УДК 519.6

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА

Л.Л. ГАРТ

Досліджено питання про застосування проекційно-ітераційного підходу до розв'язання некоректних інтегральних рівнянь Вольтера I-го роду. Проведено порівняльний аналіз запропонованих обчислювальних схем із використанням різних способів вибору параметра регуляризації, демонструється їх практична збіжність на прикладі розв'язання конкретних задач.

ВСТУП

Дослідження багатьох складних явищ та об'єктів шляхом складання та вивчення їх математичного опису (моделей) отримує все більшого розповсюдження, охоплюючи багато напрямів у фізиці, біології, економіці, соціології та інших науках. Значне місце в такому підході належить інтегральним рівнянням. В останні десятиліття спостерігається значне розширення області застосування інтегральних рівнянь I-го роду типу Вольтера. До кола численних природничо-наукових застосувань цього класу рівнянь входять, наприклад, такі задачі [1]:

- про розподіл мас у галактиках при відомому законі обертання;
- визначення локальної випромінювальної властивості плазми за її інтегральною інтенсивністю випромінювання;
- відновлення сигналу, прийнятого динамічною системою;
- автоматичного регулювання.

Базові поняття та методи розв'язання некоректних задач, як відомо, було запроваджено московською школою академіка А.М. Тихонова та новосибірською школою академіка М.М. Лаврентьєва. Зокрема, необхідно відмітити роботу [2], в якій подано стійкі методи для розв'язання задач у різних областях математики (оптимальне планування, оптимальне керування, сумування рядів Фур'є, інтегральні рівняння першого роду типу згортки, системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та операторні рівняння). Роботи А.М. Тихонова, в яких подано поняття регуляризуючого оператора або алгоритму, а також сформульовано один з найефективніших методів розв'язання некоректних задач (серед методів, які використовують мінімальну апріорну інформацію про розв'язок — лише його гладкість) — метод α-регуляризації Тихонова, роботу [3], в якій запроваджено поняття умовної коректності або коректності за Тихоновим, запропоновано низку регуляризаційних схем розв'язання: метод α-регуляризації та метод ітерацій, зокрема, їх реалізація на компакті. Варто звернути увагу на роботу В.М. Фрідмана, яка поклала початок методам ітеративної регуляризації з параметром регуляризації — числом ітерацій, яке визначається, наприклад, способом узагальненої нев'язки з використанням значень похибки правої частини та оператора.

Вагомий внесок у розробку теорії некоректних задач зробили В.А. Морозов, В.Ю. Кудринський, В.К. Іванов, І.Н. Домбровська та інші автори, які застосували до розв'язання некоректних задач проекційні методи (типу Рітца, Гальоркіна та ін.) спільно з методами регуляризації, квазірозв'язків та нев'язки. У роботах цих авторів знайшов своє строге обґрунтування спосіб нев'язки розв'язання некоректних задач, ідея якого до цього була висловлена без доведення Філліпсом, а також Л.В. Канторовичем. У роботі [1] досліджуються питання теорії умовно-коректних задач та стійкості різницевих схем і подано декілька обернених задач у різницевій та неперервній постановках. Необхідно відмітити також роботи А.Б. Бакушинського й А.В. Гончарського, присвячені ітеративним методам розв'язання некоректних задач та їх застосуванню до розв'язання прикладних задач.

Стійкі методи розв'язання некоректних задач викладені у багатьох монографіях та публікаціях. Однак у них більше уваги приділяється інтегральним рівнянням Фредгольма I-го роду, а інтегральні рівняння Вольтера I-го роду лише згадуються як такі, що можуть бути некоректними. Недостатньо уваги приділено доведенню методів їх розв'язання до практичних алгоритмів та особливо до машинних програм.

У цій роботі вперше досліджено можливість застосування проекційно-ітераційного підходу до розв'язання некоректних інтегральних рівнянь Вольтера I-го роду, який полягає в модифікації класичного методу α-регуляризації Тихонова та дозволяє замінити регуляризоване інтегральне рівняння деякою послідовністю простіших апроксимуючих його скінченновимірних задач на сукупності сіток, що роздрібнюються. Для кожної з «наближених» задач за допомогою деякої ітераційної процедури будується лише декілька наближень до розв'язку, останнє з яких з використанням кусково-лінійної інтерполяції береться за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної «наближеної» задачі. Послідовність лінійних інтерполянтів побудованих наближених розв'язків оголошується послідовністю наближень до розв'язку вихідного інтегрального рівняння.

Слід відзначити, що загальна ідея проекційно-ітераційних методів для розв'язання операторних рівнянь та задач мінімізації в абстрактних просторах належить С.Д. Балашовій [4], у роботах якої ці методи знайшли своє строге теоретичне обґрунтування та застосування до розв'язання різних конкретних класів математичних задач, а нині продовжують розвиватися в роботах її учнів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Лінійне одновимірне інтегральне рівняння Вольтера I-го роду має вигляд:

$$A\,y \equiv \int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x)\,, \quad a \le x \le b\,, \tag{1}$$

де $K(x,s)$ — ядро інтегрального рівняння, $f(x)$ — вільний член, $y(x)$ — шуканий розв'язок рівняння.

