УДК 519.8

ПРОБЛЕМА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ В ЗАДАЧАХ РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ

О.Є. КІРІК

Досліджено питання існування розв'язку в задачі розподілу потоків в енергетичних мережах. Сформульовано алгоритм апріорного визначення сумісності обмежень такої задачі. Запропоновано модель з системою рівнянь неперервності, побудованої таким чином, щоб забезпечити існування допустимого розв'язку за умови зведення до мінімуму порушень замовлень споживачів.

ВСТУП

Розподіл потоків у розподільчих мережах — це складна задача, математична модель якої може містити до кількох десятків тисяч змінних. При постановці прикладних задач оптимізації розподілу потоків у таких системах доцільно спочатку дослідити питання існування розв'язку, аби за необхідності гарантувати розв'язність задачі.

Перша частина роботи присвячена дослідженням існування розв'язків задач розподілу потоків, що базуються на теоремі про максимальний потік і метод розстановки позначок [1]. Наведені викладки дозволяють заздалегідь, до здійснення процесу оптимізації, визначити, чи є сформульована задача розв'язною. У випадку дослідження реальних мереж визначення відсутності розв'язку конкретної задачі є недостатнім. Бажано певним чином переформулювати задачу, гарантувавши сумісність системи обмежень.

У другій частині роботи запропоновано модель розподілу потоків із системою рівнянь неперервності, яку побудовано таким чином, щоб забезпечити існування допустимого розв'язку. Оскільки технологічна пропускна здатність ділянок мережі є величиною фіксованою, то корегувати можна тільки замовлення споживачів та подачу речовини з витоків. При цьому порушення замовлень споживачів має бути зведене до мінімуму. Мінімізовані похибки вектора споживання отримуємо в явному вигляді, що дає простір для консультацій з експертами та є важливим з огляду на прикладну спрямованість задач, що досліджуються.

Мета роботи — дослідження питання існування розв'язку для оптимізаційної задачі зі структурою обмежень, характерною для задач розподілу потоків, побудова алгоритму визначення сумісності такої задачі, а також побудова мережевої моделі, що гарантує існування розв'язку в задачі розподілу потоків.

РІВНЯННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ДОПУСТИМОГО ПОТОКУ

Розподільчу мережу топологічно можна представити як зв'язний плоский граф [2]. Позначимо його $G=(N,V)$, де N — множина вершин, V — множина дуг, що їх з'єднують. Кожному $v \in V$ співставлена упорядкована пара вершин (i, j), $i, j \in N$, що є, відповідно, початком і кінцем цієї дуги. Якщо споживачі розташовані у вершинах графу і для кожної вершини i відоме споживання, то кожній дузі графу v може бути приписаний деякий потік, що забезпечує доставку відповідного продукту споживачам.

Нехай $d(i)$ — функція споживання, визначена у вершинах графу, $x(i, j)$ — функція потоку, визначена на дугах графу G. Розглянемо умови, що накладаються на ці функції в класичній задачі розподілу потоків.

Основною системою рівнянь є система, що відображає закон збереження речовини у вершинах графу:

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x(i, j) - \sum_{j:(j,i)\in V} x(i, j) = d(i), \ \ i \in N. \tag{1}$$

Система рівнянь (1) демонструє той факт, що кількість речовини, що втікає у вершину i мінус кількість, що витікає з цієї вершини, має дорівнювати споживанню в цій вершині. Як випливає з рівнянь (1), величини $d(i)$ мають додатне значення у вузлах — «джерелах» і від'ємне — у вузлах, де розташовані споживачі.

Виконання співвідношень (1) гарантує задоволення всіх споживачів.

Надалі зручно використовувати такі позначення. Якщо K та I підмножини множини N, то символом (K, I) позначаємо множину всіх дуг, що ведуть із $k \in K$ в $j \in I$.

