УДК 517.977

НАБЛИЖЕНИЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

О.А. КАПУСТЯН, В.В. ЯСІНСЬКИЙ

Розглянуто задачу оптимальної стабілізації для еволюційного включення субдиференціального типу з неліпшицевою многозначною функцією взаємодії $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр. За умови, що при $\varepsilon = 0$ задача допускає оптимальний регулятор $u[y]$, доведено, що формула $u[y]$ забезпечує наближену стабілізацію вихідної задачі при малих $\varepsilon > 0$.

ВСТУП

Розглядається задача оптимальної стабілізації для еволюційного включення з субдиференціальною головною частиною $-\partial\varphi$ та неліпшицевим многозначним збуренням $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр. Методи розв'язання нескінченновимірних еволюційних задач із розривними та многозначними коефіцієнтами активно розвиваються у зв'язку з численними застосуваннями в механіці та фізиці, починаючи з 70-х рр. минулого сторіччя [1–3]. Системний підхід до вивчення питань розв'язності, прогнозування та керованості для таких об'єктів було застосовано в роботах [4–7].

Мета роботи — з'ясування умов на відображення φ та F, при яких формула точного регулятора цієї задачі при $\varepsilon = 0$ дає наближений розв'язок вихідної задачі стабілізації при малих $\varepsilon > 0$.

Задача наближеного синтезу для таких об'єктів на скінченному проміжку часу розв'язана в [8], задача наближеної стабілізації для включення параболічного типу — у [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір; $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ — норма та скалярний добуток у H; $\varphi : H \to (-\infty; +\infty]$ — власна, опукла, напівнеперервна знизу функція, $cl_H(D(\varphi)) = H$; $\partial\varphi$ — її субдиференціал; $C_v(H)$ — сукупність замкнених, опуклих, обмежених підмножин H; $F : H \to C_v(H)$ — многозначне відображення; $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $g \in H$.

Розглядається задача стабілізації

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + gu(t), \ t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(\cdot) \in U \subseteq L^2(0,+\infty) \ \text{ замкнена, опукла, } \ 0 \in U, \tag{2}$$

$$J(y,u) = \int_0^{+\infty} (\|y(t)\|^2 + \gamma u^2(t))dt \to \inf. \tag{3}$$

Припустимо, що $\{\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon}\}$ — оптимальний процес в (1)–(3), $\widetilde{J}_{\varepsilon} = J(\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon})$. Нехай при $\varepsilon = 0$ відома формула оптимального регулятора $u[y]$. Розглянемо задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + gu[y(t)], \ \ t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Нехай $\hat{y}^{\varepsilon}$ — розв'язок задачі (4), $\hat{J}_{\varepsilon} = J(\hat{y}^{\varepsilon}, \ u[\hat{y}^{\varepsilon}])$.

Основним завданням роботи є обгрунтувати граничну рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\widetilde{J}_{\varepsilon} - \hat{J}_{\varepsilon}| = 0. \tag{5}$$

Рівність (5) означає, що ми можемо коректно використовувати формулу регулятора незбуреної задачі (при $\varepsilon = 0$) для наближеної стабілізації вихідної (збуреної) задачі.

Наприклад, у випадку

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \ dx, \ \ u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, \ \ \text{інакше}, \end{cases}$$

$\partial\varphi(u) = -\Delta u$ і маємо включення параболічного типу, розглянене в [9]. Проте, у багатьох задачах механіки та фізики з вільною межею [1, 2] та в процесах, які описують потік однорідного газу через однорідне пористе середовище [3], виникають крайові задачі виду:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta\beta(u) \ni f, \ \text{ на } \ (0,+\infty)\times\Omega, \\ \beta(u(t,x)) \ni 0 \ \text{ на } \ (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

де $\beta = \partial j$, $j : R \to R$ — неперервна, $\displaystyle\lim_{|r|\to\infty} \frac{j(r)}{|r|} = \infty$.

Тоді (6) зводиться до включення вигляду $\dfrac{du}{dt} \in -\partial\varphi(u) + f$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} j(u(x))dx, \ \ u \in L^1(\Omega), \ \ j(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty, \ \ \text{інакше}, \end{cases} \quad \text{з } \ \overline{D(\varphi)} = H^{-1}(\Omega).$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянуто такі умови на параметри задачі (1)–(3):

1) $\forall R > 0$ множина $M_R = \{u \in H \,|\, \|u\| \le R, \varphi(u) \le R\}$ — компакт у H;

2) $F: H \to C_v(H)$ — напівнеперервна зверху;

3) $\exists C_1 > 0 \;\; \forall u \in H \;\; \|F(u)\|_+ := \sup\limits_{z \in F(u)} \|z\| \le C_1(1 + \|u\|)$;

4) $\exists C_2 > 0 \;\; \forall u \in H \;\; \inf\limits_{\xi \in F(u)} (\xi, u) \ge -C_2 \|u\|^2$;

5) $\exists \delta > 0 \;\;\; \forall y \in D(\partial\varphi) \;\; \forall u \in -\partial\varphi(y) \;\; (u, y) \le -\delta \, \|y\|^2$.

