются параметры нечётких множеств, представленных LR-интервалами $\{M_1^0, M_2^0, D_1^0, D_2^0\}_{LR}$ — для целевой функции и $\{M_1^i, M_2^i, D_1^i, D_2^i\}_{LR}$, $i = 1,...,m$, — для левых частей функций ограничений.

Если решение задачи ищется в виде детерминированного вектора булевых переменных $x_j = 0 \vee 1$, $j = 1,...,n$, то результаты выполнения соответствующих операторов Fuzzy-арифметики в данном случае могут быть записаны в виде

$$[\overline{A}x_j \oplus \overline{B}x_p]_{LR} = \left\{ \begin{matrix} [m_1(\overline{A})x_j \pm m_1(\overline{B})x_p]; & [m_2(\overline{A})x_j \pm m_2(\overline{B})x_p]; \\ [a_1(\overline{A})x_{j_j} \pm a_1(\overline{B})x_p]; & [a_2(\overline{A})x_j \pm a_2(\overline{B})x_p], \end{matrix} \right\}_{LR} \quad (10)$$

где $\overline{A} = \overline{C}_j$ или $\overline{A} = \overline{A}_j$, а $\overline{B} = \overline{C}_p$ или $\overline{B} = \overline{A}_p$.

В выражении (10) знак «+» справедлив, если $x_p = 1$ и коэффициент $\overline{T}_p$ — число положительное, и знак «–» — если $x_p = 1$ и $\overline{T}_p$ — отрицательное число.

ПРАВИЛА СРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЙ И ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Правила доминирования для нечётких множеств, представленных LR Fuzzy-интервалами, основанные на сравнении их сечений, рассматривались в работах многих авторов (см., например, [5, 12]). Ниже эти методы доведены до конкретных формульных выражений, а также приведены алгоритмы сравнения и предпочтения нечетких множеств на основе анализа крайних точек их функций принадлежности.

Рассмотрим два нечетких множества

$$\overline{\Psi}_i = \{a_1(\overline{\Psi}_i), m_1(\overline{\Psi}_i), m_2(\overline{\Psi}_i), a_2(\overline{\Psi}_i)\}_{LR}$$

и

$$\overline{\Psi}_j = \{a_1(\overline{\Psi}_j), m_1(\overline{\Psi}_j), m_2(\overline{\Psi}_j), a_2(\overline{\Psi}_j)\}_{LR}$$

или $\overline{\Psi}_i = \{a_1(\overline{\Psi}_i),\ m(\overline{\Psi}_i), a_2(\overline{\Psi}_i)\}_{LR}$ и $\overline{\Psi}_j = \{a_1(\overline{\Psi}_j),\ m(\overline{\Psi}_j), a_2(\overline{\Psi}_j)\}_{LR}$.

Правила абсолютного предпочтения. Если для двух Fuzzy-множеств $\overline{\Psi}_i$ и $\overline{\Psi}_j$ справедливы неравенства $a_2(\overline{\Psi}_i) \le a_1(\overline{\Psi}_j)$, то Fuzzy-множество $\overline{\Psi}_i$

имеет абсолютное предпочтение перед Fuzzy-множеством $\overline{\Psi}_j$ в смысле $\overline{\Psi}_i <_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$. При выполнении неравенство $a_1(\overline{\Psi}_i) \ge a_2(\overline{\Psi}_j)$ Fuzzy-множество $\overline{\Psi}_i$ имеет абсолютное предпочтение перед Fuzzy-множеством $\overline{\Psi}_j$ в смысле $\overline{\Psi}_i >_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

Правила относительного предпочтения. Если для двух Fuzzy-множеств $\overline{\Psi}_i$ и $\overline{\Psi}_j$ справедлива система неравенств

$$a_1(\overline{\Psi}_i) \le a_1(\overline{\Psi}_j),\ m_1(\overline{\Psi}_i) \le m_1(\overline{\Psi}_j),\ m_2(\overline{\Psi}_i) \le m_2(\overline{\Psi}_j) \text{ или } m(\overline{\Psi}_i) \le m(\overline{\Psi}_j),$$
$$a_2(\overline{\Psi}_i) \le a_2(\overline{\Psi}_j)$$

и хотя бы одно из этих неравенств является строгим, то Fuzzy-множество $\overline{\Psi}_i$ имеет относительное предпочтение перед Fuzzy-множеством $\overline{\Psi}_j$ в смысле $\overline{\Psi}_i \lesseqgtr_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

