УДК 519.816

ОЦЕНИВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА ДШ/МАИ К ИЗМЕНЕНИЯМ ВО МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ

Н.И. НЕДАШКОВСКАЯ

Проведена формализация интегрированного метода ДШ/МАИ поддержки принятия решений по многим критериям при неполных экспертных оценках, который объединяет метод анализа иерархий и теорию доверия Демпстера-Шафера. Проведено оценивание чувствительности ранжирований, полученных методом ДШ/МАИ, к изменениям во множестве альтернатив решений. Изменения ранжирований проиллюстрированы на нескольких примерах.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия метод анализа иерархий (МАИ) решения многокритериальных задач принятия решений (МКПР) на основе экспертных оценок [1, 2] разносторонне модифицируется и находит широкое применение в различных предметных сферах. Одна из модификаций — это метод ДШ/МАИ [3–7], объединяющий метод МАИ и теорию доверия Демпстера-Шафера [8], что позволяет осуществлять МКПР в условиях неполноты, неточности и неопределенности экспертной информации.

При решении практических задач лицо, принимающее решение, не всегда, в соответствии с методологией МАИ, имеет возможность выполнить парные сравнения между *всеми* альтернативами решений, что является необходимым условием для применения МАИ и практически всех его модификаций. При решении задач МКПР информация об альтернативах решений может быть неполной вследствие временных ограничений, неточности экспертных знаний, нематериального характера некоторых критериев и т.д. Большинство исследователей [9–11] решает задачу МКПР с неполной информацией, используя следующую двухшаговую процедуру. На первом шаге формируется задача МКПР с полной информацией путем дополнения отсутствующих значений матрицы решений, используя механизм обучения [9, 10] или эвристические правила [11]. На втором шаге применяются стандартные методы МКПР для решения задачи с полной информацией. В отличие от этой двухшаговой процедуры метод ДШ/МАИ позволяет решать задачу МКПР непосредственно, основываясь на неполных экспертных оценках альтернатив по критериям.

Цель работы — формализация метода ДШ/МАИ и исследование чувствительности решений, полученных этим методом, к разного вида изменениям во множестве альтернатив.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДОВЕРИЯ ДЕМПСТЕРА-ШАФЕРА

Приведем основные понятия теории доверия Демпстера-Шафера (ТДШ) [8], используемые для формализации метода ДШ/МАИ.

Полное множество взаимоисключающих событий названо *фреймом различения* Θ. Возможными гипотезами в ТДШ являются все возможные подмножества Θ, их количество равно $|2^{\Theta}|$.

Базовым распределением доверия называется функция $m: 2^{\Theta} \to [0,1]$, удовлетворяющая двум аксиомам: доверие к пустому множеству равно нулю $(m(\varnothing)=0)$; сумма доверий для всех подмножеств фрейма Θ равна единице: $\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$.

Величина $m(A)$ показывает долю или порцию доверия к гипотезе $A \subseteq \Theta$. Любое подмножество A фрейма Θ, для которого выполняется условие $m(A) > 0$, называется *фокальным элементом*.

Полным доверием называется функция $Bel: 2^{\Theta} \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам: доверие к пустому множеству равно нулю: $Bel(\varnothing)=0$; доверие к фрейму Θ равно единице: $Bel(\Theta)=1$; $Bel(A)+$ $+Bel(\neg A) \le 1$.

Величина $Bel(A)$ вычисляется как сумма доверий по всем подмножествам A: $Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ и показывает полное доверие к $A \subseteq \Theta$.

Символ «$\neg A$» в определении функции полного доверия означает «не A», а величина доверия $Bel(\neg A)$ показывает уровень сомнения в гипотезе A и вычисляется по формуле:

$$Bel(\neg A) = \sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ A \cap B = \varnothing}} m(B).$$

Правдоподобием называется функция $Pls: 2^{\Theta} \to [0,1]$, где $Pls(A)$ показывает величину максимального значения доверия, которое может быть по возможности назначено $A \subseteq \Theta$:

$$Pls(A) = 1 - Bel(\neg A).$$

Функции $Bel(A)$ и $Pls(A)$ интерпретируются как нижние и верхние вероятности появления гипотезы A в том смысле, что предполагается существование некоторой истинной вероятности $p(A)$ появления гипотезы A, такой что $Bel(A) \le p(A) \le Pls(A)$. Интервал $[Bel(A), Pls(A)]$ называется *доверительным интервалом*.

Следующие два неравенства: $Bel(A) + Bel(\neg A) \le 1$, $Pls(A) + Pls(\neg A) \ge 1$, $A \subseteq \Theta$ показывают главное отличие ТДШ от традиционного байесовского подхода, в котором вероятность $p(A)$ события A удовлетворяет условию $p(A) + p(\neg A) = 1$. В случае, когда каждое подмножество A состоит только из одного элемента, получим $Bel(A) = Pls(A) = m(A)$, следовательно, в этом случае выполняется $Bel(A) + Bel(\neg A) = 1$. Поэтому ТДШ можно рассматривать как обобщение байесовской теории вероятности.

