ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.6:621.391
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.4.07

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНЕ ПОДАННЯ ДАНИХ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, О.С. ДЕГТЯР

Анотація. Для роботи з різного типу даними в режимі реального часу виникає потреба використовувати адаптивні підходи, що здатні налаштовувати параметри моделі у міру надходження нової інформації. Запропоновано алгоритми подання динамічних потоків даних у заданих структурах, що базуються на оптимізації певних типів нев'язок. Для побудови моделей використано метод Ньютона як ефективний через його високу збіжність. Такі підходи мають на меті коригування вектора невідомих параметрів на підставі нових спостережень шляхом розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь. Початкові дані обрано з урахуванням оцінок, виведених на основі теорії практичної стійкості. Проведено обчислювальний експеримент, у якому порівнюються моделі, побудовані на методах оптимізації першого та другого порядків, що підтверджує доцільність використання розроблених підходів.

Ключові слова: оброблення даних, структурно-параметрична оптимізація, градієнтні методи, метод Ньютона, збіжність, динамічна модель.

ВСТУП

Задачі оброблення даних постають у різних галузях: медичній діагностиці, хімічній промисловості, екології, радіолокації та в багато інших галузях і потребують методик оброблення сигналів, які б дозволили в реальному часі розпізнавати певні особливості досліджуваних даних. Особливо важливими є властивості адаптації та високої швидкодії таких алгоритмів.

Одним з підходів, що дозволяє ефективно розв'язувати подібного роду задачі, є адаптивна апроксимація даних з метою їх структурно-параметричного подання. Це дає змогу адаптивного коригування вектора невідомих параметрів у міру надходження нових спостережень. Сама модель являє собою неперервну за часовою змінною ітераційну схему, що є системою звичайних диференціальних рівнянь з деякими початковими даними.

Розв'язання задачі апроксимації в заданих структурних формах потребує аналізу збіжності побудованої ітераційної процедури. Для цього в роботі пропонується використовувати оптимальну оцінку збіжності у класі еліпсоїдів за розкидами початкових даних, що виводиться за допомогою аналізу практичної стійкості параметричних систем.

Мета роботи — розроблення універсального методу адаптивного оброблення даних, у якому бураховувалась специфіка роботи з динамічними потоками даних.

ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНИХ СИГНАЛІВ

Нехай ставиться задача подання неперервного скалярного сигналу $x = \varphi(t)$, $t_0 \le t \le T$ у деякому структурному вигляді

$$x(t) \approx \psi(t, \alpha) = \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Одним з підходів до знаходження вектора невідомих параметрів α є його адаптивне налаштування таким чином, щоб мінімізувати деяку нев'язку [1]. У найпростішому випадку як нев'язку можна брати середньоквадратичне відхилення сигналу від його апроксимації безпосередньо в момент часу t:

$$I_1(\alpha) = (\psi(t, \alpha) - \varphi(t))^2.$$

Тоді вектор невідомих параметрів коригується лише на підставі даних, що надходять у поточний момент часу. Такий підхід застосовується досить обмежено, проте для деяких задач, де спостерігається однотипність даних (наприклад, гармонічні сигнали), удається досягати результатів за рахунок високої швидкодії алгоритму. Прикладом ефективного застосування алгоритму може бути звукова інформація, температурні графіки тощо.

Запишемо неперервну за часовою змінною ітераційну процедуру на основі методів оптимізації першого порядку (градієнтного спуску). Вона матиме вигляд

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\nabla_\alpha I_1(\alpha) = -2(\psi(t, \alpha) - \varphi(t))\nabla_\alpha \psi(t, \alpha). \tag{1}$$

Тут і далі вважатимемо $\nabla_\alpha f(\alpha) = \left(\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_2}, ..., \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_n} \right)^{\mathrm{T}}$, де Т — знак транспонування.

Після задання початкових даних

$$\alpha(t_0) = \alpha^{(0)} \tag{2}$$

вектор невідомих параметрів коригуємо шляхом розв'язання задачі Коші (1)–(2) [2]. У випадку, коли параметр збігається до певних значень у міру надходження нових даних, його можна вважати розв'язком задачі параметричної ідентифікації в цілому.

Аналогічно до випадку з використанням методу градієнтного спуску можна побудувати ітераційну процедуру на основі методів оптимізації другого порядку, зокрема методу Ньютона. Як недоліки такого методу слід відзначити необхідність існування другої похідної нев'язки за α і те, що на кожному кроці алгоритму потрібно виконувати більшу кількість операцій. Проте остаточний розв'язок знаходиться за меншу кількість ітерацій.