Если для двух Fuzzy-множеств $\overline{\Psi}_i$ и $\overline{\Psi}_j$ справедлива система неравенств

$$a_1(\overline{\Psi}_i) \ge a_1(\overline{\Psi}_j),\ m_1(\overline{\Psi}_i) \ge m_1(\overline{\Psi}_j),\ m_2(\overline{\Psi}_i) \ge m_2(\overline{\Psi}_j) \text{ или } m(\overline{\Psi}_i) \ge m(\overline{\Psi}_j),$$
$$a_2(\overline{\Psi}_i) \ge a_2(\overline{\Psi}_j)$$

и хотя бы одно из этих неравенств является строгим, то Fuzzy-множество $\overline{\Psi}_i$ имеет относительное предпочтение перед Fuzzy-множеством $\overline{\Psi}_j$ в смысле $\overline{\Psi}_i \gtreqless_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

Более сильное правило относительного предпочтения может быть построено на основании системы неравенств относительно крайних точек соответствующих α_p сечений, т.е.системы неравенств относительно значений $L_1^{\alpha}(\overline{\Psi}_i)$, $L_2^{\alpha}(\overline{\Psi}_i)$ и $L_1^{\alpha}(\overline{\Psi}_j)$, $L_2^{\alpha}(\overline{\Psi}_j)$, $\alpha = \alpha_0 = 0,\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_P,\ \alpha_P = 1$. Иллюстрация выбора крайних точек для случая 5 сечений функции принадлежности трапециевидного и треугольного типа приведены на рис. 1, 2.

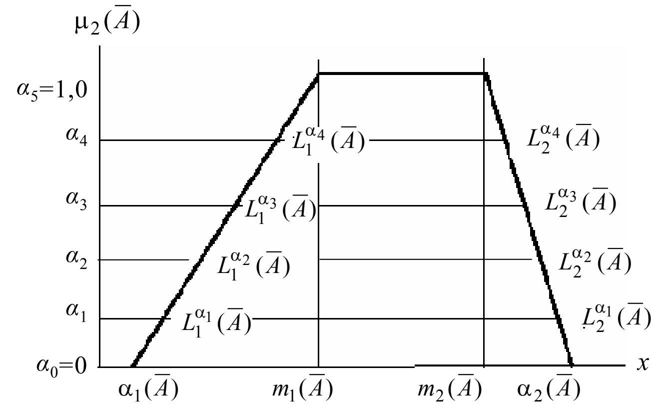

Рис. 1. Сечения функции принадлежности трапециевидного типа

Для функций принадлежности трапециевидного вида значения $L_1^{\alpha}(\overline{\Psi}_i)$, $L_2^{\alpha}(\overline{\Psi}_i)$ вычисляются по формулам

$$L_1^\alpha(\overline{\Psi}_i) = m_1(\overline{\Psi}_i) - [m_1(\overline{\Psi}_i) - a_1(\overline{\Psi}_i)](1-\alpha),$$
$$L_2^\alpha(\overline{\Psi}_i) = m_2(\overline{\Psi}_i) + [a_2(\overline{\Psi}_i) - m_2(\overline{\Psi}_i)](1-\alpha),$$

а для функций принадлежности треугольного вида:

$$L_1^\alpha(\overline{\Psi}_i) = m(\overline{\Psi}_i) - [m(\overline{\Psi}_i) - a_1(\overline{\Psi}_i)](1-\alpha),$$
$$L_2^\alpha(\overline{\Psi}_i) = m(\overline{\Psi}_i) + [a_2(\overline{\Psi}_i) - m(\overline{\Psi}_i)](1-\alpha).$$

Если справедлива система неравенств

$$L_1^\alpha(\overline{\Psi}_i) \le L_1^\alpha(\overline{\Psi}_j),\ L_2^\alpha(\overline{\Psi}_i) \le L_2^\alpha(\overline{\Psi}_j),\ \alpha = \alpha_0 = 0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_P, \alpha_P = 1,$$

то Fuzzy-множество $\overline{\Psi}_i$ имеет относительное предпочтение перед Fuzzy-множеством $\overline{\Psi}_j$ в смысле $\overline{\Psi}_i \lesseqgtr_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