Для *агрегирования* независимых доверий относительно одних и тех же гипотез используется правило Демпстера, согласно которому агрегированные доверия к гипотезам находятся посредством вычисления ортогональных сумм

$$(m_1 \oplus m_2)(A) = \frac{1}{K} \sum_{X \cap Y = A} m_1(X) m_2(Y), \qquad (1)$$

где $K = \sum_{X \cap Y \neq \varnothing} m_1(X) m_2(Y) = 1 - \sum_{X \cap Y = \varnothing} m_1(X) m_2(Y)$ — нормировочная константа, которая интерпретируется как мера конфликта между довериями m_1 и m_2; X, Y — фокальные элементы доверий m_1 и m_2 соответственно.

Используя свойство ассоциативности правила Демпстера (1), $(m_1 \oplus m_2) \oplus m_3 = m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3)$ осуществляется агрегирование трех и более независимых доверий.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДШ/МАИ

Рассмотрим постановку задачи нахождения доверительных интервалов для альтернатив решений и ранжирования альтернатив по множеству критериев в соответствии с методом ДШ/МАИ, объединяющем метод анализа иерархий и теорию доверия Демпстера-Шафера.

Дано:

- $A = \{A_i \mid i = 1,...,n\}$ — множество альтернатив решений,
- $C = \{C_j \mid j = 1,...,q\}$ — множество критериев решений.

Требуется найти:

- значения доверий к альтернативам;
- доверительные интервалы для альтернатив;
- ранжирование альтернатив.

В методе ДШ/МАИ каждая группа альтернатив решений сравнивается с фреймом различения (все множество альтернатив) по каждому из критериев и эксперт выражает степень «благоприятного знания» для каждой из этих групп альтернатив [3, 4]. Приведенное является принципиальным отличием от метода МАИ, в котором парные сравнения проводятся между отдельными альтернативами. Количество групп альтернатив отображает количество знаний, которыми обладает эксперт по данному критерию. К альтернативам, находящимся в одной группе, полагается (имеет место) одинаковое доверие, т.е. эксперт не обладает достаточными знаниями для их различения. Кроме того, для агрегирования весов альтернатив по множеству критериев в методе ДШ/МАИ используется правило Демпстера вместо дистрибутивного и идеального методов, применяемых в МАИ.

Метод ДШ/МАИ состоит из нескольких этапов [3, 4]:

1) определение множества альтернатив и критериев решений;

2) нахождение точечных весов критериев по методу собственного вектора МАИ;

3) формирование групп альтернатив относительно критериев, при этом к альтернативам, находящимся в одной группе, имеется одинаковое доверие;

4) проведение парных сравнений сформированных групп альтернатив с фреймом различения (всем множеством альтернатив) по каждому из критериев;

5) нахождение значений функций базового распределения доверия $m_j(\cdot)$ для групп альтернатив и фрейма по каждому из критериев $j = 1,...,q$ методом главного собственного вектора;

6) агрегирование полученных в п. 5 функций базового распределения доверия, используя правило Демпстера;

7) расчет значений полного доверия $Bel(\cdot)$ и правдоподобия $Pls(\cdot)$, построение доверительных интервалов для групп альтернатив;

8) ранжирование альтернатив (групп альтернатив).

Проведем формализацию четвертого, пятого и восьмого этапов. Матрица парных сравнений (МПП) в методе ДШ/МАИ будет иметь следующую структуру:

$$D_{r+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & d_1 w^c \\ 0 & 1 & ... & 0 & d_2 w^c \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & 1 & d_r w^c \\ 1/(d_1 w^c) & 1/(d_2 w^c) & ... & 1/(d_r w^c) & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $d_i = d_{i\Theta}$ — количественное выражение степени преобладания группы альтернатив S_i над фреймом, r — количество групп альтернатив по рассматриваемому критерию, w^c — вес критерия. Нули в МПП (2) показывают, что парные сравнения производятся не между различными группами альтернатив, а только с фреймом.

Значения функции базового распределения доверия $m_j(\cdot)$ для групп альтернатив и фрейма вычисляются как элементы собственного вектора МПП D_{r+1} (2), отвечающего наибольшему собственному числу $\lambda_{\max}$ этой матрицы. Используя уравнения $D_{r+1} w = \lambda_{\max} w$, $\det(D_{r+1} - \lambda I_{r+1}) = 0$, $\sum_{i=1}^{r+1} w_i = 1$ (условие нормировки) нетрудно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. Наибольшее собственное число МПП (2) равно $\lambda_{\max} = 1 + \sqrt{r}$.

Утверждение 2. Элементы нормированного главного собственного вектора МПП (2), соответствующие ее наибольшему собственному числу $\lambda_{\max}$, равны

$$w_i = \frac{d_i w^c}{\sum_{j=1}^{r} d_j w^c + \sqrt{r}}, \quad i = 1, 2, ..., r, \quad w_{r+1} = \frac{\sqrt{r}}{\sum_{j=1}^{r} d_j w^c + \sqrt{r}}. \qquad (3)$$

Величины w_i, $i = 1, 2, ..., r+1$, вычисленные по формулам (3), являются значениями функции базового распределения доверия по критерию: $m(S_i) = w_i$, $i = 1, 2, ..., r$, $m(\Theta) = w_{r+1}$.

Мерой неполноты экспертной информации по критерию назовем величину $m(\Theta)$ базового доверия к фрейму по рассматриваемому критерию.

Мерой неполноты экспертной информации по множеству критериев $C = \{c_j \mid j = 1,\dots,q\}$ назовем величину $(m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_q)(\Theta)$ базового агрегированного доверия к фрейму.

