УДК 519.8(075.8)
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.4.08

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Е.Ю. ЗАЙЧЕНКО, Ю.П. ЗАЙЧЕНКО

Аннотация. Рассмотрены многокритериальные задачи нечеткого математического программирования. Введены понятия парето-оптимального решения и наилучшего компромиссного решения уровня α МКНП- задачи. Сформулированы и доказаны теоремы, устанавливающие взаимосвязи между ними. Предложен метод решения МКНП-задачи на основе поиска компромиссных решений уровня α. Приведен пример решения многокритериальной задачи линейного программирования с нечеткими условиями, иллюстрирующими предложенный подход и проведено его сравнение с компромиссным решением этой задачи в четкой постановке.

Ключевые слова: многокритериальные задачи, нечеткое математическое программирование, парето-оптимальные решения уровня α, наилучшее компромиссное решение уровня α .

ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальные задачи оптимизации составляют широкий класс задач принятия решений. Для их решения в четких условиях разработано значительное количество методов и алгоритмов, среди которых подходы, методы и алгоритмы, изложенные в работах [1–4].Обзор современных методов многокритериальной оптимизации в четких условиях приведен в учебнике [5].

Однако задача принятия МК-решений существенно усложняется в условиях неопределенности, когда ряд параметров и критериев являются нечеткими. Для таких задач требуется разработка специальных подходов и методов решения.

Цель работы — исследование многокритериальных задач нелинейного программирования (МКНП) в нечетких условиях и разработка метода их решения на основе введения компромиссных решений МКНП-задачи уровня α .

ПОСТАНОВКА МКНП-ЗАДАЧИ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим задачу принятия решений с несколькими критериями в нечетких условиях

$$\max\{f_i(X,C_i), i=\overline{1,m}\}$$

при

$$X \in G(A) = \{X : g_k(X,a_k) \le 0, k=\overline{1,K}\} ,$$

где $X=[x_j]$, $j=\overline{1,n}$; $C_i=[c_{ij}], j=\overline{1,n}$; $a_k=[a_{kr}]$, $k=\overline{1,K}$, $r=\overline{1,R}$, c_{ij} — нечеткие числа (НЧ) с известной функцией принадлежности (ФП) $\mu(c_{ij})$, $a_k=[a_{kr}]$ — НЧ с ФП $\vartheta(a_{kr})$.

Такую задачу назовем многокритериальной задачей нечеткого математического программирования (МК НМП). Введем в рассмотрение подмножества уровня α_i:

$$C_{ij}^{\alpha}=\{c_{ij}:\mu(c_{ij})\ge\alpha\}, a_{kr}^{\alpha}=\{a_{kr}:\vartheta(a_{kr})\ge\alpha\}, \text{ где } \alpha\in(0,1),$$

а также нечеткие матрицы уровня α:

$$C^{\alpha}=\{\|c_{ij}\|:\mu(c_{ij})\ge\alpha\}, A^{\alpha}=\{\|a_{kr}\|:\vartheta(a_{kr})\ge\alpha, k=\overline{1,K}, r=\overline{1,R}\}.$$

По аналогии с четкими задачами введем понятие парето-оптимального решения уровня α [5].

Определение 1. Парето-оптимальным решением уровня α назовем такое решение $\mathbf{X}^*$ со значениями нечетких параметров C^*, A^*, для которого не существует другого решения $\widetilde{X}$ со значениями нечетких параметров $\widetilde{C}$, $\widetilde{A}$, такого, что

$$f_i(\widetilde{X},\widetilde{C})\ge f_i(X^*,C^*),\quad i=\overline{1,m} \tag{1}$$

при условиях $C^*\in C^{\alpha}$, $\widetilde{C}\in C^{\alpha}$ и хотя бы одно неравенство (1) будет строгим.

Парето-оптимальное решение уровня α обладает следующим свойством.

Пусть $\alpha_1<\alpha_2$, а $X_{\alpha 1}^*$ и $X_{\alpha 2}^*$ — парето-оптимальные решения уровней α_1 и α_2 соответственно. Тогда $f_i(X_{\alpha 1}^*,C_{\alpha 1})\ge f_i(X_{\alpha 2}^*,C_{\alpha 2})$, $i=\overline{1,m}$.

