УДК 519.8
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.3.07

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ У ВЕЛИКИХ БЛОЧНО-СТРУКТУРОВАНИХ СИСТЕМАХ ЗІ ЗВ'ЯЗУЮЧИМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.Є. КІРІК

Анотація. Розв'язання нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими параметрами (змінними) реалізується шляхом комбінації апроксимаційного та декомпозиційного підходів. Апроксимаційний метод обрано таким чином, щоб декомпозицію задачі математичного програмування можна виконувати без будь-яких припущень щодо опуклості або адитивної сепарабельності функцій критерію та обмежень. Координуюча та блочні підзадачі, що є допоміжними в апроксимаційному методі, розв'язуються за скінченну кількість кроків. У ході обчислень зв'язуючі параметри змінюються від кроку до кроку ітераційного процесу, забезпечуючи монотонне зменшення значення цільової функції координуючої задачі, тобто кількість загальних ресурсів змінюється таким чином, аби блочні підсистеми працювали дедалі ефективніше з точки зору ефективності роботи всієї системи.

Ключові слова: задачі розподілу ресурсів, оптимізаційні моделі, апроксимуючі методи, нелінійне програмування, алгоритми декомпозиції.

ВСТУП

До нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими змінними зводиться численна кількість практичних проблем планування та управління. У задачах управління виробництвом та запасами блочні структури виникають, коли основну частину технологічних параметрів можна подати у вигляді підмножин, що не перетинаються, а показники інтенсивності використання решти параметрів є зв'язуючими змінними. До блочних задач зводяться також різні динамічні моделі управління виробництвом. Загалом, якщо складна система містить декілька підсистем, функціонування яких описується індивідуальними наборами змінних, але можливості діяльності кожної підсистеми залежать до того ж від деяких загальносистемних параметрів або напрямів, то виникають задачі блочної структури зі зв'язуючими змінними.

Ефективним підходом до розв'язання оптимізаційних блочних задач є використання прийомів декомпозиції, тобто застосування оптимізаційних методів до спеціальним чином побудованої координуючої задачі та набору підзадач для окремих блоків [1, 2]. При цьому істотною умовою є опуклість та адитивна сепарабельність функцій, що визначають критерій та обмеження, а складові цільової функції координуючої задачі у загальному випадку визначені на обмежених множинах і іноді потребують певних процедур регуляризації вихідної задачі [3]. Процедури розв'язання координуючих задач на основі різних методів оптимізації та властивості функцій координуючих задач досліджувалися у багатьох працях, зокрема [4–6]

У праці [7] запропоновано підхід до розв'язання задач блочної структури зі зв'язуючими обмеженнями у вигляді триступеневої ітераційної схеми, де на верхньому рівні вихідна задача змінюється послідовністю апроксимуючих задач з адитивно-сепарабельними цільовими функціями та лінійними обмеженнями, а на другому рівні розв'язуються координуючі задачі, які формуються за рахунок інформації, отриманої на найнижчому рівні під час розв'язання блочних підзадач.

Аналогічну схему можна запропонувати і для нелінійних задач зі зв'язуючими змінними. Але на відміну від задач зі зв'язуючими обмеженнями в цьому випадку потрібно застосовувати прямий, а не двоїстий метод декомпозиції.

Мета роботи — побудова та аналіз методу розв'язання нелінійних задач блочної структури зі зв'язуючими змінними із застосуванням комбінації апроксимуючого методу нелінійної оптимізації та прямої схеми декомпозиції.

Оскільки декомпозиції в цьому випадку підлягають спеціальним чином побудовані задачі, які мають потрібні для розбиття властивості, то немає необхідності ставити вимоги сепарабельності до вихідної задачі. Це розширює класи задач, що можуть бути розв'язані із застосуванням спеціальних прийомів.

АПРОКСИМУЮЧІ МЕТОДИ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як показано у працях [7, 8], зручним способом замінити нелінійну задачу задачею квадратичного програмування з адитивно-сепарабельними цільовими функціями є застосування методу лінеаризації Б.М. Пшеничного [9]. Основна ідея цього методу полягає у заміні нелінійної задачі послідовністю лінеаризованих задач, доповнених квадратичним штрафом за великі відхилення аргумента. Метод лінеаризації є методом першого порядку. Але його ефективність може бути підвищена застосуванням деяких спеціальних прийомів [10], а для певних класів задач, зокрема, нелінійних задач з лінійними обмеженнями, вдається досягти швидкості збіжності, зіставної зі швидкістю методів послідовного квадратичного програмування.

Нехай маємо нелінійну задачу гладкої умовної оптимізації

$$\min_{x \in M} f_0(x), \quad M = \{x \in R^n : f_i(x) \le 0, \quad i = 1,\dots,m\}. \tag{1}$$

Якщо є обмеження-рівності, то заміняємо їх еквівалентною парою відповідних нерівностей.