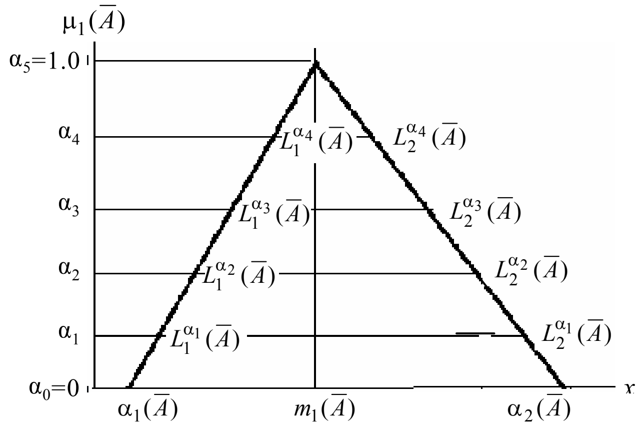

Рис. 2. Сечения функции принадлежности треугольного типа

Если справедлива система неравенств

$$L_1^\alpha(\overline{\Psi}_i) \ge L_1^\alpha(\overline{\Psi}_j),\ L_2^\alpha(\overline{\Psi}_i) \ge L_2^\alpha(\overline{\Psi}_j),\ \alpha = \alpha_0 = 0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_P, \alpha_P = 1, \quad (11)$$

то Fuzzy-множество $\overline{\Psi}_i$ имеет относительное предпочтение перед Fuzzy-множеством $\overline{\Psi}_j$ в смысле $\overline{\Psi}_i \gtreqless_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

От выбора значений α_p, $p = 1, 2, ..., (P-1)$ и количества сечений P во многом зависит результат решения задач сравнения и ранжирования. Экспертами могут быть предложены различные варианты такого выбора.

Вычислим значение некоторой функции свертки крайних точек сечений нечетких множеств

$$f(\overline{\Psi}_i) = \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{2} \beta_p [L_1^{\alpha_p}(\overline{\Psi}_i) + L_2^{\alpha_p}(\overline{\Psi}_i)],$$

где $0 < \beta_p < 1$, $p = 0, 1, 2, ..., P$ — некоторые весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{p=1}^{P} \beta_p = 1$.

Выбор значений этих коэффициентов осуществляется экспертом или лицом, принимающем решение. Так, например, могут быть выбраны следующие значения: $\beta_0 = 0{,}075$, $\beta_1 = 0{,}125$, $\beta_2 = 0{,}2$, $\beta_2 = 0{,}25$, $\beta_4 = 0{,}35$.

Другое более слабое правило относительного предпочтения может быть сформулировано следующим образом.

В случае $f(\overline{\Psi}_i) < f(\overline{\Psi}_j)$ справедливо утверждение $\overline{\Psi}_i \lesssim_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

В случае $f(\overline{\Psi}_i) > f(\overline{\Psi}_j)$ справедливо утверждение $\overline{\Psi}_i \gtrsim_{\mathrm{Re}} \overline{\Psi}_j$.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ЗАДАЧ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Различные схемы решения задачи нечеткого линейного программирования изображены на рис. 3. Пусть задан некоторый детерминированный вектор переменных $X \in \widetilde{H}$, $X = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений на переменные (7). На основе принципа расширения и, пользуясь операторами Fuzzy-арифметики, можно построить нечёткое множество $\overline{\Psi}_i$ левой части i-го неравенства системы ограничений (4) или (9), функция принадлежности которого также может быть представлена с помощью LR-Fuzzy-интервала трапециевидной формы — $\{a_1(\overline{\Psi}_i), m_1(\overline{\Psi}_i), m_2(\overline{\Psi}_i), a_2(\overline{\Psi}_i)\}_{LR}$ или треугольной формы — $\{a_1(\overline{\Psi}_i),\ m(\overline{\Psi}_i), a_2(\overline{\Psi}_i)\}_{LR}$.

Обозначим $L_1^{\alpha}(\overline{A})$, $L_2^{\alpha}(\overline{A})$ — крайние точки α-сечений нечёткого множества $\overline{A}$, где $0 < \alpha < 1$. В качестве множества $\overline{A}$ могут рассматриваться нечеткие множества $\overline{C}_j$, $\overline{H}_{1j}$, $\overline{H}_{2j}$, $\overline{A}_{ij}$, $j = 1,...,n$, а также $\overline{\Psi}_i, \overline{B}_i$, $i = 1,...,m$.

Утверждение.

а) Если для двух нечётких множеств $\overline{\Psi}_i$ и $\overline{B}_i$ выполняется неравенство

$$a_2(\overline{\Psi}_i) \le a_1(\overline{B}_i),$$

то для детерминированного вектора $X \in \widetilde{H}$ справедливо выражение $\overline{\Psi}_i <_{\mathrm{Re}} \overline{B}_i$, т.е. условие абсолютного предпочтения.