Покладемо

$$d(K) = \sum_{i\in K} d(i) \text{ для всіх } K \subseteq N; \quad d^2(K) = \sum_{i\in K} d^2(i) \text{ для всіх } K \subseteq N;$$

$$x(i, K) = \sum_{\substack{j\in K \\ (i,j)\in V}} x(i, j) \text{ для всіх } K \subseteq N;$$

$$x(I, K) = \sum_{\substack{i\in I,\, j\in K \\ (i,j)\in V}} x(i, j) = \sum_{(i,j)\in (I,K)} x(i, j) \text{ для всіх } I \subseteq N,\ K \subseteq N.$$

З огляду на введені позначення система (1) буде мати вигляд:

$$x(i, N) - x(N, i) = d(i), \ \ i \in N. \tag{2}$$

Теорема 1. Для розв'язності системи (2) необхідно, аби виконувалося співвідношення

$$d(N) = 0. \tag{3}$$

Для доведення сумуємо (2) по $i \in N$ та отримуємо:

$$x(N, N) - x(N, N) = d(N).$$

Умова (3) є умовою збалансованості системи (2).

У реальних розподільчих мережах важливою умовою є задоволення технологічних обмежень на пропускну здатність ділянок мережі (дуг графу).

$$r^-(v) \le x(v) \le r^+(v), \tag{4}$$

де $r(v)^-$ та $r(v)^+$ — задані числа, що називаються мінімальною та максимальною пропускною здатністю дуги.

Дослідимо тепер проблему існування розв'язку системи (2) за обмежень (4). Для цього розглянемо теорему про максимальний потік та мінімальний розріз.

ЗАДАЧА ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК

Сформулюємо задачу знаходження максимального потоку. Припустимо, що $r^-(v)=0$ для всіх $v\in V$. Нехай у графі G виділено дві вершини $s,t\in N$, що називаються витоком та стоком і виконуються такі співвідношення:

$$\begin{gathered} x(s,N)-x(N,s)=q, \\ x(i,N)-x(N,i)=0,\ i\neq s,t, \\ x(t,N)-x(N,t)=-q. \end{gathered} \qquad (5)$$

Зазначимо, що ця система має в якості частинного розв'язку — нульовий (при цьому $q=0$).

Задача пошуку максимального потоку полягає в знаходженні

$$\max q \qquad (6)$$

за обмежень (5).

Нехай $(K,\overline{K})$ — підмножина дуг (i,j) графу G, де $K\subset N$, $\overline{K}=N\setminus K$, $i\in K$, $j\in\overline{K}$. Розрізом графу G, що відділяє вершини s та t, називатимемо таку підмножину дуг $(K,\overline{K})$, що $s\in K$, $t\in\overline{K}$. Для цього розрізу $(K,\overline{K})$ може бути визначена його пропускна здатність, що дорівнює величині $r^+(K,\overline{K})$, тобто сумі пропускних здатностей дуг з $(K,\overline{K})$.

Якщо $(K,\overline{K})$ — розріз, то з (5), сумуючи по $i\in K$, отримаємо: $x(K,N)-x(N,K)=q$.

Враховуючи, що $K\cup\overline{K}=N$, розпишемо ліву частину цієї рівності:

$$x(K,K\cup\overline{K})-x(K\cup\overline{K},K)=x(K,K)+x(K,\overline{K})-x(K,K)-x(\overline{K},K)=q\,.$$

Звідси

$$x(K,\overline{K})-x(\overline{K},K)=q\,. \qquad (7)$$

За припущенням $r^-(v)=0$ для всіх $v\in V$, тобто $x(\overline{K},K)\geq 0$. Оскільки $x(K,\overline{K})\leq r^+(K,\overline{K})$, то заміняючи в лівій частині (7) перше число на більше, а друге на менше, отримаємо: $r^+(K,\overline{K})\geq q$.

Цей результат може бути сформульований таким чином.

Теорема 2. Величина q довільного потоку з витоку s у стік t не може перевищувати пропускну здатність довільного розрізу.

Мінімальним розрізом називаємо розріз з мінімальною пропускною здатністю.

Тепер може бути сформульована основна теорема.

Теорема 3. Для довільної мережі максимальна величина потоку з s у t дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу.

При цьому для довільного мінімального розрізу дуги з $(K,\overline{K})$ є насиченими максимальним потоком, тобто $x(v)=r^{+}(v),\ v\in(K,\overline{K}),\quad x(v)=0,$ $v\in(K,\overline{K})$.

Доведення. З огляду на теорему 2 достатньо показати, що існують потік x та розріз $(K,\overline{K})$, для яких величина потоку та пропускна здатність розрізу є рівними.