Загальну схему апроксимуючих методів умовної оптимізації можна подати у вигляді ітераційного процесу

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad k = 0,1,\dots , \tag{2}$$

де $\alpha_k > 0$, а $p^k = p(x^k)$, $p^k \in R^n$ — розв'язок допоміжної апроксимуючої задачі з лінійними обмеженнями:

$$\min_p \left\{ f_0(x^k) + \left\langle f_0'(x^k), p \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D_k p, p \right\rangle : f_i(x^k) + \left\langle f_i'(x^k), p \right\rangle, \quad i = 1,\dots, m \right\}. \quad (3)$$

Для визначення крокового множника α_k у всіх методах можна використовувати релаксацію вздовж вектора спуску p_k недиференційованої штрафної функції

$$\bar{f}(x, \Lambda) \equiv f_0(x) + \Lambda F(x), \quad \Lambda > 0,$$

де $F(x) = \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\}$.

У методі лінеаризації Б.М. Пшеничного $D_k = E$ — це одинична $n \times n$-матриця; квадратичний доданок у цільовій функції апроксимуючої задачі відіграє роль штрафної функції, а α_k обчислюється як найбільше зі значень $\alpha = 2^{-t}$, $t = 0, 1, \dots$, за якого виконується нерівність

$$\bar{f}(x^k + \alpha p^k, \Lambda) \le \bar{f}(x^k, \Lambda) - \varepsilon\alpha \left\| p^k \right\|^2, \ \varepsilon \in (0, 1). \quad (4)$$

Коефіцієнт штрафу $\Lambda > 0$ мажорує множники Лагранжа λ^k задачі (3):

$$\Lambda \ge \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k, \ k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

причому виконання умови (5) гарантує, що нерівність (4) виконується після скінченної кількості ділень одиниці навпіл.

Під час формування апроксимуючої задачі до неї можна включати лише найбільш істотні обмеження, причому правила зменшення кількості обмежень викладено у праці [9].

БЛОЧНІ ЗАДАЧІ ЗІ ЗВ'ЯЗУЮЧИМИ ЗМІННИМИ

Якщо вихідна задача (1) має вигляд блочної зі зв'язуючими змінними, то апроксимуючу задачу (3) з Q блоками у матричному вигляді можна сформулюватити таким чином:

$$F(p) \equiv \sum_{i=1}^{Q+1} F_i(p_i) \to \min,$$

$$A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \le 0, \ i = 1, 2, \dots, Q, \quad (6)$$

де $F_i(p_i) = \left\langle c_i, p_i \right\rangle + \frac{1}{2}\left\| p_i \right\|^2$, $c_i \in R^{n_i}$, $p_i \in R^{n_i}$, $b_i \in R^{m_i}$; A_i і B_i — матриці розмірностей відповідно $(m_i \times n_i)$ і $(m_i \times n_{Q+1})$; $p_{Q+1} \in R^{n_{Q+1}}$ — вектор зв'язуючих змінних;

$$\sum_{i=1}^{Q+1} n_i = n, \ \sum_{i=1}^{Q} m_i = m.$$

Беремо до уваги, що апроксимуюча задача (6) змінюється від кроку до кроку процесу (2), але випускаємо індекси, що є номерами кроку k , аби не обтяжувати формули додатковими позначеннями.

Основна ідея методу розділення змінних [1], що застосовується для розв'язання задач зі зв'язуючими змінними, полягає у тому, що фіксуються зв'язуючі змінні p_{Q+1} і розв'язується задача стосовно решти змінних, яка внаслідок блочної структури розпадається на незалежні підзадачі меншого розміру, причому екстремуми цільових функцій цих підзадач залежать від фіксованих змінних як від параметрів. Підставляючи їх у неявному вигляді у вихідну задачу, отримують координуючу задачу, що залежить лише від фіксованих змінних. Загалом лише для обмежених класів функцій можна отримати явний вигляд координуючої задачі.

Нехай точка $\overline{p}_{Q+1}$ є допустимою, тобто

$$\overline{p}_{Q+1} \in \{p_{Q+1} : A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \le 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, Q\}\ .$$

За фіксованого $p_{Q+1} = \overline{p}_{Q+1}$ задача (6) розпадається на Q задач

$$\min F_i(p_i)\ ,$$

$$A_i p_i + B_i \overline{p}_{Q+1} + b_i \le 0\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, Q\ . \tag{7}$$

Це означає, що задачу (6) можна замінити знаходженням мінімуму функції

$$\Phi(p_{Q+1}) = \sum_{i=1}^{Q} \Phi_i(p_{Q+1}) + F_{Q+1}(p_{Q+1})\ , \tag{8}$$

де

$$\Phi_i(p_{Q+1}) = \min_{p_i} \{F_i(p_i) : A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \le 0\}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, Q\ , \tag{9}$$

на множині допустимих точок p_{Q+1}. Функції (9) є неявними і в загальному випадку їх оцінка в деякій точці p_{Q+1} потребує розв'язання задач (7). Однак ці задачі меншої розмірності, ніж вихідна задача (6) , і розв'язуються незалежно, що може виявитися зручним для розрахунків.