Задача розв'язання рівняння Вольтера I-го роду є у певному сенсі проміжною між задачами розв'язання рівнянь Вольтера II-го роду та Фредгольма I-го роду. Якщо задача розв'язання рівняння Вольтера II-го роду є коректною та ефективно розв'язується класичними методами (квадратур, ітерацій тощо), а задача розв'язання рівняння Фредгольма I-го роду є некоректною в будь-яких «розумних» функціональних просторах і вирішується спеціальними методами (регуляризації, квазірозв'язків тощо), то задача розв'язання рівняння Вольтера I-го роду може бути коректною чи некоректною залежно від того, в яких просторах вона розглядається, і яким методом розв'язується. Відомо, наприклад, що задача розв'язання рівняння (1) під час виконання умов:

$$\left.\begin{aligned} K(x,s) \in C^{(n)}([a,b]\times[a,b]), \quad n \ge 1; \\ K(x,x) = K'(x,x) = \ldots = K^{(n-2)}(x,x) = 0, \ \min_{x\in[a,b]} \left|K^{(n-1)}(x,x)\right| \ne 0; \end{aligned}\right\}$$

$$f(x) \in C^{(n)}[a,b], \ \ f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

є коректною в трійці ($C, V, C^{(n)}$), де $y(s) \in C[a,b]$, V — інтегральний оператор Вольтера, $f(x) \in C^{(n)}[a,b]$. Якщо ж розглядати трійку ($C, V, C^{(m)}$), $m < n$, то задача стає некоректною. Крім того, навіть у тих просторах, де вона коректна, може бути певна нестійкість розв'язку.

Мета роботи — розробка проекційно-інтераційних алгоритмів розв'язання некоректних інтегральних рівнянь Вольтера, дослідження їх практичної збіжності та ефективності на прикладі розв'язання конкретних задач.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зазначені особливості рівняння Вольтера I-го роду дозволяють використовувати для його розв'язання як класичні методи (наприклад, метод квадратур, причому сама процедура дискретизації в цьому методі володіє регуляризуючою властивістю, якщо зв'язати крок дискретизації з помилкою вихідних даних), так і спеціальні методи регуляризації [5].

Ідея методу регуляризації Тихонова для розв'язання рівняння (1) з $K(x,s) \in L_2([a,b]\times[a,b])$, $f(x) \in L_2[a,b]$, $y(s) \in W_2^{(1)}[a,b]$ полягає в тому [2], що для забезпечення стійкості розв'язку рівняння (1) пропонується умова мінімуму так званого «згладжуючого» функціонала

$$\Phi(\alpha, y, f) = \int_a^b \left[A\,y - f(x)\right]^2 dx + \alpha\Omega[y] \to \min_{y\in W_2^{(1)}} . \tag{2}$$

Тут $\alpha > 0$ — параметр регуляризації, для визначення якого існують різні способи (нев'язки, відносної похибки, квазіоптимальний та ін. [6]), $\Omega[y]$ — стабілізуючий функціонал, який зазвичай обирається у вигляді:

$$\Omega[y] = \int_a^b (y^2(s) + q\left[y'(s)\right]^2)\, ds , \tag{3}$$

причому величина $q \ge 0$ визначає порядок регуляризації (нульовий при $q = 0$ та перший при $q > 0$). Розкриття умови (2) із використанням виразу

(3) та врахуванням вольтеровості рівняння (1) призводить до інтегро-диференціального рівняння II-го роду типу Фредгольма

$$\alpha\,[y(t) - q\,y''(t)] + \int_a^b B(t,s)\,y(s)\,ds = F(t)\,, \quad a \le t \le b\,, \tag{4}$$

задача розв'язання якого вже є коректною. У цьому рівнянні

$$B(t,s) = \int_{\max\{t,s\}}^{b} K(x,t)\,K(x,s)\,dx\,, \quad F(t) = \int_t^b K(x,t)\,f(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Найвжиливішим способом визначення параметра регуляризації α в тому випадку, якщо замість точної правої частини $f(x)$ вихідного рівняння (1) задана функція $\widetilde{f}(x) \in L_2[a,b]$ така, що $\left\| f - \widetilde{f} \right\|_{L_2[a,b]} \le \delta$ є спосіб нев'язки, згідно з яким за шукане значення обирається таке α, за яким

