

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 1

2020

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, чл.-кор. НАН України

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal.iasa@gmail.com

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень та управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах**

• **Теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримання прийняття рішень**

• **Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 1

2020

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Correspondent
member of NASU

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

L. SAKALAIUSKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal.iasa@gmail.com
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

- **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**
- **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**
- **Theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support**
- **Methods of optimization, optimum control and theory of games**
- **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНІТІ РАН.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**

Редактор **Р.М. Шульженко**

Молодший редактор **Л.О. Тарин**

Комп'ютерна верстка, дизайн **А.А. Патіоха**

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 23234–13074 ПР від 22.03.2018 р.

Підписано до друку 23.06.2020. Формат 70x108 1/16. Папір офс. Гарнітура Times.

Спосіб друку – ризографічний. Ум. друк. арк. 14,411. Обл.-вид. арк. 28,56. Наклад 136 пр. Зам. № 20-064

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію: ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського, вул. Політехнічна, 14, корп. 15

м. Київ, 03056. Тел. (044) 204-81-78

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

1 • 2020

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

- Панкратова Н.Д., Бидюк П.И., Голинко И.М.* Синтез многомерной системы управления для прецизионного комплекса искусственного микроклимата 7
- Хабраман Х., Мозговой Д.К.* Реконструкция 3D моделей зданий по их теням с помощью спутниковых снимков 21

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

- Pankratova N.D., Ptukha Y.A.* Estimation computational models of the cyber-physical systems functioning 28
- Danilov V., Gozhyj O., Kalinina I., Belas A., Bidyuk P., Jirov O.* Adaptive forecasting and financial risk estimation 34
- Matsuki Y., Bidyuk P.I.* Numerical simulation of gravitational waves from a black hole, using curvature tensors 54

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

- Зайченко Ю.П., Здор К.А., Гамидов Г.* Диагностика МРТ-изображений опухолей головного мозга с использованием гибридных сверточных нейронечетких сетей 68

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

- Кісельова О.М., Притоманова О.М.* Нечітка задача оптимального розбиття множин із обмеженнями на розміщення центрів підмножин 78
- Kulian V., Korobova M., Yunkova O.* Optimal stock portfolio diversification under market constraints 90
- Зак Ю.А.* Эвристические алгоритмы построения эффективных последовательностей выполнения заданий на одной машине во взаимосвязанных производственных системах 98

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

- Кирилюк В.С., Левчук О.І.* Моделювання контактної взаємодії двох трансверсально-ізоотропних пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску на ділянці розшарування 107
- Городецький В.Г.* Теорема про реконструкцію деяких динамічних систем 120
- Спекторський І.Я., Галганов О.А.* Метод трикутника для побудови полінома Жегалкіна: зв'язок з трикутником Паскаля 129
- Реферати 146
- Відомості про авторів 154

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

1 • 2020

CONTENT

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Pankratova N.D., Bidyuk P.I., Golinko I.M.</i> Multidimensional control system synthesis for a precision air-conditioner	7
<i>Habraman H., Mozhovoy D.K.</i> Reconstruction of 3D models of buildings from their shadows using satellite images	21
DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS	
<i>Pankratova N.D., Ptukha Y.A.</i> Estimation computational models of the cyber-physical systems functioning	28
<i>Danilov V., Gozhyj O., Kalinina I., Belas A., Bidyuk P., Jirov O.</i> Adaptive forecasting and financial risk estimation	34
<i>Matsuki Y., Bidyuk P.I.</i> Numerical simulation of gravitational waves from a black hole, using curvature tensors	54
THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING SUPPORT	
<i>Zaychenko Yu.P., Zdor K.A., Hamidov G.</i> Brain tumor diagnostics with application of hybrid fuzzy convolutional neural networks	68
METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM CONTROL AND THEORY OF GAMES	
<i>Kiseleva E.M., Prytomanova O.M.</i> Fuzzy problem of the optimal set partition with constraints on the subsets centers location	78
<i>Kulian V., Korobova M., Yunkova O.</i> Optimal stock portfolio diversification under market constraints	90
<i>Zack Yu. O.</i> Heuristic algorithms for constructing effective sequences of tasks on one machine in interconnected production systems	98
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.</i> Modeling the contact interaction of two transversally isotropic elastic half-spaces in the presence of a hard disk-like inclusion between them and pressure in the region of separation	107
<i>Gorodetskiy V.G.</i> Reconstruction theorem for certain dynamical systems	120
<i>Spectorskiy I.Ya., Galganov O.A.</i> Triangle method for constructing Zhagalkin polynomial: connection with Pascal's triangle	129
References	146
Information about the authors	154

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРЕЦИЗИОННОГО КОМПЛЕКСА ИСКУССТВЕННОГО МИКРОКЛИМАТА

Н.Д. ПАНКРАТОВА, П.И. БИДЮК, И.М. ГОЛИНКО

Аннотация. Рассмотрена процедура синтеза многомерного цифрового регулятора для промышленных систем искусственного микроклимата. Для промышленных кондиционеров предложена методика разработки комплексной динамической математической модели в пространстве состояний как единого многомерного объекта управления. Выполнен анализ критериев для оптимизации системы управления кондиционером. Рассмотрена процедура синтеза оптимального многомерного линейно-квадратичного цифрового регулятора и синтезирована матрица обратной связи, которая по параметрам состояния объекта управления определяет траекторию движения вектора оптимального воздействия и минимизирует квадратичный критерий качества. Такой многомерный линейно-квадратичный цифровой регулятор отличается наличием логического выбора оборудования для осуществления оптимального управления климатическим оборудованием кондиционера. Такой подход позволяет переосмыслить процедуру синтеза автоматической системы управления для промышленных кондиционеров на основе разграничения взаимного влияния регулирующих параметров.

Ключевые слова: система искусственного микроклимата, промышленный кондиционер, автоматическая система управления, линейно-квадратичный цифровой регулятор, оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Современные производственные процессы предъявляют высокие требования к системам промышленного кондиционирования воздуха. От качества микроклимата производственных помещений в значительной степени зависят качество продукции и уменьшение ее себестоимости. Промышленные кондиционеры являются реальным рычагом прибыли для технологий в таких отраслях: легкой, пищевой, аграрной, фармацевтической, полиграфической, машиностроительной, радиоэлектронной и др. [1].

Промышленные комплексы искусственного микроклимата (ПКИМ) отражают сложный технологический процесс (ТП), который имеет большой диапазон входных возмущений и управляющих воздействий. Промышленный кондиционер как объект управления (ОУ) является сложным и нелинейным, что предполагает выполнение анализа структуры автоматической

системы управления (АСУ) и разработку соответствующих алгоритмов управления. Для ПККИМ ряд управляющих воздействий ограничен, а некоторые элементы системы остаются неуправляемыми. По этим причинам проектировщики применяют нестандартные решения по автоматизации промышленных кондиционеров [2].

В процессе автоматизации кондиционеров инженеры-интеграторы стараются обеспечить автоматическую стабилизацию переменных обособленных аппаратов, которые связаны в единый ТП. При этом в задачах синтеза и анализа систем управления ПККИМ не рассматриваются задачи построения комплексных математических моделей кондиционирования воздуха как единого многомерного ОУ, а разработка эффективной АСУ, в первую очередь, зависит от всестороннего анализа технологической системы, особенностей ее функционирования, что позволяет синтезировать корректные управляющие воздействия. Только в некоторых работах авторы в постановке задачи синтеза системы управления ПККИМ рассматривают системный подход с определенными ограничениями [3], что ограничивает область применения полученных результатов.

На сегодняшний день вопрос синтеза АСУ для ПККИМ с взаимосвязанными контурами регулирования исследован недостаточно. Системы управления температурой и влажностью рассматриваются без учета их взаимодействия. Максимальный эффект от климатического оборудования кондиционера можно достичь благодаря комплексному анализу ТП и синтезу многомерной системы управления. АСУ ПККИМ необходимо рассматривать в рамках единого компьютерно-интегрированного комплекса с технологическими взаимосвязями между оборудованием кондиционера [4].

Промышленный кондиционер состоит из разнообразного климатического оборудования: теплообменных аппаратов (калориферов подогрева, охладителей) и увлажнителей. В зависимости от технологии обработки воздуха можно выделить более двух десятков технологических схем для промышленного кондиционирования воздуха [5], и каждая технологическая схема подразумевает собственную математическую модель для синтеза АСУ ПККИМ. Поскольку динамические свойства климатического оборудования в общем случае разные, соответствующие математические модели оборудования должны адекватно отражать процесс обработки воздуха и позволять синтезировать комплексную динамическую модель для разработки АСУ кондиционера.

Литературный обзор подтверждает, что созданы все предпосылки для синтеза многомерных систем управления промышленными кондиционерами, где учитывается взаимодействие оборудования. В публикациях [6–10] авторы предложили математическое описание для оборудования промышленных кондиционеров, которые удовлетворяют рассмотренным выше требованиям.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Анализ аналитических моделей оборудования кондиционера позволяет сделать вывод, что типовой динамический элемент климатического оборудования можно рассматривать как многомерный ОУ с пятью входами $\mathbf{V}^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]$ и двумя выходами $\mathbf{Y}^T = [y_1 \ y_2]$. Учитывая наличие математических моделей оборудования кондиционера в пространстве со-

стояния [6–10], для стабилизации параметров искусственного микроклимата необходимо разработать комплексную динамическую математическую модель промышленного кондиционера как единого многомерного ОУ и рассмотреть задачу синтеза оптимального многомерного линейно-квадратичного цифрового регулятора в пространстве состояний, что является предметом исследования.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПКИМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Технологические схемы промышленной обработки воздуха зависят от климатического оборудования приточной системы центрального кондиционера (ПСЦК). Среди рассмотренных технологий, учитывая конструктивные особенности и методы управления оборудованием, наибольшее распространение получили ПСЦК, которые для стабилизации параметров микроклимата используют алгоритмы управления по методу «точки росы», а также по методу «оптимального режима». Используя обобщенную технологическую схему кондиционирования воздуха, можно получить параметрическую схему промышленного кондиционера и далее синтезировать комплексную модель промышленного кондиционера в пространстве состояний.

Представление многомерных ОУ в пространстве состояний имеет ряд преимуществ по сравнению с записью в виде передаточных функций. Например, позволяет описать произвольные внутренние структуры, неуправляемые и ненаблюдаемые переменные ОУ с помощью минимального числа параметров. Если математическая модель ОУ составлена с учетом наличия совместных переменных состояния, то такая модель содержит минимальное число переменных состояния и полученная форма описания соответствует минимальной математической реализации ОУ. Математические модели для климатического оборудования ПКИМ в пространстве состояний разработаны с учетом общих переменных состояния, на что указывает наличие недиагональных элементов матриц состояния в моделях [6–10].

Дополнительным аргументом в пользу векторных моделей является большое количество математических пакетов для компьютерного анализа систем управления в пространстве состояний, что позволяет с незначительными временными затратами выполнять сложные математические исследования.

МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ МОДЕЛИ ПКИМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Во многих случаях разработчику АСУ ПКИМ понадобится самостоятельно получить комплексную модель промышленного кондиционера, поскольку параметрическая схема обработки воздуха, рассмотренная в приведенном ниже примере, будет отличаться. Из этих соображений для разработки комплексной динамической модели кондиционера в пространстве состояний рассмотрим методику ее синтеза.

1. Определить количественный состав климатического оборудования N для конкретного кондиционера, где N — количество единиц оборудования.
2. Из моделей [6–10] выбрать соответствие климатическому оборудованию имеющегося промышленного кондиционера.

3. Определить возмущающие и регулирующие каналы влияния для технологической системы кондиционера U_1^i, F_2^i, F_3^i где $i = 1, \dots, N$.

4. Для комплексной модели сформировать вектор управлений U и возмущений F из имеющихся воздействий U_1^i и F_2^i .

5. Сформировать матрицу динамики состояний A комплексной модели кондиционера, диагональными элементами которой являются матрицы состояния A^i климатического оборудования.

6. Сформировать матрицы C^i из соответствующих матриц B_2^i , которые обеспечивают передачу вектора выходных переменных состояния предыдущей модели X^{i-1} на соответствующие переменные состояния текущей модели X^i оборудования кондиционера.

7. Сформировать матрицы B и D из соответствующих матриц B_1^i и B_2^i .

При разработке комплексной модели необходимо учитывать порядок динамических моделей климатического оборудования.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПКИМ С ФОРСУНОЧНЫМ УВЛАЖНИТЕЛЕМ

Рассмотрим пример синтеза комплексной модели прецизионного кондиционера с форсуночным увлажнителем. Для упрощения интерпретации математических выкладок в дальнейшем верхний индекс i матриц моделей оборудования в пространстве состояний заменим на аббревиатуру климатического оборудования. Для промышленного кондиционера с форсуночным увлажнителем используется следующее климатическое оборудование: водяной калорифер первого подогрева $K1$; водяной охладитель O ; форсуночный увлажнитель $FУ$; водяной калорифер 2-го подогрева $K2$. На рис. 1 представлена параметрическая схема ПСЦК, которая соответствует технологической схеме подготовки воздуха на промышленном кондиционере с форсуночным увлажнителем. В левой части схемы показаны возмущающие факторы, а в нижней — управляющие. Расход приточного воздуха является возмущающим фактором, однако для большинства ПКИМ этот параметр является неизменным и не влияет на работу системы кондиционирования. Пунктирными стрелками на схеме показаны каналы влияния, переменные которых не меняются в процессе управления для этой технологической схемы подготовки воздуха.

Согласно представленной параметрической схеме, ПСЦК имеет два возмущающих фактора $\Delta\theta_{A0}^{K1}$, Δd_{A0}^{K1} и три переменные управляющих воздействий: $\Delta\theta_{W0}^{K1}$, ΔG_{W0}^O , $\Delta\theta_{W0}^{K2}$. При проектировании прецизионной системы искусственного микроклимата необходимо учитывать динамические процессы в помещении и в камере утилизации тепла. Параметрическая схема такой технической системы показана на рис. 2. Здесь в качестве параметрического элемента ПСЦК используется схема, рассмотренная ранее. Параметрическая схема (рис. 2) дополнена динамическими элементами: $KС$ — камера смешения; $П$ — производственное помещение.

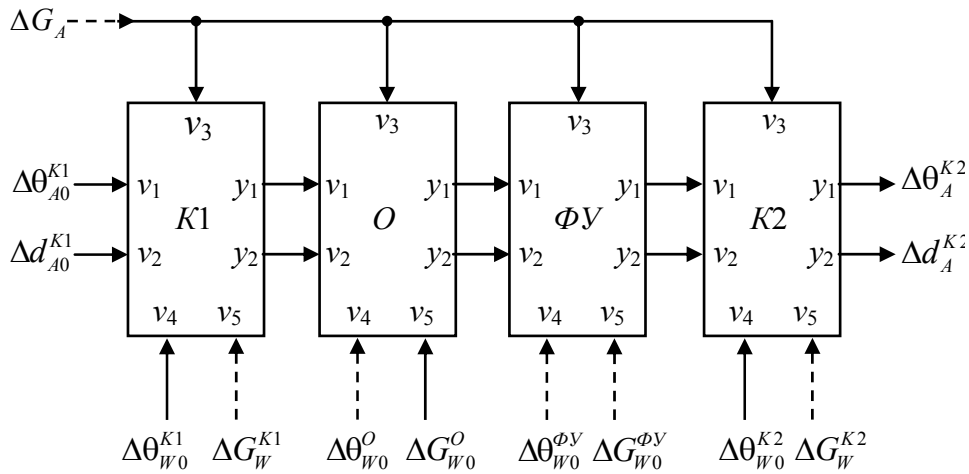


Рис. 1. Параметрическая схема ПСЦК с форсуночным увлажнителем

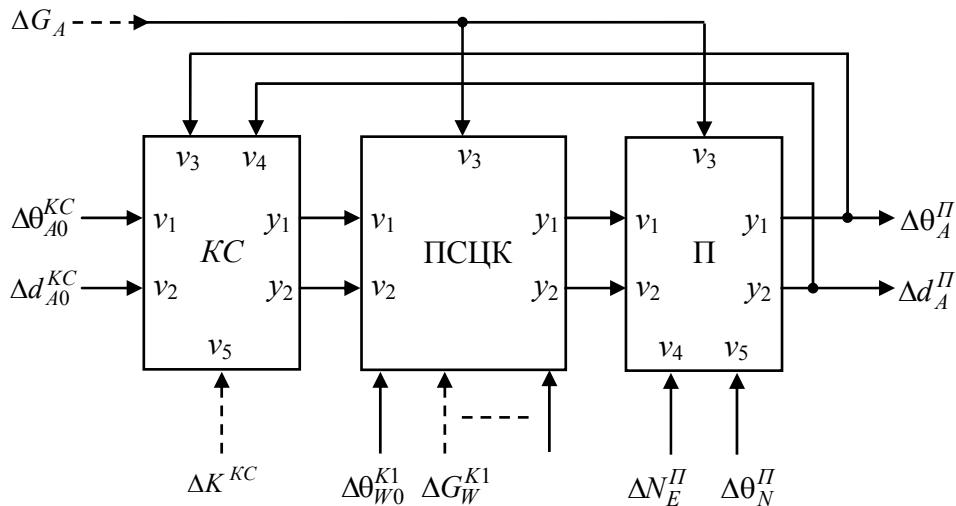


Рис. 2. Параметрическая схема прецизионного кондиционера с форсуночным увлажнителем

Таким образом, для рассматриваемой параметрической схемы ОУ имеет переменные возмущения $\Delta\theta_{A0}^{KC}$, Δd_{A0}^{KC} , $\Delta N_E^П$, $\Delta\theta_N^П$ и переменные управляющего воздействия: ΔK^{KC} , $\Delta\theta_{W0}^{K1}$, ΔG_{W0}^O , $\Delta\theta_{W0}^{K2}$. При этом многомерный регулятор должен обеспечить в производственном помещении стабильные значения переменных температуры $\Delta\theta_A^П$ и влажности $\Delta d_A^П$.

По методике, описанной выше, разработана комплексная модель промышленного кондиционера, которая соответствует параметрической схеме (рис. 2):

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{D}\mathbf{F}; \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{KC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_6 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}^{K1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}^O & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 & \mathbf{A}^{\Phi Y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_4 & \mathbf{A}^{K2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_5 & \mathbf{A}^{\Pi} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{KC} \\ \mathbf{X}^{K1} \\ \mathbf{X}^O \\ \mathbf{X}^{\Phi Y} \\ \mathbf{X}^{K2} \\ \mathbf{X}^{\Pi} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^{K1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{K2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{K1} \\ \mathbf{U}_1^O \\ \mathbf{U}_1^{K2} \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^{KC} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2^{KC};$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_2^{K1}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^{\Phi Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^{K2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_3^{KC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Комплексная модель прецизионного кондиционера (1) содержит следующие динамические модели климатического оборудования:

- водяных калориферов $K1$, $K2$ и охладителя O четвертого порядка;
- форсуночный увлажнитель ΦY и промышленное помещение Π

третьего порядка, что отражено в матрицах $\mathbf{C}_1 — \mathbf{C}_6$. Таким образом, размерность матриц такая: $\mathbf{A} — [20 \times 20]$; $\mathbf{B} — [20 \times 3]$.

АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе [11] для оптимизации технических систем управления предложен интегральный критерий, который учитывает технологические особенности

управляющего воздействия на ОУ. Использование этого критерия для оптимизации многомерных систем управления в пространстве состояний приводит к ряду математических сложностей. Во-первых, в этом критерии учитываются коэффициенты передачи ОУ по каналам регулирования и возмущения. Для математических моделей ОУ в пространстве состояний коэффициенты передачи по каналам воздействия определяются матрицей \mathbf{V} и входят в нее неявно (коэффициент передачи делится на инерционность динамического элемента канала влияния ОУ). Поскольку размерность комплексной модели (1) большая, определение коэффициентов передачи по каналам влияния ОУ является нетривиальной задачей. Во-вторых, в работе [11] используется модульный интегральный критерий качества, что предусматривает использование численных методов оптимизации. Поэтому, применение критерия оптимизации из работы [11] для многомерной системы превращается в нетривиальную задачу с использованием численных методов.

С учетом рассмотренных выше соображений для оптимизации многомерной системы управления с моделью ОУ (1) предлагается использовать дискретный вариант классического критерия качества [12]:

$$I = \mathbf{X}_N^T \mathbf{S} \mathbf{X}_N + \sum_{s=0}^{N-1} [\mathbf{X}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_s + \mathbf{U}_s^T \mathbf{R} \mathbf{U}_s], \quad (2)$$

где \mathbf{S} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} — весовые матрицы переменных состояния и управления; \mathbf{X}_s , \mathbf{U}_s — соответственно вектор состояния и вектор управления объекта на s -м шаге дискретизации с периодом T_{RV} ; k — количество шагов наблюдения.

Рассмотрим составляющие критерия качества (2). Понятно, что квадратичное взвешивание конечного состояния позволяет достичь желаемого качества управления, но квадратичное взвешивание сигнала управления недостаточно обоснованно, особенно если стоимость ресурсов управления невелика. Для критерия (2) не совсем понятен физический смысл оптимальности, поскольку в одно значение интегрируются переменные состояния и управления [12]. Кроме того, задание большого веса матрицы \mathbf{R} вызывает отклонение фактического конечного состояния от заданного (приводит к статической погрешности управления), а слишком малых — вызывает значительные форсирующие воздействия управления \mathbf{U} (приводит к колебательной составляющей в переходных процессах). Основными ограничениями критерия (2) являются требование положительной определенности матрицы \mathbf{R} и невозможность задавать явные ограничения на \mathbf{X} , \mathbf{U} . Положительным в критерии (2) является возможность аналитического синтеза оптимального регулятора состояния по данному критерию.

ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА МНОГОМЕРНОГО РЕГУЛЯТОРА

Теория оптимизации динамических систем представляет достаточное число примеров синтеза оптимальных регуляторов для технических систем управления, которые имеют решение в виде пропорциональных матриц обратной связи [12, 13]. Как известно из классической теории управления пропорцио-

нальные регуляторы не обеспечивают точного отслеживания задания и не компенсируют полностью возмущающие факторы в системе управления. По этим причинам необходимо модифицировать постановку задачи синтеза регулятора состояния таким образом, чтобы в векторе управления появилась интегральная составляющая, которая компенсирует статический небаланс регулирования. Это можно сделать несколькими способами. Один из них [12] — расширение пространства состояния путем дополнения n -мерного вектора \mathbf{X} состояния p -мерным вектором с переменными, по которым необходимо иметь интегрирующее влияние на ОУ

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C} \mathbf{X} . \tag{3}$$

В результате размерность вектора состояния возрастает на p (пространство состояний опишется $(p + n)$ -мерным вектором), а расширенная модель ОУ в пространстве состояний примет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U} . \tag{4}$$

Для расширенного пространства состояний в непрерывной форме линейно-квадратичный регулятор формирует ПИ-закон управления:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_p \mathbf{X} - \mathbf{K}_I \mathbf{Z} = -\mathbf{K}_p \mathbf{X} - \mathbf{K}_I \mathbf{C} \int_0^{t_f} \mathbf{X} dt ,$$

здесь \mathbf{K} — матрица обратной связи многомерного регулятора, состоящая из пропорциональной \mathbf{K}_p и интегральной \mathbf{K}_I частей регулятора. Необходимым условием существования такого регулятора является выполнение неравенства $p < n$, т.е., число переменных состояния для которых вводится интегральное влияние, не может быть больше числа переменных управления.

Задачу синтеза оптимального линейно-квадратичного цифрового регулятора (ЛКЦР) для ПККИМ можно сформулировать следующим образом. Пусть, согласно технологии кондиционирования, модель ОУ задана уравнением (1). Нужно синтезировать матрицу обратной связи \mathbf{K}_d ЛКЦР, которая по параметрам состояния ОУ определит траекторию вектора оптимального воздействия \mathbf{U}_s^o (для $s = 1, 2, \dots, k - 1$) и минимизирует квадратичный критерий качества (2).

Прежде всего, непрерывную модель ОУ (1) нужно расширить переменными (3), по которым необходимо иметь интегральную составляющую в законе управления и получить расширенную модель ОУ в пространстве состояний (4). Расширенную непрерывную модель ОУ необходимо привести к дискретному виду:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{s+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_s + \mathbf{B}_d \mathbf{U}_s ; \\ \mathbf{Y}_s = \mathbf{C}_d \mathbf{X}_s , \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_{KV}}$, $\mathbf{B}_d = \int_0^{T_{KV}} e^{\mathbf{A}(T_{KV}-\tau)} \mathbf{B} dt$.

Структурная схема дискретной модели ОУ (6) изображена на рис. 3.

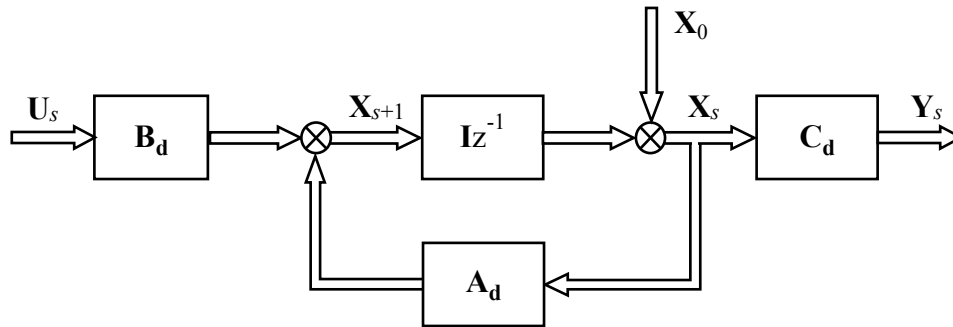


Рис. 3. Структурная схема дискретной модели ОУ

В общем случае оптимальный ЛКЦР представляется зависимостью [13]:

$$U_s = -K_d X_s.$$

Регулятор формирует обратную связь по состоянию параметров ОУ, используя матрицу коэффициентов передачи K_d . Матрица обратной связи определяется зависимостью

$$K_d = (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d. \quad (6)$$

Параметры такого регулятора определяются с использованием решения уравнения Риккати, (при $P = P_0$ проводится решение стационарного матричного уравнения Риккати):

$$P = Q + A_d^T P [I - B_d (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P] A_d. \quad (7)$$

Процедура синтеза ЛКЦР сводится к следующей последовательности действий:

- 1) задаются параметры критерия (2) в соответствии с технологическими требованиями производства;
- 2) формируется расширенная непрерывная модель ОУ (4);
- 3) с использованием (4), определяется дискретная модель ОУ (5);
- 4) ищется решение уравнения Риккати (7);
- 5) по зависимости (6) определяется ЛКЦР.

Структурная схема АСУ с оптимальным ЛКЦР показана на рис. 4. Для стабилизации температуры и влажности на выходе промышленного кондиционера (или в помещении) используется от трех до пяти и более единиц климатического оборудования (в рассматриваемом случае шесть: $KC, K1, O, \Phi Y, K2, П$). При этом в управлении принимает участие не более двух аппаратов, так как регулируется два параметра — температура и влажность воздуха. Из теории управления известно, что количество переменных регулирования должно равняться количеству управляющих воздействий на ОУ, иначе задача не имеет решения или имеет бесконечное множество решений, из которых только одно решение оптимально по выбранному критерию.

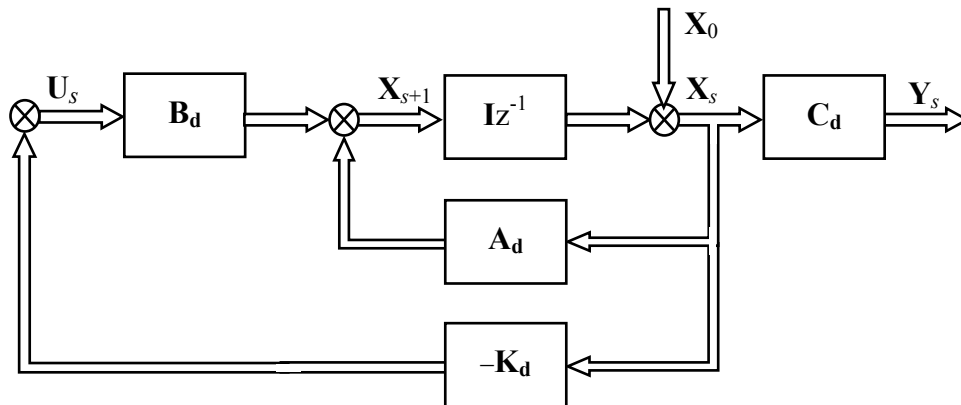


Рис. 4. Структурная схема цифровой АСУ с оптимальным ЛКЦР

В данном случае количество регулирующих каналов превышает количество переменных стабилизации, и задача имеет бесконечное множество решений. Поэтому возникает задача корректного выбора оборудования для осуществления управляющих воздействий. Эта особенность накладывает ограничения на использование классической процедуры синтеза оптимального ЛКЦР. Учитывая наличие логических переключений между оборудованием кондиционера, задачу синтеза необходимо разделить на отдельные подзадачи, что позволит учесть наличие логического управления. Синтез ЛКЦР для ПКИМ с элементами логического управления рассмотрим ниже.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЛКЦР ДЛЯ ПРЕЦИЗИОННОГО КОНДИЦИОНЕРА С ФОРСУНОЧНЫМ УВЛАЖНИТЕЛЕМ

Прецизионный кондиционер с форсуночным увлажнителем ориентирован на применение алгоритма управления по методу «точки росы». Характерными чертами для этого метода управления являются следующие:

- 1) стабилизация температуры «точки росы» путем изменения температуры теплоносителя на калорифере $K1$ в зимнее время года, или изменения расхода хладоносителя на охладителе O в летнее время года;
- 2) стабилизация температуры воздуха на выходе ПСЦК путем изменения температуры теплоносителя на калорифере $K2$;
- 3) форсуночный увлажнитель $\PhiУ$ адиабатно увлажняет приточный воздух, в поддоне постоянно поддерживается необходимый уровень воды на орошение, но непосредственного участия в процессе управления увлажнитель не принимает.

На рис. 5 изображена $h - d$ диаграмма процесса кондиционирования воздуха по методу «точки росы» в координатах математической модели (1), где по осям абсцисс и ординат отложены переменные пространства состояний. На вертикальной оси откладываются температурные переменные, а на горизонтальной — переменные влагосодержания. Для модели (1) температура воздуха на входе кондиционера может меняться в диапазоне $x_1^{\min} \dots x_1^{\max}$, а влагосодержание — $x_2^{\min} \dots x_2^{\max}$. На диаграмме показано 6 областей.

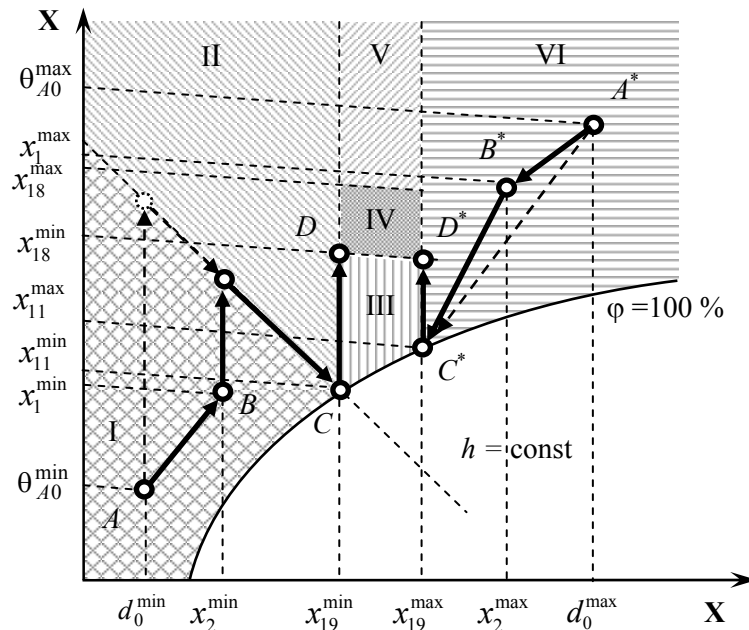


Рис. 5. $h-d$ диаграмма кондиционирования воздуха в координатах математической модели (1)

Область IV имеет форму параллелограмма; эта область характеризует необходимые параметры микроклимата в помещении в диапазоне температур $x_{18}^{\min} \dots x_{18}^{\max}$ и влагосодержания $x_{19}^{\min} \dots x_{19}^{\max}$.