У схемах декомпозиції задача

$$\min \Phi(p_{Q+1})\ , \tag{10}$$

що є еквівалентною вихідній, називається координуючою задачею. Задачі (7) будемо називати блочними підзадачами.

Нехай $M_i(\overline{p}_{Q+1}) = \{p_i : A_i p_i + B_i \overline{p}_{Q+1} + b_i \le 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, Q$ — допустимі області задач (7). Якщо розглядати M_i як опуклі багатогранні багатозначні відображення, то з блочних підзадач можна отримати інформацію щодо субградієнтів функції (8). Оскільки цільові функції задач (7) є опуклими і власними, то $\Phi_i(p_{Q+1})$ є опуклими функціями і, використовуючи теорему про обчислення субдиференціала через відображення, локально спряжене до багатозначного [11], отримуємо

$$\partial\Phi_i(p_{Q+1}) = \{B_i^* u_i : c_i + p_i + A_i^* u_i = 0,\ u_i \ge 0,\ (A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i)^* u_i = 0\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, Q .$$

Тут u_i — вектор множників Лагранжа i-ї блочної підзадачі.

Оскільки є можливість оцінити значення Φ_i та їх субградієнтів, то для розв'язання задачі (10) можна обрати який-небудь метод опуклого програмування. Але для отримання алгоритму, що збігається за скінченну кількість кроків, потрібно гарантувати виконання деяких додаткових умов.

Нехай за деякого фіксованого $p_{Q+1} = \overline{p}_{Q+1}$ задачі (7) розв'язані та знайдені оптимальні значення $p_i(\overline{p}_{Q+1})$. Позначимо через $J_i = J_i(\overline{p}_{Q+1})$ множину номерів активних обмежень i - ї задачі (7) у точці $\overline{p}_{Q+1}$, тобто тих обмежень, які в цій точці виконуються як рівності:

$$A_{J_i} p_i(\overline{p}_{Q+1}) + B_{J_i} \overline{p}_{Q+1} + b_{J_i} = 0,\quad i = 1, 2, \ldots, Q .$$

Тут через A_{J_i}, B_{J_i} позначено матриці, що складаються з рядків, номери яких входять у множини J_i. Їм відповідають складові векторів b_{J_i} та u_{J_i} вільних членів і множників Лагранжа відповідних задач.

Надалі будемо використовувати такі означення.

Точка $\overline{p}_{Q+1}$ називається регулярною, якщо виконуються такі умови: всі блочні підзадачі (7) за фіксованого $p_{Q+1} = \overline{p}_{Q+1}$ є розв'язними, рядки матриць A_{J_i} — лінійно незалежними; множники Лагранжа, що відповідають активним обмеженням, — строго додатними $u_{J_i} > 0$.

У разі невеликого відхилення p_{Q+1} від $\overline{p}_{Q+1}$ набори активних обмежень та знаки множників Лагранжа блочних підзадач можуть залишитися незмінними.

Підмножина множини змін p_{Q+1}, що складається з регулярних точок, яким відповідає одна й та сама матриця активних обмежень A_{J_i} зі строго додатними множниками Лагранжа u_{J_i}, називається регулярною областю для функції $\Phi_i(p_{Q+1})$.

Теорема 1. У кожній регулярній області функції $\Phi_i(p_{Q+1})$ є квадратичними.

Доведення. У регулярній точці p_{Q+1} множники Лагранжа визначаються однозначно і $\partial\Phi_i(p_{Q+1})$ складається з єдиного вектора градієнта функції $\Phi_i'(p_{Q+1}) = B_i^* u_i(p_{Q+1})$.

Необхідні умови екстремуму для i-ї блочної підзадачі (7) у цій точці виконуються у такій формі:

$$c_i + p_i + A_{J_i}^* u_{J_i} = 0,\quad A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0,\quad u_{J_i} > 0 .$$

Звідси

$$p_i = -c_i - A^*_{J_i} u_{J_i} , \qquad (11)$$

$$u_{J_i} = -(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1}(A_{J_i} c_i - B_{J_i} p_{Q+1} - b_{J_i}) . \qquad (12)$$

Формула (12) виведена за припущення, що A_{J_i} є матрицею активних обмежень блочної підзадачі, тому для тих p_{Q+1}, для яких ця умова виконується, градієнт функції Φ_i є лінійною функцією від p_{Q+1}:

$$\Phi'_i(p_{Q+1}) = B^*_{J_i} u_i = B^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} B_{J_i} p_{Q+1} + B^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1}(b_{J_i} - A_{J_i} c_i) .$$

Сама ж функція Φ_i у цій регулярній області є квадратичною:

$$\Phi_i(p_{Q+1}) = \frac{1}{2}\left\langle B^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} B_{J_i} p_{Q+1}, p_{Q+1}\right\rangle +$$

$$+\left\langle B^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1}(b_{J_i} - A_{J_i} c_i), p_{Q+1}\right\rangle + \bar{b}_{J_i} ,$$

де $\bar{b}_{J_i}$ — це деяка константа, яку можна знайти з означення функції Φ_i (формула (9)):

$$\bar{b}_{J_i} = -\frac{1}{2}\left\| [E - A^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} A^*_{J_i}] c_i \right\|^2 - \left\langle A^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} b_{J_i}, c_i \right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\left\| A^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} b_{J_i} \right\|^2 .$$

Теорему доведено.

