

## ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ

С.С. ФЕДИН, Н.А. ЗУБРЕЦКАЯ

Разработан метод интервальной оценки качества изделий, отличительной особенностью которого является получение весовых коэффициентов обобщенного показателя с использованием нечетких функций принадлежности гауссового типа. Их использование позволяет повысить точность и достоверность принятия решения при определении категории качества изделий различного целевого назначения в соответствии с вербально-числовой шкалой функции желательности Харрингтона.

### ВВЕДЕНИЕ

При решении задач количественного оценивания качества изделий широкое применение получили методы обобщенной оценки. Среди множества таких методов одним из наиболее эффективных является метод получения обобщенного показателя качества изделий на основе функции Харрингтона, в основу которого положено преобразование натуральных значений единичных показателей качества в безразмерную шкалу желательности [1]. В работах [2, 3] показано, что при таком подходе достигается повышение точности и достоверности оценки качества изделий по обобщенному показателю.

Однако нелинейность функции желательности Харрингтона приводит к погрешности точечной и интервальной оценок обобщенного показателя качества и неопределенности выходной информации о качестве изделий. Наличие неопределенности затрудняет принятие решения об уровне качества изделия и обуславливает проблему, в соответствии с которой результат обобщенной оценки с одинаковой значимостью можно отнести к различным качественным категориям шкалы желательности [4].

Эффективным инструментом решения этой проблемы является нечеткое моделирование, так как качественные категории шкалы желательности «Очень плохо», «Плохо», «Удовлетворительно», «Хорошо» и «Отлично» характеризуются также интервальными оценками и могут быть заданы в виде нечетких термов с соответствующими нечеткими функциями принадлежности. Использование таких термов позволяет для каждой оценки обобщенного показателя определить весовой коэффициент и разрешить ситуацию неопределенности.

**Цель работы** — разработка метода интервальной оценки качества изделий, позволяющего обеспечить точность и достоверность классификации изделий по обобщенному показателю в соответствии с вербально-числовой шкалой функции желательности Харрингтона.

## ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОЙ И ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНОК ОБОБЩЕННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ

Получение обобщенной оценки качества изделий основано на создании искусственной метрики, количественно определяющей качество изделий через допусковые значения их единичных показателей, значения которых представлены в безразмерном виде [3]. В работе [5] показано, что построение этой метрики связано с асимптотическим распределением экстремальных значений показателей качества изделий, которое можно получить на основе порядковых статистик. Порядковые статистики являются членами вариационного ряда, построенного по результатам наблюдений. Если упорядочить по возрастанию результаты  $n$  наблюдений, получим порядковые статистики  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где порядковая статистика  $x_1$  имеет наименьшее значение, а  $x_n$  — наибольшее.

Так как все наблюдения независимые, то вероятность того, что все  $n$  элементов выборки из совокупности с известной функцией распределения  $F(x)$  окажутся меньше некоторого значения  $x$ , равна  $[F(x)]^n$ . Такую же вероятность  $\Phi_n(x)$  имеет наибольшее значение наблюдения среди  $n$  независимых наблюдений:

$$\Phi_n(x) = [F(x)]^n.$$

Свойства функции  $\Phi_n(x)$  зависят от вида функции  $F(x)$ , когда  $x$  принимает большие значения. При увеличении  $n$  кривая  $\Phi_n(x)$  сдвигается вправо и актуальной задачей является нахождение асимптотической формы данной кривой.

Асимптотическая теория экстремальных значений имеет два подхода [6]: первый основан на асимптотических свойствах крайних значений заданного исходного распределения и решает задачу сходимости распределения наибольшего значения выборки к определенному выражению; второй подход основан на том, что значения выборки объемом  $n$  из совокупности наибольших значений распределены так же, как и эта совокупность. Для второго подхода доказано, что класс предельных распределений экспоненциального вида, к которым относят нормальное, логистическое, гамма-распределение и ряд других неограниченных слева распределений, удовлетворяющих условиям теоремы Б.В. Гнеденко [6] с использованием нормализованного наибольшего члена выборки  $x_n$ , имеет вид:

$$\Phi_*(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1)$$

Следствием этой теоремы является то, что распределение экстремальных значений можно линейно преобразовать в непараметрическое выражение. Поскольку нормализованное асимптотическое распределение (1) не имеет параметров, то его можно применить для перехода от значения показателя качества к вероятности, с которой определяется качество изделия. В этом случае формула (1) предполагает использование наибольшего значения измеряемой величины и позволяет получить нижнюю границу оценки распределений экспоненциального вида.