Оскільки нульовий потік задовольняє всім обмеженням задачі про максимальний потік, то задача лінійного програмування (6), (5) є сумісною. Усі розв'язки задачі є обмеженими. Лінійна функція досягає на замкненій обмеженій множині максимального значення, як наслідок, існує і максимальний потік.

Опишемо процедуру розстановки позначок для побудови допустимого та максимального потоків. Попередньо введемо деякі позначення.

Послідовність $(j_1, j_2,..., j_m),\ j_k\in N$, називається шляхом, що з'єднує вершини j_1 та j_m, якщо $(j_k, j_{k+1})\in V,\ \ k=1,...,m-1,\ j_i\neq j_l,\ i\neq l$.

Нехай шлях $J=(j_1, j_2,..., j_m)$ з'єднує вершини $j_1=a,\ j_m=b$.

Покладемо

$$\omega_J(i,j)=\begin{cases}+1, \text{ якщо } \exists k: i=j_k, j=j_{k+1},\ (j_k, j_{k+1})\in V,\ k=1,...,m-1,\\ -1, \text{ якщо } \exists k: i=j_k, j=j_{k+1},\ (j_{k+1}, j_k)\in V,\ k=1,...,m-1,\\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{у всіх інших випадках.}\end{cases}$$

Для кожного шляху J функція ω_J визначає вектор, розмірність якого співпадає з числом дуг графу G, тобто $|V|$. Між векторами ω_J та шляхами в графі G існує взаємно однозначна відповідність.

Якщо J — шлях з вершини $a\in N$ у вершину $b\in N$, то

$$\omega_J(i,N)-\omega_J(N,i)=\begin{cases}+1 & \text{для} \quad i=a,\\ -1 & \text{для} \quad i=b,\quad i\in N,\\ 0 & \text{для} \quad i\neq a,b.\end{cases} \tag{8}$$

Для обґрунтування цього співвідношення достатньо розглянути простий шлях $J=(a,b)$, що складається лише з однієї неорієнтованої дуги. Можливі два випадки: $(a,b)\in V$ або $(b,a)\in V$. Якщо $i\neq a,b$, то всі доданки в лівій частині дорівнюють нулю, і (11) виконується. Якщо $i=a$, то в лівій частині (8) тільки один доданок $\omega_J(a,b)=1$ є відмінним від нуля, і тому ліва частина дорівнює одиниці. Якщо ж $(b,a)\in V$, то $\omega_J(b,a)=-1$, решта доданків дорівнюють нулю, і (8) знову виконується. Аналогічно для випадку $i=b$.

Для загального шляху $J=(j_1, j_2,..., j_m)$, $j_1\neq j_m$, результат визначається з того факту, що $\omega_J=\sum_{k=1}^{m-1}\omega(j_k, j_{k+1})$ і крім початкової j_1 та кінцевої j_m вершин, решта вершин y_k входять у два елементарні шляхи (j_{k-1}, j_k) та (j_k, j_{k+1}) один раз як кінцева, другий — як початкова.

Якщо *J*-цикл, то $\omega_J(i,N) - \omega_J(N,i) = 0$ для всіх $i \in N$. Цей факт випливає із попереднього з врахуванням того, тепер усі вершини є початковими для одного елементарного шляху та кінцевими для іншого.

Нехай $x(v)$, $v \in V$ — максимальний потік. Система позначок графу будується таким чином. Вершину s помічаємо парою $(+\infty, s)$. На кожному кроці вершина j отримує позначку $(\alpha(j), i)$ в одному з двох випадків.

Якщо $(i,j) \in V$, i — позначена вершина, а j — непозначена вершина та $r^+(i,j) > x(i,j)$, то $\alpha(j) = \min\{r^+(i,j) - x(i,j), \alpha(i)\}$. Якщо $(j,i) \in V$ та $x(i,j) > 0$, то $\alpha(j) = \min\{x(i,j), \alpha(i)\}$.

Процес розстановки позначок є скінченим, оскільки жодна вершина не помічається двічі.