Таким образом, использование теории Демстера-Шафера в МАИ позволяет осуществлять принятие решений по многим критериям в условиях неполноты экспертной информации, когда эксперт не обладает достаточными определенными знаниями для различения альтернатив по какому-либо из критериев. Также метод ДШ/МАИ позволяет количественно оценить относительную меру неполноты экспертных оценок.

В результате применения такого интегрированного метода ДШ/МАИ каждой группе альтернатив (альтернативе в частном случае) ставятся в соответствие значение полного доверия и доверительный интервал. Следовательно, для нахождения ранжирования групп альтернатив необходимо использовать специальные методы.

Можно рассматривать следующие два метода ранжирования групп альтернатив:

1) ранжирование в соответствии с убыванием точечных значений полных агрегированных доверий к группам альтернатив;

2) ранжирование, полученное при сравнении доверительных интервалов.

В данной работе предлагается следующий метод ранжирования групп альтернатив на основе сравнения их доверительных интервалов. Пусть $[Bel(S_i), Pls(S_i)]$ и $[Bel(S_j), Pls(S_j)]$ — доверительные интервалы групп альтернатив S_i и S_j. Если $Bel(S_i) > Bel(S_j)$ и $Pls(S_i) > Pls(S_j)$, то, основываясь на интерпретации доверительного интервала (рисунок), группа S_i обладает бо́льшим полным доверием и меньшим уровнем непринятия по сравнению с группой S_j. В этом случае будем считать, что S_i преобладает над S_j. Степень преобладания S_i над S_j определим следующим образом:

$$P(S_i > S_j) = \frac{\max[0, Pls(S_i) - Bel(S_j)] - \max[0, Bel(S_i) - Pls(S_j)]}{[Pls(S_i) - Bel(S_i)] + [Pls(S_j) - Bel(S_j)]},$$

$$P(S_i > S_j) \in [0,1].$$

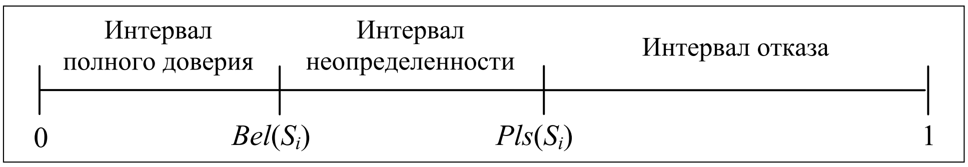

Рисунок. Схема интерпретации доверительного интервала

Группа альтернатив решений S_i преобладает над S_j (обозначение $S_i \succ S_j$), если $P(S_i > S_j) > 0{,}5$. Группы альтернатив решений S_i и S_j неразличимы (обозначение $S_i \sim S_j$), если $P(S_i > S_j) = 0{,}5$.

ОЦЕНИВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА ДШ/МАИ К ИЗМЕНЕНИЯМ ВО МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ

Пусть n альтернатив решений $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оцениваются по двум критериям C_1 и C_2 и по этим критериям определены соответственно d_1 и d_2 групп альтернатив решений $S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1d_1}$ и $S_{21}, S_{22}, \ldots, S_{2d_2}$, где $S_{1k} \cap S_{1l} = \varnothing$, $S_{2p} \cap S_{2r} = \varnothing$, $k, l = 1, \ldots, d_1$, $p, r = 1, \ldots, d_2$. Метод ДШ/МАИ используется для вычисления доверий $Bel(\cdot)$ и доверительных интервалов $[Bel(\cdot), Pls(\cdot)]$ для каждой группы альтернатив решений и фрейма Θ.

Нас интересуют условия изменения порядков ранжирования альтернатив решений при использовании метода ДШ/МАИ при изменении множества альтернатив, например, когда к множеству альтернатив добавляется еще одна альтернатива. В данной работе предлагаются следующие два условия. В первом условии рассматриваются изменения в значениях функций агрегированного полного доверия (далее просто доверия) групп альтернатив.

Пусть $Bel(S_i)$ — первоначальное значение агрегированного полного доверия к группе S_i на основании объединенного опыта по двум критериям, $Bel^*(S_i)$ — соответствующее значение после добавления альтернативы.

Условие 1. Порядок ранжирования между группами альтернатив S_i и S_j изменяется, если:

- доверие к группе S_i становится меньше доверия к группе S_j после добавления альтернативы, т.е. $Bel^*(S_i) < Bel^*(S_j)$ при первоначальном ранжировании $Bel(S_i) > Bel(S_j)$;
- выполняются условия $Bel(S_i) < Bel(S_j)$ и $Bel^*(S_i) > Bel^*(S_j)$;
- доверия к группам S_i и S_j стали отличаться (совпадать) после добавления альтернативы при условии, что они первоначально совпадали (отличались).

Поэтому, общее условие 1 изменения ранжирования следующее:

$$(\Delta Bel_{ij} \Delta Bel_{ij}^* < 0) \vee \Big((\Delta Bel_{ij} = 0) \wedge (\Delta Bel_{ij}^* \neq 0)\Big) \vee \Big((\Delta Bel_{ij} \neq 0) \wedge (\Delta Bel_{ij}^* = 0)\Big),$$

$$\Delta Bel_{ij} = Bel(S_i) - Bel(S_j), \quad \Delta Bel_{ij}^* = Bel^*(S_i) - Bel^*(S_j).$$

Условие 2. Порядок ранжирования между группами альтернатив S_i и S_j изменяется, если изменяются ранжирования, определяемые их доверительными интервалами $[Bel(S_i), Pls(S_i)]$ и $[Bel(S_j), Pls(S_j)]$.