Для получения асимптотических распределений наименьшего значения выборки можно воспользоваться принципом симметрии, в соответствии с которым распределение называется симметричным относительно медианы:

$$F(-x) = 1 - F(x); f(-x) = f(x), \quad (2)$$

где  $F(x)$  — распределение генеральной совокупности с плотностью  $f(x) = F'(x)$ .

В теории экстремальных значений вводится понятие взаимной симметрии двух распределений в виде обобщения зависимостей (2):

$$F_1(-x) = 1 - F_2(x); f_1(-x) = f_2(x). \quad (3)$$

Для симметричного исходного распределения экстремальные значения распределены взаимно симметрично, поэтому, зная распределение наибольшего значения по зависимостям (3), можно получить распределение наименьшего значения. Так асимптотическое распределение наименьшего значения имеет вид:

$$\Phi^*(x) = 1 - \exp(-\exp(x)). \quad (4)$$

Использование наименьшего значения измеряемой величины позволяет по формуле (4) получить верхнюю границу оценки распределений экспоненциального вида, а на основе формулы среднего значения можно получить точечную оценку:

$$\Phi(x) = \frac{(\exp(-\exp(-x)) + 1 - \exp(-\exp(x)))}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, асимптотические распределения могут служить интервальной оценкой качества изделия при фиксированном значении  $x$ , а среднее их значений — точечной оценкой качества.

Для получения гарантированной интервальной оценки качества изделия по каждому единичному показателю найдем ограничения для  $x$  при условии, что минимальная нижняя оценка качества (1) и максимальная верхняя оценка качества (4) могут иметь значения, равные 0,0001 и 0,9999 соответственно. В результате решения уравнений вида:

$$\exp(-\exp(-x)) = 0,0001,$$

$$1 - \exp(-\exp(x)) = 0,9999$$

получим значение  $x = 2,22032$  и практический интервал изменения значения  $x \in (-2,22; 2,22)$ , характеризующий гарантированную (с точностью равной 99,99 %) интервальную оценку единичного показателя качества.

Для преобразования единичных показателей качества с различной размерностью в безразмерную величину  $\lambda$  применим аффинные преобразования, позволяющие разделить отрезок  $[a; b]$  в заданном отношении:

$$\lambda = \frac{x - a}{b - a}. \quad (6)$$

Выполняя ряд преобразований, используя формулу (6) и гарантированную интервальную оценку по каждому единичному показателю  $x$ , получим:

$$x = \frac{-2,22 + 2,22\lambda}{1 + \lambda}. \quad (7)$$

Применяя формулы (1), (4) и (5) и найденное по формуле (7) значение  $x$ , находим интервальную и точечную оценку единичного показателя качества изделия. При этом обобщенный показатель качества изделий  $R$  оценивается по формуле среднего геометрического точечной и интервальной оценок единичных показателей:

$$R = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^N \Phi_j}. \quad (8)$$

где  $\Phi_j$  — значение точечной и интервальной оценок  $j$ -ого единичного показателя качества.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТОЧЕЧНОЙ И ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНОК ОБОБЩЕННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

На основе применения изложенного подхода с использованием формулы (8) получены точечная и интервальная оценки качества электронных тахеометров фирмы SOKKIA (табл. 1) [2]. Анализ результатов оценки качества электронных тахеометров показал, что использование точечной и интервальной оценки в процессе принятия решения относительно классификации изделий может привести к неопределенности: изделие в одинаковой мере может быть отнесено к двум различным категориям качества — «Удовлетворительно»/«Хорошо».