У загальному випадку ітераційна схема, що ґрунтується на методі Ньютона, матиме вигляд [3]

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_1(\alpha))\nabla_\alpha I_1(\alpha).$$

Для розглянутого типу нев'язки гесіан матриці набуде вигляду

$$H(I_1((\alpha))) = 2(\nabla_\alpha \psi(t,\alpha)\nabla_\alpha^{\mathrm{T}}\psi(t,\alpha) + (\psi(t,\alpha) - \varphi(t))H(\psi(t,\alpha))).$$

Ітераційну процедуру, побудовану на основі методу Ньютона, записуємо таким чином:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -(\nabla_\alpha \psi(t,\alpha)\nabla_\alpha^{\mathrm{T}}\psi(t,\alpha) + (\psi(t,\alpha) -$$

$$- \varphi(t))H(\psi(t,\alpha)))^{-1}(\psi(t,\alpha) - \varphi(t))\nabla_\alpha \psi(t,\alpha).$$

Разом із початковими умовами це є задача Коші, розв'язок якої знаходиться одним із числових методів.

Досить ефективним способом для численних задач є пошук апроксимації у формі лінійної комбінації заданих базисних функцій:

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \quad t \ge t_0.$$

Апроксимацію сигналу шукатимемо у вигляді

$$\psi(t,\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(t).$$

Шляхом підстановки будуємо ітераційні процедури з урахуванням вигляду функції апроксимації.

Окремо для зручності запишемо градієнт та гесіан нев'язки. Градієнт нев'язки являтиме собою n-вимірний вектор-стовпчик з координатами

$$\frac{\partial I_1(\alpha)}{\partial \alpha_i} = 2\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(t) - \varphi(t)\right)\varphi_i(t), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Гесіан є квадратною матрицею розмірності $n \times n$ з елементами:

$$H(I_1(\alpha)) = \begin{pmatrix} 2\varphi_1^2(t) & 2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & \ldots & 2\varphi_1(t)\varphi_n(t) \\ 2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & 2\varphi_2^2(t) & \ldots & 2\varphi_2(t)\varphi_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\varphi_1(t)\varphi_n(t) & 2\varphi_2(t)\varphi_n(t) & \ldots & 2\varphi_n^2(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді для методів, що будуються на основі методу градієнтного спуску, система звичайних диференціальних рівнянь перетвориться до вигляду

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -2\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(t) - \varphi(t)\right)\varphi_i(t), \; i = 1,2,\ldots,n.$$

Її можна переписати у векторно-матричній формі

$$\frac{d\alpha}{dt} = A(t)\alpha + f(t), \quad t \ge t_0. \tag{3}$$

Тут $\alpha^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $f^{\mathrm{T}}(t) = 2\varphi(t)\phi^{\mathrm{T}}(t)$, де $\phi^{\mathrm{T}}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(t))$, $A(t) = H(I_1(\alpha))$.

Використовуючи формулу Коші, запишемо розв’язок задачі (3), (2):

$$\alpha(t) = K(t, t_0)\alpha^{(0)} + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau) f(t) d\tau,$$

де $K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, $\Phi(t)$ — фундаментальна матриця системи; $K(t, \tau)$ — фундаментальна матриця однорідної системи, що відповідає виразу (3), нормована за моментом часу τ. Тобто

$$\frac{dK}{dt} = A(t)K, \quad K(\tau, \tau) = I_n.$$

Запишемо неперервну ітераційну процедуру у векторно-матричній формі:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_1(\alpha))\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(t) - \varphi(t)\right) 2\phi(t);$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_1(\alpha))(A(t)\alpha - f(t)) = -H^{-1}(I_1(\alpha))H(I_1(\alpha))\alpha + H^{-1}(I_1(\alpha)) f(t).$$

Ітераційна схема, що ґрунтується на методі Ньютона, набуде вигляду

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha + H^{-1}(I_1(\alpha)) f(t). \tag{4}$$

Якщо не існує оберненої до $(I_1(\alpha))$ матриці, можна скористатися апаратом псевдообернення матриць.

Запишемо розв’язок задачі Коші (4), (2) у такій формі:

$$\alpha(t) = K(t, t_0)\alpha^{(0)} + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau) H^{-1}(t) f(t) d\tau.$$

Оскільки нев’язка у фіксований момент часу може бути застосована до обмеженого класу задач, то розглянемо випадок, коли цільовою функцією є інтегральні нев’язки на всьому проміжку та на часовому вікні $[t - \Delta t, t]$.