Припустимо, що ми на одному з етапів помітили вершину t і перша компонента цієї позначки є $\alpha > 0$. Тоді, повертаючись назад по іншим компонентам позначок, обов'язково прийдемо до вершини s, з якої починався цей процес. Таким чином утворюється шлях від вершини s до вершини t. Позначимо його J.

Нехай новий потік з s у t дорівнює $x(v) + \alpha(t)\omega_J(v)$. За теоремою 3 він задовольняє всім обмеженням (5). Отже, потік збільшився на величину $\alpha(t)$.

Таким чином, якщо вдалося позначити вершину t, то величину потоку можна збільшити. Але оскільки, за припущенням, потік $x(v)$ був максимальним, це приводить до суперечності. Ми не можемо позначити вершину t, тому процес позначок зупиниться до того, як відбудеться помітка вершини t.

Позначимо через K множину позначених вершин і розглянемо дуги $(K, \overline{K})$ та $(\overline{K}, K)$. Оскільки неможливо з множини K позначити жодну вершину з $\overline{K}$, це означає, що $x(v) = r^+(v)$ для всіх $v \in (K, \overline{K})$. Так само $x(v) = 0$ для всіх $v \in (\overline{K}, K)$. Тоді з (7) отримаємо, що $r^+(K, \overline{K}) = q$.

Показано, що пропускна здатність деякого розрізу дорівнює потужності максимального потоку. Звідси випливає, що:

- цей розріз має мінімальну пропускну здатність;
- якщо взяти довільний інший мінімальний розріз, то таким самим чином на ньому всі дуги з $(K, \overline{K})$ є насиченими, а всі дуги з $(\overline{K}, K)$ ненасиченими.

Доведення завершене.

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ

Повернемося до проблеми розв'язності системи

$$x(i,N) - x(N,i) = d(i), \quad i \in N,$$

$$r^-(v) \le x(v) \le r^+(v), \quad v \in V. \tag{9}$$

Для вирішення питання щодо сумісності системи достатньо побудувати потік, що їй задовольняє.

Вважаємо, що $r^-(v)=0$. Дійсно, якщо це не так, то розглянемо нові потоки $\bar{x}(v)=x(v)-r^-(v)$. Підставивши $\bar{x}(v)$ у (9), прийдемо до нової системи:

$$x(i,N)-x(N,i)=\bar{d}(i),\ \ i\in N,\ \ r^-(v)\le\bar{x}(v)\le\bar{r}^+(v),\ \ v\in V,$$

де $\bar{r}^+(v)=r^+(v)-r^-(v)$, $\bar{d}(i)=d(i)-r^-(i,N)+r^-(i,N)$.

Це означає, що можна звести задачу, що розглядається, до попередньої, в якій нижні грані обмежень дорівнюють нулю.

Отже, розглядаємо питання про розв'язність системи (9), коли $r^-(v)=0$. Побудуємо новий граф G', додавши до графу $G(N,V)$ додаткові вершини s та t, тобто $N'=\{s\}\cup\{t\}\cup N$. Розіб'ємо N на дві таких множини S та T, що $N=S\cup T$, $S\cap T=\varnothing$ та $S=\{i\in N:d(i)>0\}$, $T=\{i\in N:d(i)\le 0\}$. До множини V додамо нові дуги (s,i), $i\in S$ та (i,t), $i\in T$. Розширену множину дуг позначимо V'. Введемо обмеження на пропускні здатності нововведених дуг: $0\le x(s,i)\le d(i)$, $i\in S$, $0\le x(i,t)\le$ $\le -d(i)$, $i\in T$.

Для нового графу $G'=(N',V')$ розглянемо задачу про максимальний потік та мінімальний розріз.

Розглянемо множину $\{s\}$. Доповненням до неї буде множина $N\cup\{t\}$. Пропускна здатність розрізу $(s,N\cup\{t\})$ визначається пропускними здатностями дуг, що утворюють цей розріз і дорівнює $r^+(s,S)=d(s)$. Розглянемо тепер множину вершин $\{s\}\cup N$. Доповненням до неї буде єдина вершина t. Відповідно, пропускна здатність розрізу $(\{s\}\cup N,t)$ визначається пропускними здатностями дуг, що ведуть у t. Вона дорівнює $r^+(T,t)=$ $=d(T)$.