Задача (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$, причому має місце закон оберненого зв'язку

$$\widetilde{u}(t) = u[\widetilde{y}(t)]. \tag{7}$$

Відображення $u: H \to H$ неперервне,

$$\sup_{y \ne 0} \frac{|u[y]|}{\|y\|} < \frac{\delta}{\|g\|}. \tag{8}$$

Лема. За умов 1–5 задача (1)–(3) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ має розв'язок $\{\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon}\}$.

Доведення. При фіксованому $u \in U$, $\|u\|_U^2 := \int\limits_0^{+\infty} u^2(t)dt < \infty$ задача (1) для $\forall \varepsilon > 0$ має принаймні один (сильний) розв'язок [7], для якого справедливі такі оцінки з константами $\delta_1 > 0$, $C > 0$, які не залежать від $\varepsilon > 0$: $\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \;\; \forall t \ge s \ge 0$,

$$\|y(t)\|^2 \le \|y(s)\|^2 e^{-\delta_1(t-s)} + C\int\limits_s^t e^{-\delta_1(t-p)} u^2(p)dp \le$$

$$\le \|y(s)\|^2 e^{-\delta_1(t-s)} + C\|u\|_U^2, \tag{9}$$

$$\int\limits_s^t \|y(p)\|^2 dp \le \frac{1}{\delta_1}\left(\|y(s)\|^2 + C\int\limits_s^t u^2(p)dp\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta_1}\left(\|y(s)\|^2 + C\|u\|_U^2\right). \tag{10}$$

З цих оцінок випливає, що $J(y,u) < \infty$. Нехай $\widetilde{J}_{\varepsilon}$ — значення задачі (1)–(3). Виберемо $\{u_n\} \subset U$ так, щоб $J(y_n, u_n) \le \widetilde{J}_{\varepsilon} + \dfrac{1}{n}$. Тоді $\|u_n\|_U^2 \le \widetilde{J}_{\varepsilon} + 1$

$\forall n \geq n_0$. Отже, $\exists \widetilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності $u_n \xrightarrow{w} \widetilde{u}$ в $L^2(0,T)$ $\forall T > 0$.

Надалі будемо позначати $y = I_\varepsilon(y_0, u)f$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon f(t) + g u(t), \ t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{11}$$

де $f(t) \in F(y(t))$ майже скрізь. Тоді $y_n = I_\varepsilon(y_0, u_n) f_n$, $f_n(t) \in F(y_n(t))$ майже скрізь і за умовою 3 і оцінкою (9) $\|f_n(t)\| \leq m$ майже скрізь. Тоді з [7] $f_n \xrightarrow{w} \widetilde{f}$ в $L^2(0,T;H)$, $y_n \to \widetilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\widetilde{y} = I_\varepsilon(y_0, \widetilde{u})f$. Відповідно до теореми Мазура [10]: $f(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}_H \left(\mathrm{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right)$ майже скрізь.

Отже, з умови 2 $f(t) \in F(\widetilde{y}(t))$ майже скрізь. Таким чином, $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ — допустимий процес у задачі (1)–(3) та з нерівності $J(y_n, u_n) \geq$ $\geq J_T(y_n, u_n) := \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T u_n^2(t) dt$ маємо $\forall T > 0$

$$\widetilde{J}_\varepsilon \geq \varliminf_{n\to\infty} J_T(y_n, u_n) \geq \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T u_n^2(t) dt \geq J_T(\widetilde{y}, \widetilde{u}).$$

Тому $\widetilde{J}_\varepsilon = J(\widetilde{y}, \widetilde{u})$, отже, $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3). Лему доведено.

Оскільки $y \mapsto u[y]$ — неперервне, $|u[y]| < \dfrac{\delta}{\|g\|}\|y\|$, то згідно з [7] задача (4) має розв'язок, причому справедливі такі оцінки з константами $\delta_2 > 0$, $\widetilde{C} > 0$, які не залежать від ε: $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \ \ \forall t \geq s \geq 0$

$$\|y(t)\|^2 \leq e^{-\delta_2(t-s)} \|y(s)\|^2, \ \ |u[y(t)]| \leq \widetilde{C} \|y(t)\|, \tag{12}$$

із яких, зокрема, маємо, що $J(y, u[y]) < \infty$.