Кожна регулярна область для $\Phi(p_{Q+1})$ є перетином регулярних областей функцій $\Phi_i(p_{Q+1})$, $i = 1, 2, ..., Q$. Тому неперервна функція $\Phi(p_{Q+1})$ складається із фрагментів квадратичних функцій, причому в місцях з'єднання цих функцій можливі розриви її похідних. Через можливий розрив градієнта скінченнокрокові градієнтні методи для мінімізації $\Phi(p_{Q+1})$ не можуть бути застосовані. Оскільки задача (6) є допоміжною в апроксимуючому методі, то бажано отримати її розв'язок за скінченну кількість кроків. Тому замість мінімізації неявної функції $\Phi(p_{Q+1})$ будемо проводити послідовну мінімізацію спеціальним чином побудованих квадратичних функцій.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Якщо є багатогранна множина, що описується системою нерівностей, то гранню цієї множини називається підмножина, яка описується набором з обмежень, що задовольняються як рівності.

Нехай $p = \{p_1, p_2, ..., p_Q, p_{Q+1}\}$ — довільна точка, що належить множині означень задачі (6), тобто $A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \le 0$, $i = 1, 2, ..., Q$. Якщо

$J_i = J_i(p)$ — множина номерів обмежень i - ї задачі (7), що в точці p задовольняються як рівності, то цю систему рівностей можна записати у вигляді

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0\,,\;\; i = 1, 2, ..., Q\,. \qquad (13)$$

Надалі припускаємо, що виконується така умова невиродженості і для наборів індексів $J_i = J_i(p)$, що породжуються довільною допустимою точкою p, вектори, які є рядками матриці активних обмежень A_{J_i}, є лінійно незалежними.

Випишемо задачу мінімізації функції $F(p)$ на грані (13) допустимої множини задачі (6)

$$\min F(p)\,,$$

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0\,,\;\; i = 1, 2, ..., Q\,. \qquad (14)$$

Зафіксуємо $p_{Q+1} = \overline{p}_{Q+1}$. При цьому задача (14) розпадеться на Q задач

$$\min F_i(p_i)\,,$$

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} \overline{p}_{Q+1} + b_{J_i} = 0\,,\;\; i = 1, 2, ..., Q\,. \qquad (15)$$

Позначимо:

$$\Phi_{J_i}(p_{Q+1}) = \min_{p_i} \{F_i(p_i) : A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \le 0\}\,,\; i = 1, 2, ..., Q\,.$$

Визначимо розв’язок задач (15) у явному вигляді, використовуючи необхідні умови екстремуму

$$\overline{p}_i = -(E - A^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} A^*_{J_i})c_i - A^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1}(B_{J_i} \overline{p}_{Q+1} + b_{J_i})\,, \qquad (16)$$

$$i = 1,2,...,Q\,,$$

$$\Phi_{J_i}(p_{Q+1}) = \frac{1}{2}\left\langle B^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1} B_{J_i} p_{Q+1}, p_{Q+1}\right\rangle + \qquad (17)$$

$$+\left\langle B^*_{J_i}(A_{J_i} A^*_{J_i})^{-1}(b_{J_i} - A_{J_i} c_i), p_{Q+1}\right\rangle + \overline{b}_{J_i}\,,\; i = 1, 2, ..., Q\,.$$

Задачу мінімізації функції

$$\Phi_J(p_{Q+1}) = \sum_{i=1}^{Q} \Phi_{J_i}(p_{Q+1}) + F_{Q+1}(p_{Q+1}) \qquad (18)$$

назвемо локальною координуючою задачею, а операцію обчислення p_i за формулами (16) — допоміжною операцією.

Розв’язання задач (14) мінімізації цільової функції на грані еквівалентно розв’язанню відповідної локальної координуючої задачі з подальшим виконанням допоміжної операції.

Опишемо ідею заміни координуючої задачі набором локальних координуючих задач. Обираємо довільну допустиму точку $\overline{p}_{Q+1}$. За фіксованого $p_{Q+1} = \overline{p}_{Q+1}$ розв’язуємо блочні підзадачі (7). Виділяємо серед обмежень цих задач ті, що в оптимальних точках $p_i(\overline{p}_{Q+1})$ задовольняються як рівності. Активні обмеження визначають певну грань багатогранної множини, що описується обмеженнями задачі (6). Будуємо локальну координуючу задачу, що відповідає мінімізації цільової функції задачі (6) на цій грані. Розв'язуємо цю задачу методом спряжених градієнтів [9]. Якщо до кожної з отриманих у процесі розв'язання точок застосувати допоміжноу операцію (16), отримаємо послідовність точок $p = \{p_1, p_2, ..., p_Q, p_{Q+1}\}$, що належить виділеній. грані. На кожному кроці виконується перевірка для контролю виходу на грань допустимої множини, аби не допустити виходу за межі допустимої області. Якщо в деякий точці вздовж обраного напрямку одне з неактивних обмежень перетворюється в нуль, то додаємо його до активного набору і будуємо нову допоміжну координуючу задачу для розширеного активного набору, після чого продовжуємо застосовувати метод спряжених градієнтів.