В данной работе три известных тестовых критерия [12] используются для исследования разных типов изменения ранжирования в методе ДШ/МАИ. Эти критерии применялись для исследования других методов МКПР.

Тестовый критерий № 1. Использование эффективного метода МКПР не должно изменять наилучшую альтернативу при добавлении неоптимальной альтернативы к множеству альтернатив решений (при условии неизменности относительных важностей критериев решений). Аналогично не должны изменяться относительные ранги остальных неизменяемых альтернатив.

Тестовый критерий № 2. Порядки ранжирования альтернатив решений, полученные с привлечением эффективного метода МКПР, должны удовлетворять свойству транзитивности.

Тестовый критерий № 3. Для той же задачи принятия решений и при использовании того же метода МКПР, ранжирование, полученное в результате объединения ранжирования подзадач, должно совпадать с первоначальным ранжированием до проведения декомпозиции.

Проведем оценивание чувствительности метода ДШ/МАИ согласно введенному выше условию 1, когда к множеству альтернатив решений добавляется неоптимальная альтернатива с разными свойствами.

Случай 1. Новая альтернатива A_{N+1} неоптимальна и формирует отдельную группу по каждому из критериев решений, т.е. $\{A_{N+1}\} \cap S_{1i} = \varnothing$ и $\{A_{N+1}\} \cap S_{2k} = \varnothing$, $i = 1,..., D_1$, $k = 1,..., D_2$.

Проведем агрегирование базовых функций доверий по двум критериям для возмущенного случая с добавленной альтернативой. После добавления альтернативы A_{N+1}, матрица пересечений $S_{1i} \cap S_{2k}$ в соответствии с правилом Демпстера (1) для групп первоначально определенных альтернатив $A_1,..., A_N$ не изменяется и обозначена в табл. 1 жирным шрифтом.

Таблица 1. Промежуточные результаты использования правила Демпстера (случай 1)

C_1 \ C_2	S_{21}	S_{22}	...	S_{2D_2}	$\{A_{N+1}\}$	Θ
S_{11}	$\mathbf{S}_{11} \cap \mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{11} \cap \mathbf{S}_{22}$	...	$\mathbf{S}_{11} \cap \mathbf{S}_{2D_2}$	$\varnothing$	$\mathbf{S}_{11}$
S_{12}	$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{S}_{22}$	...	$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{S}_{2D_2}$	$\varnothing$	$\mathbf{S}_{12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_{1D_1}	$\mathbf{S}_{1D_1} \cap \mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{1D_1} \cap \mathbf{S}_{22}$	...	$\mathbf{S}_{1D_1} \cap \mathbf{S}_{2D_2}$	$\varnothing$	$\mathbf{S}_{1D_1}$
$\{A_{N+1}\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	...	$\varnothing$	$\{A_{N+1}\}$	$\{A_{N+1}\}$
Θ	$\mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{22}$	...	$\mathbf{S}_{2D_2}$	$\{A_{N+1}\}$	Θ

Однако изменяется нормирующая константа K в правиле Демпстера (1):

$$K^* = 1 - \sum_{X \cap Y = \varnothing} m_1(X) m_2(Y) = K - \sum_{A_{N+1} \cap Y = \varnothing} m_1(A_{N+1}) m_2(Y),$$

где K — первоначальное значение нормирующей константы.

Как следствие, при возмущении множества альтернатив, агрегированные функции доверий для групп альтернатив, найденные по правилу Демпстера, могут изменяться непропорционально. Поэтому ранжирование может изменяться. Примеры изменения ранжирования согласно тестовым критериям № 1 и № 3 приведены ниже.

Случай 2. Новая альтернатива A_{N+1} неоптимальна и формирует отдельную группу по одному из критериев решений. Относительно второго критерия решений эта альтернатива A_{N+1} имеет такое же предпочтение относительно фрейма Θ, что и одна или несколько определенных ранее альтернатив, т.е. A_{N+1} включена в одну из существующих групп альтернатив.

Пусть альтернатива A_{N+1} включена в группу S_{21} (без потери общности выбор S_{21} не принципиален). Тогда после добавления A_{N+1} формируются группы $S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1D_1}$ и $\{A_{N+1}\}$ относительно критерия C_1 и группы $S'_{21}, S_{22}, \ldots, S_{2D_2}$ относительно критерия C_2, где $S'_{21} = S_{21} \cup \{A_{N+1}\}$ (табл. 2).

Таблица 2. Промежуточные результаты использования правила Демпстера (случай 2)

$C_1 \backslash C_2$	$S'_{21} = S_{21} \cup \{A_{N+1}\}$	S_{22}	…	S_{2D_2}	Θ
S_{11}	$\mathbf{S}_{11} \cap \mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{11} \cap \mathbf{S}_{22}$	…	$\mathbf{S}_{11} \cap \mathbf{S}_{2D_2}$	$\mathbf{S}_{11}$
S_{12}	$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{S}_{22}$	…	$\mathbf{S}_{12} \cap \mathbf{S}_{2D_2}$	$\mathbf{S}_{12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_{1D_1}	$\mathbf{S}_{1D_1} \cap \mathbf{S}_{21}$	$\mathbf{S}_{1D_1} \cap \mathbf{S}_{22}$	…	$\mathbf{S}_{1D_1} \cap \mathbf{S}_{2D_2}$	$\mathbf{S}_{1D_1}$
$\{A_{N+1}\}$	$\{A_{N+1}\}$	$\varnothing$	…	$\varnothing$	$\{A_{N+1}\}$
Θ	$\mathbf{S}_{21} \cup \{\mathbf{A}_{N+1}\}$	$\mathbf{S}_{22}$	…	$\mathbf{S}_{2D_2}$	Θ

