УДК 519.85
DOI : 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.2.07

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ МІЖ ПІДПРИЄМСТВАМИ

А.П. ЯКОВЛЕВА, І.О. КУРДУП

Розглянуто задачу розподілу ресурсів між підприємствами різних галузей у складі одного економічного конгломерату. Наведено різні способи постановки задачі та введення вихідних даних з урахуванням можливості побудови власних функцій віддачі, керувальної дії та часу. Ключовим методом розв'язання задачі є апарат динамічного програмування Беллмана [1]. Досліджено альтернативну формалізацію задачі, у якій фазові і керувальні змінні можуть набувати нескінченної кількості значень, що унеможливлюють застосування стандартних для динамічного програмування таблиць, що призводить до необхідності аналітичних розрахунків. Запропоновано обмеження, які зводять функції віддачі до вигляду, що задовольняє умови виробничих функцій.

ВСТУП

Апарат динамічного програмування Беллмана був створений для доповнення класичного аналізу та варіаційного числення в умовах широкого використання комп'ютерів. Він дозволяв отримувати оптимальну стратегію дій, а не тактичний розв'язок статичних задач, хоча широкі класи динамічних задач можна звести до однокрокових досить великої розмірності. Задача розподілу ресурсів, як і будь-яка інша задача динамічного програмування, є багатоетапною. Тобто вона поділяється на ряд послідовно розв'язуваних задач з меншою кількістю змінних. Отримані розв'язки підзадач використовуються для побудови розв'язку основної задачі. Для задач цього типу важливим є виконання умов відсутності післядії та адитивності цільової функції. Оптимальна стратегія за принципом оптимальності Беллмана полягає в тому, що якими б не були початкові умови і початковий стан, подальші розв'язки повинні становити оптимальну поведінку щодо стану, отриманого в результаті першочергового розв'язку [1]. Математично цей принцип описується таким чином:

$$B_{N-l}(S_l) = \underset{U_{l+1}}{\text{optimum}}[R_{l+1}(S_l, U_{l+1}) + B_{N-(l+1)}()S_{l+1}], \ (l = \overline{0, N-1}), \qquad (1)$$

де U_l — керування, обране на l-му кроці; S_l — стан системи на l-му кроці; R_l — безпосередній ефект, досягнутий на l-му кроці; B_{N-l} — оптимальне значення ефекту, що досягається за $N-l$ кроків; N — загальна кількість кроків.

Мета роботи — розроблення ефективного розподілу ресурсів між економічними підприємствами, який ґрунтується на застосуванні апарату динамічного програмування до задачі оптимізації за умов різних способів задання вихідних даних.

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ. ТАБЛИЧНА ПОСТАНОВКА

Нехай у складі певного конгломерату є $N=4$ підприємств, які використовують один ресурс деякими цілими порціями $v_1, v_2, \ldots$, а початкова сума становить $V=100\,000$. По закінченні робочого терміну вони повертають прибуток за певним правилом $P_n(x)$, відображеним у табл. 1. Потрібно знайти оптимальну стратегію розподілу ресурсів, тобто визначити кількість ресурсів, яку необхідно виділити кожному підприємству для отримання максимального сумарного прибутку.

Таблиця 1. Умова задачі

Ресурси	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

У такій формалізації на n-му кроці розв'язання задачі для n-го підприємства і кожного можливого виділеного йому обсягу ресурсів v визначається його прибуток $P_n(v)$. Функціональне рівняння Беллмана має вигляд

$$B_n(c) = \max_{0 \le x \le c} [P_n(x) + B_{n-1}(c-x)],$$

де c — кількість ресурсів, яка розподіляється між усіма підприємствами, що розглядаються на поточному кроці; x — поточна змінна, у якій зберігаються можливі значення наданих підприємствам ресурсів.

Розраховуємо максимальний прибуток для кожної кількості виділених підприємству ресурсів (табл. 2–4). Причому в табл. 2 кількість ресурсів c розподіляється між двома підприємствами, у табл. 3 — між трьома, а в табл. 4 — результуюча. Часто можливу кількість ресурсів подають дискретною вибіркою, що робить можливим використання таблиць для розв'язання задачі. На відміну від більшості задач динамічного програмування послідовність етапів розв'язання в цьому випадку установлюємо спочатку для першого підприємства, тому $B_1(x) = P_1(x)$. По завершенні останнього етапу значення функції Беллмана дорівнюватиме максимальному прибутку об'єднання підприємств. Обраний розподіл ресурсів буде оптимальним керуванням.