**Таблица 1.** Результаты обобщенной оценки качества электронных тахеометров

Оценка Фирма	Нижняя граница оценки	Точечная средняя оценка	Верхняя граница оценки	Интервальная качественная оценка
SOKKIA	0,528	0,665	0,796	«Удовлетворительно»/ «Хорошо»

Для повышения достоверности принятия решений относительно классификации изделий по уровню качества в соответствии с категориями шкалы желательности функции Харрингтона предлагается для каждой оценки функции желательности определять весовые коэффициенты. Поскольку функция Харрингтона характеризует предельные распределения случайных величин, соответствующих закону распределения экспоненциального вида (в частности закону нормального распределения), то весовые коэффициенты вычисляли по нечеткой функции принадлежности гауссового типа, использование которой обеспечивает получение гладких непрерывно дифференцируемых гиперповерхностей отклика нечеткой модели [7, 8]:

$$\mu(R) = \exp\left[\frac{-(R - a)^2}{2b^2}\right], \quad (9)$$

где  $R$  — значение точечной оценки обобщенного показателя качества изделий;  $a$  — граничное значение обобщенного показателя качества, т.е. каждого нечеткого термина шкалы желательности Харрингтона;  $b$  — параметр ширины функции принадлежности каждого нечеткого термина. Используемое значение параметра  $b=1/6$  означает, что 99 % значений распределения точечной и интервальной оценок обобщенного показателя находятся между минимальным (0) и максимальным (1) значениями шкалы желательности функции Харрингтона.

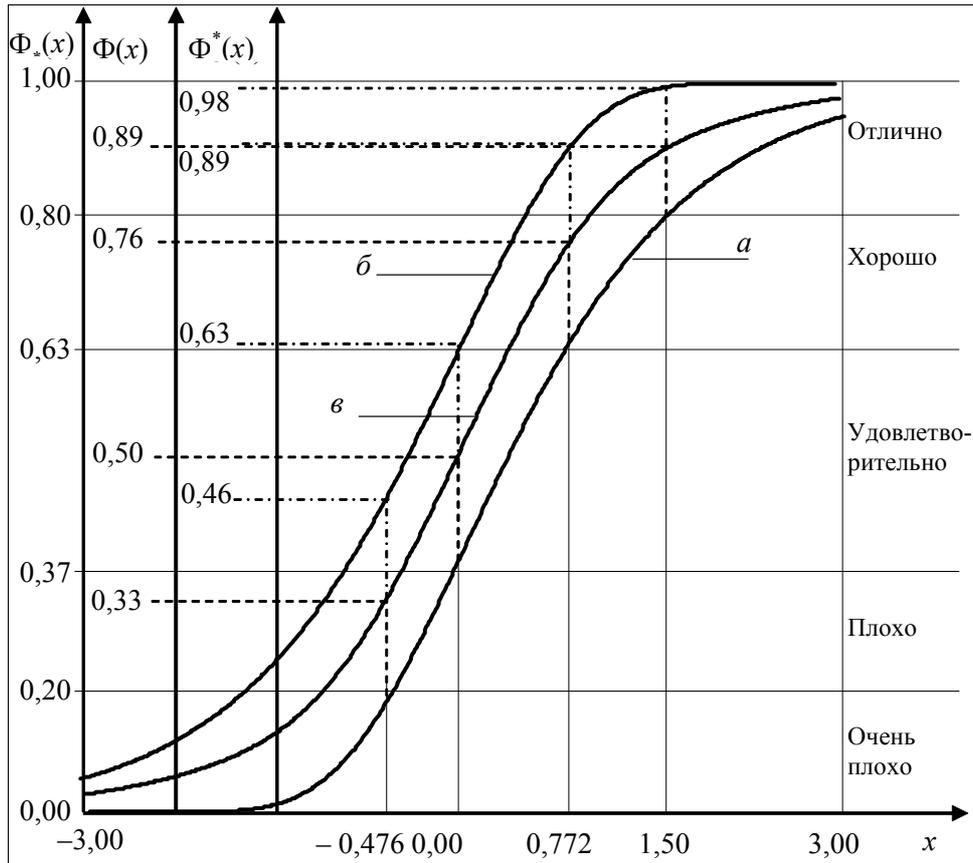


Рис. 1. Асимптотические распределения экспоненциального вида для наибольшего ( $a$ ), наименьшего ( $b$ ) и среднего ( $e$ ) значений выборки