$$\left\| A\,y_\alpha - \widetilde{f} \right\|_{L_2[a,b]} = \delta\,, \tag{6}$$

де $y_\alpha(t)$ — розв'язок рівняння (4) при відповідному значенні α. Співвідношення (6) можна трактувати як рівняння щодо α, яке при визначених умовах має єдиний розв'язок [2]. На практиці, щоб уникнути необхідності розв'язання цього рівняння, часто обирають ряд значень $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$, пов'язаних співвідношенням $\alpha_i = \theta\,\alpha_{i-1}$, $0 < \theta < 1$, для кожного з яких обчислюють розв'язок $y_{\alpha_i}(t)$ рівняння (4) та нев'язку $\left\| A\,y_{\alpha_i} - \widetilde{f} \right\|_{L_2[a,b]}$. За оптимальне значення α_{opt} обирають таке α_i, для якого з найбільшим ступенем точності виконується наближена рівність $\left\| A\,y_{\alpha_i} - \widetilde{f} \right\|_{L_2[a,b]} \approx \delta$.

Спосіб відносної похибки визначення параметра регуляризації не потребує знання похибки δ правої частини вихідного рівняння. Згідно з цим способом за шукане значення обирають таке α_i із ряду значень $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$, для якого величина $\dfrac{\left\| y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}} \right\|}{\left\| y_{\alpha_i} \right\|}$ набуває найменшого значення.

Одним із найефективніших методів розв'язання рівняння (4) є сполучення методів скінченних сум та різниць.

Нехай права частина $f(x)$ вихідного рівняння (1) задана таблицею своїх значень на нерівномірній x-сітці вузлів

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_M = b\,,$$

а розв'язок $y_\alpha(s)$ шукається на іншій нерівномірній s-сітці вузлів

$$a = s_1 < s_2 < \ldots < s_N = b\,,$$

причому t-сітка в рівнянні (4) збігається із s-сіткою. Якщо інтеграли в (4), (5) розписати за квадратурною формулою трапецій зі змінним кроком, а $y''_\alpha(t)$ апроксимувати різницевою похідною, отримаємо наступний дискретний аналог рівняння (4) (опускаючи тимчасово індекс α в $y(t)$):

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\left(y_1 - q\frac{y_2 - y_1}{r_1 h_2}\right) + \sum_{j=1}^{N} r_j \sum_{i=1}^{M} p_i K_{i1} K_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{M} p_i K_{i1} f_i\,,\\
&\alpha\left\{y_k - \frac{q}{r_k}\left[\frac{y_{k-1}}{h_k} - \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}}\right) y_k + \frac{y_{k+1}}{h_{k+1}}\right]\right\} +\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{N} r_j \sum_{i=1}^{M} p_i K_{ik} K_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{M} p_i K_{ik} f_i\,, \quad k = \overline{2, N-1}\,,\\
&\alpha\left(y_N - q\frac{y_N - y_{N-1}}{r_N h_N}\right) + \sum_{j=1}^{N} r_j \sum_{i=1}^{M} p_i K_{iN} K_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{M} p_i K_{iN} f_i\,,
\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

де

$$y_j \approx y_\alpha(t_j)\,,\ K_{ij} = K(x_i, t_j)\,,\ f_i = f(x_i)\,,\ j = \overline{1, N}\,,\ i = \overline{1, M}\,;$$

$$h_j = s_j - s_{j-1}\,,\ j = \overline{2, N}\,;$$

$$r_1 = \frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{h_2}{2}\,,\ r_j = \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2} = \frac{h_{j+1} + h_j}{2}\,,\ j = \overline{2, N-1}\,,$$

$$r_N = \frac{s_N - s_{N-1}}{2} = \frac{h_N}{2}\,;$$

$$p_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}\,,\ p_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}\,,\ i = \overline{2, M-1}\,,\ p_M = \frac{x_M - x_{M-1}}{2}\,.$$

Рівняння (7) утворюють СЛАР відносно y_j, $j = \overline{1, N}$, однак матриця цієї системи у зв'язку з непостійністю коефіцієнтів r_j втрачає властивості симетричності та додатньої визначеності, хоча вихідний інтегро-диференціальний оператор рівняння (4) цими властивостями володів. Для усунення цього недоліку кожний k-й рядок системи (7) домножується на величину $\frac{r_k}{\rho}$, де $\rho = \frac{1}{N}\left(2r_1 + \sum_{j=2}^{N-1} r_j + 2r_N\right)$. Після чого одержана СЛАР із вже симетричною додатньо визначеною матрицею (що, зокрема, гарантує її єдину розв'язність) може бути розв'язана будь-яким відомим методом — як прямим, так й ітераційним. Для усунення цього недоліку кожний k-й рядок системи (7) домножується на величину $\frac{r_k}{\rho}$, де $\rho = \frac{1}{N}\left(2r_1 + \sum_{j=2}^{N-1} r_j + 2r_N\right)$, після чого одержана СЛАР виду

$$\tilde{D}\,\tilde{y} = \tilde{v} \qquad (7')$$

із вже симетричною додатньо визначеною матрицею $\tilde{D}$ (що, зокрема, гарантує її єдину розв'язність), векторами правих частин $\tilde{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ та невідомих $\tilde{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ може бути розв'язана будь-яким відомим методом як прямим, так й ітераційним.