Наприклад, інтегральну нев’язку на часовому проміжку $[t_0, t]$ подамо як

$$I_2(\alpha) = \int_{t_0}^{t} \left(\psi(\tau, \alpha) - \varphi(\tau)\right)^2 d\tau.$$

Тоді система звичайних диференціальних рівнянь на основі методів оптимізації другого порядку в матричній формі набуде вигляду

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_2(\alpha)) \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(\tau) - \varphi(\tau)\right) \varphi_i(\tau) d\tau,$$

де $H(I_2(\alpha)) = \int_{t_0}^{t} H(I_1(\alpha)) d\tau.$

Після перетворень ітераційну процедуру, побудовану за допомогою методу Ньютона, записуємо у такій формі

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha + H^{-1}(I_2 I_1(\alpha))g(t).$$

Тут $\alpha^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — вектор невідомих параметрів розмірності n, $g(t) = 2\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\phi(\tau)d\tau$, $\phi^{\mathrm{T}}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ — відомі.

ВИПАДОК СИГНАЛІВ З РОЗРИВАМИ ПЕРШОГО РОДУ

Нехай задано кусково-неперервний сигнал $x = \varphi(t)$, $t_0 \le t \le T$. Цей інтервал розбивається на підінтервали точками $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$, де $t_0, t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_N$ — невідомі точки розриву функції $\varphi(t)$ (розриву першого роду). Ставиться задача апроксимації сигналу на інтервалах $(t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{N-1}, T)$, на кожному з яких функція є неперервною [4].

Розглянемо один з підінтервалів (t_{i-1}, t_i). На ньому апроксимуємо

$$x(t) \approx \psi_i(t, \alpha^{(i)}) = \psi_i(t, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, ... \alpha_n^{(i)}),$$

де $t \in (t_{i-1}, t_i)$.

Переходити на наступний крок пропонується на підставі дослідження практичної стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь. Зупинемося детальніше на основних означеннях, що використовуються у праці [5].

Нехай процес розглядається на скінченному відрізку часу $t \in [t_0, T]$, початкові дані належать обмеженій множині $\alpha_0 \in G_0$, $\alpha(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$, Φ_t — фазові обмеження, які визначають характер збіжності ітераційної процедури.

Означення 1. Неперервну ітераційну процедуру (3) називатимемо $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ - збіжною, якщо для будь-яких початкових умов $\alpha_0 \in G_0$ відповідні розв'язки системи (3) $\alpha(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$.

Означення 2. Неперервну ітераційну процедуру (3) називатимемо асимптотично $\{G_0, \Phi_t, t_0, \infty\}$ - збіжною, якщо, крім умов $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-збіжності, для будь-якого $T < \infty$ виконується $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha(t, t_0, \alpha_0) \to \alpha^*$ для будь-яких $\alpha_0 \in G_0$.

Розглянемо більш конкретні випадки застосування теорії практичної стійкості. Виберемо множину початкових даних G_0 у формі $G_0 = E_c(\alpha^c, B)$, де $E_c(\alpha^c, B)$ — еліпсоїд радіуса c із центром в точці α^c, тобто

$$E_c(\alpha^c, B) = \{\alpha \in R^n : (\alpha - \alpha^c)^{\mathrm{T}} B(\alpha - \alpha^c) \le c^2\},$$

де B — додатно визначена симетрична матриця розмірності $n \times n$; c — параметр, який необхідно оцінити.

Означення 3. Неперервну ітераційну процедуру (3) називатимемо $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-збіжною, якщо для будь-яких початкових даних $\alpha_0 \in G_0 = E_c(\alpha^c, B)$ відповідні траєкторії системи (3) $\alpha(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$.

Нехай множина фазових обмежень має вигляд багатокутника $\Phi_t = \left\{ \alpha : \max\limits_{k=\overline{1,N}} \left| l_k^{\mathrm{T}}(t)\alpha \right| \le 1 \right\}$, де $l_k(t)$ — n-вимірні неперервні вектори-функції; $t \in [t_0, T]$, $k = \overline{1, N}$, N — кількість фазових обмежень.