Поскольку множество парето-оптимальных решений уровня α достаточно велико, в общем случае может быть несчетным множеством, то возникает проблема выбора одного из них (в некотором смысле наилучшего).

С этой целью осуществим эквивалентное преобразование критериев и приведем их к безразмерному виду (нормирование):

$$f_i^H(X,C_i^{\alpha})=\frac{f_i(X,C_i^{\alpha})-f_{i\min}^{\alpha}}{f_{i\max}^{\alpha}-f_{i\min}^{\alpha}},$$

где $f_{i\max}^{\alpha}=\max f(X,C_i)$, $f_{i\min}^{\alpha}=\min f(X,C_i)$, $C_i\in C_i^{\alpha}$. При этом $X\in G(A)$.

Введем веса критериев $\{w_i\}: w_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{m}w_i=1$. Будем искать такой вектор X^0, для которого

$$\min_i w_i f_i^H(X,C_i^{\alpha})=\max_x. \tag{2}$$

Условие (2) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$w_i f_i^H(X,C_i^{\alpha})\ge k_{0\max},\quad i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Назовем решение, удовлетворяющее условие (3) при максимальном значении $k_{0\max}$, наилучшим компромиссным решением (НКР) МК НМП задачи уровня α.

ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМОСВЯЗИ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ И КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ УРОВНЯ α

Справедливы следующие теоремы, устанавливающие связь между парето-оптимальными решениями уровня α и НКР.

Теорема 1. Если существует единственное решение X^* системы нестрогих равенств (3), то это решение будет парето-оптимальным решением уровня α МКНМП-задачи.

Таким образом, единственное компромиссное решение уровня α будет обязательно и парето-оптимальным решением.

Если же существует несколько решений системы (3) , то для нахождения парето-оптимального решения необходимо использовать дополнительный критерий

$$F_1(X, C^{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i^H(X, C_i^{\alpha})$$

и найти максимизирующее решение. Оно и будет парето-оптимальным.

Доказательство. Предположим, что единственное решение X^* системы неравенств (3) не является парето-оптимальным уровня α, и пусть решение $\widetilde{X}_{\alpha}$ является парето-оптимальным со значениями параметров целевой функции $\widetilde{C}^{\alpha}$. Тогда

$$f_i(\widetilde{X}, \widetilde{C}_i^{\alpha}) \geq f_i(X^*, C_i^{*\alpha}),\ i = \overline{1,m}\ .$$

Следовательно,

$$f_i^H(\widetilde{X}, \widetilde{C}_i^{\alpha}) \geq f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha}),\ i = \overline{1,m}$$

$$w_i f_i^H(\widetilde{X}, \widetilde{C}_i^{\alpha}) \geq w_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha}) \geq k_{0\max},\ i = \overline{1,m}\ .$$

Таким образом, $\widetilde{X}$ является также решением системы неравенств (3) при максимальном k_0, что противоречит условиям теоремы 1. Остается принять, что x^* является парето-оптимальным решением уровня α МКНП-задачи.

Теорема 2 (обратная). Пусть X^* является парето-оптимальным решением уровня α. Тогда существуют такие веса $\{w_i\}$, что X^* будет наилучшим компромиссным решением МК НМП-задачи уровня α.

Доказательство (от противного). Допустим, что X^* не является НКР. И пусть веса $\{w_i\}$ выбраны так, что выполняется условие

$$w_i f_i^H(X^*,\ C_i^{*\alpha}) < k_{0\max} \text{ для всех } i,\ j\ .$$

Пусть $\widetilde{X}$ является НКР задачи МКНП. Тогда $w_i f_i^H(X, C_i^{\alpha}) \geq k_{0\max}$, $i = \overline{1,m}$.

Следовательно $w_i f_i^H(\widetilde{X}, \widetilde{C}_i^{\alpha}) \geq w_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha})$ для всех $i = \overline{1,m}$ и хотя бы одно неравенство будет строгим. Но тогда $f_i^H(\widetilde{X}, \widetilde{C}_i^{\alpha}) \geq_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha})$ и соответственно

$$f_i(\widetilde{X}, \widetilde{C}_i^{\alpha}) \geq f_i(X^*, C_i^{*\alpha}), \ i = \overline{1,m}, \qquad (4)$$

и хотя бы одно из неравенств (4) будет строгим.