Нескладно показати, що описаний метод зведення інтегрального рівняння (4) до скінченної СЛАР (7′) щодо наближених значень розв'язку $y_\alpha(s)$ у точках розбиття $s_1, s_2 \dots, s_N$, відрізку $[a,b]$ укладається в загальну схему проекційних (апроксимаційних) методів, запропонованих у [7] і розвинутих у [8] для розв'язання лінійних операторних рівнянь II-го роду у банахових просторах. Згідно із цією схемою задача розв'язання рівняння

$$y = T\,y + g \tag{8}$$

з лінійним обмеженим оператором T, заданим у банаховому просторі X, апроксимується послідовністю «наближених» рівнянь

$$\tilde{y}_n = \tilde{T}_n \tilde{y}_n + \tilde{g}_n\,, \;\; n = 1, 2, \dots\,, \tag{9}$$

заданих у деяких банахових просторах $\tilde{X}_n$, ізоморфних підпросторам X_n вихідного простору ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$). При цьому вважається, що існують лінійні оператори Φ_n, що взаємно однозначно відображують X_n на $\tilde{X}_n$, а також лінійні оператори $\overline{\Phi}_n$, що є розширеннями операторів Φ_n на X $(\overline{\Phi}_n(X_n) = \Phi_n(X_n))$, зокрема може бути $\overline{\Phi}_n = \Phi_n P_n$, де P_n — лінійний проектор, що переводить X на X_n ($P_n(X) = X_n$, $P_n y_n = y_n$ для $y_n \in X_n$). Припускається також, що виконуються умови «близькості»

$$\left\| \tilde{T}_n \tilde{y}_n - \overline{\Phi}_n T \Phi_n^{-1} \tilde{y}_n \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\eta}'_n \left\| \tilde{y}_n \right\|_{\tilde{X}_n}, \tag{10}$$

$$\left\| P_n T\,y - T\,y \right\|_X \le \eta''_n \left\| y \right\|_X, \tag{11}$$

$$\left\| P_n g - g \right\|_X \le \eta_n \left\| g \right\|_X \tag{12}$$

для всіх $\tilde{y}_n \in \tilde{X}_n$, $y \in X$, причому $\tilde{\eta}'_n$, η''_{n}, $\eta_{\text{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді за умов існування обмеженого оберненого оператора $(I - T)^{-1}$, якщо $\tilde{g}_n = \overline{\Phi}_n g$ ($n = 1, 2, \dots$) та $\left\|\Phi_n^{-1}\right\| \tilde{\eta}'_n \left\|\Phi_n\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, кожне з рівнянь (9), починаючи з деякого номера $n = n_0$, має єдиний розв'язок $\tilde{y}_n^*$ та послідовність $\{\Phi_n^{-1} \tilde{y}_n^*\}$, $n \ge n_0$ збігається до розв'язку y^* рівняння (8) при $n \to \infty$ [8]. Якщо до того ж послідовність обернених операторів $(I - \tilde{T}_n)^{-1}$, $n \ge n_0$ рівномірно по n обмежена, тобто $\left\|(I - \tilde{T}_n)^{-1}\right\| \le \tilde{C}$ для вказаних номерів n, то виконується умова

$$\left\| \tilde{T}_n \overline{\Phi}_n y^* - \overline{\Phi}_n T\,y^* \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\beta}_n\,, \;\; \beta_{\text{n}} \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty\,, \tag{13}$$

то сама послідовність $\left\{\tilde{y}_n^*\right\}$, $n \ge n_0$ збігається до елемента $\overline{\Phi}_n y^*$ при $n \to \infty$ з оцінкою похибки

$$\left\| \tilde{y}_n^* - \overline{\Phi}_n y^* \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{C} \tilde{\beta}_n\,. \tag{14}$$

Справді, інтегральне рівняння (4) з $q = 0$ можна розглядати як операторне рівняння виду (8) у просторі $X = C[a,b]$ неперервних на відрізку

$[a,b]$ функцій з нормою $\|y\|_X = \max\limits_{a \le s \le b} |y(s)|$, а СЛАР (7′) щодо наближених значень розв'язку рівняння (4) у точках розбиття $s_1, s_2 \ldots, s_N$ відрізку $[a,b]$ можна розглядати як рівняння вигляду (9) у просторі $\widetilde{X}_n = R^{N_n}$ векторів $\widetilde{y}_n = (y_1, y_2, ..., y_{N_n})$ з нормою $\|\widetilde{y}_n\|_{\widetilde{X}_n} = \max\limits_{1 \le j \le N_n} |y_j|$. Підпростори $X_n \subset X$ можна обирати різні для різних квадратурних формул. У випадку квадратурної формули трапецій за X_n природно обрати підпростір неперервних функцій $y_n(s)$, лінійних на кожному з проміжків $[s_j, s_{j+1}]$, $j = \overline{1, N_n - 1}$:

$$y_n(s) = y_j + \frac{s - s_j}{s_{j+1} - s_j}(y_{j+1} - y_j), \quad s_j \le s \le s_{j+1}. \tag{15}$$

