УДК 517.94

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ю.Є. БОХОНОВ

Запропоновано підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку, який базується на побудові функції Гріна для диференціального оператора, що визначений на функціях, які задовольняють періодичним крайовим умовам. Наведено необхідні та достатні умови існування періодичних розв'язків рівняння.

ВСТУП

У роботі використовується підхід автора для знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку, який викладено в [1]. При цьому уточнюються оцінки швидкості збіжності послідовних наближень, які отримані в зазначеній роботі. Нехай функція $f(t,x,y)$ неперервна на $D=(-\infty,\infty)\times[a,b]\times[c,d]$, періодична по t із періодом T. Позначимо

$$M=\max_{D}\left|f(t,x,y)\right|. \quad (1)$$

Від функції $f(t,x,y)$ будемо вимагати, щоб вона по x, y задовольняла умові Ліпшиця

$$\left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right|\le K_0\left|x_1-x_2\right|+K_1\left|y_1-y_2\right|. \quad (2)$$

Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x}) \quad (3)$$

еквівалентне розв'язанню крайової задачі

$$x(0)=x(T),\ \dot{x}(0)=\dot{x}(T) \quad (4)$$

для рівняння (3). Пропонується розглянути диференціальний оператор $(Lx)(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ у гільбертовому просторі $H=L_2(0,T)$, область визначення якого — це функції, що мають абсолютно неперервну першу похідну, та задовольняють крайовим умовам (4). Як відомо, такий оператор є самоспряженим. Задача знаходження періодичних розв'язків зводиться до задачі обернення оператора L. Однак, варто зауважити, що цей оператор не має оберненого, оскільки, як легко бачити, $\lambda = 0$ є його власним числом із одновимірним власним підпростором H_1, натягнутим на функцію $x(t) \equiv 1$. Із самоспряженості оператора випливає, що підпростір $\grave{H}$, ортогональний до одиниці є інваріантним відносно L. При цьому $H = H_1 \oplus \grave{H}$. $\grave{H}$, очевидно, складається з функцій, середнє яких по [0, T] дорівнює нулю (позначатимемо це так: $\overline{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\,dt = 0 \;\; \forall\, h \in H$). Побудуємо оператор, обернений до L у підпросторі $\grave{H}$. Слід зауважити, що функція в правій частині (3), взагалі кажучи, не належить до $\grave{H}$, тому в подальшому розглядатимемо допоміжне рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) - \overline{f}. \tag{5}$$

Для побудови вказаного оберненого оператора використовуватимемо модифікацію методики з [2].

Візьмемо фундамантальну систему $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(t) \equiv t$ розв'язків рівняння $\ddot{x} = 0$, які задовольняють умові $x_i^{(j-1)}(0) = \delta_{i,j}$ $(i = 1,2;\; j = 1,2)$, де $\delta_{i,j}$ — функція Кронекера. Нехай $h \in \grave{H}$, тобто $\overline{h} = 0$. Розглянувши рівняння $(L\,x)(t) = h(t)$, знайдемо обернений оператор L^{-1}. Тоді функція $x(t) = (L^{-1}h)(t)$ буде задовольняти цьому рівнянню і крайовим умовам (4). L^{-1} інтегральний та знайдемо його ядро $G(t,\tau)$, функцію Гріна крайової задачі. Для побудови оберненого оператора розв'язуватимемо рівняння методом варіації довільних сталих. Для цього шукатимемо розв'язок у вигляді $x(t) = \widetilde{C}_1(t)\,x_1(t) + \widetilde{C}_2(t)\,x_2(t)$. Після стандартних дій знаходимо: $x(t) = \frac{1}{2}\int_0^T (t-\tau)\,(\chi(t-\tau) - \chi(\tau - t))\,h(\tau)\,d\tau + C_1 + C_2 t$, де χ — функція Хевісайда $(\chi(s) = 1, s \ge 0, \chi(s) = 0, s < 0)$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$. Використовуючи першу з умов (4), можна знайти коефіцієнт C_2: $C_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \tau\, h(\tau)\,d\tau$. Друга умова (4) на відміну від стандартної ситуації не дозволяє знайти C_1, вона лише підтверджує, що $\overline{h} = 0$. Цей невідомий коефіцієнт можна знайти з умови $\overline{x} = 0$, причому він знаходиться неоднозначно, оскільки з умови $\overline{h} = 0$ випливає, що $x(t) = \int_0^T G(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_0^T (G(t,\tau) + \alpha(t))\,h(\tau)\,d\tau$, де $\alpha \in C^2[0,T]$ — довільна двічі неперервно диференційовна функція (вона не залежить від τ, тому $\int_0^T \alpha(t)\,h(\tau)\,d\tau = 0$). Отже, $C_1 = -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\tau^2}{T}\,h(\tau)\,d\tau$, і остаточно знаходимо функцію Гріна:

$$G(t,\tau) = \frac{1}{2T}(\,2\,t\,\tau - \tau^2\,) + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{ll} t-\tau, & 0 \le \tau \le t \le T; \\ \tau - t, & 0 \le t \le \tau \le T. \end{array}\right. \tag{6}$$