Метод спряжених градієнтів мінімізує конкретну квадратичну функцію за скінченну кількість ітерацій. Оскільки кількість граней є також скінченною, то після скінченної кількості кроків отримаємо точку мінімуму локальної координуючої задачі.

Координуюча задача (10) є еквівалентною вихідній задачі (6), а кожна локальнана координуюча задача — еквівалентною задачі типу (14), що за умови збереження допустимості p_{Q+1} має більш вузьку порівняно із задачею (6) допустиму область. Тому точка мінімуму локальної координуючої задачі може не бути розв'язком координуючої задачі (10). Тоді, вважаючи отриману точку початковою, треба повторити процедуру спочатку, починаючи з розв'язку блочних підзадач.

Теорема 2. Необхідні та достатні умови того, що точка $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$ є розв'язком координуючої задачі (10), полягають у тому, що ця точка є розв'язком локальної координуючої задачі

$$\min \Phi_J(p_{Q+1})$$

і виконано умови

$$u_{J_i} \geq 0\,,\quad i = 1, 2, ..., Q\,. \tag{19}$$

Доведення. Відповідно до принципів побудови координуючої та локальних координуючих задач умови (19) гарантують збіжність цільових функцій цих задач у точці $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$.

У процесі пошуку оптимальної точки багаторазово розв'язуються блочні підзадачі (7). Якщо розв'язувати задачі двоїсті до блочних, то можемо застосувати метод спряжених градієнтів для задач з простими обмеженнями, а змінні p_i знаходити за формулами (11).

Алгоритм розв'язання координуючої задачі

1. Обираємо за початкове наближення довільну допустиму точку $\overline{p}_{Q+1}$.

2. Розв'язуємо задачі двоїсті до блочних підзадач (7)

$$\max\left\{-\frac{1}{2}\left\langle A_i A_i^* u_i, u_i\right\rangle - \left\langle A_i c_i - B_i \overline{p}_{Q+1} - b_i, u_i\right\rangle\right\},\ u_i \geq 0\,,\ \ i = 1, 2, ..., Q\,.$$

3. Знаючи множники Лагранжа u_i, обчислюємо $p_i(\overline{p}_{Q+1}) = -c_i - A_i^* u_i$ і знаходимо множини індексів активних обмежень $J_i(\overline{p}_{Q+1})$, $i = 1, 2, ..., Q$.

4. Використовуючи формули (17), (18), будуємо та розв'язуємо локальну координуючу задачу

$$\min \Phi_J(p_{Q+1})$$

методом спряжених градієнтів. На кожному кроці виконуємо перевірку для збереження допустимості розв'язку. Для цього підставляємо вираз $p_{Q+1}^{k+1} = p_{Q+1}^k + \overline{\alpha}_k s^{k+1}$, де p_{Q+1}^k — чергова отримана точка; s^{k+1} — напрямок зсуву за методом спряжених градієнтів на кроці k у ті обмеження блочних підзадач, індекси яких не входять до множин активних обмежень. Знаходимо найменше зі значень $\overline{\alpha}_k$, за якого неактивні обмеження дорівнюються до нуля. Порівнюємо це значення з довжиною кроку спряжених градієнтів α_k. Якщо $\alpha_k < \overline{\alpha}_k$, то $p_{Q+1}^{k+1} = p_{Q+1}^k + \alpha_k s^{k+1}$ і процес розв'язання локальної координуючої задачі потрібно продовжувати. Якщо ж ця нерівність не виконується, то $p_{Q+1}^{k+1} = p_{Q+1}^k + \overline{\alpha}_k s^{k+1}$ і процес застосування методу спряжених градієнтів до цієї локальної координуючої задачі є закінченим. В останньому випадку розширюємо множину J_i, додаючи до неї номер того обмеження, на якому дотягнуто мінімальне значення $\overline{\alpha}_k$. Повторюємо крок 4.

Нехай в результаті мінімізації отримано оптимальну точку локальної координуючої задачі $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$.

Обчислюємо $u_{J_i} = -(A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1}(A_{J_i} c_i - B_{J_i} \overline{\overline{p}}_{Q+1} - b_{J_i})$, $i = 1,2,...,Q$. Якщо всі $u_{J_i} \geq 0$, то точка $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$ є розв'язком координуючої задачі (10), а $\overline{\overline{p}} = \{\overline{\overline{p}}_1, \overline{\overline{p}}_2, ..., \overline{\overline{p}}_Q, \overline{\overline{p}}_{Q+1}\}$, де $\overline{\overline{p}}_i = -c_i - A_{J_i}^* u_{J_i}$ ($i = 1, 2, ..., Q$), є розв'язком вихідної задачі.