Как следует из табл. 2, при возмущении множества альтернатив и последующем агрегировании базовых доверий m_1 и m_2 по критериям, матрица пересечений в правиле Демпстера (1), соответствующая группам определенных первоначально альтернатив (обозначенная в табл. 2 жирным шрифтом), изменяется, так как изменяется результат пересечения группы S'_{21} с фреймом Θ. Появляется новый результат агрегирования:

$$(m_1^* \oplus m_2^*)(S_{21} \cup \{A_{N+1}\}) = \frac{1}{K^*} m_1(\Theta) m_2(S_{21} \cup \{A_{N+1}\}),$$

измененная нормирующая константа K в правиле Демпстера для всех результатов агрегирования вычисляется по формуле:

$$K^* = 1 - \sum_{X \cap Y = \varnothing} m_1(X) m_2(Y) = K - \sum_{A_{N+1} \cap Y = \varnothing} m_1(A_{N+1}) m_2(Y).$$

Поэтому при применении правила Демпстера к возмущенному множеству альтернатив агрегированные функции доверий групп альтернатив также как и в случае 1 выше могут изменяться непропорционально. И, как следствие, ранжирование может изменяться (см. пример ниже).

Рассмотрим теперь возможность изменения ранжирования в методе ДШ/МАИ согласно тестовому критерию № 2. Предположим, что использован метод ДШ/МАИ и найдено ранжирование альтернатив задачи принятия решений. Далее, предположим, что произведена декомпозиция этой задачи на множество подзадач, в каждой из которых только две альтернативы оцениваются по всем критериям решений первоначальной задачи. Тогда в соответствии с тестовым критерием № 2 все порядки ранжирования подзадач должны удовлетворять свойству транзитивности.

Группы альтернатив относительно двух критериев решений C_1 и C_2 обозначим S_{1i} и S_{2j}. Предположим, что каждая группа состоит из одного элемента, т.е. $S_{11} = S_{21} = \{A_1\}$, $S_{12} = S_{22} = \{A_2\}, \dots, S_{1N} = S_{2N} = \{A_N\}$ и альтернативы (группы альтернатив) рассматриваются попарно и порядки ранжирования двух произвольных пар равны $A_i \succ A_j$ и $A_j \succ A_k$. Тогда агрегированное доверие к альтернативе A_i согласно правилу Демпстера (1) вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{K}\big(m_1(A_i)(m_2(A_i) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_i)\big),$$

где $m_1(\cdot)$ и $m_2(\cdot)$ — функции базовых доверий относительно критериев решений C_1 и C_2, K — нормирующая константа.

Тогда ранжирования $A_i \succ A_j$ и $A_j \succ A_k$ приводят к следующим неравенствам:

$$m_1(A_i)(m_2(A_i) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_i) -$$

$$- m_1(A_j)(m_2(A_j) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_j) > 0\,,$$

$$m_1(A_j)(m_2(A_j) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_j) -$$

$$- m_1(A_k)(m_2(A_k) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_k) > 0\,.$$

При объединении этих неравенств получаем:

$$m_1(A_i)(m_2(A_i) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_i) -$$

$$- m_1(A_k)(m_2(A_k) + m_2(\Theta)) + m_1(\Theta)m_2(A_k) > 0\,,$$

т.е. $A_i \succ A_k$.

Поэтому, когда группы альтернатив решений состоят из одного элемента, свойство транзитивности рангов альтернатив выполняется, и по тестовому критерию № 2 ранжирование в методе ДШ/МАИ не меняется.

ПРИМЕРЫ ИЗМЕНЕНИЯ РАНЖИРОВАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ДШ/МАИ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО МНОЖЕСТВА АЛЬТЕРНАТИВ

На нескольких примерах проиллюстрированы разные виды изменения ранжирования альтернатив в методе ДШ/МАИ при возмущении множества альтернатив. В примере 1 приведен первый случай изменения ранжирования, когда добавляемая альтернатива является неоптимальной и формирует отдельную группу по каждому критерию решений. Показано, что метод ДШ/МАИ не удовлетворяет тестовым критериям № 1 и № 3, поскольку при добавлении неоптимальной альтернативы к множеству альтернатив происходит изменение наилучшей альтернативы и общее ранжирование альтернатив, полученное объединением частичных ранжирований подзадач, не совпадает с первоначальным ранжированием до декомпозиции задачи.

Пример 1. Пусть три альтернативы A_1, A_2 и A_3 оцениваются по двум критериям решений C_1 и C_2, веса критериев равны $w_1^c = 0{,}2$ и $w_2^c = 0{,}8$. Три группы альтернатив $\{A_1\}$, $\{A_2\}$ и $\{A_3\}$ определены по критерию C_1 и три группы альтернатив $\{A_1\}$, $\{A_2\}$ и $\{A_3\}$ — по критерию C_2 (табл. 3).