б) В случае, если выполняется одна из системы неравенств

$$a_1(\overline{\Psi}_i) \le a_1(\overline{B}_i),\quad m_1(\overline{\Psi}_i) \le m_1(\overline{B}_i),\quad m_2(\overline{\Psi}_i) \le m_2(\overline{B}_i),\quad a_2(\overline{\Psi}_i) \le a_2(\overline{B}_i);$$

$$L_1^{\alpha}(\overline{\Psi}_i) \le L_1^{\alpha}(\overline{B}_i),\quad L_2^{\alpha}(\overline{\Psi}_i) \le L_2^{\alpha}(\overline{B}_i),\quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_P,$$

то детерминированный вектор переменных $X \in \widetilde{H}$ обеспечивает выполнение Fuzzy-отношений $\overline{\Psi}_i \lesssim_{\mathrm{Re}} \overline{B}_i$, т.е. условия относительного предпочтения.

Следовательно, как в одном, так и во втором случае обеспечивается выполнение i-го ограничения из системы ограничений (7) или (9).

Если условия приведенного утверждения выполняются для каждого из ограничений ($i = 1,...,m$) системы (7) или (9), то детерминированный вектор $X \in \widetilde{H}$ удовлетворяет всей системе ограничений задачи.

При поиске решения задачи в виде некоторого вектора переменных в форме Fuzzy-множеств $\overline{X} = (\overline{X}_j)$, $j = 1,...,n$, (правая ветвь схемы решения показана на рис. 3) в качестве детерминированного эквивалента задачи нечеткого линейного программирования может рассматриваться последовательность решения следующих $2(P+2)$ задач детерминированного линейного программирования для каждого из значений $\alpha=\alpha_0=0$, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_P,\alpha_{(P+1)}=1$ и значений $s=1,2$.

Рис. 3. Общая схема методов построения алгоритмов нечёткого математического программирования

Задача 3.

$$F_s^\alpha=\sum_{j=1}^{n}L_s^\alpha(\overline{C}_j)x_j\to\max\,, \tag{12}$$

в условиях ограничений

$$\varphi_{is}^\alpha=\sum_{j=1}^{n}L_s^\alpha(\overline{A}_{ij})x_j\le L_s^\alpha(\overline{B}_i)\,,\ i=1,...,m\,, \tag{13}$$

$$L_1^\alpha(\overline{H}_{1j})\le x_j\le L_2^\alpha(\overline{H}_{2j})\,,\ j=1,...,n\,. \tag{14}$$

Здесь, если $\alpha=\alpha_0=0$, то $L_1^\alpha(\overline{A})=a_1(\overline{A})$, $L_2^\alpha(\overline{A})=a_2(\overline{A})$, а если $\alpha=\alpha_{(P+1)}=1$, то $L_1^\alpha(\overline{A})=m_1(\overline{A})$, $L_2^\alpha(\overline{A})=m_2(\overline{A})$ для функций принадлежности трапециевидного типа и $L_1^\alpha(\overline{A})=L_2^\alpha(\overline{A})=m(\overline{A})$ для функций принадлежности треугольного типа.

В результате решения каждой из детерминированных задач (12)–(14) будет получен детерминированный вектор значения переменных задачи

$X_s^{\alpha} = (x_{1s}^{\alpha}, x_{2s}^{\alpha}, ..., x_{js}^{\alpha}, ..., x_{ns}^{\alpha})$, представляющий собой граничные точки соответствующих α-сечений нечёткого множества $\overline{X}^{\bullet}$ решения сформулированной задачи. На основании полученных детерминированных значений этих векторов соединением этих точек отрезками прямых линий строится функция принадлежности нечеткого множества каждой переменной вектора решений задачи, которая может быть отличной от трапециевидного или треугольного вида.

При построении приближенного детерминированного эквивалента исходной задачи (3), (5) в виде задачи (4) может быть получено решение ее в виде детерминированного вектора оптимизируемых переменных при существенно меньшем объёме вычислений.

Если обозначить

$$M(\overline{A}) = \sum_{p=0}^{P+1} w^{\alpha}\, 0{,}5[L_1^{\alpha}(\overline{A}) + L_2^{\alpha}(\overline{A})],$$

где $0 \le w^{\alpha} \le 1$, $\widetilde{\mathrm{A}} = \{\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_P, \alpha_{(P+1)}\}$ — весовые коэффициенты, $\sum_{p=0}^{P+1} w^{\alpha} = 1$, то могут быть сформулированы задачи 4 и 5.

Задача 4.