Якщо ж умова $u_{J_i} \geq 0$, $i = 1,2,...,Q$ не виконується , то повертаємося до кроку 2 алгоритму , вважаючи точку $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$ новим наближенням і визначаючи нову множину номерів активних обмежень $J' = J'(\overline{\overline{p}}_{Q+1})$, що отримується за результатом розв'язання блочних підзадач за фіксованого $p_{Q+1} = \overline{\overline{p}}_{Q+1}$.

Обґрунтування збіжності

Нехай J_i, $i = 1, 2, ..., Q$ — вихідні множини індексів активних обмежень і в процесі розв'язання локальної координуючої задачі з цільовою функцією $\Phi_J(p_{Q+1})$ ітераційний процес привів у таку точку $\tilde{p}_{Q+1}$, у якій одне з обмежень, що не входило раніше до множини активних

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \; i = 1, 2, ..., Q, \tag{20}$$

перетворюються у рівність. Якщо це обмеження має номер j і належить до l-ї локальної задачі, то, починаючи з точки $\tilde{p}_{Q+1}$, розширюємо індексну множину $\tilde{J}_l = J_l \cup \{j\}$ і розв'язуємо нову локальну координуючу задачу з цільовою функцією $\Phi_{\tilde{J}}(p_{Q+1})$.

Теорема 3. У разі розширення індексної множини $\tilde{J}_l = J_l \cup \{j\}$ значення цільових функцій локальних координуючих задач у точці переходу збігаються.

Доведення. Випишемо обмеження, що в точці $\tilde{p}_{Q+1}$ перетворюється в рівність.

$$A_l^j p_l + B_l^j \tilde{p}_{Q+1} + b_l^j = 0, \; j \notin J_l. \qquad (21)$$

Верхнім індексом j позначено рядки матриць A_l і B_l і відповідний елемент вектора b_l.

Оскільки точку $\tilde{p}_{Q+1}$ отримано в процесі мінімізації функції $\Phi_J(p_{Q+1})$, то за алгоритмом допустиме значення p_l, що належить грані (20), отримуємо за формулою (16)

$$p_l = -(E - A_{J_l}^*(A_{J_l} A_{J_l}^*)^{-1} A_{J_l}^*) c_l - A_{J_l}^*(A_{J_l} A_{J_l}^*)^{-1}(B_{J_l} \bar{p}_{Q+1} + b_{J_l}).$$

Підставивши цей вираз у формулу (21), знаходимо вираз для $\tilde{p}_{Q+1}$ і явні вирази для $\Phi_J(p_{Q+1})$ та $\Phi_{\tilde{J}}(p_{Q+1})$. Використовуючи рекурентні формули для обертання матриць [12], можна показати, що виконується рівність

$$\Phi_{\tilde{J}}(\tilde{p}_{Q+1}) = \Phi_J(\tilde{p}_{Q+1}).$$

Наведений алгоритм будує таку послідовність точок $\{p_{Q+1}^k\}$, що, принаймні у тих з них, у яких досягаються мінімуми локальних координуючих задач, значення цільової функції координуючої задачі $\Phi(p_{Q+1})$ монотонно спадає. Дійсно, оскільки в початковій точці $\overset{0}{p}_{Q+1}$ як набори індексів J_i^0 для побудови локальної координуючої задачі використовуються набори активних обмежень, то в цій точці цільові функції локальної координуючої та координуючої задач збігаються: $\Phi_{J^0}(p_{Q+1}^0) = \Phi(p_{Q+1}^0)$. Метод спряжених градієнтів здійснює монотонну мінімізацію квадратичної функції. Якщо він не приводить до точки мінімуму локальної координуючої задачі, то розширюється одна з множин J_i^0 і відбувається перехід до нової локальної координуючої задачі, причому значення двох локальних координуючих задач, що розв'язуються послідовно, у точці переходу збігаються.

Відповідно до припущення щодо лінійної незалежності векторів обмежень через скінченну кількість кроків, що не перевищує розмірність вектора p, процес розширення індексних множин припиниться і досягається точка мінімуму локальної координуючої задачі. Тобто кількість кроків алгоритму, у результаті яких буде отримано точку мінімуму локальної координуючої задачі, не перевищує n.

Нехай точку p^l_{Q+1} отримано в результаті розв'язання задачі $\min \Phi_{J^l}(p_{Q+1})$. Якщо ця точка не є розв'язком координуючої задачі (10), то виконується нерівність

$$\Phi_{J^l}(p^l_{Q+1}) = F(p^l_1, p^l_2, ..., p^l_Q, p^l_{Q+1}) >$$

$$> F(p_1(p^l_{Q+1}), p_2(p^l_{Q+1}), ..., p_Q(p^l_{Q+1}), p^l_{Q+1}) = \Phi(p^l_{Q+1}),$$

оскільки p^l_i, знайдені за формулами (16) для індексних множин J^l_i, є допустимими, а $p_i(p^l_{Q+1})$ — оптимальні точки блочних підзадач за фіксованих p^l_{Q+1}. Є очевидним, що $\Phi(p^0_{Q+1}) > \Phi(p^l_{Q+1})$.