Таблица 3. Результаты сравнений групп альтернатив с фреймом по критериям C_1 и C_2

C_1	$\{A_1\}$	$\{A_2\}$	$\{A_3\}$
Θ	2	8	3

C_2	$\{A_1\}$	$\{A_2\}$	$\{A_3\}$
Θ	6	5	8

Используя данные табл. 3, значения функции базового доверия к группам альтернатив и фрейму Θ по критериям C_1 и C_2 равны соответственно:

$$m_1(\{A_1\}) = 0{,}0923,\ m_1(\{A_2\}) = 0{,}3693,\ m_1(\{A_3\}) = 0{,}1385 \text{ и } m_1(\Theta) = 0{,}3998,$$

$$m_2(\{A_1\}) = 0{,}2835,\ m_2(\{A_2\}) = 0{,}2362,\ m_1(\{A_3\}) = 0{,}3780 \text{ и } m_1(\Theta) = 0{,}1023.$$

Агрегирование найденных функций базового доверия $m_1(\cdot)$ и $m_2(\cdot)$ по правилу Демпстера (1) дает следующие агрегированные доверия $m_{\text{aggr}} = m_1 \oplus m_2$: $m_{\text{aggr}}(\{A_1\}) = 0{,}2376$, $m_{\text{aggr}}(\{A_2\}) = 0{,}3501$, $m_{\text{aggr}}(\{A_3\}) = 0{,}3471$ и $m_{\text{aggr}}(\Theta) = 0{,}0652$. Все исследуемые группы являются одноэлементными множествами, поэтому полные агрегированные доверия к ним совпадают с их базовыми агрегированными довериями, т.е. $Bel(\{A_1\}) = 0{,}2376$, $Bel(\{A_2\}) = 0{,}3501$ и $Bel(\{A_3\}) = 0{,}3471$. Поэтому порядок ранжирования альтернатив при сравнении значений доверий равен $A_2 \succ A_3 \succ A_1$.

Предположим, что первоначальное множество альтернатив возмущено путем добавления неоптимальной альтернативы A_4 к множеству альтернатив, которая формирует отдельную группу по каждому из критериев; результаты сравнения группы $\{A_4\}$ с фреймом Θ по критериям C_1 и C_2 равны соответственно 1 и 2. Тогда после добавления альтернативы A_4 полные доверия к группам альтернатив равны $Bel(\{A_1\}) = 0{,}2213$, $Bel(\{A_2\}) = 0{,}3161$, $Bel(\{A_3\}) = 0{,}3204$ и $Bel(\{A_4\}) = 0{,}0704$.

Таким образом, ранжирование альтернатив становится $A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$ и отличается от ранжирования $A_2 \succ A_3 \succ A_1$, которое имело место до возмущения множества альтернатив. Более того, изменяется наилучшая альтернатива.

Далее предположим, что выполнена декомпозиция последней задачи с четырьмя альтернативами на подзадачи, в каждой из которых только две альтернативы оцениваются по всем критериям решений первоначальной задачи. Тогда после применения метода ДШ/МАИ к каждой из подзадач получены следующие частичные порядки ранжирования альтернатив: $A_2 \succ A_1$, $A_3 \succ A_1$, $A_2 \succ A_3$, $A_1 \succ A_4$, $A_2 \succ A_4$ и $A_3 \succ A_4$. Они приводят к обобщенному ранжированию $A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$, которое отличается от ранжирования $A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$ этих альтернатив перед декомпозицией задачи.

Следует отметить, что задача принятия решения, рассматриваемая в примере 1, характеризуется конфликтными оценками альтернатив по критериям решений. Поэтому наблюдаемое в этих задачах изменение ранжирования отображает рациональный процесс принятия решений.

Рассмотрим следующую практическую задачу принятия решений. Пусть два соискателя на вакантную должность оцениваются по двум критериям: аналитические способности и коммуникабельность, и пусть эти критерии имеют равную важность для ЛПР. Известно, что первый соискатель имеет прекрасные аналитические способности, но некоммуникабелен. Второй соискатель, наоборот, очень коммуникабелен, но без аналитических способностей. Метод ДШ/МАИ приводит к одинаковым значениям доверий и одинаковым доверительным интервалам для этих двух соискателей. Предположим, что появился еще один альтернативный вариант — соискатель с посредственными аналитическими способностями (не такими хорошими как у первого соискателя) и посредственной коммуникабельностью (не такой хорошей как у второго соискателя). Так как первый и второй соискатели доминируют нового претендента, то новый соискатель неоптимален по обеим критериям. Однако, скорее всего, первые два соискателя уже не будут наиболее предпочтительными для ЛПР — при равных важностях критериев решений новый претендент является наиболее предпочтительным. В такой задаче принятия решений изменение ранжирования — желаемое. И именно такой результат дает метод ДШ/МАИ.

Пример 2. Выполним оценивание чувствительности практической задачи [5] выбора курса обучения из десяти возможных альтернатив $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ в соответствии с двумя критериями C_1 и C_2. Эксперты оценили альтернативы по каждому из критериев и определили следующие группы альтернатив:

- по критерию C_1: $s_1 = \{F\}$, $s_2 = \{A, H\}$, $s_3 = \{C, D, I\}$, $s_4 = \{J\}$,
- по критерию C_2: $s_1 = \{E, F\}$, $s_2 = \{A, G, H\}$, $s_3 = \{B, C, J\}$,

веса критериев $w_1^c = 0{,}4$ и $w_2^c = 0{,}6$.