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} M(\overline{C}_j) x_j \to \max, \tag{15}$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} M(\overline{A}_{ij}) x_j \le M(\overline{B}_i), \; i = 1, ..., m, \tag{16}$$

$$M(\overline{H}_{1j}) \le x_j \le M(\overline{H}_{2j}), \; j = 1, ..., n. \tag{17}$$

Задача 5. Найти максимальное значение функции (15) в условиях таких ограничений:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} L_1^{\mu}(\overline{A}_{ij}) x_j \le L_1^{\mu}(\overline{B}_i), \; \phi_i = \sum_{j=1}^{n} L_2^{\rho}(\overline{A}_{ij}) x_j \le L_2^{\rho}(\overline{B}_i), \; i = 1, ..., m, \tag{18}$$

$$x_j \le L_1^{\omega}(\overline{H}_{2j}), \; x_j \le L_2^{\eta}(\overline{H}_{2j}), \; j = 1, ..., n. \tag{19}$$

При этом в выражении (18) в качестве α_{μ} и α_{ρ} выбираются некоторые подмножества сечений $\alpha_{\mu} \in \widetilde{\mathrm{A}}_1$, $\widetilde{\mathrm{A}}_1 \subseteq \widetilde{\mathrm{A}}$; $\alpha_{\rho} \in \widetilde{\mathrm{A}}_2$, $\widetilde{\mathrm{A}}_2 \subseteq \widetilde{\mathrm{A}}$, как и в выражении (19) — $\alpha_{\omega} \in \widetilde{\mathrm{A}}_3$, $\widetilde{\mathrm{A}}_3 \subseteq \widetilde{\mathrm{A}}$; $\alpha_{\eta} \in \widetilde{\mathrm{A}}_4$, $\widetilde{\mathrm{A}}_4 \subseteq \widetilde{\mathrm{A}}$.

Отметим, что как задачи 4 и 5, так и каждая из задач 3 могут быть решены симплексным методом линейного программирования.

Частные случаи. Рассмотрим случаи, когда в задаче (3), (4) нечеткие множества $\overline{C}_1, \overline{C}_2, ..., \overline{C}_j, ..., \overline{C}_n$, $\overline{A}_{ij}$, $j = 1, ..., n$, и $\overline{B}_i$, $i = 1, ..., m$, представлены треугольными и трапециевидными функциями принадлежности, крайние и центральные значения которых равны a_1, a_2 и $m(a)$ (или m_1 и m_2), где $\mu_{\overline{A}}(a_1) = \mu_{\overline{A}}(a_2) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(m) = \mu_{\overline{A}}(m_1) = \mu_{\overline{A}}(m_2) = 1$. Ограничения (5) отсутствуют.

Ограничения (4) и (9) могут рассматриваться как условия строгого предпочтения для всех рассматриваемых α-сечений Fuzzy-множеств $\overline{\Psi}_i$ и $\overline{B}_i$ и как условия относительного предпочтения. Обозначим соответственно $a_1(\overline{\Psi}_i)$, $a_2(\overline{\Psi}_i)$, $m(\overline{\Psi}_i)$ и $a_1(\overline{B}_i)$, $a_2(\overline{B}_i)$, $m(\overline{B}_i)$ (для трапециевидных функций принадлежности вместо значений $m(\overline{\Psi}_i)$ и $m(\overline{B}_i)$ рассматриваются пары значений $m_1(\overline{\Psi}_i), m_2(\overline{\Psi}_i)$ и $m_1(\overline{B}_i), m_2(\overline{B}_i)$) — соответственно крайние и центральные значения α-сечений Fuzzy-множеств $\overline{\Psi}_i$ и $\overline{B}_i$. Тогда условия строгого выполнения неравенств (4) и (9) для каждого из α-сечений могут быть записаны соответственно в виде, аналогичном (11)

$$a_2(\vec{\Psi}_i) \le a_1(\overline{B}_i)\,, \quad i = 1,\ldots,m\,. \tag{20}$$

Условия относительного предпочтения системы нечётких неравенств (4) и (9) могут быть представлены соответственно в виде

$$a_1(\overline{\Psi}_i) \le a_1(\overline{B}_i)\,,\ a_2(\vec{\Psi}_i) \le a_2(\overline{B}_i)\,,\quad i = 1,\ldots,m\,,$$

$$m(\overline{\Psi}_i) \le m(\overline{B}_i)\,, \text{ или } \ m_1(\overline{\Psi}_i) \le m_1(\overline{B}_i) \text{ и } m_2(\overline{\Psi}_i) \le m_2(\overline{B}_i)\,,\ i = 1,\ldots,m\,. \tag{21}$$

При этом желательно, чтобы одно из неравенств системы (20) и (21) для пары индексов i и α выполнялось в строгом виде.