Насиченість усіх дуг множини (s,S) забезпечує виконання у вершинах $i\in S$ балансових співвідношень, оскільки в цьому випадку $x(i,N)-$ $-x(N,i)-x(s,i)=0$, $x(s,i)=d(i)$ для всіх $i\in S$. Тому $x(i,N)-x(N,i)=d(i)$ для всіх $i\in S$.

Аналогічно, якщо всі дуги множини (T,t) є насиченими, то виконуються умови: $x(i,N)-x(N,i)+x(i,t)=0$, $x(i,t)=-d(i)$ для всіх $i\in T$, або $x(i,N)-x(N,i)=-d(i)$ для всіх $i\in T$.

Таким чином, якщо існує потік, що насичує дуги (s,S) та (T,t) розширеного графу G', то цей потік задовольняє умовам (9) для вихідного графу G. Згідно з теоремою про максимальний потік і мінімальний розріз, вимога насиченості дуг є справедливою для мінімальних розрізів. Виведемо умови, за яких розрізи $(s,N\cup\{t\})$ і $(\{s\}\cup N,t)$ будуть мінімальними.

Розглянемо довільний розріз $K'=(\{s\}\cup K,N\setminus K)$, $K\subset N$. Випишемо значення його пропускної здатності. Вона дорівнює сумі пропускних здатностей відповідних дуг $r^+(s,S\cap\bar{K})+r^+(K,\bar{K})+r^+(T\cap K,t)$. З умови мінімальності розрізу $(s, N \cup \{t\})$ отримаємо $d(S \cap \overline{K}) + r^{+}(K, \overline{K}) - d(T \cap K) \geq d(S)$. Звідси випливає, що $r^{+}(K, \overline{K}) \geq -d(S \cap \overline{K}) + d(S) + d(T \cap K)$. Перетворимо праву частину нерівності, враховуючи, що $N = K \cup \overline{K}$:

$$\left[d(S) - d(S \cap \overline{K})\right] + d(T \cap K) = d(S \cap K) + d(T \cap K) = d(K).$$

Ми отримали умову $r^{+}(K, \overline{K}) \geq d(K)$.

Аналогічно для розрізу $(\{s\} \cup N, t)$

$$d(S \cap \overline{K}) + r^{+}(K, \overline{K}) - d(T \cap K) \geq d(T),$$

$$r^{+}(K, \overline{K}) \geq -d(T) + d(T \cap K) - d(S \cap \overline{K}) =$$

$$= -d(T \cap \overline{K}) - d(S \cap \overline{K}) = -d(\overline{K}) = d(k).$$

Для задачі з ненульовою нижньою гранню обмежень ця нерівність перетвориться до вигляду:

$$r^{+}(K, \overline{K}) - r^{-}(K, \overline{K}) \geq d(K). \qquad (10)$$

Сформулюємо умови розв'язності.

Теорема 4. Необхідною і достатньою умовою розв'язності системи (9) є виконання для кожної підмножини вузлів $K \subset N$ нерівності (10).

Ця умова означає, що відтік з довільної підмножини вузлів $K \subset N$ не має перевищувати пропускну здатність дуг, які ведуть з K (або приплив у довільну підмножину вузлів $K \subset N$ не має перевищувати пропускну здатність дуг, які ведуть у K).

Сформулюємо алгоритм для визначення сумісності системи (9).

Алгоритм 1.

1. Розширюємо вихідний граф G введенням додаткового витоку та стоку.
2. Проводимо процедуру збільшення потоку, наведену в доведенні теореми 3.
3. Перший варіант. Буде отриманий максимальний потік, що означає сумісність системи.
4. Другий варіант. Буде визначена неможливість побудувати максимальний потік, що і буде означати несумісність системи. При цьому множини K та $\overline{K}$, для яких порушується (10), знаходяться автоматично, якщо через K позначити множину помічених, а через $\overline{K}$ — множину непомічених вузлів.

РОЗПОДІЛ ПОТОКІВ ІЗ МІНІМІЗАЦІЄЮ ПОХИБКИ ФУНКЦІЇ СПОЖИВАННЯ

Припустимо, що система (9) не є сумісною. Відсутність допустимого розв'язку спонукає до пошуку модифікацій моделі, які гарантували б сумісність системи обмежень.