Припустімо, що відомий розв'язок α^* системи (3), $\alpha^* \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$. Тоді можна отримати оптимальну оцінку $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-збіжності у класі еліпсоїдів $G_0 = E_c(\alpha^c, B)$:

$$c_{\mathrm{opt}} = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=\overline{1,n}} \frac{1 - \left| l_s^{\mathrm{T}}(t)(\Theta(t, t_0)\alpha^c + a(t)) \right|}{\sqrt{l_s^T(t) Q(t) l_s(t)}},$$

де $a(t)$ — частинний розв'язок (3), що відповідає $\alpha(t_0) = \alpha_0$; $\Theta(t, t_0)$ — фундаментальна матриця однорідної системи; $Q(t) = \Theta(t, t_0)\Theta^T(t, t_0)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння Ляпунова $\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^{\mathrm{T}}$ з умовою $Q(t_0) = B^{-1}$.

Така оцінка випливає з вибору функції Ляпунова в спеціальному вигляді з використанням теореми про достатні умови практичної стійкості. Більш детально подібні підходи описано у праці [6].

Остаточно запишемо алгоритм знаходження адаптивної апроксимації сигналів у заданих структурних формах:

Крок 1: задаємо систему з n базисних функцій $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Крок 2: задаємо множини $G_0^{(0)}, \Phi_t^{(0)}$ $\{G_0^{(0)}, \Phi_t^{(0)}, t_0, t_1\}$-збіжності.

Крок 3: задаємо початкові дані $\alpha(t_0) = \alpha_0$.

Крок 4: запускаємо ітераційну процедуру, розв'язуючи відповідні системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою числових методів. Відслідковуємо збіжність процедури на основі методів практичної стійкості:

а) якщо ітераційна процедура є збіжною, продовжуємо налаштування вектора невідомих параметрів;

б) у момент часу, коли не виконується означення практичної стійкості, покладаємо $t_i := t_{i+1}$, повертаємося до кроку 3.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Продемонструємо роботу алгоритму для випадку побудови системи диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на мінімізації інтегральної нев'язки на всьому часовому проміжку.

Нехай вимірювальний сигнал є гармонічним:

$$\varphi(t)=\begin{cases} 2\cos(3t), & 0\le t<4{,}45; \\ 3\cos(3t)+0{,}8\sin(t), & 4{,}45\le t<9{,}9; \\ 0{,}5\cos(3t)+2\sin(t), & 9{,}9\le t<16; \\ 3\sin(t), & 16\le t<20. \end{cases}$$

Для його апроксимації виберемо дві базисні функції $\varphi_1(t)=\cos(3t)$, $\varphi_2(t)=\sin(t)$ і задамо початкові дані: $\alpha_1^{(0)}=1$, $\alpha_2^{(0)}=5$.

Графіки налаштування невідомих параметрів α_1, α_2 показано на рис. 1, 2.

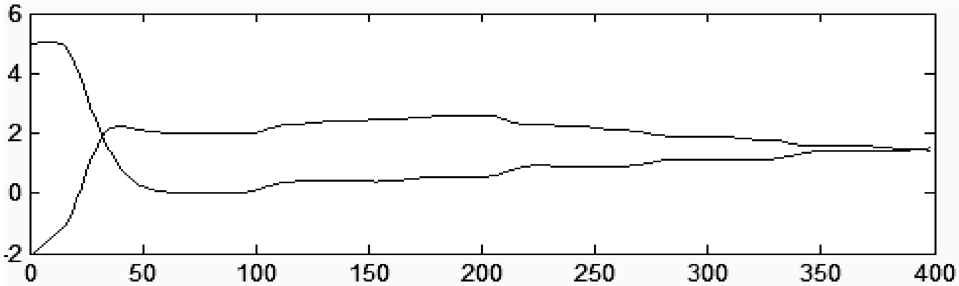

Рис. 1. Графіки налаштування невідомих параметрів. Метод градієнтного спуску

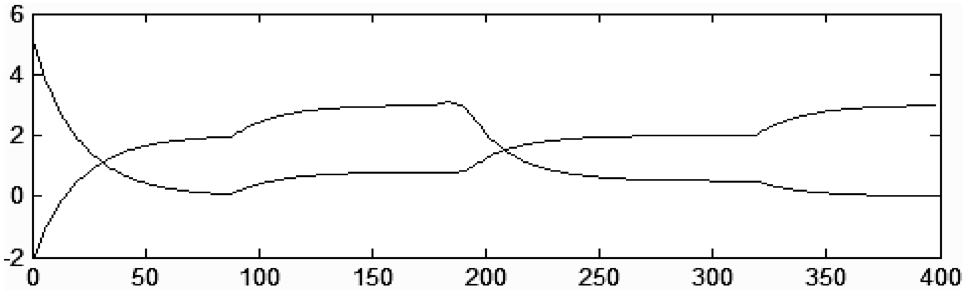

Рис. 2. Графіки налаштування невідомих параметрів. Метод Ньютона

Графіки середньоквадратичного відхилення знайденої апроксимації від сигналу, що демонструють ефективність застосування розроблених підходів до даних змінної структури, показано на рис. 3. Коли параметри, знайдені на основі методу градієнтного спуску, не встигають збігатися до шуканих значень, параметри, знайдені за методом Ньютона, досить швидко до них збігаються.