Для нижней оценки обобщенной функции желательности граничные значения соответствуют принятым категориям качества в интервалах:  $[0,00; 0,20]$  — «Очень плохо»;  $[0,20; 0,37]$  — «Плохо»;  $[0,37; 0,63]$  — «Удовлетворительно»;  $[0,63; 0,80]$  — «Хорошо»;  $[0,80; 1,00]$  — «Отлично» [4]. Соответствующие предельные значения средней и верхней оценок обобщенной функции рассчитаны в системе математического моделирования MathCAD (рис. 1):

- для средней оценки —  $[0,00; 0,33]$ ;  $[0,33; 0,50]$ ;  $[0,50; 0,76]$ ;  $[0,76; 0,89]$ ;  $[0,89; 1,00]$ ;
- для верхней оценки —  $[0; 0,46]$ ;  $[0,46; 0,63]$ ;  $[0,63; 0,89]$ ;  $[0,89; 0,98]$ ;  $[0,98; 1,00]$ .

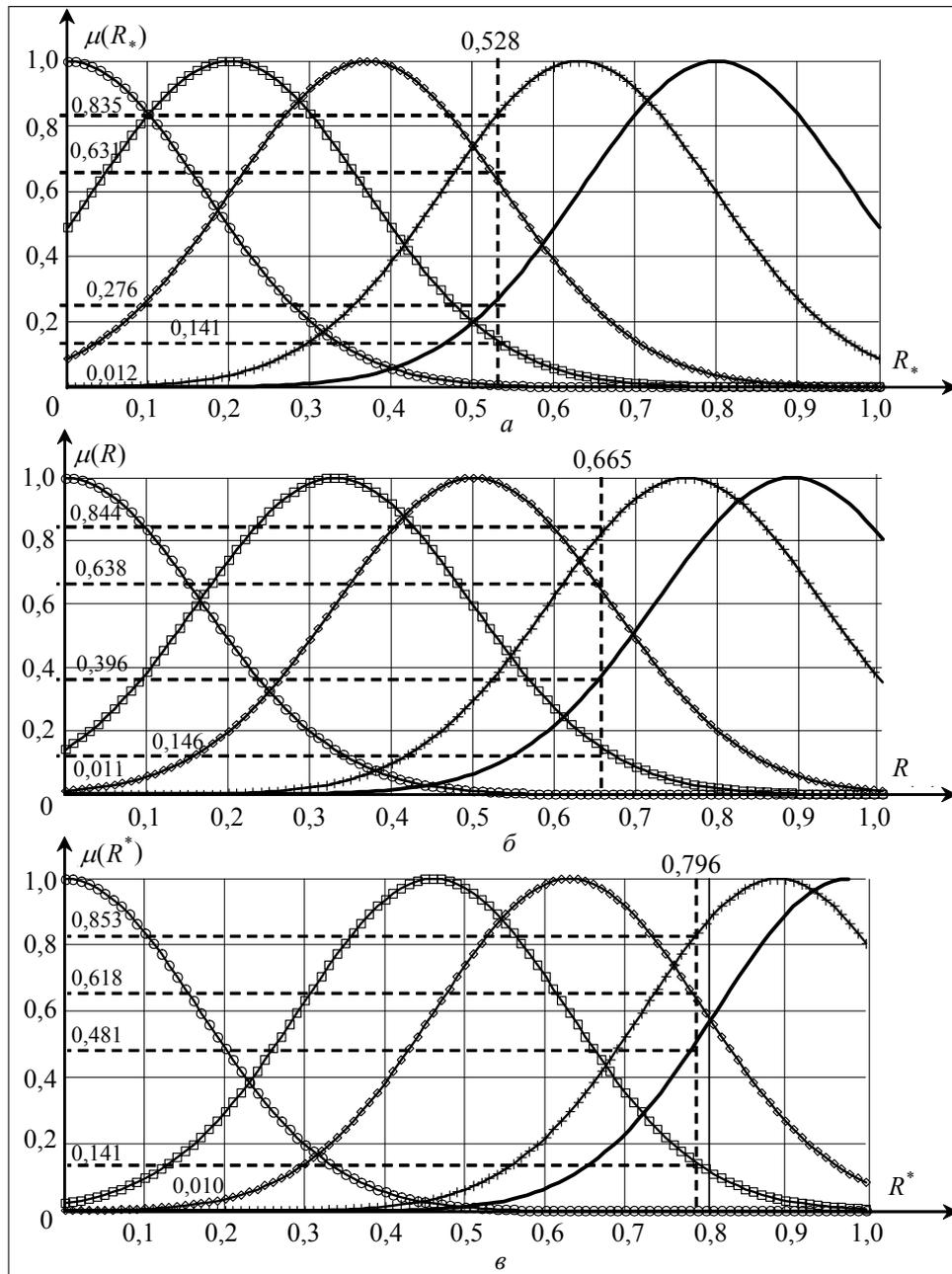


Рис. 2. Функции принадлежности для выбора весовых коэффициентов нижней ( $a$ ), средней ( $\bar{b}$ ) и верхней ( $\hat{b}$ ) оценок обобщенного показателя качества изделий, где — «очень плохо», — «плохо», — «удовлетворительно», — «хорошо», — «отлично».

Используя граничные значения, по формуле (9) построены функции принадлежности точечной  $R$  и интервальной оценок  $R_*$  и  $R^*$  обобщенного показателя качества для всех термов шкалы желательности функции Харрингтона (рис. 2).

Применение полученных функций принадлежности позволяет определить весовые коэффициенты точечной и интервальной оценок обобщенного показателя и получить итоговую оценку качества изделий (табл. 2).

**Таблица 2.** Результат расчета весовых коэффициентов обобщенных оценок

Обобщенная оценка	Нижняя	0,528	Категории качества	Отлично	Весовые коэффициенты	0,276	Итоговая оценка	Хорошо
				Хорошо		<b>0,835</b>		
				Удовлетворительно		0,631		
	Средняя	0,665		Отлично		0,396		Хорошо
				Хорошо		<b>0,844</b>		
				Удовлетворительно		0,638		
	Верхняя	0,796		Отлично		0,481		Хорошо
				Хорошо		<b>0,853</b>		
				Удовлетворительно		0,618		