Тогда решение X^* не может быть парето-оптимальным уровня α, что противоречит условиям теоремы 2. Тогда остается принять, что X^* является НКР уровня α МКНП-задачи.

Пример. Пусть задана многокритериальная задача линейного программирования с нечеткими параметрами:

$$\begin{cases} \max F_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \max F_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases}$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{12}x_2 \geq a_{11}x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq 7, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq 4, \\ a_{42}x_2 \leq 10, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \leq 24, \\ x_1 \leq 0, \ \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

где c_{ij} — НЧ с ФП $\mu(c_{ij}) = \dfrac{1}{1 + (c_{ij} - \bar{c}_{ij})^2}$; $\bar{c}_{11} = 1$, $\bar{c}_{12} = 4$, $\bar{c}_{21} = 3$, $\bar{c}_{22} = -2$; a_{ij} — НЧ с ФП $\mu(a_{ij}) = \dfrac{1}{1 + 4\left(\dfrac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{ij}}\right)^2}$; $\bar{a}_{11} = \dfrac{1}{6}$, $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \bar{a}_{22} = 1$, $\bar{a}_{31} = -2$, $\bar{a}_{42} = 1$, $\bar{a}_{51} = 1$, $\bar{a}_{52} = 2$.

Необходимо найти парето-оптимальные решения и наилучшие компромиссные решения уровня α, где $\alpha = 0{,}8$.

ЧЕТКАЯ МКЛП-ЗАДАЧА

Сначала решаем четкую задачу МКЛП

$$\begin{cases} \max f_1(x) = \max(x_1 + 4x_2), \\ \max f_2(x) = \max(3x_1 - 2x_2) \end{cases}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_2 \ge \dfrac{1}{6} x_1, \\ x_1 + x_2 \ge 7, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \quad (5)$$

Строим область допустимых решений (ОДР), которая определяется условиями (5). Ее вид изображен на рис. 1. Находим крайние точки ОДР и их координаты $A(1;6)$, $B(3;10)$, $C(4;10)$, $D(18;3)$, $E(6;1)$.

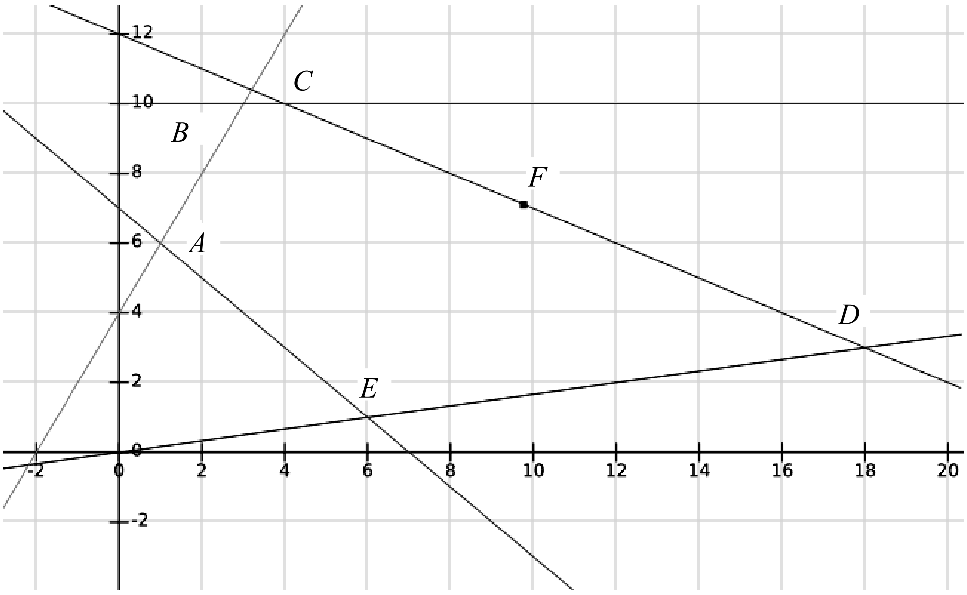

Рис. 1. Область допустимых решений и НКР четкой МКЛП задачи

Решаем задачу графоаналитически, находим $f_{1\max} = f_1(C) = 44$; $f_{1\min} = f_1(A) = 10$; $f_{2\max} = f_2(D) = 48$; $f_{2\min} = f_2(B) = -11$.