Тоді $x(t)=\int_0^T G(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau$. Звідси знаходимо: $x'(t)=\int_0^T G_t'(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau$, де

$$G'(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau}{T}+\dfrac{1}{2}; & 0\le\tau\le t\le T;\\[2mm] \dfrac{\tau}{T}-\dfrac{1}{2}; & 0\le t\le\tau\le T.\end{cases} \tag{7}$$

Завдяки розкладу в ортогональну суму $H=H_1\oplus\grave{}H$ кожен розв'язок крайової задачі для рівняння (3) можна подати у вигляді $x(t)=x_0+x_1(t)$, де $x_0=\overline{x}$, $\overline{x_1}=0$, тобто

$$x(t)=x_0+\int_0^T G(t,\tau)\,(f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))-\overline{f})\,d\tau. \tag{8}$$

Разом із рівнянням (8) розглядається рівняння для похідної:

$$\dot{x}(t)=\int_0^T G_t'(t,\tau)\,(f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))-\overline{f})\,d\tau. \tag{9}$$

Рівняння (8) розв'язується методом послідовних наближень. Якщо процес збігається, одержуємо розв'язок $x=\varphi(t,x_0)$, який під час підстановки в (8) перетворює його в тотожність. Для того, щоб цей розв'язок був також розв'язком (3), очевидно, необхідно і разом із виконанням умов (4) достатньо, щоб виконувалась умова

$$\int_0^T f(\xi,\varphi(\xi,x_0),\dot{\varphi}(\xi,x_0))\,d\xi=0, \tag{10}$$

тобто, щоб число x_0 (яке є середнім від $x(t)$, розв'язку задачі) було коренем цього рівняння.

Подамо рівняння (8)–(9) в іншому вигляді. Для цього запишемо інтеграл у правій частині (8) у такій формі:

$$\int_0^T G(t,\tau)\,(f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))-\overline{f})\,d\tau=\int_0^T G(t,\tau)\,f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))dt-$$

$$-\int_0^T f(\xi,x(\xi),\dot{x}(\xi))d\xi\left(\frac{1}{T}\int_0^T G(t,\tau)d\tau\right)=\int_0^T (G(t,\tau)-\overline{G}(t))\,f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_0^T\left(-(t-\tau)^2-\frac{T^2}{6}+T\,(t-\tau)\,(\chi(t-\tau)-\chi(\tau-t))\right)f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau=$$

$$=\frac{1}{2T}\left(\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t+\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau\right).$$

Аналогічно перетворимо праву частину (9):

$$\int_0^T G_t'(t,\tau)\,(f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))-\overline{f}\,)\,d\tau=\int_0^t G_t'(t,\tau)\,f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T G_t'(t,\tau)\,d\tau\int_0^T f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))\,d\tau=$$

$$=\int_0^T\left(G_t'(t,\tau)-\overline{G'}(t)\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{T}\left(\int_0^t\left(t-\tau+\frac{T}{2}\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau+\int_t^T\left(t-\tau-\frac{T}{2}\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))\,d\tau\right).$$

Знайдемо умову збіжності ітераційного процесу під час розв'язання системи

$$x(t)=x_0+\frac{1}{2T}\left(\int_0^t\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t+\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau\right); \tag{11}$$

$$\dot x(t)=\frac{1}{T}\left(\int_0^t\left(t-\tau+\frac{T}{2}\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left(t-\tau-\frac{T}{2}\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau\right). \tag{12}$$

Введемо в просторі $\mathbf{R}^2$ «псевдонорму»: $|(x_1,x_2)=(|x_1|,|x_2|)$, а також для вектор-функції $(x_1(t),x_2(t))$: $\|(x_1,x_2)\|=(\|x_1\|,\|x_2\|)=$ $=(\max\limits_{t\in[0,T]}|x_1(t)|,\max\limits_{t\in[0,T]}|x_2(t)|)$. Простір із такою «псевдонормою» буде частково впорядкованим, і для векторів $(x,y),(\xi,\eta)$ під час виконання умов $x\le\xi,\ y\le\eta$ використовуватимемо позначення $(x,y)\le(\xi,\eta)$.

Розглянемо оператор S, що діє в просторі вектор-функцій зі значеннями в $\mathbf{R}^2$ за формулою (нас буде цікавити його дія на вектори вигляду $\mathrm{col}(x(t),\dot x(t))$:

$$S\begin{pmatrix}x(t)\\ \dot x(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_0^T\left(\frac{T^2}{12}-\left(t-\tau-\frac{T}{2}\right)^2\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau+\int_0^t(t-\tau)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau\\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\left(\tau-t-\frac{T}{2}\right)f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau+\int_0^T f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Враховуючи (2), (3), дослідимо, за яких умов цей оператор буде стискаючим. Введемо заміну $y=\dfrac{t}{T},\ \xi=\dfrac{\tau}{T}$. Тоді для двох вектор-функцій $\mathrm{col}(x^{(1)},\dot{x}^{(1)}(t)),\ \mathrm{col}(x^{(2)}(t),\dot{x}^{(2)}(t))$ маємо:

$$\left|(S(x^1(t)-x^2(t)))_1\right|\le$$

$$\le\frac{T^2}{2}\left(\int_0^y\left|-(y-\xi)^2+(y-\xi)-\frac{1}{6}\right|d\xi+\int_y^1\left|-(y-\xi)^2-(y-\xi)-\frac{1}{6}\right|d\xi\right)\times$$

$$\times\left(K_0\left\|x^1-x^2\right\|+K_1\left\|\dot{x}^1-\dot{x}^2\right\|\right)=$$

$$=\frac{T^2}{2}\left(\int_0^y\left|-\left(y-\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right|d\xi+\int_y^1\left|-\left(y-\xi+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right|d\xi\right)\times$$

$$\times\left(K_0\left\|x^1-x^2\right\|+K_1\left\|\dot{x}^1-\dot{x}^2\right\|\right)=\frac{T^2}{18\sqrt{3}}\left(K_0\left\|x^1-x^2\right\|+K_1\left\|\dot{x}^1-\dot{x}^2\right\|\right).$$

Тут ми скористались тим, що, як виявляється, площа фігури, що обчислюється сумою цих інтегралів, не залежить від $y\in[0,1]$. Аналогічно

$$\left|(S(x^1(t)-x^2(t)))_2\right|\le$$

$$\le T\left(\int_0^y\left|\xi-y+\frac{1}{2}\right|d\xi+\int_y^1\left|\xi-y-\frac{1}{2}\right|d\xi\right)\left(K_0\left\|x^1-x^2\right\|+K_1\left\|x^1-x^2\right\|\right)=$$

$$=\frac{T}{4}\left(K_0\left\|x^1-x^2\right\|+K_1\left\|x^1-x^2\right\|\right).$$

Отже,

$$\left|S\begin{pmatrix}\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|\\ \left\|\dot{x}^{(1)}-x^{(2)}\right\|\end{pmatrix}\right|\le\frac{T}{2}\begin{pmatrix}\dfrac{T}{9\sqrt{3}}K_0 & \dfrac{T}{9\sqrt{3}}K_1\\ \dfrac{1}{4}K_0 & \dfrac{1}{4}K_1\end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Позначимо через K матрицю в правій частині нерівності (14). Її норма дорівнює квадратному кореню з найбільшого власного числа матриці $K*K$ (менше дорівнює нулю). Після нескладних підрахунків одержимо: $\|K\|=\sqrt{\left(\dfrac{T^2}{243}+\dfrac{1}{16}\right)(K_0^2+K_1^2)}$. Введемо позначення $q=\dfrac{T}{2}\|K\|$. Звідси випливає, що S буде стискаючим оператором за умови

$$q=\frac{T}{2}\sqrt{\left(\frac{T^2}{243}+\frac{1}{16}\right)(K_0^2+K_1^2)}<1. \qquad (15)$$

Аналогічно доводиться, що константа M із умови (1) має задовольняти вимозі

$$M \le \min\left(\frac{18\sqrt{3}}{T^2}(b-a),\ \frac{4}{T}(c-d) \right). \tag{16}$$

Стандартні міркування приводять до оцінки можливих значень величини x_0:

$$x_0 \in \left[a + \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M,\ b - \frac{T^2}{18\sqrt{3}} \right]. \tag{17}$$

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема 1. Нехай функція $f(t,x,y)$ неперервна на $[0,T]\times[a,b]\times[c,d]$, періодична по t із періодом T, задовольняє умові (2), причому константи Ліпшиця та стала M із (1) задовольняють умовам (15)–(16). Тоді для існування періодичного з періодом T розв'язку $x=\varphi(t,x_0)$ рівняння (3) необхідно та достатньо існування такого значення x_0, яке задовольняє рівнянню (10), де $\varphi(t,x_0)$ знаходиться методом послідовних наближень. При цьому x_0 є середнім значенням $\varphi(t,x_0)$ на $[0,T]$ і знаходиться на проміжку, який задовольняє умові (17).

Використовуючи техніку доведення теореми Банаха про стискаючі відображення, одержимо оцінку похибки між розв'язком задачі (3)–(4) і її наближенням. Для цього треба тільки помітити, що $\left\| x_1(t,x_0) - x_0 \right\| \le M \dfrac{T^2}{18\sqrt{3}}$.

Теорема 2. Похибка між розв'язком задачі (3)–(4) і її *n*–им наближенням визначається з умови

$$\left\| \phi(t,x_0) - x_n(t,x_0) \right\| \le \frac{MT^2}{18\sqrt{3}(1-q)} q^n. \tag{18}$$

ВИСНОВКИ

Зведення задачі про періодичні розв'язки нелінійного диференціального рівняння до крайової задачі з умовами періодичного типу є ефективним прийомом, що дає змогу прямого дослідження цієї проблеми без переходу до системи рівнянь першого порядку. Оцінка функції Гріна крайової задачі дає змогу одержати умови збіжності ітераційного процесу. Методику може бути застосовано при дослідженні функціонально-диференціальних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бохонов Ю.Є.* Про один підхід про знаходення періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку // Нелінійні коливання. — 2000. — Т. 3, № 3. — С. 308–314.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

Надійшла 02.06.2010