Таблиця 2. Результати першого кроку

c	x							
	0	20	40	60	80	100	$f_2(c)$	$x_2(c)$
20	0+10	12+0					12	20
40	0+31	12+10	26+0				31	0
60	0+42	12+31	26+10	36+0			43	20
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0		62	0
100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0	78	100

Таблиця 3. Результати другого кроку

c	x							
	0	20	40	60	80	100	$f_3(c)$	$x_3(c)$
20	0+12	11+0					12	0
40	0+31	11+12	36+0				36	40
60	0+43	11+31	23+12	45+0			48	40
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+0		67	40
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+0	79	40

Таблиця 4. Результуюча таблиця

c	$x_1(c)$	$f_1(c)$	$x_2(c)$	$f_2(c)$	$x_3(c)$	$f_3(c)$	$x_4(c)$	$f_4(c)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	20	12	0	12	20	16
40	40	31	0	31	40	36	40	37
60	60	42	20	43	40	48	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
100	100	76	100	78	40	79	40	85

Тобто оптимальний прибуток становить $B_4(100) = 85$, що відповідає керуванню $x_4(100) = 40,\ x_3(60) = 40,\ x_2(20) = 20,\ x_1(0) = 0$.

Функції $P_n(v)$ можуть бути різної природи, тобто виражатися не лише дискретною вибіркою залежно від керувальної функції v, а й набувати лінійних, експоненційних, тригонометричних чи інших залежностей. Керувальний вплив діяння v може набувати більш складних форм. Зокрема, його можна подати у вигляді $v = as + bt$, де s — грошові ресурси; t — час; a, b — нормувальні коефіцієнти. Подібна функція потрібна у випадку, якщо час виконання роботи підприємством є важливим, проте весь процес відбувається лише за один часовий етап.

ДВОЕТАПНА ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Створювати часові етапи роботи підприємств і оптимізувати розподіл ресурсів можна на кожному етапі. У цьому випадку на кожному етапі із загальної суми ресурсів виділяється частина і розподіляється між підприємствами. Проте необхідно виконувати для кожного етапу умовну оптимізацію [2], у процесі якої обчислюються функції Беллмана та умовно-оптимальні керування.

Для спрощення формалізації введемо такі припущення. Будемо розглядати виробниче об'єднання, у яке входять два підприємства і яке планує роботу на період два роки. У процесі діяльності підприємства отримують прибуток, затрачуючи певні ресурси, які виділяються їм на початку кожного року. Наприкінці року невитрачені ресурси перерозподіляються між підприємствами. Вважатимемо, що початковий обсяг ресурсів об'єднання дорівнює V і він повністю розподілений між підприємствами. Якщо надані підприємствам ресурси v, вони повертають прибуток у розмірі $P_1(v) \geq 0$ і $P_2(v) \geq 0$, витрачаючи при цьому ресурси в обсязі $0 \leq Q_1(v) \leq v$ і $0 \leq Q_2(v) \leq v$. Сумарний обсяг ресурсів, що залишається у виробничому об'єднанні по закінченні першого і другого років роботи позначимо відповідно через x_1 і x_2, які є фазовими змінними. Початковий стан системи характеризується значенням $x_0 = V$. Керувальною змінною u_i вважатимемо обсяг ресурсів, що виділяється першому підприємству на i-му кроці процесу. Тобто на початку першого року першому підприємству дістанеться u_1 ресурсів, а другому — $x_0 - u_1$. Відповідно на початку другого року підприємства матимуть u_2 і $x_1 - u_2$. Функція процесу $x_i = f_i(x_{i-1}, u_i)$, що визначає закон зміни стану виробничого об'єднання, набуває вигляду $x_i = x_{i-1} - (Q_1(u_i) + Q_2(x_{i-1} - u_i))$ і має такий сенс: щороку сумарний обсяг ресурсів зменшується на величину їх затрат на обох підприємствах. А оскільки затрати невід'ємні, він постійно зменшується. Економічний ефект на кроці i визначається у такий спосіб: $z_i = P_1(u_i) + P_2(x_{i-1} - u_i)$. За такої формалізації задачі фазові і керувальні змінні можуть набувати нескінченної кількості значень, що робить неможливим використання таблиць, як і в більшості задач динамічного керування Беллмана, зумовлюючи необхідність аналітичних розрахунків [3].

На етапі умовної оптимізації для $i = 2,1$, використовуючи принцип оптимальності (1), виконуємо розрахунок функцій Беллмана $B_i(x_i)$ і умовно-оптимальних керувань $\overline{u_i}(x_{i-1})$ [4]. Розрахунки почнемо з умови $B_2(x_2) = 0$.