Поскольку $\max f_1$ достигается в точке C, а $\max f_2$ — в точке D, парето-оптимальные решения четкой МКЛП-задачи находятся на отрезке CD.

Найдем НКР, для этого переходим к безразмерным критериям

$$f_1^H(x) = \frac{f_1(x) - f_{i\min}}{f_{1\max} - f_{1\min}} = \frac{1x_1 + 4x_2 - 10}{44 - 10} = \frac{1x_1 + 4x_2 - 10}{34};$$

$$f_2^H(x) = \frac{3x_1 - 2x_2 + 11}{59}.$$

Пусть веса таковы: $w_1 = w_2 = \dfrac{1}{2}$.

Найдем четкое НКР, для чего решаем задачу $\max k_0$ при условиях $x_1^* \approx 9{,}74$:

$$w_1 f_1(x) \ge k_0 ;$$

$$w_2 f_2(x) \ge k_0 .$$

Поскольку всего 2 критерия, можно найти НКР $\boldsymbol{x}^*$из системы уравнений:

$$\begin{cases} w_1 f_1^H(x) = w_1 f_1^H(x); \\ x_1 + 2x_2 = 24, \text{ т.к. } x \in CD. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1x_1 + 4x_2 - 10}{34} = \dfrac{3x_1 - 2x_2 + 11}{59}, \\ x_1 + 2x_2 = 24. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x_1^* \approx 9{,}74$; $x_2^* \approx 7{,}13$.

Соответствующая точка F показана на рис. 1.

НЕЧЕТКАЯ МКЛП-ЗАДАЧА

Необходимо найти парето-оптимальные решения и НКР уровня $\alpha = 0{,}8$ МКЛП-задачи. Для этого необходимо сначала найти интервалы принадлежности уровня α: C_{ij}^{α} и a_{ij}^{α} .

Решаем неравенство:

$$\mu(c_{ij}) = \frac{1}{1 + (c_{ij} - \overline{c}_{ij})^2} \ge 0{,}8 .$$

Отсюда

$$(c_{ij} - \overline{c}_{ij})^2 \le 0{,}25 \ge | c_{ij} - \overline{c}_{ij} | \le 0{,}5 \text{ и } \overline{c}_{ij} - 0{,}5 \le c_{ij} \le \overline{c}_{ij} + 0{,}5 .$$

Находим соответствующие интервалы для c_{ij}

$$0{,}5 \le c_{11} \le 1{,}5 ; \quad 3{,}5 \le c_{12} \le 4{,}5 ;$$

$$2{,}5 \le c_{21} \le 3{,}5 ; \quad -2{,}5 \le c_{22} \le -1{,}5 .$$

Записываем критерии оптимиста $f_{iU}(x)$ и пессимиста $f_{iL}(x)$

$$f_{1U}(x) = 1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 ,$$

$$f_{2U}(x) = 3{,}5x_1 - 1{,}5x_2 ,$$

$$f_{1L}(x) = 0{,}5x_1 + 3{,}5x_2 ,$$

$$f_{2L}(x) = 2{,}5x_1 - 2{,}5x_2 .$$

Построим ОДР для нечетких ограничений уровня $\alpha = 0{,}8$. Решаем неравенства

$$\mu(a_{ij}) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{a_{ij} - \overline{a}_{ij}}{\overline{a}_{ij}} \right)^2} \to 4 \left(\frac{a_{ij} - \overline{a}_{ij}}{\overline{a}_{ij}} \right)^2 \le 0{,}25$$

или $2\left|\dfrac{a_{ij}-\overline{a}_{ij}}{\overline{a}_{ij}}\right| \le 0{,}5$, откуда $0{,}75\overline{a}_{ij} \le a_{ij} \le 1{,}25\overline{a}_{ij}$.