Анализ полученных результатов (табл. 2) показывает, что использование весовых коэффициентов каждой оценки обобщенного показателя качества позволяет однозначно отнести изделие к категории качества «Хорошо» и тем самым полностью разрешить ситуацию неопределенности. Необходимо отметить, что предложенный метод является универсальным для получения обобщенной оценки качества изделий различного целевого назначения.

## ВЫВОДЫ

Предложен новый метод обеспечения точности оценивания качества изделий, отличительной особенностью которого является получение весовых коэффициентов точечной и интервальной оценок обобщенного показателя качества изделий с использованием нечетких функций принадлежности гауссового типа.

Применение предложенного метода позволяет повысить достоверность принятия решения при определении категории качества изделий различного целевого назначения по обобщенному показателю в соответствии с вербально-числовой шкалой функции желательности Харрингтона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976. — 280 с.
2. Федін С.С., Акользін І.В., Зубрецька Н.А. Комплексне оцінювання якості прецизійних засобів вимірювання геодезичного призначення // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2009. — № 3. — С. 63–67.
3. Fuller D., Scherer W. The Desirability Function: Underlying Assumptions and Applications Implications // IEEE Transactions. — 1998. — № 1. — P. 4016–4021.
4. Федин С.С. Повышение достоверности обобщенной оценки качества сложных изделий // Системы управління, навігації та зв'язку. — 2010. — № 2 (14). — С. 136–140.
5. Ефимов А.Н. Порядковые статистики — их свойства и приложения. — М.: Знание, 1980. — 64 с.
6. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1949. — 264 с.
7. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. — М.: Горячая линия. — Телеком, 2007. — 284 с.
8. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 798 с.

Поступила 22.03.2011