На початку кроку $i = 2$ загальний обсяг ресурсів виробничого об'єднання становить ще невідоме значення $x_1 \geq 0$. Для цього кроку основне функціональне рівняння Беллмана набуває вигляду

$$B_1(x_1) = \max_{u_2} \{z_2(x_1, u_2) + B_2(x_2) \,|\, x_2 = f_2(x_1, u_2)\} \text{ де } 0 \leq u_2 \leq x_1 .$$

Ураховуючи умову $B_2(x_2) = 0$, явний вигляд функції $z_2(x_1, u_2)$ і область значень змінної u_2, отримуємо: $B_1(x_1) = \max\limits_{0 \leq u_2 \leq x_1} \{P_1(u_2) + P_2(x_1 - u_2)\}$.

Конкретизуємо вигляд функцій прибутку: $P_1(v) = K_1\sqrt{v}$, $P_2(v) = K_2\sqrt{v}$, де K_1, K_2 — деякі додатні коефіцієнти продуктивності. Функцію квадратного кореня вибрано не випадково — вона задовольняє властивості виробничих функцій:

– $\sqrt{v}$ визначена на $v \geq 0$, тобто обсяги ресурсів не можуть набувати від'ємних значень;

– $\sqrt{v}$ додатна і дорівнює 0 при $v = 0$. Підприємство не дає прибутку за відсутності ресурсів і забезпечує певну віддачу за їх наявності;

– $\sqrt{v}$ монотонно зростає;

– похідна $(\sqrt{v})' = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}$ монотонно спадає. Ця властивість в економічній теорії називається законом спадної ефективності і добре підтверджується на практиці.

Розглянемо функцію $G_2(u_2) = K_1\sqrt{u_2} + K_2\sqrt{x_1 - u_2}$. Розв'язком рівняння $G_2'(u_2) = 0$ є $\overline{u_2}(x_1) = \dfrac{K_1^2}{K_1^2 + K_2^2} x_1$, тоді функція Беллмана $B_1(x_1) = \sqrt{(K_1^2 + K_2^2) x_1}$. Варто зазначити, що функція Беллмана не залежить від затрат ресурсів на підприємствах, що логічно для останнього кроку [5], а виділення всіх ресурсів матиме гірший результат, ніж розподілення ресурсів.

Крок $i = 1$. На початку цього кроку обсяг ресурсів об'єднання $x_0 = V$. На підставі функцій $f_1(x_0, u_1)$ і $z_1(x_0, u_1)$ побудуємо основне функціональне рівняння Беллмана:

$$B_0(x_0) = \max_{0 \leq u_1 \leq x_0} \{P_1(u_1) + P_2(x_0 - u_1) + B_1(x_1)\},\ x_1 = x_0 - Q_1(u_1) - Q_2(x_0 - u_1).$$

Конкретизуємо функції: $Q_1(v) = a_1 v$, $Q_2(v) = a_2 v$, де коефіцієнти a_1, a_2 — певні коефіцієнти використання ресурсів з інтервалу $(0,1)$. У результаті

$$B_0(x_0) = \max_{0 \leq u_1 \leq x_0} \{K_1\sqrt{u_1} + K_2\sqrt{x_0 - u_1} +$$

$$+ \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)((1 - a_2)x_0 + (a_2 - a_1)u_1)}\}.$$

Пошук максимуму цієї функції можна звести до знаходження коренів багаточлена 4-го степеня, проте через його громіздкість і складність будемо вважати, що на першому кроці ресурси поділено порівну між підприємствами, тобто рівняння $G_1'(u_1) = 0$ має корінь $u_1 = \dfrac{x_0}{2}$, що породжує умову

$$\frac{K_1 - K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2 - (a_1 + a_2)}}, \tag{2}$$

а функція Беллмана набуває вигляду

$$B_0(x_0) = (K_1 + K_2 + \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)(2 - a_2 - a_1)})\sqrt{\frac{x_0}{2}}.$$

Важливим є той факт, що на кожному етапі функція Беллмана стає дедалі складнішою, що потребує обчислень за допомогою комп'ютерів.

Подальший етап безумовної оптимізації за відомих коефіцієнтів K та a поверне необхідне керування на кожному кроці та отриманий результат. Нехай $K_1 = 3$, $K_2 = 4$, $a_1 = 0{,}4$, $a_2 = 0{,}6$. Ці значення задовольняють умову (2). Тепер задачу можна звести до числового розв'язку: першого року першому підприємству виділено половину ресурсів, а другого — 0,36 від залишку ресурсів. Усіх ресурсів після першого року залишилась половина, а після другого — 0,236 від початкової їх кількості V. Розмір оптимального прибутку виражається функцією Беллмана $B_0(V) = 6\sqrt{2V}$.