Для безусловного выполнения системы нечетких неравенств (20) можно потребовать выполнение следующей системы линейных неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_{ij} \le a_1^{\alpha}(\overline{B}_i)\,,\ i = 1,\ldots,m\,. \tag{22}$$

Здесь β_{ij}^{α} — коэффициенты линейных неравенств, $a_1^{\alpha}(\overline{B}_i)$ и $a_2^{\alpha}(\overline{B}_i)$ — соответственно значения левых и правых точек соответствующих α сечений функций принадлежности i-го ограничения.

Так как всегда для положительных и отрицательных значений параметров справедливы неравенства

$$a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij}) \le a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij}) \quad \text{и} \quad a_1^{\alpha}(\overline{B}_i) \le a_2^{\alpha}(\overline{B}_i)\,,$$

где $a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})$ и $a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})$ — значения левых и правых точек соответствующих α-сечений функций принадлежности нечеткого множества коэффициента $\overline{A}_{ij}$, то значения этих коэффициентов соответственно равны: $\beta_{ij}^{\alpha} = a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})$, если знак перед членом $\overline{A}_{ij} x_j$ в выражении (4) положительный, $\beta_{ij}^{\alpha} = a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})$, если знак перед членом $\overline{A}_{ij} \cdot x_j$ в выражении (4) отрицательный.

Условия относительного предпочтения при выполнении системы Fuzzy-логических неравенств представлены в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij}) x_j \le a_1^{\alpha}(\overline{B}_i)\,,\ \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij}) x_j \le a_2^{\alpha}(\overline{B}_i)\,,\ i = 1,\ldots,m_1\,;$$

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_P, \alpha_{(P+1)}\,, \tag{23}$$

и для треугольных и трапециевидных функций принадлежности имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} m(\overline{A}_{ij})x_j \le m(\overline{B}_i), \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})x_j \le m_1(\overline{B}_i), \ \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})x_j \le m_2(\overline{B}_i). \tag{25}$$

Отметим справедливость следующих выражений:

$$a_1^{\alpha}(\overline{\Psi}_i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j, \\ \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j > \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j; \end{cases}$$

$$a_2^{\alpha}(\overline{\Psi}_i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})\cdot x_j > \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j, \\ \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} a_1^{\alpha}(\overline{A}_{ij})\cdot x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_2^{\alpha}(\overline{A}_{ij})x_j; \end{cases}$$

$$m_1(\overline{\Psi}_i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})x_j \le \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})x_j, \\ \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})x_j > \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})_j; \end{cases}$$

$$m_2(\overline{\Psi}_i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})x_j \le \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})x_j, \\ \sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})\cdot x_j, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} m_1(\overline{A}_{ij})x_j > \sum_{j=1}^{n} m_2(\overline{A}_{ij})x_j. \end{cases}$$

При задании граничных значений на переменные в форме Fuzzy-множеств (5) ограничения на переменные задачи могут быть записаны в виде

$$x_j \ge a_2^{\alpha}(\overline{H}_j^1), \ \alpha \in \widetilde{A}_1; \ \ x_j \le a_1^{\alpha}(\overline{H}_j^2), \ \alpha \in \widetilde{A}_2, \ j = 1,\dots,n, \tag{26}$$

где $\widetilde{A}_1 \subseteq \widetilde{A}$, $\widetilde{A}_2 \subseteq \widetilde{A}$ — некоторые подмножества всех сечений соответственно Fuzzy-множеств $\overline{H}_j^1$ и $\overline{H}_j^2$.

Так, например, в условиях безусловного выполнения ограничений на значения переменных

$$a_2(\overline{H}_j^1) \le x_j \le a_1(\overline{H}_j^2), \ j = 1,\dots,n. \tag{27}$$

Более слабые условия выполнения ограничений представлены в форме

$$m(\overline{H}_j^1) \le x_j \le m(\overline{H}_j^2), \ j = 1,\dots,n; \text{ или } m_2(\overline{H}_j^1) \le x_j \le m_1(\overline{H}_j^2), \ j = 1,\dots,n; \tag{28}$$

$$a_1(\overline{H}_j^1) \le x_j \le a_2(\overline{H}_j^2), \ j = 1,\dots,n. \tag{29}$$

Целевая функция задачи представлена также в линейной форме

$$F=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{p}w^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}(\overline{C}_j)\right)x_j\to\max\,. \qquad (30)$$