Результаты сравнения групп альтернатив s_i с фреймом $\Theta = \{A, B, C, \ldots, J\}$ по каждому из критериев представлены в табл. 4.

Таблица 4. Результаты сравнения групп альтернатив с фреймом по критериям C_1 и C_2

C_1	s_1	s_2	s_3	s_4
Θ	6	4	2	1

C_2	s_1	s_2	s_3
Θ	5	3	2

Сравнение выполнялось в 7-ми точечной шкале 1–7, где крайние значения означают соответственно «очень слабое доверие» и «абсолютное доверие».

Значения функций базового распределения доверия, вычисленные по формулам (3), равны: по критерию C_1: $m_1(\{F\}) = 0{,}3333$, $m_1(\{A,H\}) = 0{,}2222$, $m_1(\{C,D,I\}) = 0{,}1111$, $m_1(\{J\}) = 0{,}0556$, $m_1(\{\Theta\}) = 0{,}2778$; по критерию C_2: $m_3(\{E,F\}) = 0{,}3880$, $m_3(\{A,G,H\}) = 0{,}2328$, $m_3(\{B,C,J\}) = 1552$, $m_3(\{\Theta\}) = 0{,}2240$.

При рассмотрении этих функций как независимых доверий относительно одного и того же фрейма, применение правила Демпстера (1) приводит к агрегированной функции доверия m_{aggr} (табл. 5, 6), $K = 1 - 0{,}3535 = 0{,}6465$.

Таблица 5. Промежуточные результаты агрегирования значений функций $m_1(\cdot)$ и $m_2(\cdot)$

$m_1(\cdot)/m_2(\cdot)$	$\{E,F\}: 0{,}3880$	$\{A,G,H\}: 0{,}2328$	$\{B,C,J\}: 0{,}1552$	$\Theta: 0{,}2240$
$\{F\}: 0{,}3333$	$\{F\}: 0{,}1293$	Ø: 0,0776	Ø: 0,0517	$\{F\}: 0{,}0747$
$\{A,H\}: 0{,}2222$	Ø: 0,0862	$\{A,H\}: 0{,}0517$	Ø: 0,0345	$\{A,H\}: 0{,}0498$
$\{C,D,I\}: 0{,}1111$	Ø: 0,0431	Ø: 0,0259	$\{C\}: 0{,}0172$	$\{C,D,I\}: 0{,}0249$
$\{J\}: 0{,}0556$	Ø: 0,0216	Ø: 0,0129	$\{J\}: 0{,}0086$	$\{J\}: 0{,}0124$
$\Theta: 0{,}2778$	$\{E,F\}: 0{,}1078$	$\{A,G,H\}: 0{,}6467$	$\{B,C,J\}: 0{,}0431$	$\Theta: 0{,}0622$

Таблица 6. Агрегированная функция доверия m_{aggr}

Группы альтернатив	$\{C\}$	$\{F\}$	$\{J\}$	$\{A,H\}$	$\{E,F\}$	$\{A,G,H\}$	$\{B,C,J\}$	$\{C,D,I\}$	Θ
m_{aggr}	0,0267	0,3156	0,0326	0,1570	0,1667	0,1000	0,0667	0,0385	0,0962
Bel	0,0267	0,3156	0,0326	0,1570	0,4823	0,2570	0,1260	0,0652	1,0000

В последней строке табл. 6 находятся значения полных агрегированных доверий к группам альтернатив. Поэтому, ранжирование групп при сравнении этих значений доверий равно: $\{F\} \succ \{J\} \succ \{C\}$, $\{E,F\} \succ \{A,H\}$, $\{A,G,H\} \succ \{B,C,J\} \succ \{C,D,I\}$.

Значение базового агрегированного доверия $m_{\mathrm{aggr}}(\Theta) = 0{,}0962$, в соответствии с определением, введенным выше, является мерой неполноты экспертной информации по множеству критериев. Таким образом, уровень неопределенности данной задачи с двумя критериями составляет 9,62 %.

Проведем *оценивание чувствительности* приведенного выше ранжирования. Предположим, что множество альтернатив изменено: добавлена неоптимальная альтернатива K, которая по критерию C_1 имеет такое же предпочтение над фреймом Θ, что и альтернатива J, и формирует отдельную группу по критерию C_2. Таким образом, в задаче принятия решения с возмущенными альтернативами определены следующие группы альтернатив:

- по критерию C_1: $s_1 = \{F\}$, $s_2 = \{A, H\}$, $s_3 = \{C, D, I\}$, $s_4 = \{J, K\}$,
- по критерию C_2: $s_1 = \{E, F\}$, $s_2 = \{A, G, H\}$, $s_3 = \{B, C, J\}$ и $s_4 = \{K\}$, веса критериев остаются неизменными $w_1^c = 0{,}4$ и $w_2^c = 0{,}6$.

Если результаты сравнений групп $\{J, K\}$ (по критерию C_1) и $\{K\}$ (по критерию C_2) с фреймом равны соответственно 1 и 1, то значения функций базового доверия равны:

- по критерию C_1: $m_1(\{F\}) = 0{,}3333$, $m_1(\{A, H\}) = 0{,}2222$, $m_1(\{C, D, I\}) = 0{,}1111$, $m_1(\{J, K\}) = 0{,}0556$, $m_1(\Theta) = 0{,}2778$;
- по критерию C_2: $m_3(\{E, F\}) = 0{,}3488$, $m_3(\{A, G, H\} = 0{,}2093$, $m_3(\{B, C, J\} = 0{,}1395$, $m_3(\{K\}) = 0{,}0698$ и $m_3(\Theta) = 0{,}2326$.