Согласно $h-d$ диаграмме АСК ПКИМ должна обеспечить стабилизацию микроклимата в промышленном помещении в диапазоне допустимой зоны разбаланса для температуры ($x_{18}^{\min} \dots x_{18}^{\max}$) и влагосодержания ($x_{19}^{\min} \dots x_{19}^{\max}$) воздуха. Чтобы поддерживать необходимое влагосодержание воздуха по методу «точки росы», АСК кондиционера обеспечивает стабилизацию температуры «точки росы» за увлажнителем в диапазоне температур $x_{11}^{\min} \dots x_{11}^{\max}$.

Анализ областей $h-d$ диаграммы позволяет дать рекомендации по логическому управлению работой климатического оборудования для модифицированного алгоритма управления АСК ПКИМ по методу «точки росы».

Область I. АСК стабилизирует:

- температуру «точки росы», управляя калорифером $K1$;
- температуру воздуха в помещении, управляя калорифером $K2$.

Область II. АСК стабилизирует:

- температуру «точки росы», воздействуя на охладитель O ;
- температуру воздуха в помещении, воздействуя на калорифер $K2$.

Область III. АСК стабилизирует:

- температуру воздуха в помещении, управляя калорифером $K2$, другое климатическое оборудование участия в регулировании не принимает, влагосодержание воздуха находится в допустимых пределах.

Область IV. Параметры микроклимата находятся в допустимых пределах, регулирующие клапаны оборудования в закрытом положении.

Область V. АСК стабилизирует:

- температуру воздуха в помещении, управляя охладителем O , другое климатическое оборудование участка в регулировании не принимает, влаго-содержание воздуха находится в допустимых пределах.

Область VI. АСК стабилизирует:

- температуру «точки росы», воздействуя на охладитель O ;
- температуру воздуха в помещении, воздействуя на калорифер $K2$.

Для синтеза оптимального ЛКЦР, который реализует ПИ-закон регулирования, расширим математическую модель (1) переменными состояниями, по которым необходимо иметь интегральный закон управления. В данном случае стабилизируются температура «точки росы» за увлажнителем (переменная состояния x_{11}) и температура в помещении (переменная состояния x_{18}), выбор которых осуществляется матрицей C модели (1). С учетом указанных соображений расширенная непрерывная модель ОУ для прецизионного кондиционера примет вид

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I..VI} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}; \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^{K1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{K2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{K2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{III} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{K2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{IV} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{VI} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{K2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Наполнение матрицы управления для шести областей $h - d$ диаграммы различное. Наполнение матриц $\mathbf{B}_{I..VI}$ позволяет организовать логику управления климатическим оборудованием в зависимости от параметров

микроклимата окружающей среды для промышленного кондиционера с форсуночной увлажнителем по модифицированному методу «точки росы». Таким образом, учитывая, что матрица управления $\mathbf{V}_{I...IV}$ для каждой из шести областей $h - d$ диаграммы индивидуальная, необходимо синтезировать матрицу обратной связи $\mathbf{K}_{dI...VI}$ согласно зависимости (6) для всех областей. Для синтеза ЛКЦР следует использовать стандартную процедуру синтеза, рассмотренную выше. В алгоритме управления системой искусственного микроклимата по модифицированному методу «точки росы» необходимо предусмотреть контроль параметров микроклимата окружающей среды и переключение между матрицами обратной связи по измеренным параметрам микроклимата окружающей среды.

ВЫВОДЫ

Для ПКИМ предложена методика разработки комплексной математической модели промышленного кондиционера в пространстве состояний. Методика позволяет получить комплексную модель промышленного кондиционера как единого многомерного объекта управления. Для предложенной методики используются динамические модели климатического оборудования в пространстве состояний, которые рассмотрены в работах [6–10]. Рассмотрен пример разработки комплексной динамической модели прецизионного кондиционера с форсуночным увлажнителем.

Для комплексных моделей промышленных кондиционеров предложена методика синтеза линейно-квадратичного цифрового регулятора, которая учитывает логические переключения в работе климатического оборудования. От классической процедуры синтеза ЛКЦР предложенная процедура отличается наличием логического выбора оборудования для оптимального управления ПКИМ. В отличие от существующих АСУ, которые стабилизируют температуру и относительную влажность воздуха, предложено регулировать температуру и влагосодержание воздуха, что позволяет уменьшить, а в некоторых режимах исключить взаимосвязь между переменными температуры и влажности. Имитационное моделирование динамических процессов для АСК ПКИМ в среде Simulink MatLab подтвердила эффективность предложенной методики.

Предложенный подход к разработке комплексных многомерных моделей ПКИМ и процедура синтеза ЛКЦР позволяют переосмыслить синтез АСК ПКИМ на основе разграничения взаимного влияния регулирующих переменных. Это дает возможность перевести систему управления ПКИМ на качественно новый уровень управления и обеспечит эффективное использование энергоресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белова Е.М. Центральные системы кондиционирования воздуха в зданиях / Е.М. Белова. — М.: Евроклимат, 2006. — 640 с.
2. Бондарь Е.С. Автоматизация систем вентиляции и кондиционирования воздуха / Е.С. Бондарь, А.С. Гордиенко, В.А. Михайлов, Г.В. Нимич. — К.: ООО «Издательский дом “Аванпост–Прим”», 2005. — 560 с.

3. *Вычужанин В.В.* Повышение эффективности эксплуатации судовой системы комфортного кондиционирования воздуха при переменных нагрузках / В.В. Вычужанин. — Одесса: ОНМУ, 2009. — 206 с.
4. *Голинко И.М.* Принципы синтеза автоматических систем управления промышленными кондиционерами / И.М. Голинко // Автоматизация технологических и бизнес-процесов. — 2016. — № 8. — С. 33–42.
5. *Рымкевич А.А.* Системный анализ оптимизации общеобменной вентиляции и кондиционирования воздуха / А.А. Рымкевич. — М.: Стройиздат, 2003. — 272 с.
6. *Голинко И.М.* Динамическая модель теплообмена для водяного охладителя промышленного кондиционера / И.М. Голинко // Научные вестники НТУУ «КПІ». — 2014. — № 6. — С. 27–34.
7. *Golinko I.* Mathematical model of heat exchange for non-stationary mode of water heater / I. Golinko, I. Galytska // ICCSSEEA, 2019. — P. 58–67.
8. *Голинко И.М.* Математическое моделирование процессов тепло- и массообмена для камеры парового увлажнения / И.М. Голинко, И. Є.Галицька, В.Ю. Степаненко // Прикарпатський вісник НТШ. Серія Число. — 2014. — № 1(25). — С. 54–62.
9. *Голинко И.М.* Динамическая модель теплообменных процессов в камере форсуночного увлажнения / И.М. Голинко, А.І. Кубрак, І.Є. Галицька // Інформаційні системи, механіка та керування. — 2014. — № 11. — С. 61–71.
10. *Голинко И.М.* Промышленное помещение как динамический элемент системы управления штучным микроклиматом / И.М. Голинко, І.Є. Галицька // Інформаційні системи, механіка та керування. — 2018. — № 18. — С. 104–114.
11. *Голинко И.М.* Оптимизация системы управления за модульным критерием качества / И.М. Голинко, І.Є. Галицька // Інформаційні системи, механіка та керування. 2013. — № 9. — С. 105–113.
12. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами / У. Рей. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
13. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо, пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.

Надійшла до редакції 17.02.2020

РЕКОНСТРУКЦИЯ 3D МОДЕЛЕЙ ЗДАНИЙ ПО ИХ ТЕНЯМ С ПОМОЩЬЮ СПУТНИКОВЫХ СНИМКОВ

Х. ХАБРАМАН, Д.К. МОЗГОВОЙ

Аннотация. Создание трехмерных моделей зданий с помощью аэрокосмических снимков в последние годы стало очень актуальным и востребованным направлением, поскольку такие модели сейчас используются в различных областях человеческой деятельности. В настоящее время такие модели можно создавать различными методами: с помощью стереосъемки со спутника, фотосъемки с квадрокоптера, измерения самолетным лидаром сканированием здания с Земли. Эти методы требуют дорогостоящего оборудования и высококвалифицированных специалистов, что является сдерживающим фактором для широкого использования таких технологий рядовыми пользователями. Показано альтернативное решение для создания трехмерных моделей зданий на основе спутниковых снимков и бесплатного программного обеспечения. Используются известные пакеты программ Google Earth и SketchUp.

Ключевые слова: фотограмметрия, геоинформационные системы, спутниковые снимки, 3D моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы для создания трехмерных моделей зданий широко применяются методы, которые используют стереосъемку со спутника, фотосъемку с квадрокоптера, измерения самолетным лидаром или лазерное сканирование здания с Земли [1–3]. Такие методы требуют дорогостоящего современного оборудования, дорогостоящих программ и опытных специалистов. Эти факторы препятствуют широкому внедрению методов трехмерного моделирования в процессы решения широкого спектра прикладных задач (например, рядовому пользователю создать 3D-модель своего района). В настоящее время все это может быть доступным, выполняться быстро, качественно и бесплатно. Стоимость программ, используемых в предлагаемой технологии и методах, минимальна по сравнению со стоимостью программного и аппаратного обеспечения иных методов, которые традиционно используются в этой сфере [4]. Это позволяет использовать их широкому кругу неподготовленных пользователей при производстве 3D-моделей жилых районов, отдельных высотных зданий или городских территорий.

Возможные пути решения проблемы. Основная идея предложенного метода — это определение высоты зданий относительно поверхности Земли с помощью векторных изображений теней, полученных по спутниковым снимкам сверхвысокого пространственного разрешения. В исследовании была использована одна из самых известных программ визуализации спутниковых снимков Google Earth Pro [6].

АКТУАЛЬНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность проводимых исследований обусловлена следующими факторами.

1. Предлагается методика доступной и недорогой технологии формирования трехмерных изображений многоэтажных зданий, в которой для определения высоты здания используются спутниковые снимки сверхвысокого пространственного разрешения.

2. Использование предложенной методики даёт возможность большому количеству неспециалистов в области трехмерного моделирования и обработки спутниковых данных достаточно просто создавать упрощенные цифровые модели местности для небольших территорий.

3. Предлагаемый метод создания упрощенных 3D-моделей для ограниченных территорий подойдет всем пользователям, которые не могут купить дорогие рабочие станции и программное обеспечение для лазерного сканирования, квадрокоптеры, а также заказать спутниковую стереосъемку.

Цели исследований

1. Разработать методику трехмерного моделирования с многоэтажной городской застройкой и промышленных объектов с использованием спутниковых снимков сверхвысокого пространственного разрешения.

2. Выполнить экспериментальное тестирование предложенной методики с использованием программ Google Earth и SketchUp.

3. Оценить возможность использования результатов трехмерного моделирования многоэтажных зданий для изготовления трехмерных карт.

Основная часть. Спутниковые снимки, используемые в предлагаемой методике, должны содержать изображения двух зданий, одно из которых используется в качестве 3D эталона (известна его высота). В исследовании таким зданием является главный корпус Днепропетровского национального университета (ДНУ), который имеет 13 этажей (рис. 1). Второе здание с неизвестной высотой выбирается произвольно.