Здесь w^{α} — вес, придаваемый значению целевой функции в определенном α-м сечении нечеткого множества коэффициентов целевой функции $\overline{C}_j$; значения $\lambda_j^{\alpha}(\overline{C}_j)$ для функций принадлежности треугольного и трапециевидного вида вычисляются соответственно по формулам:

$$\lambda_j^{\alpha}(\overline{C}_j)=m(\overline{C}_j)\alpha+\frac{1}{2}[a_1^{\alpha}(\overline{C}_j)+a_2^{\alpha}(\overline{C}_j)](1-\alpha)\,,$$

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_P,\alpha_{(P+1)}\,,\ j=1,...,n\,; \qquad (31)$$

$$\lambda_j^{\alpha}(\overline{C}_j)=\frac{1}{2}[m_1(\overline{C}_j)+m_2(\overline{C}_j)]\cdot\alpha+\frac{1}{2}[a_1^{\alpha}(\overline{C}_j)+a_2^{\alpha}(\overline{C}_j)](1-\alpha),$$

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_P,\alpha_{(P+1)}\,,\ j=1,...,n\,. \qquad (32)$$

Задачи (22) или (23), (24), или (24), (25) с целевой функцией (30), (31) или (32) являются задачами линейного программирования. При этом должны также учитываться ограничения на переменные задачи в одной из форм (26)–(27). Все эти задачи могут быть решены симплексным методом. Решение этой задачи — вектор действительных значений переменных.

Детерминированные эквиваленты многокритериальных задач нечеткого линейного программирования — многокритериальные задачи детерминированного линейного программирования с большим количеством ограничений и локальных критериев оптимальности. Методы решения этих задач (различные свертки критериев, лексикографическое упорядочение критериев и метод последовательных уступок) рассмотрены в монографии и статьях автора (см., например [13–15].

Нелинейные критерии оптимальности. Рассмотрим случаи, когда в качестве критерия оптимальности будет выбрана минимизация значения координаты абсцисс центра тяжести, полученного в результате решения задачи нечеткого множества функции цели,

$$M_x(\overline{F})=\frac{\int_{a_1}^{a_2}x(\overline{F})\mu_x[x(\overline{F})]dx(\overline{F})}{\int_{a_1}^{a_2}\mu_x[x(\overline{F})]dx(\overline{F})}\,.$$

В этом случае детерминированный эквивалент задачи будет представлен в виде задачи минимизации нелинейного критерия оптимальности в условиях линейной системы ограничений. Вид этого критерия оптимальности для функций принадлежности коэффициентов $\overline{C}_j$ и переменных $\overline{X}_j$, представленных в виде треугольников и трапеций, приведен соответственно в формулах:

$$M_x(\overline{F})=\frac{4[m(\overline{F})]^3+[a_1(\overline{F})]^3+[a_2(\overline{F})]^3}{3[a_2(\overline{F})-a_1(\overline{F})]}-\frac{-3[m(\overline{F})]^2[a_1(\overline{F})+a_2(\overline{F})]}{3[a_2(\overline{F})-a_1(\overline{F})]}; \qquad (33)$$

$$M_x(\overline{F}) = \frac{\overline{S}_2}{\overline{S}_1}, \tag{34}$$

где $$\overline{S}_2 = \frac{2[m_1(\overline{F})]^3 + [a_1(\overline{F})]^3 - 3a_1(\overline{F})[m_1(\overline{F})]^2}{6\left[\sum\limits_{j=1}^{n} m_1(\overline{F}) - a_1(\overline{F})\right]} + \frac{1}{2}[m_2(\overline{F}) - m_1(\overline{F})] +$$

$$+\frac{2[m_2(\overline{F})]^3 + [a_2(\overline{F})]^3 - 3a_2(\overline{F})\left[\sum\limits_{j=1}^{n} m_2(\overline{F})\right]^2}{6[a_2(\overline{F}) - m_2(\overline{F})]}; \tag{35}$$

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{2}[m_2(\overline{F}) - m_1(\overline{F}) + a_2(\overline{F}) - a_1(\overline{F})]. \tag{36}$$