Результаты агрегирования по правилу Демпстера (1) для возмущенной задачи приведены в табл. 7.

Таблица 7. Агрегированные доверия $m_{\text{aggr}} = m_1 \oplus m_3$ и полные агрегированные доверия Bel по обоим критериям C_1 и C_2 для возмущенной задачи

Группы альтернатив	$\{C\}$	$\{F\}$	$\{J\}$	$\{K\}$	$\{A,H\}$	$\{E,F\}$	$\{J,K\}$	$\{A,G,H\}$	$\{B,C,J\}$	$\{C,D,I\}$	Θ
m_{aggr}	0,0244	0,3048	0,0123	0,0366	0,1545	0,1524	0,0203	0,0915	0,0610	0,0406	0,1016
Bel	0,0244	0,3048	0,0123	0,0366	0,1545	0,4572	0,0692	0,2460	0,0977	0,0650	1,0000

При сравнении значений полных агрегированных доверий (последняя строка табл. 7) получаем, что порядок ранжирования альтернатив C и J равен $C \succ J$. Поскольку ранжирование этих альтернатив до добавления альтернативы K было $J \succ C$, то имеет место изменение ранжирования согласно условию 1, приведенному выше.

Таким образом, возмущение альтернатив исходной задачи принятия решения путем добавления неоптимальной альтернативы к множеству из десяти альтернатив приводит к изменению первоначального ранжирования альтернатив.

ВЫВОДЫ

В работе проведена формализация и предложен метод ранжирования альтернатив в интегрированном методе ДШ/МАИ, который объединяет метод МАИ и теорию доверия Демпстера-Шафера, позволяя осуществлять поддержку принятия решений по многим критериям в условиях неполноты, неточности и неопределенности экспертной информации.

Проведено оценивание чувствительности решений, полученных методом ДШ/МАИ, к изменениям во множестве альтернатив решений. Для этого определены два условия изменения ранжирования в методе ДШ/МАИ. В первом условии рассматриваются изменения в значениях полных доверий к группам альтернатив. Во втором условии сравниваются интервалы доверий. Исследованы разные виды изменения ранжирования альтернатив при разных возмущениях множества альтернатив (добавлении/ удалении неоптимальной альтернативы, которая доминируется одной или несколькими определенными ранее альтернативами). Результаты свидетельствуют о том, что изменение ранжирования может иметь место в случае добавления неоптимальной альтернативы, которая формирует отдельную группу по каждому из критериев решений, когда метод ДШ/МАИ используется для решения задач принятия решений с конфликтными оценками альтернатив по критериям. Тогда такое изменения ранжирования отображает рациональный процесс принятия решений.

Показано, что при использовании метода ДШ/МАИ общее ранжирование альтернатив, полученное объединением ранжирования подзадач, может не совпадать с первоначальным ранжированием до декомпозиции задачи. Наилучшая альтернатива может измениться при добавлении/удалении неоптимальной альтернативы и при попарном рассмотрении альтернатив. Разные виды изменения ранжирования в методе ДШ/МАИ при возмущении множества альтернатив проиллюстрированы на ряде примеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saaty T.L.* Theory of the Analytic Hierarchy Process. Part 2.1. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 1. — С. 48–72.
2. *Saaty T.L.* Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary // European Journal of Operational Research. — 2003. — **145** (1). — P. 85–91.
3. *Beynon M.J., Curry B., Morgan P.H.* The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling // Omega. — 2000. — **28** (1). — P. 37–50.
4. *Beynon M.J.* DS/AHP method: A mathematical analysis, including an understanding of uncertainty // European Journal of Operational Research. — 2002. — **140**. — P. 148–164.
5. *Beynon M.J.* A method of aggregation in DS/AHP for group decision-making with the non-equivalent importance of individuals in the group // Computers and Operations Research. — 2005. — **32**. — P. 1881–1896.
6. *Beynon M.J.* Understanding local ignorance and non-specificity within the DS/AHP method of multi-criteria decision making // European Journal of Operational Research. — 2005. — **163**. — P. 403–417.
7. *Beynon M.J.* The Role of the DS/AHP in Identifying Inter-Group Alliances and Majority Rule Within Group Decision Making // Group Decision and Negotiation. — 2006. — **15**. — P. 21–42.
8. *Dempster A.P.* A generalization of Bayesian inference (with discussion) // Journal of the Royal Statistical Society Series B. — 1968. — **30**. — P. 205–247.
9. *Fortes I.*, *Mora-L'opez L.*, *Morales R., Triguero F.* Inductive learning models with missing values // Mathematical and Computer Modelling. — 2006. — **44**. — P. 790–806.
10. *Hong T.P.*, *Tseng L.H.*, *Wang S.L.* Learning rules from incomplete training examples by rough sets // Expert Systems with Applications. — 2002. — **22**. — P. 285–293.
11. *Quinten A., Raaijmakers W.* Effectiveness of different missing data treatments in surveys with Likert-type data: Introducing the relative mean substitution approach // Educational and Psychological Measurement. — 1999. — **59** (5). — P. 725–748.
12. *Wang X., Triantaphyllou E.* Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods // Omega. — 2008. — **36** (1). — P. 45–63.

Поступила 23.09.2010