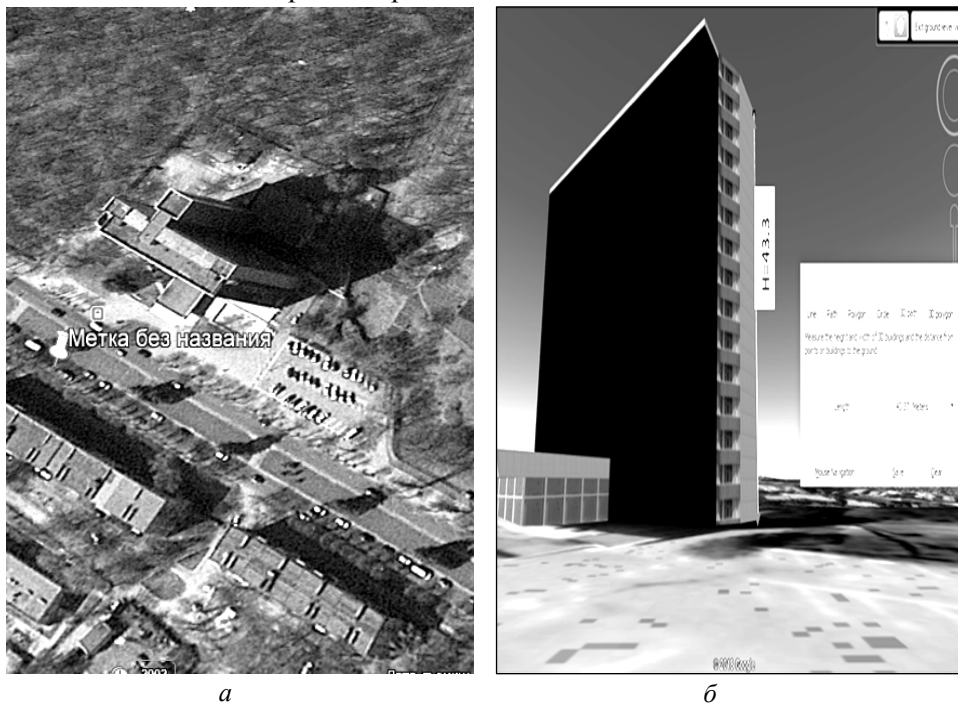


Рис. 1. Главный корпус ДНУ: а — исходный спутниковый снимок в программе Google Earth; б — 3D вид в программе Google Earth

Таким образом, в качестве исходных данных использована известная высота первого здания. Кроме того, для работы применены космические фотоснимки для этих обоих зданий в одно и то же время (т.е. для одного угла Солнца). Известна также высота первого здания в качестве 3D на карте. С помощью космических фотоснимков можно измерить длину тени этого здания в программе Google Earth (рис. 2). Учитывая, что первое здание имеет вертикальный фасад, будет получен прямоугольный треугольник, образованный фасадом здания и тенью здания на Земле, угол между которыми равен 90° . Поскольку известна длина двух сторон этого треугольника (т.е. его катетов), то согласно формуле тангенса можно найти острый угол C (рис. 3).



Рис. 2. Измерение длины тени главного корпуса ДНУ на снимке из Google Earth



Рис. 3. Прямоугольный треугольник, образованный известными длиной тени и высотой здания (снимок из Google Earth)

Выполним несложные вычисления.

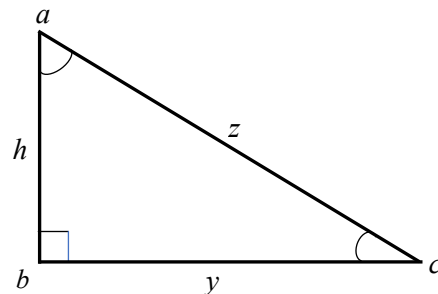
Дано: $h = 43,3$ м (высота корпуса ДНУ); $y = 53,6$ м (длина тени корпуса ДНУ); $\angle b = 90^\circ$.

Найти: $\angle c = ?$

Решение:

$$\operatorname{tg} c = \frac{h}{y} = \frac{43,3}{53,6} = 0,807.$$

Из таблицы тангенсов находим:
 $\operatorname{arctg}(0,807) = 39^\circ$.



Определение высоты другого здания на снимке по его тени и последующее построение 3D-модели. Неподалёку от здания ДНУ расположено двухэтажное здание компании DHL (рис. 4), которого нет на карте в качестве 3D, и не известны его высота и контуры. Это и будет второе здание, выбранное для исследования.



Рис. 4. Здание компании DHL (снимок из Google Earth)

Теперь по методике можно рассчитать высоту второго здания, поскольку известны длина тени этого здания и угол Солнца. Спутниковые снимки выполнены с одного угла, поэтому углы C и C_1 одинаковы для обоих треугольников. Согласно формуле тангенса, приведенной выше, мы можем рассчитать высоту второго здания. Поскольку известна высота второго здания, которого нет в виде 3D модели на карте (рис. 5), контуры здания в плане можно определить с помощью спутниковой съемки в надир (вид сверху) и создать 3D модель здания с помощью программы SketchUp [7].



Рис 5. Снимок из Google Earth: 1 — здание главного корпуса ДНУ (есть в 3D и известна его высота); 2 — здание компании DHL (нет в 3D и не известна его высота)

Выполним несложные вычисления:

Дано: $\angle b_1 = 90^\circ$; $\angle c_1 = 39^\circ$; $y_1 = 10,60$ м.

Найти: $h_1 = ?$

Решение: $\operatorname{tg} c_1 = \frac{h_1}{y_1} \Rightarrow h_1 = y_1 \cdot \operatorname{tg} c_1 =$
 $= 10,60 \cdot 0,807 = 8,55$ м.

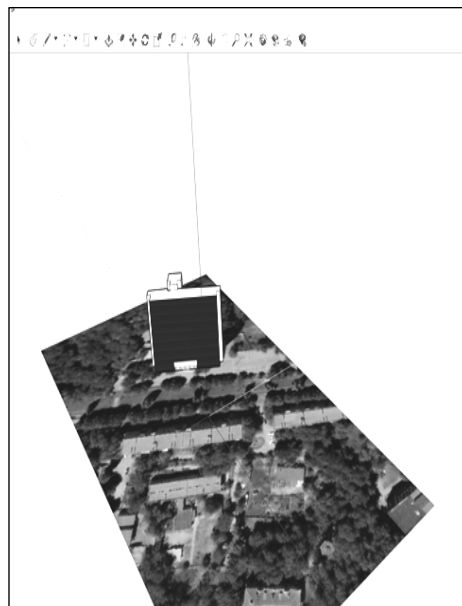
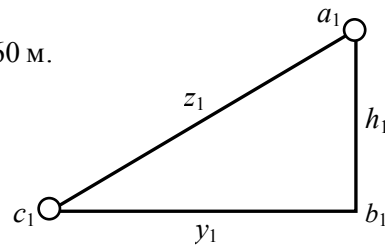


Рис 6. Результат исследования для здания главного корпуса ДНУ в качества 3D в программах SketchUp и Google Earth

Используя результаты расчета, можно нарисовать это здание в виде 3D-модели с помощью программы SketchUp (рис. 6, 7). Фото здания компании DHL в реальности показано на рис. 8.

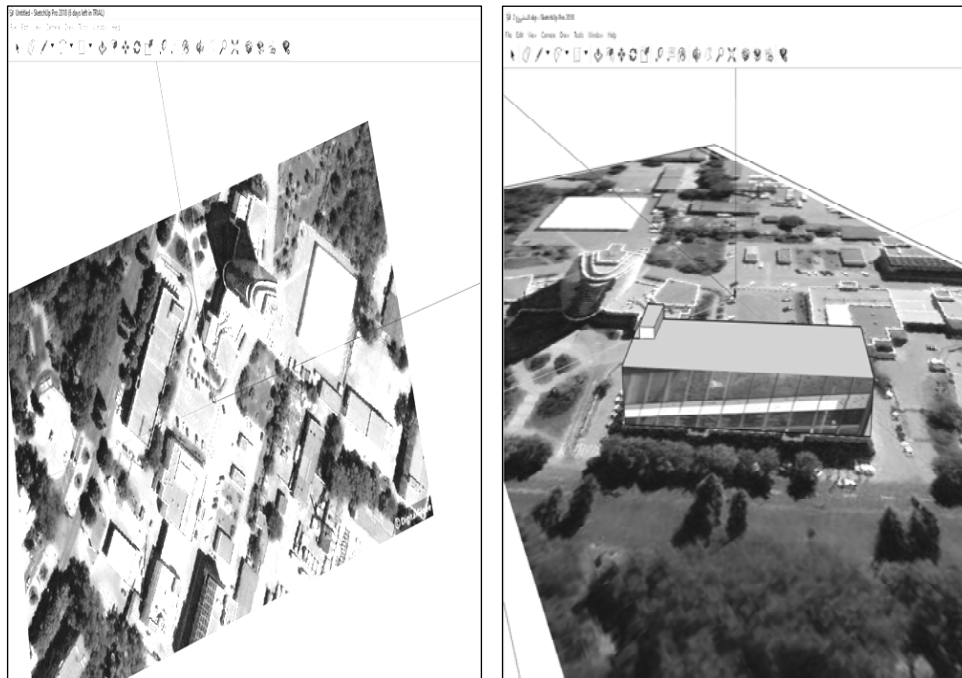


Рис. 7. Результат: 3D модель здания компании DHL, созданная в программе SketchUp



Рис. 8. Фото здания компании DHL в реальности (снимок из Google Maps)

Области практического применения. Предложенную методику можно использовать в различных областях:

1. Создание исторических трехмерных моделей местности по архивным спутниковым снимкам сверхвысокого пространственного разрешения.

2. Создание реалистичной трехмерной среды, которая полезна для предварительного планирования строительства дорожных, промышленных и архитектурных объектов, а также для туристов.

3. Исследование расширения городов и его влияния на загрязнение атмосферы городской среды, где многоэтажные здания препятствуют движению воздуха в этой среде.

ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

На основе проведенного теоретического исследования выполнено экспериментальное тестирование предложенной методики трехмерного моделирования с многоэтажной городской застройкой и промышленных объектов с использованием спутниковых снимков сверхвысокого пространственного разрешения.

Разработанная методика имеет следующие преимущества:

1. Возможность изготовления цифровых карт и осуществление трехмерного моделирования зданий, пригодных для использования многими пользователями, не являющимися специалистами в области обработки спутниковых снимков и изготовления трехмерных карт.

2. Использование методологии позволяет снизить финансовые и временные затраты и не требует высокой квалификации пользователей.