Теорема. Нехай виконані умови 1–5, а також (7)–(8), $\{\widetilde{y}^\varepsilon, \widetilde{u}^\varepsilon\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3), $\widetilde{J}_\varepsilon = J(\widetilde{y}^\varepsilon, \widetilde{u}^\varepsilon)$, $\hat{y}^\varepsilon$ — розв'язок задачі (4), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon, u[\hat{y}^\varepsilon])$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\widetilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon| = 0. \tag{13}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\hat{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$, де $J_0 = J(\widetilde{y}, \widetilde{u})$, $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ — єдиний оптимальний процес у задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

Нехай $\hat{y}^{\varepsilon}$ — розв'язок задачі (4), $\hat{y}^{\varepsilon} = I_{\varepsilon}(y_0, u[\hat{y}^{\varepsilon}])f_{\varepsilon}$, $f_{\varepsilon}(t) \in \in F(\hat{y}^{\varepsilon}(t))$ майже скрізь. З оцінок (12) і умови 3 випливає, що $\|f_n(t)\| \le m$ майже скрізь. Тоді з [7] отримаємо, що $\hat{y}^{\varepsilon} \to \hat{y}$ в $u[\hat{y}^{\varepsilon}(t)] \to u[\hat{y}(t)]$ $\forall t \in [0,T]$, тобто $\hat{y}$ — розв'язок задачі при $\varepsilon = 0$. В силу максимальної монотонності $\partial\varphi$ [3] задача (4) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок. Тому згідно з (7) $J_0 = J(\hat{y}, u[\hat{y}])$, тобто $\{\hat{y}, u[\hat{y}]\}$ — оптимальний процес в (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

З оцінок (12) маємо, що $\forall t \ge 0$

$$\left\|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^{\varepsilon}(t)] \le e^{-\delta_2 t}\|y_0\|^2(1+\widetilde{C}^2).$$

Оскільки $\forall t \ge 0$ $\left\|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\right\| \to \|\hat{y}(t)\|$, $u^2[\hat{y}^{\varepsilon}(t)] \to u^2[\hat{y}(t)]$ при $\varepsilon \to 0$, то за теоремою Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{J}_{\varepsilon} = J(\hat{y}, u[\hat{y}]) = J_0. \tag{14}$$

Покажемо, що $\widetilde{J}_{\varepsilon} \to J_0$, $\varepsilon \to 0$. Нехай $\widetilde{J}_{\varepsilon} = J(\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon})$, де $\{\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon}\}$ — оптимальний процес в (1)–(3).

Припустимо, що z^{ε} — розв'язок задачі (1) з керуванням $u = 0 \in U$. Тоді з оптимальності $\widetilde{u}^{\varepsilon}$ маємо:

$$\left\|\widetilde{u}^{\varepsilon}\right\|_U^2 \le \frac{1}{\gamma}J(\hat{u}^{\varepsilon}) \le \frac{1}{\gamma}\int_0^{+\infty}\left\|z^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \le \frac{\|y_0\|^2}{\gamma\delta_1}. \tag{15}$$

Повторюючи попередні міркування, випливає, що існує $\widetilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності $\forall T > 0$ $\widetilde{u}^{\varepsilon} \xrightarrow{w} \widetilde{u}$ в $L^2(0,T)$, $\widetilde{y}^{\varepsilon} \to \widetilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\widetilde{y}$ — розв'язок задачі (1) з $\varepsilon = 0$, $u = \widetilde{u}$. Зокрема, $\forall T > 0$

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_{\varepsilon} \ge \varliminf_{\varepsilon\to 0} J_T(\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon}) \ge J_T(\widetilde{y}, \widetilde{u}),$$

тобто

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_{\varepsilon} \ge J(\widetilde{y}, \widetilde{u}). \tag{16}$$

За принципом оптимальності Беллмана $\forall T > 0$ процес $\{\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon}\}$ на $[T, \infty)$ є оптимальним для задачі (1)–(3) із початковими даними $(T, \widetilde{y}^{\varepsilon}(T))$. Отже,

$$\int_T^{+\infty}\left\|\widetilde{y}^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt + \gamma\int_T^{+\infty}|\widetilde{u}^{\varepsilon}(t)|^2\, dt \le \int_T^{+\infty}\left\|p^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt, \tag{17}$$