Пропускна здатність ділянок мережі залежить від технологічних характеристик системи і не може бути за бажанням змінена. Тому залишається корегувати замовлення споживачів або подачу речовини з витоків. При цьому порушення замовлень споживачів бажано звести до мінімуму.

Для графу $G=(N,V)$ сформулюємо задачу розподілу потоків з оптимізацією доставки продукту споживачам та мінімізацією порушень замовлень. За основу візьмемо нелінійну модель розподілу потоків, що дозволяє описувати широкий спектр розподільчих мереж та докладно досліджена в [3]. Мінімізувати затрати на доставку продукту споживачам та похибку функції споживання

$$F=\frac{1}{1+\alpha}\sum_{(i,j)\in V} l(i,j)\left|x(i,j)\right|^{1+\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{i\in N}\varepsilon^2(i) \tag{11}$$

за обмежень

$$x(i,N)-x(N,i)=d(i)+\varepsilon(i),\ \ i\in N, \tag{12}$$

$$r^-(v)\le x(v)\le r^+(v)\,,\quad v\in V\,. \tag{13}$$

Функція вартості доставки (довжина ділянки мережі) $l(i,j)$ визначена на дугах графу G. Коефіцієнт α у виразі цільової функції дозволяє враховувати фізичні закономірності для різних розподільчих мереж. При $\alpha=0$ замовлення доставляється споживачам найкоротшим шляхом, як у лінійній транспортній задачі. Функції $\varepsilon(i)$, $i\in N$ відображають можливі відхилення функцій споживання від замовлень споживачів.

Необхідною умовою сумісності обмежень (12), тобто збалансованості розподільчої системи, є виконання співвідношення

$$d(N)+\varepsilon(N)=0\,. \tag{14}$$

Поставимо у відповідність кожному i-му співвідношенню (12) множник Лагранжа u_i, $i\in N$, а співвідношенню (14) — $\bar{u}$.

Випишемо для задачі (11)–(14) функцію Лагранжа та сформулюємо необхідні умови екстремуму.

$$L=\frac{1}{1+\alpha}\sum_{(i,j)\in V} l(i,j)\left|x(i,j)\right|^{1+\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{i\in N}\varepsilon^2(i)+$$

$$+\sum_{i\in N}u(i)\left[x(i,N)-x(N,i)-d(i)-\varepsilon(i)\right]+\bar{u}\sum_{i\in N}\left[d(i)+\varepsilon(i)\right]=$$

$$=\sum_{(i,j)\in V}\left\{\frac{1}{1+\alpha}l(i,j)\left|x(i,j)\right|^{1+\alpha}+x(i,j)\left[u(j)-u(j)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{i\in N}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^2(i)-\varepsilon(i)\left[\bar{u}-u(i)\right]-d(i)\left[\bar{u}-u(i)\right]\right\}.$$

За теоремою Куна-Такера [4], для того, аби величини $x(v)$, $v\in V$, $\varepsilon(i)$, $i\in N$ були розв'язком поставленої задачі (11)–(14), необхідно і достатньо, щоб знайшлися числа u_i, $i\in N$ та $\bar{u}$, щоб відповідні невідомі доставляли б мінімум функції Лагранжа L за обмежень (13).

З теорії двоїстості [4] розв'язування задачі (11)–(14) є еквівалентним максимізації вгнутої неперервно дифференційовної функції $\Phi(u) = \min\limits_{x(i,j)\in[r^-(i,j),\, r^+(i,j)]} L$.

Позначимо $u(j,i) = \left|u(j) - u(i)\right|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sign}(u(j) - u(i))$.