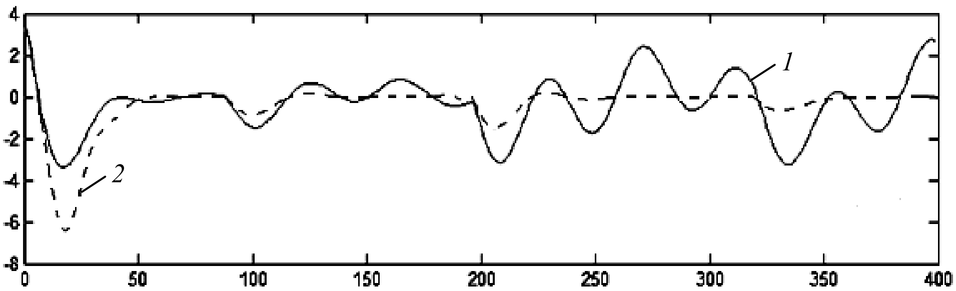

Рис. 3. Збіжність методів: графік середньоквадратичного відхилення сигналу від апроксимації: *1* — градієнтний спуск; 2 — метод Ньютона

Таким чином, використання методів оптимізації першого порядку призводить до значних відхилень апроксимації від сигналу з надходженням нових спостережень, тоді як методи другого порядку показують високу збіжність і ефективність роботи з динамічними потоками даних.

ВИСНОВКИ

Розглянуто алгоритми апроксимації даних у заданих формах з метою подання динамічних потоків даних у певних структурах, якими є задані базисні функції. У прикладних задачах такими функціями можна обирати відомі фрагменти спостережень, що дає змогу відслідковувати їх входження з певною точністю у досліджуваний сигнал.

Запропоновані алгоритми ґрунтуються на побудові систем звичайних диференціальних рівнянь, що разом із заданими початковими даними являють собою задачу Коші, яку можна розв'язати за допомогою числових методів. Такі системи разом із початковими даними далі вважаються неперервними за часом ітераційними процедурами, за якими коригується вектор невідомих параметрів.

Для побудови систем звичайних диференціальних рівнянь запропоновано використовувати методи оптимізації (зокрема, в роботі порівнюються результати, отримані на основі методів оптимізації першого та другого порядків), де цільовими функціями є три типи нев'язок між сигналом та його апроксимацією: у фіксований момент часу, інтегральна нев'язка на всьому часовому проміжку або на його фрагменті.

Висока збіжність схем, побудованих на основі методів оптимізації другого порядку, дозволяє ефективно застосовувати їх для випадку сигналів з розривами першого роду. Збіжність пропонується досліджувати за допомогою методів практичної стійкості. Наведено оцінку практичної збіжності у класі еліпсоїдів.

Справедливість теоретичних досліджень продемонстровано за допомогою модельного прикладу, у якому наводиться порівняння роботи алгоритмів, побудованих на основі методів градієнтного спуску та Ньютона.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гаращенко Ф.Г.* Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтярь, О.Ф. Швец // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 69–77.
2. *Еругин Н.П.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало. — К.: Вища шк., 1974. — 472 с.
3. *Дегтяр О.С.* Адаптивні підходи до апроксимації сигналів, що базуються на градієнтних методах другого порядку / О.С. Дегтяр // Фізико-технологічні проблеми радіотехнічних пристроїв, засобів телекомунікацій, нано- та мікроелектроніки: IV міжнар. конф., 23–25 жовт. 2013 р.: тези доп. — Чернівці, 2014.
4. *Дегтяр О.С.* Про один адаптивний алгоритм апроксимації кусково-неперервних сигналів / О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2008. — № 3. — С. 192–198.
5. *Бублик Б.Н.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
6. *Башняков О.М.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація / О.М. Башняков, Ф.Г. Гаращенко, В.В, Пічкур. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. — 383 с.

Надійшла 24.03.2016