В выражениях (33)–(36) Fuzzy-множество $\overline{F}$ определяется формулой (6).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В литературе описаны различные критерии и алгоритмы сравнения и ранжирования нечетких множеств. Для каждого из принятых за основу методов сравнения могут быть сформулированы детерминированные эквиваленты и методы решения задач Fuzzy-математического программирования. Выбор определенного вида критерия и метода сравнения зависит от специфики конкретной прикладной задачи, требований к жесткости выполнения ограничения, надежности получения желаемого результата, а также от предпочтений лица, принимающего решение, и экспертов. В данной работе выбраны для такого сравнения различные модификации сечений нечетких множеств и алгоритмы их реализации, а также координаты абсцисс центра тяжести нечетких множеств, на основе которых построены различные виды детерминированных эквивалентов задачи. В отличие от известных публикаций построение этих эквивалентов рассмотрено в самом общем виде: в условиях, когда коэффициенты функции цели и ограничений задачи — нечеткие множества, наличие двухсторонних ограничений на переменные задачи, представленных в виде нечетких множеств. Для функций принадлежности Fuzzy-множеств в виде треугольников и трапеций рассмотрены различные условия проверки выполнения системы ограничений и обеспечения оптимального значения функции цели, которые приведены в виде детерминированных функций от неизвестных параметров. В результате предложенных преобразований количество ограничений может увеличиваться как минимум в два раза, но полученные в результате этих преобразований задачи одно- и многокритериальные задачи линейного программирования можно решить симплексным методом. Обсуждаются методы решения сформулированных многокритериальных задач. При использования в качестве критерия оптимальности координаты абсцисс центра тяжести нечетких множеств детерминированный эквивалент сформулирован в виде задачи нелинейного математического программирования.

Предложенные в работе подходы находят широкое применение в различных приложениях, в частности при выборе наиболее эффективного портфеля ценных бумаг, минимизации финансовых рисков, решении других технических и экономических проблем, в которых математические модели представлены линейными Fuzzy-регрессионными моделями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Язенин А.В.* Нечеткое математическое программирование / А.В. Язенин. — Калинин: Калин. гос. ун-т, 1986. — 60 с.
2. *Згуровский М.* Модели и методы принятия решений в нечетких условиях / М. Згуровский, Ю. Зайченко. — К.: Наук. думка, 2013. — 275 с.
3. *Kumar A.* A new method for solving fully fuzzy linear programming problems / A. Kumar, J. Kaur, P. Singh // Applied Mathematical Modelling. — 2011. — **35**. — N 2. — P. 817–823.
4. *Kumar A.* Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints / A. Kumar, J. Kaur, P. Singh // International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences. — 2010. — **6**. — P. 37–41.
5. *Rommelfanger H.J.* Entscheiden bei Unschärfe. Fuzzy Decision Support-Systeme / H.J. Rommelfanger // Springer, Berlin-Heidelberg. — New York, London, Tokio, 1999. — 304 p.
6. *Herrera F.* Thtree models of fuzzy integer linear programming / F. Herrera, J.L. Verdegay // European Journal of Operationel Research. — 1995. — N 83. — P. 581–593.
7. *Allahviranloo F.* Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking functhion / F. Allahviranloo, H. Lotfi, M.K. Kiasary, N.A. Kiani, L. Alizadeh // Applied Matematical Sciences. — 2008. — **2**. — P. 19–32.
8. *Maleki R.* Linear programming with fuzzy variables / R. Maleki, M. Tata, M. Mashinchi // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — **109**. — P. 21–33.
9. *Зак Ю.А.* Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных / Ю.А. Зак. — М.: URSS, 2013. — 352 с.
10. *Inguichi M.* Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem / M. Inguichi, J. Ramik // Fuzzy Sets and System. — 2000. — N 11. — P. 3–28.
11. *Barth P.* A Davis-Putnam Based Enumeration Algorithm for Linear Pseudo-Boolean Optimization / P. Barth // Max-Plank-Institut für Informatik, Saarbrücken, 1995. — 12 p.
12. *Зак Ю.А.* Критерии и методы сравнения нечётких множеств / Ю.А. Зак // Системные исследования и информационные технологии. —2013. — № 3. — С. 58–68.
13. *Зак Ю.А.* Алгоритмы решения задач линейного булевого программирования в условиях размытых исходных данных / Ю.А. Зак // Программная инженерия. — 2014. — № 4. — С. 28–38.
14. *Зак Ю.А.* Прикладные задачи многокритериальной оптимизации / Ю.А. Зак // Экономика. — 2014. — 452 с.
15. *Зак Ю.А.* Многокритериальные задачи математического программирования с размытыми ограничениями. Математические модели схем компромисса. Выбор решений из конечного множества альтернатив / Ю.А. Зак // Кибернетика и системный анализ. — № 5. — 2010. — С. 80–89.
16. *Bellman R.E.* Decision-Making in Fuzzy Environment / R.E. Bellman, L.A. Zadeh // Management Science. — 1970. — **17**. — N 4. — P.141–160.

Поступила 08.06.2015