Кожна така функція може бути одержана інтерполюванням таблиці значень $y_1, y_2, ..., y_{N_n}$ поліномом першого ступеню на частковому проміжку $[s_j, s_{j+1}]$. Тим самим визначене відображення Φ_n^{-1} простору $\widetilde{X}_n$ на X_n. Оператор Φ_n здійснює обернене відображення: кожній неперервній функції $y_n(s) \in X_n$ виду (15) він ставить у відповідність вектор $\widetilde{y}_n = (y_1, y_2, ..., y_{N_n})$ її значень у вузлах s_j, $j = \overline{1, N_n}$ відрізку $[a,b]$. Що стосується відображення $\overline{\Phi}_n$, то воно кожній функції $y(s) \in C[a,b]$ ставить у відповідність вектор $\widetilde{y}_n = (y(s_1), y(s_2), \ldots, y(s_{N_n}))$, її значень у вузлах $s_1, s_2 \ldots, s_{N_n}$ відрізку $[a,b]$. Легко помітити, що $\|y_n\|_X = \|\widetilde{y}_n\|_{\widetilde{X}_n}$, тобто простори X_n й $\widetilde{X}_n$ ізометричні, звідки, зокрема, випливає, що $\|\Phi_n\| = \|\Phi_n^{-1}\| = 1$. Можна показати так само, як у роботі [9], що умови збіжності проекційного методу щодо рівняння (4) також виконуються.

Розглянемо питання про застосування проекційно-ітераційного підходу до розв'язання інтегрального рівняння (4). Для кожної з «наближених» задач (7′) (або, що те ж саме, «наближених» рівнянь (9), починаючи з деякого номера $n = n_0$) будуватимемо за допомогою деякого ітераційного процесу, визначеного оператором $\widetilde{Q}$, лише декілька (k_n) наближень $\widetilde{y}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots \ldots, k_n$), останнє з яких братимемо з використанням кусково-лінійної інтерполяції за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної, ($n+1$)-ї «наближеної» задачі:

$$\widetilde{y}_n^{(k+1)} = \widetilde{Q}(\widetilde{y}_n^{(k)}; \widetilde{T}_n; \widetilde{g}_n), \quad \widetilde{y}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\, \widetilde{y}_n^{(k_n)}, \tag{16}$$

$$(k = 0, 1, ..., k_n - 1; \quad n \ge n_0; \quad \widetilde{y}_1^{(0)} \in \widetilde{X}_1).$$

Щодо оператора $\widetilde{Q}$ припускатимемо, що він монотонний, тобто для всіх $\widetilde{y}_n \in \widetilde{X}_n$

$$\left\|\widetilde{Q}(\widetilde{y}_n; \widetilde{T}_n; \widetilde{g}_n) - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n} \le \widetilde{q}_n \left\|\widetilde{y}_n - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n}, \quad 0 < \widetilde{q}_n < 1, \tag{17}$$

причому $\widetilde{q}_n \le \widetilde{q} < 1$ для будь-якого $n \ge n_0$. Збіжність послідовності наближень $\left\{\Phi_n^{-1}\widetilde{y}_n^{(k_n)}\right\}$, визначеної за формулами (16), до розв'язку y^* рівняння (8) при $n \to \infty$ досліджено в [8]. У цій роботі, зокрема, коли T є оператором стискання на X ($\|T\| \le q$, $0 < q < 1$) та виконані умови (10)–(12), доведено збіжність проекційно-ітераційного методу, що походить від методу послідовних наближень:

$$\widetilde{y}_n^{(k+1)} = \widetilde{T}_n \widetilde{y}_n^{(k)} + \widetilde{g}_n, \quad \widetilde{y}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\widetilde{y}_n^{(k_n)}$$

$$(k = 0, 1, \dots, k_n - 1;\; n \ge n_0;\; \widetilde{y}_1^{(0)} \in \widetilde{X}_1)$$

та отримано відповідну оцінку похибки $\left\|\Phi_n^{-1}\widetilde{y}_n^{(k_n)} - y^*\right\|_{\widetilde{X}_n}$.

Збіжність послідовностей $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{y}_n^{(k_n)}\}$ до y^* та $\{\widetilde{y}_n^{(k_n)}\}$ до $\overline{\Phi}_n y^*$ при $n \to \infty$, як випливає із доведення теорем про збіжність проекційно-ітераційних методів [8], має місце за довільним вибором чисел k_n, зокрема всі числа k_n можуть бути рівними 1. Однак зі зростанням n збільшується обсяг обчислювальної роботи, необхідної для знаходження чергового наближення. Тому потрібно прагнути того, щоб завдяки належного вибору k_n за можливістю максимально наблизитися до шуканого розв'язку при цьому n ($n \ge n_0$) і тільки тоді переходити до «наближеної» задачі вищої розмірності. Деякі рекомендації щодо цього наведено в роботі [8].