З необхідних умов екстремуму отримуємо, що мінімум функції L з врахуванням простих обмежень (13) досягається в точці:

$$x^*(i,j) = \begin{cases} r^-(i,j) & \text{при} \quad u(j,i) \le r^-(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ u(j,i) l(i,j)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{при} \quad \begin{array}{l} u(j,i) \ge r^-(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ u(j,i) \le r^+(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{array} \\ r^+(i,j) & \text{при} \quad u(j,i) \ge r^+(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases} \tag{15}$$

Крім того, виконуються співвідношення

$$\varepsilon(i) = \overline{u} - u(i), \; i \in N. \tag{16}$$

Використовуючи (15), конкретизуємо вигляд функції Φ:

$$\Phi(u) = \sum_{(i,j)\in V} \phi_{(i,j)} \left[u(j) - u(i)\right] - \sum_{i\in N} \left\{ \frac{1}{2}\left[\overline{u} - u(i)\right]^2 + \left[\overline{u} - u(i)\right] d(i) \right\}, \tag{17}$$

де

$$\phi_{(i,j)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha} l_{ij} \left| r^-(i,j) \right|^{1+\alpha} & \text{при} \quad u(j,i) \le r^-(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ -\dfrac{\alpha}{1+\alpha} u(j,i) l(i,j)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{при} \quad \begin{array}{l} u(j,i) \ge r^-(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ u(j,i) \le r^+(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{array} \\ \dfrac{1}{1+\alpha} l_{ij} \left| r^+(i,j) \right|^{1+\alpha} & \text{при} \quad u(j,i) \ge r^+(i,j) l(i,j)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases}$$

Таким чином, двоїста задача зводиться до задачі безумовної оптимізації

$$\max \Phi(u), \tag{18}$$

причому її цільова функція має неперервні похідні, які ми можемо обчислити.

Знаючи оптимальні значення $u(i)$, $i \in N$, та необхідні умови екстремуму можемо за формулами (16), (17) обчислити оптимальне значення потоків x_{ij}, $(i,j) \in V$ та нові значення функцій споживання $\overline{d}(i) = d(i) + \varepsilon(i)$, $i \in N$.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ

Для розв'язання задачі (18) можна використати довільний метод нелінійного програмування [5, 6].

Можемо застосувати метод покоординатного спуску, ідея якого полягає в тому, що на кожному кроці варіюється тільки одна змінна за умови фіксації решти.

Розв’язок одновимірних задач $\max\limits_{u(i)} \Phi$ зводиться до обертання на нуль похідної цільової функції. Оскільки функція Φ є вгнутою, то похідні монотонно спадають. Для знаходження нуля неперервної монотонно спадаючої функції скористаємось методом січних, опис якого наведено у роботі [7].

Сформулюємо тепер покроковий алгоритм розв’язання задачі (18).

Алгоритм 2.

1. Вибираємо довільні початкові значення $u(i)$, $i \in N$ та $\bar{u}$.
2. Розв’язуємо задачу знаходження оптимальних значень $u(i)$, $i \in N$ максимізуючи функцію Φ методом покоординатного спуску.
3. Знаючи оптимальні значення $u(i)$, $i \in N$, і, використовуючи необхідні умови екстремуму, повертаємося до вихідних змінних $x(i, j)$, $(i, j) \in V$, що дає розподіл потоків, який гарантує мінімальне порушення замовлень споживачів $\varepsilon(i)$ у кожному вузлі $i \in N$.

ВИСНОВКИ

Запропонована математична модель розподілу потоків із мінімізацією порушень функцій споживання є, звичайно, результатом певної ідеалізації процесу планування ресурсорозподільчих процесів. Вона орієнтована на апріорний аналіз функціонування системи на наявність «вузьких місць», про які свідчитиме значне відхилення вектора споживання від планового. Ясно, що допустимі показники цих порушень будуть різними для різних продуктопроводів.

За бажанням можна накласти двосторонні обмеження на порушення функції споживання на кшталт двосторонніх технологічних обмежень (13). Завдяки цьому можна відокремити підмножину вузлів, де порушення є небажаними або взагалі недопустимими. Математична модель оптимальної доставки продукту споживачам з мінімізацією відхилень вектора споживання та вузловими технологічними обмеженнями може бути предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966. — 276 с.
2. *Оре О.* Графы и их применение. — М.: Мир, 1965. — 174 с.
3. *Кірік О.Є.* Розподіл потоків в мережах складної кільцевої топології // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 2. — С. 18–26.
4. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
5. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 67–77.
6. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 3. — С. 67–73.
7. *Кірік О.Є.* Оптимізація заповнення сховищ в задачах розподілу потоків для розподільчих мереж // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2010. — № 1. — С. 28–35.

Надійшла 04.09.2010