3. Результаты, полученные в ходе исследования, подтвердили возможность использования предложенной методики для трехмерного моделирования многоэтажной городской застройки и промышленных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Omar al-Khalil*. 3D Modeling of Urban Areas by Close Range Photogrammetry Software & Geographic Information System (GIS) / Omar al-Khalil, Ahmad Ali // *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies*. — Engineering Sciences Series. — 2014. — Vol. 36. — N 6. — P. 27–39.
2. *Сатыбалдина Л.С.* Современные методы и технологии аэрокосмических съемок и фотограмметрии и 3D-моделирования / Л.С. Сатыбалдина // *Казахский агротехнический университет Астана*. — 2012. — № 34. — С. 73–77.
3. *Гук А.П.* Некоторые проблемы построения реалистических измерительных 3D моделей по данным дистанционного зондирования. / А.П. Гук, М.М. Шляхова // *Вестник-СГУГиТ*. — Вып. 4 (32). — 2015. — С. 51–60.
4. *Hanan Darwishe*. Procedural 3D Modeling of Cities in Geographic Information Systems Environment Using ESRI Cityengine / Hanan Darwishe, Fadi Chaaban // *Al-Baath University Engineering Journal*. — 2017. — Vol. 39. — N 11. — P. 82–108.
5. *Fayez Deeb*. Documentation of Historic Monuments Using Multi-Images 3D Modelling / Fayez Deeb, Omar.al-Khalil // *Damascus University Journal for Engineering Sciences*. — 2012. — Vol. 28. — P. 357–366.
6. *Earth Versions* – Google Earth. — Available at: <https://www.google.com/earth/versions/#earth-for-web>.
7. *SketchUp*. — Available at: <https://www.sketchup.com>.

Поступила 13.01.2020

**ESTIMATION COMPUTATIONAL MODELS
OF THE CYBER-PHYSICAL SYSTEMS FUNCTIONING**

N.D. PANKRATOVA, Y.A. PTUKHA

Abstract. This paper reviews the use of computational models to support the functioning of cyber-physical systems (CPS) in the parallel world of the Internet of Things (IoT). Existing models, methods, techniques and their implementation in this direction are studied. The necessity of using machine learning methods due to inaccuracy, fuzziness, incompleteness of the transmitted data from sensors of physical systems is substantiated. The task is to make informed decisions in a timely manner to support the functioning of real objects of a particular cyber-physical system in real time conditions.

Keywords: cyber-physical systems, the Internet of Things, system methodology, machine learning, computer systems, sensors.

INTRODUCTION

A cyber-physical system (CPS) is a complex distributed system, managed and controlled by computer systems, tightly integrated with the Internet and its users. The main principle of the CPS is a deep relationship between its physical and computational elements to make decisions regarding the maintenance of the functioning of real objects.

The cyber-physical system was proposed for the study of complex systems consisting of various heterogeneous natural objects, artificial systems, controllers and distributed computing systems, including embedded real-time systems, automated control systems for technical processes and objects, wireless sensor networks, combined into a single whole [1]. The technological basis of CPS is the Internet of Things (IoT), which is the “brain” of a system in the form of artificial intelligence and other technologies for analysis, processing of data received from sensors in the real world [2].

The Internet of things becomes a modern tool that includes several stages of interaction with physical systems: collecting data from a specific physical system, bringing this information to the required format, performing calculations based on models, methods and techniques that allow you to make decisions based on information, obtained from physical models. In CPS, it becomes a fundamentally new fact that not only close communication and coordination between computational and physical resources must be ensured, but also the ability to effectively

respond to emerging cyber-physical effects due to the interaction of physical objects and computational processes, and the ability to make adjustments to ensure the survivability of the functioning of physical systems.

Recently, the Internet of things has become quite popular due to its potential ability to be integrated into any complex system. So, on the market you can already find many ready-made software products, such as Blynk [3], Fractal [4], PRG Network Monitor [5], IoT Analytics [6] etc. Even Google offers its Google Cloud IoT [7] solution on the market. Also, there are companies that offer their services to create products for IoT of the customer systems [8]. But most of them are only ready-made tools and algorithms for the field of study in question for collecting and processing information, and can offer customers forecasting and decision making support in the subject area. However, IoT involves the autonomous functioning and management of the system in cases of detecting threats of emergency situations. For example, according to the article [9] IoT is described as a network of connected embedded objects or devices with identifiers where control can occur without human intervention.

REVIEW OF IOT APPLICATION

The future of IoT is being determined. IoT provides decision-making options in all sectors, including manufacturing, fashion, restaurant, healthcare, education, etc.

IoT applications have already appeared in many aspects of the smart city. In the process of developing such applications, conflicting goals specific to the selected city are determined and their performance indicators are taken into account. For example, the government of Amsterdam is investing its financial resources in reducing transport, energy efficiency and improving the city safety [10], sensor technologies are implemented into new bus network in Barcelona [11], and Santa Cruz police use IoT technology to maximize their presence in the most criminal areas [12]. The Government of India has announced 100 cities that can be developed as “smart cities”, and also allocated 7,060 crore in the budget for 2015 [13].

Another equally common example of the use of the Internet of Things is the creation of a smart home. Smart home systems have gained great popularity in recent decades because they increase comfort and quality of life by making home appliances more intelligent, remotely controlled and interconnected. But it is also important that one of the basic functions of the system – the creation of thief warning technology, is developed in accordance with the environment and culture of the country [14, 15, 16].

The versatility of IoT makes it an attractive option for so many businesses, organizations and government agencies so there is no doubt about using this. However, organizations face many challenges when integrating IoT devices into outdated ecosystems. So, when the IoT is implemented, all devices work simultaneously and the question of data collection and its potential problems arises. IoT works through remote sensors that can make enterprise privacy public [17]. And a separate issue is the big risk of hacking company data on IoT devices. Therefore the Internet of Things is part of Industry 4.0's modern strategy, which connects information systems and big data to form a single digital device [18]. As part of this strategy, modern researchers are developing various frameworks for IoT systems management solutions [19, 20, 21].

For example, in article [22], the authors propose an IoT infrastructure that focuses on security and reducing complexity, regardless of industry. While researchers of the Department of Technology Management developed an IoT framework to monitor all the conditions and results of smart agriculture in Thailand, which also accompanies developers in improving various processes in the industry [23].

Other scientists from Lancaster University are exploring the challenges of the widespread service-oriented architecture (SOA) of IoT software, such as integration, scaling and sustainability in IoT systems [24]. The development of frameworks in IoT has become so popular that companies even rank the highest quality solutions [25, 26].

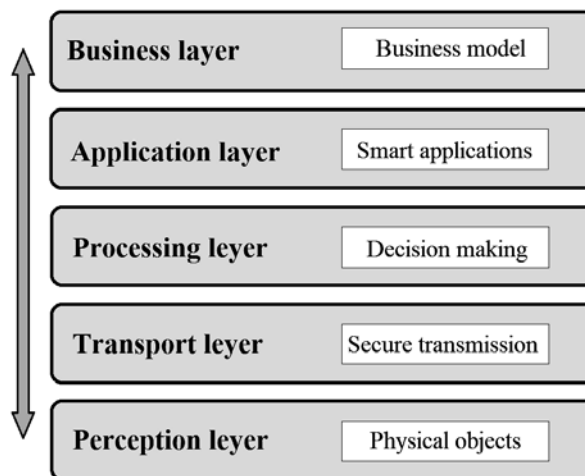
Smart city, smart homes, pollution control, energy saving, smart transportation, smart industries — modern development due to the Internet of things. Many important studies have been conducted to improve technology using IoT. However, there are still many problems that need to be solved in order to fully realize the potential of IoT. The main ones that most scientists put emphasis on can be determined by the following list:

- security and privacy issues related to threats, cyber-attacks, risks and vulnerabilities;
- compatibility issues that arise due to the heterogeneous nature of the various technologies and solutions used to develop IoT;
- ethics, law and regulatory rights to comply with quality standards and prevent illegal use of people;
- scalability, availability and reliability to support a large number of devices with different memory, processing, storage capacity and bandwidth;
- compliance with quality of service (QoS) standards.

It means that improving existing solutions in the above areas can improve the quality and safety of human life at the highest possible level for IoT systems [27].

APPLICATION OF MACHINE LEARNING METHODS

Despite great progress, developing IoT applications is still a complex and time-consuming task. Basically, there are 5 main stages of developing such solutions [28–31] (Figure).



Architecture of IoT

1. Perception stage is the physical layer that is responsible for collecting environmental information. It defines some physical parameters or identifies other intelligent objects in the environment.

2. The transport phase transfers sensor data from the perception level to the processing level and vice versa through networks such as wireless networks, 3G, LAN, Bluetooth, RFID and NFC.

3. The processing layer stores, analyzes and processes huge volumes of data (Big Data) coming from the transport layer, using technologies such as databases and cloud computing.

4. The application layer is responsible for providing the user with application-specific services. It identifies various applications where the Internet of Things can be deployed, such as smart homes, smart cities, and smart health.

5. The business layer manages the entire IoT system, including applications, business models and profit models, as well as user privacy.

In this study, we consider 3–4 steps, which involve processing the data received and supporting timely decision making.

The existing IoT network architecture allows you to extract, convert, delete and consolidate structured data from existing databases and unstructured data from sensors, various transmitting devices. Such data is analyzed using software services that run on a virtual machine for advanced analysis using various machine learning (ML) methods. Most aspects such as managing a smart city, home or business, forecasting water demand, or detecting anomalies are solved directly using ML methods [32, 33].

It is also necessary to consider the issue of processing a large amount of data generated by the IoT system, especially possible approaches to creating state control algorithms that can operate on client devices or nodes with low computational performance [34]. However, in each specific case, in order to create real systems, it is necessary to analyze the most effective algorithms for forming a fuzzy knowledge base and draw fuzzy inference, as well as pre-train systems during the formation of a fuzzy knowledge base and when choosing algorithms for fuzzy inference [35].

An additional problem that we face in the process of studying existing IoT applications is the lack of formalization of the methods described in materials available for research. The main part of the works mentioned above offers only descriptive materials of architecture, selected methods and obtained application results.

CONCLUSION

Based on the above review of the development and application of IoT, in this paper, it is proposed to use the IoT concept where, in real-time, data obtained from physical systems will come to a parallel world and a decision will be formed in a timely manner to ensure the survivability of their functioning based on the analysis and processing of these data. A feature of the application of ML methods in IoT systems is that these methods must control the operation of devices or form decisions on the behavior of the system in emergency and critical situations. In other words, they must accompany the work of physical systems in real time.

As an example of the implementation of the system strategy of guaranteed survivability of the functioning of the system, it is proposed to consider a real closed deep water supply system [36]. The main purpose of the system is to provide the indicated level of water consumption for consumers, provided that the priority is the cooling process of an environmentally hazardous technological installation.

In order to achieve the goal of timely identification of the causes of potentially possible emergency situations and to ensure the survivability of its operation in real time, monitoring is carried out in the form of technical diagnostics and indicators are taken at key points in the water supply system, which are transmitted to the IoT to develop a solution to support the functioning of the system. It is assumed that the implementation of a water management system can be accomplished by using hybrid neural networks, which is planned to be presented in further works.