Розглянемо спосіб доцільного вибору чисел k_n, виходячи із заданої точності $\varepsilon_n > 0$ ітераційного процесу при розв'язуванні «наближених» рівнянь (9). Очевидно, у ролі ε_n для n-го «наближеного» рівняння ($n \ge n_0$) виступає $\widetilde{q}_n^{k_n}$, оскільки через умову монотонності (17)

$$\left\|\widetilde{y}_n^{(k_n)} - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n} \le \widetilde{q}_n^{k_n}\left\|\widetilde{y}_n^{(0)} - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n}, \quad 0 < \widetilde{q}_n < 1.$$

З урахуванням оцінки (14)

$$\left\|\widetilde{y}_n^{(k_n)} - \overline{\Phi}_n y^*\right\|_{\widetilde{X}_n} \le \left\|\widetilde{y}_n^{(k_n)} - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n} + \left\|\widetilde{y}_n^* - \overline{\Phi}_n y^*\right\|_{\widetilde{X}_n} \le \widetilde{q}_n^{k_n}\left\|\widetilde{y}_n^{(0)} - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n} + \widetilde{C}\widetilde{\beta}_n.$$

Оскільки $\widetilde{q}_n^{k_n} \to 0$ при $k_n \to \infty$, а величина $\widetilde{C}\widetilde{\beta}_n$, як видно з умови (13), постійна при даному n, то порядок $\left\|\widetilde{y}_n^{(k_n)} - \overline{\Phi}_n y^*\right\|_{\widetilde{X}_n}$ визначається величиною $\widetilde{C}\widetilde{\beta}_n$. Тому число k_n достатньо обрати таким, щоб $\widetilde{C}\widetilde{\beta}_n$ та $\widetilde{q}_n^{k_n}\left\|\widetilde{y}_n^{(0)} - \widetilde{y}_n^*\right\|_{\widetilde{X}_n}$ мали однаковий порядок мализни, наприклад, найменше з чисел k, що справджують нерівність $\widetilde{q}_n^k \le C\widetilde{\beta}_n$, де C — стала. Звідси випливає, що за точність ε_n ітераційного процесу при даному n розумно взяти величину порядку $\widetilde{\beta}_n$, яка стосовно до задачі, що розглядається за суттю є величиною порядку апроксимації інтегрального рівняння (4) його скінченновимірним аналогом (7′).

Для багатьох ітераційних методів, як показано, наприклад у [10], справедливі наближені формули для визначення числа ітерацій, що забезпечують задану точність. Ці формули можна застосовувати до СЛАР (7′) для знаходження k_n. Слід відзначити однак, що в деяких випадках отримані оцінки для k_n можуть виявитися сильно завищеними, що небажано, оскільки, починаючи з деякого моменту, збільшення числа ітерацій не призводить до істотного покращення чергових наближень щодо розв'язку вихідного рівняння. Тому іноді доцільно буває задавати числа k_n апріорно, виходячи з експерименту та практичного досвіду.

Подамо проекційно-ітераційний алгоритм розв'язання некоректного інтегрального рівняння вигляду (1), який базується на методі регуляризації Тихонова зі способом відносної похибки визначення параметру регуляризації, з використанням сіткового методу як методу проекційного типу та загального монотонного ітераційного процесу, визначеного оператором $\widetilde{Q}$.

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ

Підготовчий етап

Задаємо точність $\varepsilon > 0$ обчислень у проекційно-ітераційному алгоритмі, фіксовану кількість m значень $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)},..., \alpha_m^{(n)}$ ($m > 1$) параметра регуляризації α, що будуть використовуватись на кожному n-му кроці алгоритму ($n \geq 1$), початкове значення α_0 та обмежуюче (достатньо мале) значення $\alpha_{\lim}$ параметра регуляризації.

Етап 1. Задаємо спадаючу послідовність значень параметра регуляризації α (таку, що $\alpha_i^{(1)} \geq \alpha_{\lim}$, $i = \overline{1,m}$) за формулами: $\alpha_i^{(1)} = \theta\, \alpha_{i-1}^{(1)}$, $i = \overline{2,m}$, $0 < \theta < 1$; $\alpha_1^{(1)} = \alpha_0$.

Обираємо на відрізку $[a,b]$ s-сітку вузлів s_j, $j = \overline{1,N_1}$ та x-сітку вузлів x_i, $i = \overline{1,M_1}$ та задаємо на s-сітці довільне початкове наближення $\widetilde{y}_1^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_{N_1}^{(0)})$ в ітераційному процесі (16) для розв'язання відповідної СЛАР (7′), де $y_j^{(0)}$ ($j = \overline{1,N_j}$) — наближене значення розв'язку $y_\alpha(s)$ рівняння (4) у вузлі $s_j \in [a,b]$ при заданому α. Покладаємо номер кроку $n = 1$.