Обираючи новою початковою точкою p^l_{Q+1}, повторюємо цю процедуру і отримуємо точку мінімуму локальної координуючої задачі, у якій значення $\Phi(p_{Q+1})$ строго менше за значення цієї функції в точках мінімуму раніше побудованих локальних координуючих задач. Таким чином, значення функції $\Phi(p_{Q+1})$ уздовж послідовності точок мінімуму локальних координуючих задач монотонно спадає. Це означає, що якщо розглядати дві точки мінімуму різних локальних координуючих задач p^l_{Q+1} і p^k_{Q+1}, $l > k$, то множини індексів активних обмежень у таких точках є різними. Якби $J_i(p^l_{Q+1}) = J_i(p^k_{Q+1})$, $i = 1,2,...,Q$, то $\Phi(p^l_{Q+1}) = \Phi(p^k_{Q+1})$, а відповідно до побудови процесу $\Phi(p^l_{Q+1}) > \Phi(p^k_{Q+1})$, $l > k$.

З іншого боку, всі множини індексів активних обмежень є підмножинами скінченної множини номерів усіх обмежень задачі (6) і тому кількість таких підмножин є скінченною. Це означає, що процес повинен завершитися після скінченної кількості в точці мінімуму координуючої задачі, бо якщо отримана точка не є розв'язком координуючої задачі, процес може бути продовжений.

Це означає, що є справедливою така теорема.

Теорема 4. Якщо в точках мінімуму локальних координуючих задач виконуються умови регулярності, то процедура буде знаходити оптимальний розв'язок за скінченну кількість ітерацій.

Припустімо тепер, що точка $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$, отримана як розв'язок чергової локальної квадратичної задачі і така, що не є розв'язком координуючої задачі, не є регулярною. Це означає, що серед компонентів векторів Лагранжа u ($i = 1,2,...,Q$) є від'ємні. Якби це було не так, точка $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$ була б розв'язком координуючої задачі.

Нехай $u^j_i < 0$, $i \in \{1,2,...,Q\}$, $j \in J_i$. Побудуємо нову індексну множину $\tilde{\tilde{J}}_i = J_i / \{j\}$ шляхом відкидання з множини J_i індексу j. Побудуємо локальну координуючу задачу для цієї скороченої індексної множини і припустимо, що знайдено розв'язок цієї нової задачі $\tilde{\tilde{p}}_{Q+1}$. Локальні координуючі задачі, побудовані для множин J_i і $\tilde{\tilde{J}}_i$, є еквівалентними відповідно задачам

$$\min\{F(p): A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, i = 1,2,...,Q\} \tag{22}$$

та

$$\min\{F(p): A_{\tilde{\tilde{J}}_i} p_i + B_{\tilde{\tilde{J}}_i} p_{Q+1} + b_{\tilde{\tilde{J}}_i} = 0, i = 1,2,...,Q\}. \tag{23}$$

Оскільки допустима множина задачі (22) є більш вузькою порівняно з допустимою множиною задачі (23), то

$$F(\overline{\overline{p}}_1, \overline{\overline{p}}_2, ..., \overline{\overline{p}}_Q, \overline{\overline{p}}_{Q+1}) \geq F(\tilde{\tilde{p}}_1, \tilde{\tilde{p}}_2, ..., \tilde{\tilde{p}}_Q, \tilde{\tilde{p}}_{Q+1}),$$

де $\overline{\overline{p}}_i$ і $\tilde{\tilde{p}}_i$ знаходимо за формулою (16) для множин J_i і $\tilde{\tilde{J}}_i$ відповідно. Остання нерівність може бути переписана у вигляді

$$\Phi_J(\overline{\overline{p}}_{Q+1}) \geq \Phi_{\tilde{\tilde{J}}}(\tilde{\tilde{p}}_{Q+1}).$$

Треба показати, що точки $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$ і $\tilde{\tilde{p}}_{Q+1}$ не збігаються, інакше процес не зсунувся б з точки $\overline{\overline{p}}_{Q+1}$.

Теорема 5. Нехай обмеження локальної координуючої задачі (23) утворені з обмежень іншої локальної координуючої задачі (22) шляхом видалення рівняння, для якого

$$u_i^j < 0, \; i \in \{1,2,...,Q\}, \; j \in J_i. \tag{24}$$

Тоді точки мінімуму цих задач не збігаються.