REFERENCES

1. *Vyatkin V.* Cyber-physical engineering as a way of applying the theory of cyber-physical systems / Valeriy Vyatkin, Dmitry Drozdov, Yulia A. Golub // SAEC. — 2019. — No. 1.
2. *Xia F.* Internet of things / F. Xia // International Journal of Communication Systems. — 2012. — Vol. 25. — No. 9. — P. 1101.
3. <https://blynk.io/>
4. <https://www.fractal.com/en/fractal-box>
5. <https://www.paessler.com/prtg>
6. <https://iot-analytics.com/>
7. <https://cloud.google.com/solutions/iot>
8. <https://www.analyticsinsight.net/top-iot-companies/>
9. *Gubbi J.* Internet of things (IoT): A vision, architectural elements, and future directions / J. Gubbi, R. Buyya, S. Marusic, M. Palaniswami // Future Generation Computer Systems. — 2013. — Vol. 29. — No. 7. — P. 1645–1660.
10. *Mora L.* How to Become a Smart City: Learning from Amsterdam / L. Mora, R. Bolici // In: Bisello A., Vettorato D., Stephens R., Elisei P. (eds) Smart and Sustainable Planning for Cities and Regions. SSPCR 2015. Green Energy and Technology. — Springer, Cham. — 10.1007/978-3-319-44899-2_15
11. *Madakam S.* Barcelona Smart City: The Heaven on Earth (Internet of Things: Technological God) / S. Madakam, R. Ramaswamy. — An International ICT R&D Journal Sponsored by ZTE Corporation. — 2015. — Vol. 13. — N 4.
12. *Baxter S.* Modest gains in first six months of Santa Cruz's predictive police program / S. Baxter // Santa Cruz Sentinel. — 2012. — Retrieved 2015-05-26.
13. *Chatterjee S.* Success of IoT in Smart Cities of India: An empirical analysis / S. Chatterjee, A. Kar, MP. Gupta // Government Information Quarterly. — 2018. — 10.1016/j.giq.2018.05.002.
14. *Tran A. Thuan.* SmartHome IoT Application Development / Tran A. Thuan, T. Huy, D. Hoang et al. — 2019.
15. *Alaa M.* A Review of Smart Home Applications based on Internet of Things / M. Alaa, A. Zaidan, B. Bahaa et al. // Journal of Network and Computer Applications. — 2017. — 97. 10.1016/j.jnca.2017.08.017.
16. *Yang H.* IoT Smart Home Adoption: The Importance of Proper Level Automation / H. Yang, L. Wonji, L. Hwansoo // Journal of Sensors. — 2018. — P. 1–11. — 10.1155/2018/6464036.
17. *Khan A.* The Role of IoT in Digital Governance / A. Khan, N. Zaman, M. Humayun. — 2020. — 10.4018/978-1-7998-1851-9.ch007.
18. *Koman G.* Advantages of IoT implementation in enterprise process management / G. Koman, M. Kubina, D. Šulyová. — 2020.

19. *Mohapatra S.* A Solution Framework for Managing Internet of Things (IoT) / S. Mohapatra, J. Bhuyan // *International journal of Computer Networks & Communications*. — 2016. — 8. — P. 73–87. — 10.5121/ijcnc.2016.8606.
20. *Ando B.* Editorial: Hot I&M topics in the IoT framework / B. Ando // *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*. — 2019. — 22.2-2. — 10.1109/MIM.2019.8917895.
21. *Vranken C.* Combination of IoT framework with liquid software. — 2018.
22. *Cheruvu S.* IoT Frameworks and Complexity / S. Cheruvu, A. Kumar, N. Smith, D. Wheeler— 2020. — 10.1007/978-1-4842-2896-8_2.
23. *Krongthong T.* Modeling and Simulink of Smart Agriculture Using IoT Framework / T. Krongthong, B. Muangmeesri. — 2019. — P. 185–188. — 10.1109/ICORIS.2019.8874914.
24. *Onoriode U.* IoT Architectural Framework: Connection and Integration Framework for IoT Systems / U. Onoriode, G. Kotonya // *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*. — 2018. — 264. — P. 1–17. — 10.4204/EPTCS.264.1.
25. <https://www.byteant.com/blog/5-best-open-source-iot-frameworks/>
26. <https://www.techtic.com/blog/top-10-open-source-iot-frameworks/>
27. *Kumar S.* Internet of Things is a revolutionary approach for future technology enhancement: a review / S. Kumar et al. // *Journal of Big Data*. — 2019. — 6. — P. 1–21.
28. *Mashal I.* Choices for interaction with things on Internet and underlying issues / I. Mashal, O. Alsaryrah, T.-Y. Chung et al. — *Ad Hoc Networks*. — 2015. — Vol. 28. — P. 68–90.
29. *Wu M.* Research on the architecture of internet of things / M. Wu, T.-J. Lu, F.-Y. Ling et al. // in *Proceedings of the 3rd International Conference on Advanced Computer Theory and Engineering (ICACTE '10)*. — Vol. 5. — P. 484–487. — IEEE, Chengdu, China, August 2010.
30. *Khan R.* Future internet: the internet of things architecture, possible applications and key challenges / R. Khan, S.U. Khan, R. Zaheer, S. Khan // in *Proceedings of the 10th International Conference on Frontiers of Information Technology (FIT '12)*. — 2012. — P. 257–260.
31. *Sethi P.* Internet of Things: Architectures, Protocols, and Applications / P. Sethi, S. Sarangi // *Journal of Electrical and Computer Engineering*. — 2017. — P. 1–25. — 10.1155/2017/9324035.
32. *Vijai P.* Design of IoT Systems and Analytics in the Context of Smart City Initiatives / P. Vijai, P. Sivakumar // *India. Procedia Computer Science*. — 2016. — 92. — P. 583–588. — 10.1016/j.procs.2016.07.386.
33. *Zantalis F.* A Review of Machine Learning and IoT in Smart Transportation / F. Zantalis, G. Koulouras, S. Karabetsos // *Future Internet*. — 2019. — 11. — 10.3390/fi11040094.
34. *Luntovskyy A.* Performance, Reliability and Scalability for IoT / A. Luntovskyy, L. Globa. — 2019. — P. 316–321. — 10.1109/DT.2019.8813679.
35. *Globa L.* Fuzzy logic usage for the data processing in the Internet of Things networks / L. Globa et al. // *Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2018): International scientific and technical conference proceedings (Minsk, February 15–17, 2018)* / V. V. Golenkov, Ed. — Minsk: BGUIR, 2018.
36. *Pankratova N.D.* System analysis: Theory and applications: textbook / N.D. Pankratova; NASU, NTUU “KPI”, IASA NASU. — K.: Naukova Dumka, 2018. — 347 p.

Received 20.03.2020

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ADAPTIVE FORECASTING AND FINANCIAL RISK ESTIMATION

V. DANILOV, O. GOZHYJ, I. KALININA, A. BELAS, P. BIDYUK, O. JIROV

Abstract. The study is directed towards development of an adaptive decision support system for modeling and forecasting nonlinear nonstationary processes in economy, finances and other areas of human activities. The structure and parameter adaptation procedures for the regression and probabilistic models are proposed as well as the respective information system architecture and functional layout are developed. The system development is based on the system analysis principles such as adaptive model structure estimation, optimization of model parameter estimation procedures, identification and taking into consideration of possible uncertainties met in the process of data processing and mathematical model development. The uncertainties are inherent to data collecting, model constructing and forecasting procedures and play a role of negative influence factors to the information system computational procedures. Reduction of their influence is favourable for enhancing the quality of intermediate and final results of computations. The illustrative examples of practical application of the system developed proving the system functionality are provided.

Keywords: economic and financial processes, adaptive modeling, forecasting nonlinear nonstationary processes, uncertainties, system analysis, decision support system.

INTRODUCTION

Modeling and forecasting financial, economic, ecological, climatology and many processes in other spheres of human activity is important problem that is to be solved by many companies and institutions in business, at the state and industrial enterprises, scientific and educational laboratories etc. The most distinctive common features of such processes today are non-stationarity and nonlinearity that require a lot of special attention for estimating respective model structure and its parameters. To improve the forecasts based upon mathematical models it is necessary to develop new appropriate model structures that would adequately describe the processes under study and provide a possibility for computing high quality forecasts. One of the most promising modern approaches to modeling and forecasting is based upon so called systemic approach that supposes application of system analysis principles in the frames of specialized decision support system (DSS) [1–3]. Usually the set of the principles includes the following ones: – constructing DSS according to the hierarchical strategy of decision making; – application of optimization and adaptation techniques for model building, forecasting and control; – identification of possible uncertainties (the factors of negative influence to the computational procedures used in DSS that are of various kind and origin) and application of algorithmic means helping to reduce their influence on the quality of intermediate and final results of data processing and decision making [4]. Some other systemic principles could be hired for constructing DSS, though perhaps not so important as those mentioned above. The most important for prac-

tical use are the principles of adaptation, optimization and minimization of uncertainty influence that are helpful for enhancing adequacy of the models being constructed and improving the quality of intermediate and final results.

There are many positive examples of adaptation and optimization techniques application in modeling, forecasting and control [5–7]. This is especially urgent task for analyzing non-stationary processes met practically in all the areas mentioned above. There are two basic directions of adaptation while solving the modeling problems: adaptation of model structure and parameters. According to our definition the notion of model structure includes the following elements: model dimension that is determined by the number of its equations; model order that is determined by the highest order of a model equation; output reaction delay time (or lag) for independent variables (regressors); system or process nonlinearity and its type (nonlinearity with respect to variables or to parameters); type of external stochastic disturbance (distribution and its parameters); system (process) initial conditions and possible restrictions on variables and/or model parameters [8]. Thus, we have many possibilities for model structure corrections and its adaptation to varying system operation modes and conditions of application.

The books [6–8] consider various possibilities for mathematical models adaptation and their further applications to short-term forecasting dynamics of specific processes under consideration. The set of possible model structures proposed is very wide, starting from linear regression equations and up to sophisticated probabilistic models in the form of Bayesian networks, various nonlinear structures and combined models. There also can be found some adaptation procedures illustrating possible changes of a model structure and re-computing of their parameters. It is stressed that application of adaptation schemes helps to increase model adequacy in changing conditions of random external influences, nonlinearity and non-stationarity of the process under study.

The study [9] describes procedures for constructing adaptive regression models on the basis of large datasets. The authors proposed development of decision rules in application to machine learning. They stress that model trees and regression rules are most expressive approaches for data mining procedures of model development. The adaptive model rules proposed in the study create a one-pass algorithm that can adapt available set of rules to the possible changes in the processes under consideration. The sets of rules generated can be ordered or unordered, and it was shown experimentally that unordered rules exhibited higher performance in the terms of statistical quality parameters of the models generated.