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК І ПОРІВНЯННЯ МОДЕЛЕЙ

Розглянемо тепер задачу розподілу ресурсів у табличній та двоетапній постановках і порівняємо їх, визначаючи можливі похибки та складність переходу з однієї моделі до іншої. З цією метою створено програмний продукт, який дозволяє проводити обчислювальні експерименти і отримувати точні дані для порівняння у випадку зведення двоетапної задачі до табличного вигляду.

Для цього функції віддачі підприємств дискретизуються на певну, задану користувачем, кількість дискрет, і задача розв'язується в табличному вигляді. Залежність похибок від їх кількості між отриманою функцією Беллмана експериментально і точною для трьох наборів вхідних даних K_1, K_2, a_1, a_2 (відображених у табл. 5) наведено в табл. 6 і 7.

Таблиця 5. Тестові набори

Набори	K_1	K_2	a_1	a_2
Набір 1	3	4	0,4	0,6
Набір 2	2	1	0,9	0,576
Набір 3	6	5	0,532	0,4

Таблиця 6. Залежність похибок від кількості дискрет при $V = 1000000$

Кількість дискрет	**Набір 1**	**Набір 2**	**Набір 3**
10	3,002	1,064	0,286
30	0,429	0,143	0,038
50	0,065	0,061	0,017
100	0,016	0,003	7,93E-05
1000	0,0001	3,547E-05	7,959E-07
Результат	8485,281374	3265,872658	13485,53826

Таблиця 7. Залежність похибок від кількості дискрет при $V = 1000$

Кількість дискрет	Набір 1	Набір 2	Набір 3
10	0,095	0,033	0,032
30	0,002	0,0045	0,009
50	0,00175	0,0017	0,00335
100	0,000456	0,000438	0,000347
1000	4,74E-06	4,51E-06	1,10E-05
Результат	268,3281573	103,2759615	426,4501637

Як бачимо, похибка обчислень дуже залежить від набору вхідних даних, проте стрімко зменшується зі збільшенням кількості дискрет. Подальше дослідження ускладнюється тим, що комп'ютери уже при 10000 дискретах не в змозі розв'язувати задачу за прийнятний час.

У разі зворотного переходу апроксимація табличних даних поліномами старших порядків не забезпечує потрібної точності. Похибка результуючої функції Беллмана виявляється того ж порядку, що і сама функція незалежно від кількості дискрет, тому цей випадок тут не розглядається.

ВИСНОВКИ

У роботі подано постановки економічної задачі та основні ідеї підходів застосування до її розв'язання методом динамічного програмування.

Розглянуто задачу розподілу ресурсів між підприємствами та побудовано різні варіанти формалізації: табличне задання дискретних функцій віддачі підприємств залежно від наданих їм ресурсів, створення функціональної залежності віддачі підприємств об'єднання залежно від наданих їм ресурсів за можливості двокритеріальної оптимізації в межах даної задачі з урахуванням часу. Побудовано модель її розв'язання за деяких припущень.

Подано перехід дворічної моделі до табличної форми та розглянуто виникаючі при цьому похибки.

У випадку більш широкого розгляду задачі, зняття обмежень з цільових функцій та застосування більш ефективних виробничих функцій значно підвищується складність їх обчислення і це може стати предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Беллман Річард*. Динамічне програмування / Річард Беллман. — М.: Иностр. лит-ра, 1960. — 400 с.
2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. — М.: Наука, 1980. — 208 с.
3. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций / Х.А. Таха. — 7-е изд.; пер. с англ. — М., 2005. — 912 с.
4. *King Ian*. A Simple Introduction to Dynamic Programming in Macroeconomic Models / Ian King // The University of Auckland, 2002. — 30 p.
5. *Giegerich R.* A Discipline of Dynamic Programming over Sequence Data / R. Giegerich, C. Meyer, P. Steffen // Faculty of Technology. — Bielefeld University, 2004. — 53 p.
6. *Альсевич В.В.* Методы оптимизации: упражнения и задания / В.В. Альсевич, В.В. Крахотко. — Мн.: БГУ, 2005. — 405 с.
7. *Кормен Т.* Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн; под ред. И.В. Красикова. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.

Надійшла 01. 12. 2015