Доведення. Нехай в рівнянні (24) $i = l$, тобто $u_l^j < 0$, а точка мінімуму задачі (22) $\overline{\overline{p}} = (\overline{\overline{p}}_1, \overline{\overline{p}}_2, ..., \overline{\overline{p}}_Q, \overline{\overline{p}}_{Q+1})$ є оптимальною точкою і для задачі (23). Випишемо необхідні умови екстремуму для цих задач [11]. Вони мають вигляд відповідно

$$F'(\overline{\overline{p}}) + \sum_{i=1}^{Q} A_{J_i}^* u_{J_i} = 0, \tag{25}$$

$$A_{J_i} p_i(\overline{\overline{p}}_{Q+1}) + B_{J_i} \overline{\overline{p}}_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad i = 1,2,...,Q$$

та

$$F'(\overline{\overline{p}}) + \sum_{i=1}^{Q} A_{\tilde{\tilde{J}}_i}^* w_{\tilde{\tilde{J}}_i} = 0, \tag{26}$$

$$A_{\tilde{\tilde{J}}_i} p_i(\overline{\overline{p}}_{Q+1}) + B_{\tilde{\tilde{J}}_i} \overline{\overline{p}}_{Q+1} + b_{\tilde{\tilde{J}}_i} = 0, \quad i = 1,2,...,Q.$$

Тут u_{J_i} та $w_{\tilde{\tilde{J}}_i}$ — вектори множників Лагранжа задач (22) і (23).

Віднімаючи нерівності (25) і (26), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{Q} A_{J_i}^* u_{J_i} - \sum_{i=1}^{Q} A_{\tilde{\tilde{J}}_i}^* w_{\tilde{\tilde{J}}_i} = u_l^j (A_l^j)^* + \sum_{i=1}^{Q} \sum_{\substack{t \in J_i \\ t \neq j}} (u_i^t - w_i^t)(A_i^t)^* = 0,$$

що є неможливим, оскільки $u_l^j < 0$, а матриці A_{J_i} є невиродженими. Це і доводить твердження теореми.

Таким чином, процедура відкидання індексу з множини активних обмежень дозволяє продовжувати процес мінімізації і не порушує його монотонності. Це означає, що і в цьому випадку розв'язок буде знайдено за скінченну кількість кроків.

ВИСНОВКИ

Запропонований метод розв'язання нелінійної задачі блочної структури зі зв'язуючими змінними є поєднанням апроксимаційного методу першого порядку та прямого методу декомпозиції.

Декомпозиційний прийом полягає у тому, що для задач блочної структури зі зв'язуючими змінними загальні ресурси змінюються від кроку до кроку таким чином, аби блочні підсистеми (набори блочних підзадач) працювали дедалі ефективніше з точки зору ефективності роботи всієї системи.

На відміну від задачі зі зв'язуючими обмеженнями [7], де швидкість збіжності при розв'язанні двоїстої координуючої задачі залежить від поведінки її цільової функції в околі оптимальної точки, у разі застосування прямої схеми декомпозиції розв'язок координуючої задачі завжди отримується за скінченну кількість кроків, що є важливим з огляду на те, що координуюча задача у запропонованій триступеневій схемі повинна розв'язуватися багаторазово як допоміжна в апроксимаційному процесі найвищого рівня.

Загалом швидкість збіжності для розв'язання вихідної задачі (1) залежить від функцій, що визначають її критерій і обмеження, та обраного методу апроксимації. Для задач із сепарабельними функціями можна використовувати апроксимуючі методи більш високого порядку, беручи у виразі (3) як матрицю D_k деякі наближення до матриці других похідних або функцію Лагранжа задачі (1), як це робиться у методах послідовного квадратичного програмування. Очевидно, що у такому випадку отримаємо швидкість збіжності вищу, ніж у методах першого порядку і побудова таких процедур може стати перспективним напрямом для подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем / Л.С. Лэсдон. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
2. *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности / В.И. Цурков. — М.: Наука, 1981. — 352 с.
3. *Лаптин Ю.П.* Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными / Ю.П. Лаптин, Н.Г. Журбенко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 2. — С. 47–55.
4. *Shefi R.* Rate of Convergence Analysis of Decomposition Methods Based on the Proximal Method of Multipliers for Convex Minimization / R. Shefi, M. Teboulle // SIAM J. Optim. — 014. — **24**, Issue 1. — P. 269–297. DOI: 10.1137/1309.10774.

5. Andersson H. A new decomposition algorithm for a liquefied natural gas inventory routing problem / H. Andersson, M. Christiansen, G. Desaulniers // International Journal of Production Research. — 2016. — **54**, Issue 2. — P. 564–578. DOI: 10.1080/00207543.2015.1037024
6. *Лаптин Ю.П.* Точные штрафные функции и выпуклые продолжения функций в схемах декомпозиции по переменным / Ю.П. Лаптин // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — **52**, № 1. — С. 93–104.
7. *Кірік О.Є.* Підхід до розв'язання нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими обмеженнями / О.Є. Кірік // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — К., 2015. — № 5. — С. 32–38.
8. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків / О.Є. Кірік // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — К., 2007. — № 3. — С. 67–73.
9. *Пшеничный Б.Н.* Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. — М.: Наука, 1975. — 319 с.
10. *Александрова В.М.* Оптимізаційні моделі та алгоритми для мережевих задач розподілу ресурсів / В.М. Александрова, О.Є. Кірік // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2014. — № 4. — С. 39–45.
11. *Пшеничный В.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / В.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
12. *Фаддеев Д.К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. — М.: Физматгиз, 1960. — 656 с.

Надійшла 06.04.2016