де p^{ε} — розв'язок задачі (1) на $[T, +\infty)$ з керуванням $u = 0$ та початковими даними $(T, \widetilde{y}^{\varepsilon}(T))$. З (9), (10) маємо:

$$\int_T^{+\infty} \left\| p^\varepsilon(t) \right\|^2 dt \le \frac{1}{\delta_1} \left\| \widetilde{y}^\varepsilon(T) \right\|^2. \tag{18}$$

Тепер зафіксуємо $u \in U$ і відповідний розв'язок w^ε задачі (1). Тоді аналогічно попереднім міркуванням $\forall T > 0$ $w^\varepsilon \to w$ в $C([0,T];H)$, де $w \in C([0,+\infty); L^2(\Omega)$ — розв'язок задачі (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням u. Крім того,

$$\int_T^{+\infty} \left\| w^\varepsilon(t) \right\|^2 dt \le \frac{1}{\delta_1} \left(\left\| w^\varepsilon(T) \right\|^2 dt + C \int_T^{+\infty} u^2(t) dt \right). \tag{19}$$

Тоді з нерівності $\widetilde{J}_\varepsilon \le J(w,u)$ та оцінок (17)–(19) для $\forall T > 0$ маємо:

$$J_T(\widetilde{y}^\varepsilon, \widetilde{u}^\varepsilon) \le \int_0^T \left\| w^\varepsilon(t) \right\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t) dt + \frac{1}{\delta_1} \left\| w^\varepsilon(T) \right\|^2 + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} u^2(t) dt. \tag{20}$$

Звідси

$$J_T(\widetilde{y}, \widetilde{u}) \le \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} J_T(\widetilde{y}^\varepsilon, \widetilde{u}^\varepsilon) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta_1} \left\| w(T) \right\|^2 + \int_0^T \left\| w(t) \right\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t) dt + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} u^2(t) dt. \tag{21}$$

Тоді при $T \to \infty$ маємо, що $J(\widetilde{y}, \widetilde{u}) \le J(w,u)$ $\forall u \in U$.

Отже, $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ — оптимальний процес у задачі (1)–(3) із $\varepsilon = 0$. Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u = \widetilde{u}$. Тоді внаслідок єдиності $\widetilde{w}^\varepsilon \to \widetilde{y}$ в $C([0,T];H)$ і маємо оцінку

$$\gamma \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}^\varepsilon(t)|^2 \, dt \le \int_0^{+\infty} \widetilde{u}^2(t) dt + \frac{1}{\delta_1} |\widetilde{y}(T)|^2 + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} \widetilde{u}^2(t) dt, \tag{22}$$

з якої при $T \to \infty$ маємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}^\varepsilon(t)|^2 \, dt \le \int_0^{+\infty} \widetilde{u}^2(t) dt.$$

Таким чином, $\widetilde{u}^\varepsilon \to \widetilde{u}$ в $L^2(0, +\infty)$ і оскільки

$$\widetilde{J}_\varepsilon \le J_T(\widetilde{y}^\varepsilon, \widetilde{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\delta_1} \left\| \widetilde{y}^\varepsilon(T) \right\|^2,$$

то

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \widetilde{J}_\varepsilon \le J_T(\widetilde{y}, \widetilde{u}) + \frac{1}{\delta_1} \left\| \widetilde{y}(T) \right\|^2.$$

Отже, при $T \to \infty$ одержуємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \widetilde{J}_\varepsilon \le J(\widetilde{y}, \widetilde{u}) = J_0,$$

що разом із (16) гарантує збіжність $\widetilde{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$. Припускаючи від супротивного, що збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon \to 0$, можемо повторити попередні міркування і, внаслідок єдиності оптимального процесу $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$, дійти до протиріччя. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянено задачу оптимальної стабілізації для еволюційного включення субдиференціального типу з нелінійним доданком $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр. Доведено, що вихідна задача має розв'язок за певних умов, накладених на параметри. За умови, що при $\varepsilon = 0$ задача допускає оптимальний регулятор, обґрунтовано, що такий регулятор забезпечує наближену стабілізацію вихідної задачі при малих $\varepsilon > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с фр. Л.Р. Волевича. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 382 с.
3. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. — Leyden: Noordhoff, 1976. — 360 p.
4. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — К.: Наук. думка, 1988. — 288 с.
5. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — К.: Наук. думка, 2004. — 588 с.
6. *Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O.* Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing. — NY.: Springer, 2011. — 250 p.
7. *Kapustya O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — К.: Наук. думка, 2008. — 215 p.
8. *Ясінський В.В., Капустян О.А.* Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2009. — № 4. — С. 109–116.
9. *Капустян О.А.* Задача наближеної стабілізації для параболічного включення // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 1. — С. 62–67.
10. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 623 с.

Надійшла 26.12.2011