Находим интервалы для нечетких параметров a_{ij}

$$0{,}125 \le a_{11} \le 0{,}21;\quad 0{,}75 \le a_{12} \le 1{,}25;\quad 0{,}75 \le a_{21} \le 1{,}25;$$

$$0{,}75 \le a_{22} \le 1{,}25;\quad 1{,}5 \le a_{31} \le 2{,}5;\quad ;0{,}75 \le a_{32} \le 1{,}25$$

$$0{,}75 \le a_{42} \le 1{,}25;\quad 0{,}75 \le a_{51} \le 1{,}25;\quad 1{,}5 \le a_{52} \le 2{,}51.$$

Построим ОДР уровня α оптимиста (т.е. расширеную). Для этого для ограничений вида

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \le b_j,\ \text{где}\ a_{ijL}^{\alpha} \le a_{ij} \le a_{ijU}^{\alpha}.$$

Выбираем границы интервалов так:

а) если $a_{1j} > 0$, то $a_{1j} = a_{ijL}^{\alpha} = a_{ij\min}^{\alpha}$,

б) если $a_{1j} < 0$, то $a_{1j} = a_{ijU}^{\alpha} = a_{ij\max}^{\alpha}$.

Для ограничений вида

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \ge b_j,$$

наоборот:

а) если $a_{1j} > 0$, то $a_{1j} = a_{ijU}^{\alpha}$;

б) если $a_{1j} < 0$, то $a_{1j} = a_{ijL}^{\alpha}$.

В соответствии с этими правилами записываем ограничения, определяющие максимальную ОДР уровня α.

$$\begin{cases} 1{,}25x_2 \ge 0{,}125x_1, \\ 1{,}25x_1 + 1{,}25x_2 \ge 7, \\ -1{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \le 4, \\ 0{,}75x_2 \le 10, \\ 0{,}75x_1 + 1{,}5x_2 \le 24, \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

Находим ОДР уровня $\alpha = 0{,}8$ согласно уравнениям (6). Ее вид изображен на рис. 2

Находим кратчайшие точки ОДР и их координаты:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 = 0{,}07 \\ x_2 = 5{,}5 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = \dfrac{40}{3} \end{pmatrix};\quad A = \begin{pmatrix} x_1 = \dfrac{16}{3} \\ x_2 = \dfrac{40}{3} \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} x_1 = 26{,}6 \\ x_2 = 2{,}66 \end{pmatrix};\quad E = \begin{pmatrix} x_1 = 5{,}1 \\ x_2 = 0{,}51 \end{pmatrix}.$$

Строим вектора нормалей: к целевой функции $f_1(x)$ — вектор N_1 и к $f_2(x)$ — N_2 соответственно.

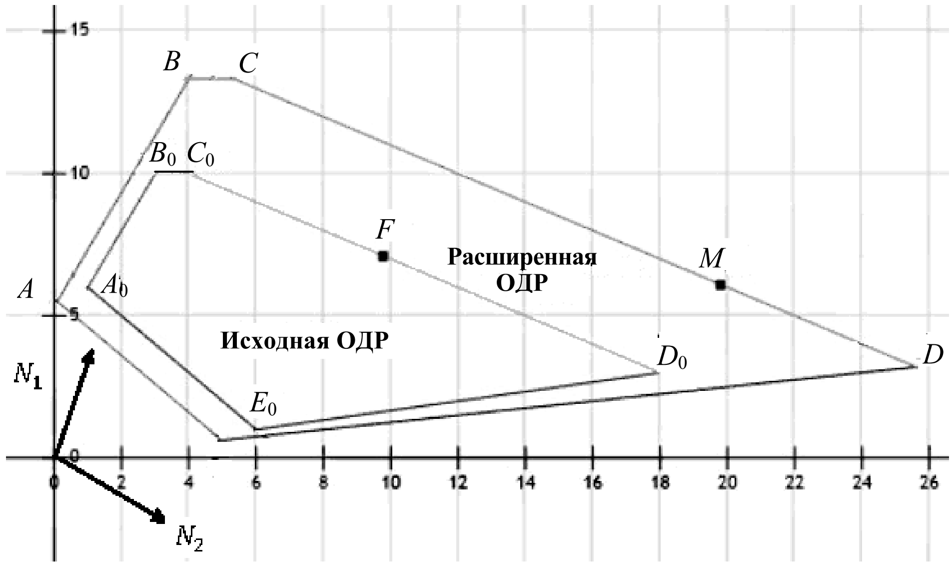

Рис. 2. Область допустимых решений и НКР уровня α в нечеткой МКЛП задачи

Для нахождения НКР уровня $\alpha = 0{,}8$ находим точки и значения $f_{1\max}$ и $f_{1\min}$ графоаналитически:

$$f_{1\max}(X, C_\alpha) = \max(1{,}5x_1 + 4{,}5x_2) = f_1(C) = 66\,;$$

$$f_{1\min}(X, C_\alpha) = f_1(\mathrm{E}) = 9{,}95\,;$$

$$f_{2\max}(X, C_\alpha) = \max(3{,}5x_1 - 1{,}5x_2) = f_2(\mathrm{D}) = 89{,}9\,;$$

$$f_{2\min}(X, C_\alpha) = f_2(\mathrm{A}) = -7{,}94\,.$$

Парето-оптимальное решение уровня $\alpha = 0{,}8$, как и в частном случае, находится на отрезке *CD*, который описывается уравнением $0{,}75x_1 + 1{,}5x_2 \le 24$.

Найдем НКР уровня $\alpha = 0{,}8$.

Для этого переходим к нормированым критериям

$$f_1^H(X) = \frac{1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 - 9{,}95}{66 - 9{,}95} = \frac{1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 - 9{,}95}{56{,}5}\,;$$

$$f_2^H(X) = \frac{3{,}5x_1 - 1{,}5x_2 + 7{,}94}{89{,}9 + 7{,}94} = \frac{3{,}5x_1 - 1{,}5x_2 + 7{,}94}{97{,}84}\,.$$

Далее необходимо найти НКР из условий решения задачи $\max k_0$ (5) при условиях $w_1 f_1^H(X, C_\alpha) \ge k_0$; $w_2 f_2^H(X, C_\alpha) \ge k_0$.

Как и в четком случае, НКР уровня $\alpha = 0{,}8$ лежит на отрезке *CD* и, кроме того,

$$w_1 f_1^H(X, C_\alpha) = w_2 f_2^H(X, C_\alpha)\,.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 - 9{,}95}{56{,}5} = \dfrac{3{,}5x_1 - 1{,}5x_2 + 7{,}94}{97{,}84}, \\ 0{,}75x_1 + 1{,}5x_2 \le 24. \end{cases} \quad (7)$$

откуда

$$x_1 = \frac{(24 - 1{,}5x_2)4}{3} = \frac{96 - 6x_2}{3} = 32 - 2x_2 .$$

Решая систему (7) после подстановки $x_1 = 32 - 2x_2$, находим

$$x_2 \approx 9{,}44 ;\ x_1 = 32 - 2x_2 \approx 13{,}12 .$$

Таким образом, НКР уровня $\alpha = 0{,}8$ данной задачи:

$$x_2 = 9{,}44 ;\ \ x_1 = 13{,}12 .$$

Соответствующая точка M показана на рис. 2. Для сравнения на этом же рисунке приведено ОДР и НКР для четкой задачи $(\cdot, F)$ (пятиугольник $A_0B_0C_0D_0F_0$).

ВЫВОДЫ

Рассмотрена многокритериальная задача принятия решений в нечетких условиях (МКНП). Для ее решения введены понятия парето-оптимального решения и наилучшего компромиссного решения уровня α МКНП-задачи. Доказаны теоремы, устанавливающие их взаимосвязи.

Предложен метод нахождения НКР уровня α МКНП-задачи.

Приведен пример, иллюстрирующий предлагаемый метод для случая МКЛП-задачи в нечетких условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука. — 1971. — 383 с.
2. *Волкович В.Л.* Проблемы создания интеллектуальных систем поддержки принятия решений. — К., 1990. — 190 с.
3. *Подиновский В.В.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: — 1975. — 360 с.
4. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. — М., 2002. — 302 с.
5. *Зайченко Ю.П.* Теорія прийняття рішень, підруч. / Ю.П. Зайченко. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — 412 с.
6. *Згуровский М.З.* Модели и методы принятия решений в нечетких условиях / М.З. Згуровский. — К.: Наук. думка, 2011. — 352 с.

Поступила 06.10. 2016