Етап 2. Визначаємо точність $\varepsilon_n > 0$ закінчення ітераційного процесу на цьому кроці за правилом: $\varepsilon_n = C\tau_n^2$, де C — деяка стала, $\tau_n = \max\{h^{(n)}, d^{(n)}\}$, $h^{(n)} = \max\limits_{2 \leq j \leq N_n} (s_j - s_{j-1})$ — діаметр s-розбиття, $d^{(n)} = \max\limits_{2 \leq i \leq M_n} (x_{\mathrm{i}} - x_{i-1})$ — діаметр x-розбиття відрізку $[a,b]$. Для кожного значення $\alpha = \alpha_i^{(n)}$, $i = \overline{1,m}$, виходячи з початкогвого наближення $\widetilde{y}_n^{(0)}$, будуємо ітераційним методом декілька ($k_{\alpha_i^{(n)}}$) наближень $\widetilde{y}_n^{(k)}$, $k = 1,2,..., k_{\alpha_i^{(n)}}$ до досягнення точності обчислень $\varepsilon_n > 0$, а також знаходимо відносну похибку $\left\| \widetilde{y}_n^{(k_{\alpha_i^{(n)}})} - \widetilde{y}_n^{(k_{\alpha_{i-1}^{(n)}})} \right\|_{\widetilde{X}_n} \left\| \widetilde{y}_n^{(k_{\alpha_i^{(n)}})} \right\|_{\widetilde{X}_n}^{-1}$, $i = \overline{2,m}$ останнього з побудованих наближень. Наближений розв'язок $\widetilde{y}_n^{(k_{\alpha_l^{(n)}})}$ ($l = \overline{2,m}$) з найменшою відносною похибкою (або $\widetilde{y}_n^{(k_{\alpha_1^{(n)}})}$, якщо $m = 1$) та відповідне значення параметра α (яке будемо позначати $\alpha_{\mathrm{opt}}^{(n)}$) беремо за оптимальні на цьому кроці. Якщо $\varepsilon_n \le \varepsilon$, то переходимо до етапу 4.

Етап 3. Збільшуємо номер кроку: $n := n+1$. Задаємо послідовність значень параметра регуляризації α (таку, що $\alpha_i^{(n)} \ge \alpha_{\lim}$, $i = \overline{1,m}$) за формулами:

$$\alpha_i^{(n)} = \theta\, \alpha_{i-1}^{(n)}, \ \ i = \overline{2,m}, \quad 0 < \theta < 1; \quad \alpha_1^{(n)} = \alpha_{\mathrm{opt}}^{(n-1)}.$$

Якщо виявляється при деякому із зазначених номерів $i = i_0$, що $\alpha_{i_o}^{(n)} < \alpha_{\lim}$, то покладаємо на цьому кроці алгоритму $m := i_0 - 1$ та побудова значень параметра α завершується. Проводимо дискретизацію рівняння (4) на s-сітці вузлів s_j, $j = \overline{1,N_n}$ та x-сітці вузлів x_i, $i = \overline{1,M_n}$ на відрізку $[a,b]$, де $N_n \ge N_{n-1}$, $M_n \ge M_{n-1}$ і хоча б одна з останніх двох нерівностей виконується строго. Здійснюємо кусково-лінійну інтерполяцію наближеного розв'язку $\widetilde{y}_{n-1}^{(k_{\alpha_{opt}^{(n-1)}})}$, отриманого на попередньому кроці, за допомогою формули (15) та задаємо початкове наближення $\widetilde{y}_n^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{N_n}^{(0)})$ в ітераційному процесі для відповідної СЛАР (7′), де $y_j^{(0)}$ — значення інтерполюючої функції $y_{n-1}(s)$ вигляду (15) у вузлі $s_j \in [a,b]$, $j = \overline{1,N_n}$. Переходимо до етапу 2.

Етап 4. Кінець алгоритму.

АНАЛІЗ ОДЕРЖАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Практична збіжність проекційно-ітераційного алгоритму розв'язання некоректних інтегральних рівнянь вигляду (1) досліджувалась на декількох модельних задачах, зокрема таких:

$$\int_{-1}^{x} y(s)\, ds = e^{x+1}(1+\sigma), \ 0 \le x \le 1, \ \text{точний розв'язок — } \ y^*(s) = e^{s+1}; \ (18)$$

$$\int_{0}^{x} y(s)\, ds = \cos x\,(1+\sigma), \ \ 0 \le x \le 1, \ \text{точний розв'язок — } \ y^*(s) = -\sin s; \ (19)$$

$$\int_{0}^{x} y(s)\, ds = x^2(1+\sigma), \ \ 0 \le x \le 1, \ \text{точний розв'язок — } \ y^*(s) = 2s, \ (20)$$

де $-1<\sigma<1$ — деяка мала величина.

Для розв'язання задач (18)–(20) було застосовано різні обчислювальні схеми проекційно-ітераційного алгоритму, основаного на сітковому методі та методі простої ітерації (МПІ): із використанням двох стратегій вибору параметра регуляризації α під час розв'язання інтегрального рівняння (4) (способу нев'язки та способу відносної похибки розв'язку) з варіацією кількості m його значень $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_m^{(n)}$ на кожному n-му кроці алгоритму, різних способів вибору чисел k_n (апріорного та з урахуванням точності обчислень ε_n), різних правил формування порядку дискретизації рівняння (4) на черговому кроці алгоритму ($N_n=\psi(N_{n-1})$, $M_n=\varphi(M_{n-1})$). Проекційно-ітераційні модифікації (ПІМ) методу Тихонова було порівняно з класичним методом Тихонова розв'язання вихідного рівняння при відповідному фіксованому найбільшому порядку дискретизації з застосуванням двох методів наближеного розв'язання відповідної СЛАР (7′) (МПІ та методу Гауса).

Результати обчислювальних експериментів на прикладі розв'язання модельної задачі (18) з найбільшим порядком дискретизації $N=M=50$ та $\varepsilon=0{,}001$ подано в таблиці.

Т а б л и ц я . Результати експериментів за трьома обчислювальними стратегіями

Назва методу регуляризації	**Метод розв'язання СЛАР**	**Час розрахунку, с**	α_{opt}	**Норма наближеного розв'язку**	**Абсолютна похибка розв'язку**	**Відносна похибка розв'язку**
Метод Тихонова (за нев'язкою)	Метод Гауса	93,8	0,001	38,7026	6,2227	0,1569
	МПІ	86,2	0,01	37,5862	2,8634	0,0722
Метод Тихонова (за відносною похибкою)	Метод Гауса	93,9	0,01	37,6786	1,9678	0,0497
	МПІ	101,8	0,01	37,6782	1,9672	0,0496
ПІМ методу Тихонова (за нев'язкою)	МПІ	43,6	0,01	36,5139	0,6088	0,0161

Аналізуючи результати розрахунків, можна зробити висновки, що:

- класичний метод Тихонова з вибором параметра регуляризації за нев'язкою працює швидше за метод із вибором параметра регуляризації за відносною похибкою розв'язку, особливо під час застосування МПІ до розв'язання СЛАР;
- наближені розв'язки, отримані за допомогою методів Гауса та простої ітерації розв'язання СЛАР, відрізняються між собою незначно, але точнішими для розглянених модельних задач є розв'язки, отримані за допомогою МПІ;
- проекційно-ітераційні алгоритми працюють у півтора-два рази швидше, ніж класичний метод Тихонова;
- чисельні результати, отримані за допомогою проекційно-ітераційних алгоритмів, порівняно з результатами застосування методу Тихонова;

- ПІМ методу Тихонова має практичну збіжність (збільшення порядку дискретизації збільшує час роботи алгоритмів, але при цьому збільшується точність наближених розв'язків);
- оптимальне значення $\alpha_{\rm opt}$ параметра регуляризації в проекційно-ітераційному алгоритмі не залежить від початкового значення α_0 в числовій послідовності $\alpha_1^{(1)} = \alpha_0$, $\alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}$ ($\alpha_i^{(1)} = \theta\, \alpha_{i-1}^{(1)}$, $i = \overline{2, m}$, $0 < \theta < 1$) на першому кроці алгоритму.

ВИСНОВКИ

Аналіз результатів свідчить про те, що проекційно-ітераційний підхід щодо розв'язання некоректних інтегральних рівнянь призводить до зменшення обчислювальних витрат на побудову наближень, а також забезпечує більшу точність отриманих наближених розв'язків. Для автора у подальшому постає цікавим питання про застосування проекційно-ітераційних алгоритмів регуляризації до розв'язання деяких практичних некоректних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. — Новосибирск: Наука, 1983. — 240 с.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
3. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. — М.: Наука, 1991. — 331 с.
4. *Балашова С.Д.* Проекционно-итерационные методы решения уравнений в нормированных пространствах: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. — Д., 1974. — 20 с.
5. *Апарцин А.С.* О численном решении интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода регуляризованным методом квадратур // Методы оптимизации и их приложения. — 1979. — Вып. 9. — С. 99–107.
6. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — К.: Наук. думка, 1986. — 544 с.
7. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика // УМН. — 1948. — Вып. 6. — С. 89–185.
8. *Балашова С.Д.* Приближенные методы решения операторних уравнений. — Д.: ДГУ, 1980. — 112 с.
9. *Тавадзе Л.Л.* О проекционной реализации метода Ньютона-Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского гос. ун-та, 1996. — 15 с.
10. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.

Надійшла 31.03.2011