The results presented in [10–11] consider the problem of adaptive models constructing for nonstationary heteroscedastic processes widely known today in analysis of financial time series. The authors proposed a procedure for automated constructing and model selection in finance. The flexible procedure is general-to-specific modeling of the mean, variance and probabilistic distribution. The initial specification of a model starts from autoregressive terms and regressors (explanatory variables). The variance specification is based upon log-ARCH and log-GARCH terms, the term of asymmetry, Bernoulli jumps and other possible explanatory variables. The algorithm developed returns specifications of parsimonious mean and variance as well as standardized error distribution in cases when normality is rejected. The extensive Monte Carlo simulations were performed and three empirical applications studied that support usefulness of the method proposed for practical analysis of financial data.

The use of adaptive exponential smoothing for lumpy demand forecasting is considered in [12]. It showed substantial advantages over some conventional approaches used in practice due to appropriate selecting the model smoothing factor. Kalman filter is used to perform preliminary measurement data processing, and then forecasting models are constructed using adaptive smoothing factor based upon optimal filter weighting function. As a result the model performance with this weighting function managed to generate smaller forecasting errors than their counterparts used in demand prediction.

Adaptive forecasting of dynamic processes in conditions when recent and ongoing structural changes are present is considered in [13], and the nature of the changes is unknown. The authors used the method of down-weighting older data based on the tuning parameter found as a result of minimizing mean square error of time series forecasts. A detailed theoretical analysis of the forecasting method is presented as well as positive results of multiple computational experiments based upon macroeconomic data from US economy.

The problem of short-term forecasting in conditions of availability of structural breaks is considered in [14]. The optimal one step ahead forecasts are generated using known exponential smoothing techniques. Analytical expressions are derived for optimal weights in models with one and multiple regressors. The authors showed that the weight remains the same within a given operating regime of a system under study. The comparative study of the method proposed was performed using Monte Carlo simulations and the data from industrial economies. It was shown that robust optimal weights provide high quality short-term forecasts when information on structural breaks is uncertain.

A short review of adaptive approaches to modeling and forecasting processes in various areas of human activities presented above indicates that appropriate adaptation of the models constructed usually helps to construct adequate models and to enhance forecast quality. The study proposed is directed towards development of adaptive forecasting system providing a possibility for forecasting nonlinear nonstationary processes (NNPs) met in economy, finances, ecology etc.

PROBLEM STATEMENT

The purpose of the study is in solving the following problems: to develop structure and parameter adaptation procedures for the regression and probabilistic models; to develop the system architecture for modeling and forecasting nonlinear nonstationary processes in economy, finances, ecology and other areas based on the system analysis principles; to consider possibilities for elimination of some uncertainties inherent in data collecting, model constructing and forecasting procedures; to develop the methodology for modeling and forecasting linear and nonlinear processes in the frames of the same system; providing illustrative examples of practical application of the system developed proving the system functionality.

SOME COMMON FEATURES OF THE PROCESSES IN ECONOMY, FINANCES AND ECOLOGY

A wide diversity of various processes exists in economy, finances, ecology, demography and other areas of human activity. However, there are some general common features of the process like linearity/nonlinearity, and stationar-

ity/nonstationarity that allow to divide them into practically understandable classes and select appropriate modeling and forecasting techniques. Fig. 1 shows simplified classification of the processes from which we could make a conclusion about wide variety of mathematical model structures that could be applied for formal description of the processes dynamics and solving the problem of forecasting their evolution in time.

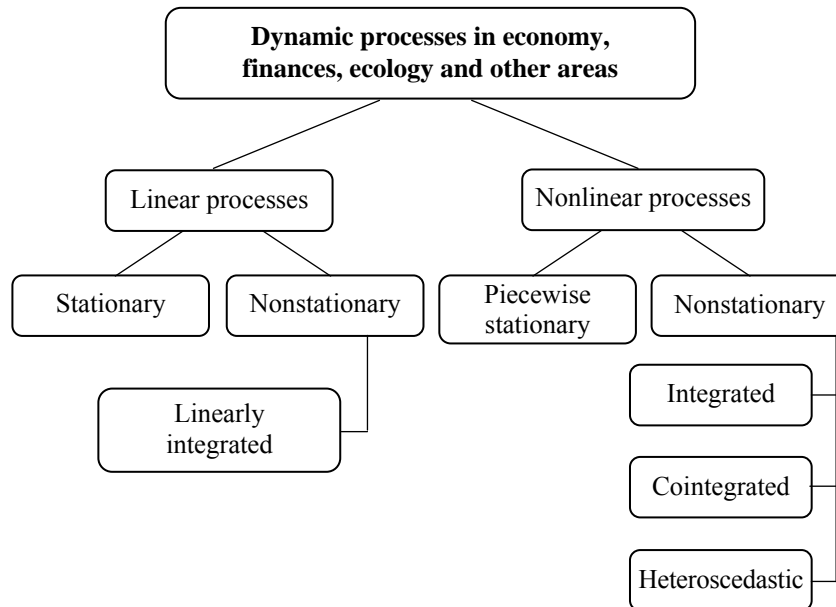


Fig. 1. A simplified classification of dynamic processes in economy and finances

Linear processes can be stationary without trend and nonstationary when they contain linear (first order) trend, $I(1)$, where $I(1)$ means integrated of the first order. If variance (covariance) of stochastic linear process is time dependent then it is classified as heteroscedastic and requires nonlinear models for describing the process variance and possibly the process itself.

There also exists a wide variety of nonlinear processes though we selected only some of them that are more frequent in economy and finances. Generally the processes can be split into nonlinear regarding parameters and nonlinear regarding variables. The first type is more sophisticated with respect to modeling and parameter estimation and usually requires more efforts and time for their model development; it is not considered here. As an example of such a model could be mentioned widely used in practice logistic regression.

Some nonlinear processes can exhibit linear behavior in their stable (nominal) mode of operation. This feature allows for linear description of the process in the vicinity of operating point. Generally NNPs are very often met in the areas of study mentioned above. The set of the processes includes integrated processes (IP) that contain a trend of order two or higher as well as cointegrated processes with the trends of the same order, and the processes with time changing variance, i. e. heteroscedastic processes. Most of financial processes illustrating price evolution of stock instruments belong to this class [15, 16]. In engineering applications such processes are studied in diagnostic systems where appropriate decision is made regarding current system state.

METHODOLOGY OF MODELING NONLINEAR NONSTATIONARY PROCESSES

The methodology proposed for modeling NNPs illustrates Fig. 2. At the first step of the methodology the data collected is subjected to preliminary processing that may include the following basic operations: imputation of missing observations,

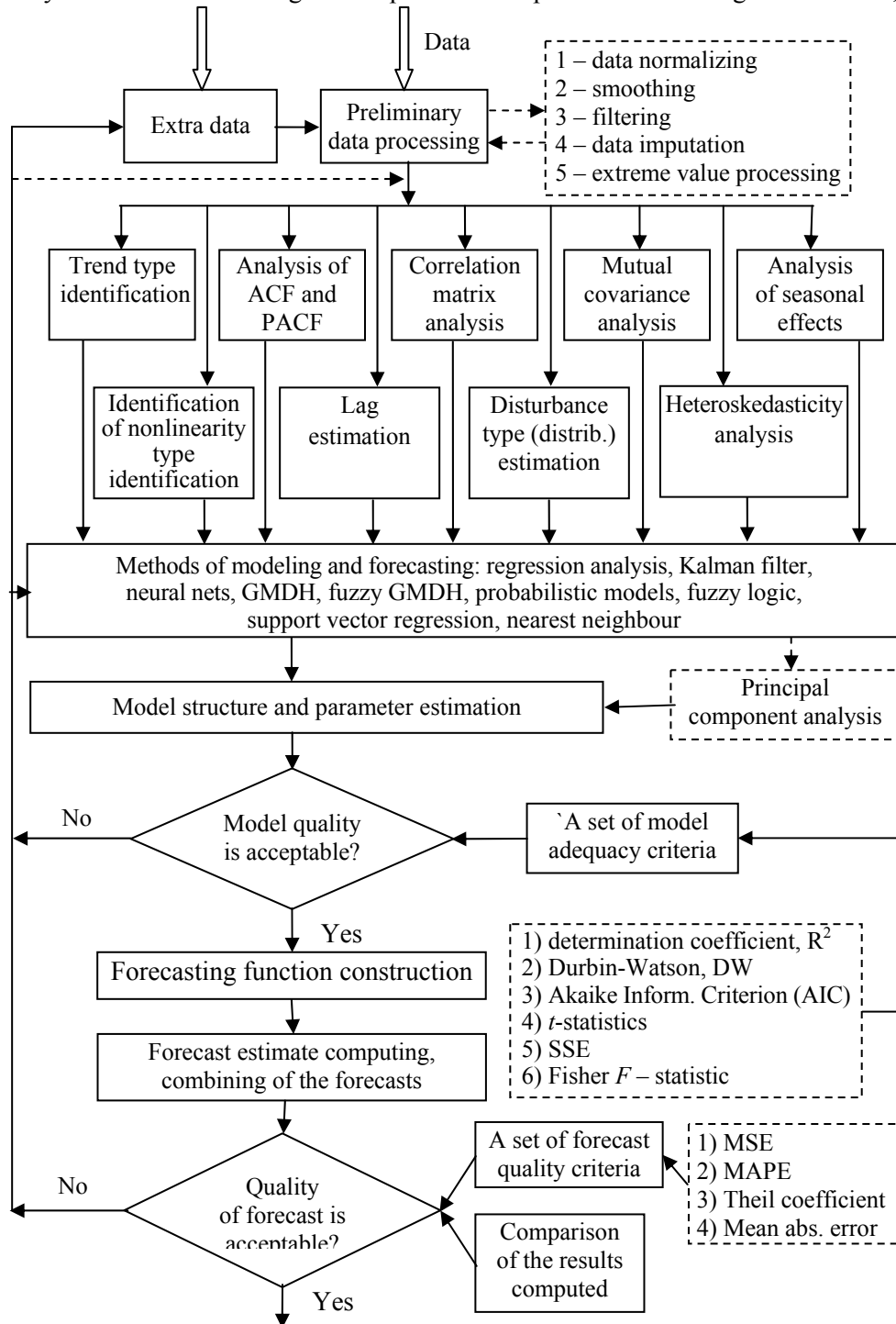


Fig. 2. Functional layout of the forecasting system proposed

normalization in a given range, digital or optimal filtering dependently on problem statement, principal component analysis, appropriate processing of outliers etc. Here it is also appropriate to perform identification and elimination (reduction) of data uncertainties that may touch the following: non-measurable value estimation; computing the general statistical parameters (variance, covariance, mean, median etc.); performing data structuring according to the problem statement; analysis of distribution types and their parameters; estimation of prior probabilities where necessary [17, 18].

Estimation of a model structure using statistical and probabilistic (mutual) information analysis that provides a possibility for estimation of the following elements of a model structure: dimension of a model – number of equations creating the model; model order (highest order of difference or differential equation of the model); nonlinearity and its type; estimate of input delay time, and type of probabilistic distribution for the model variables. It is always appropriate to perform structure estimation for several candidate-models so that to have a possibility for selecting the best one of the candidates estimated.

Formally, to detect nonlinearity in statistical data available statistical tests and techniques should be applied. Fig. 3 shows some known techniques for testing the data for nonlinearity.

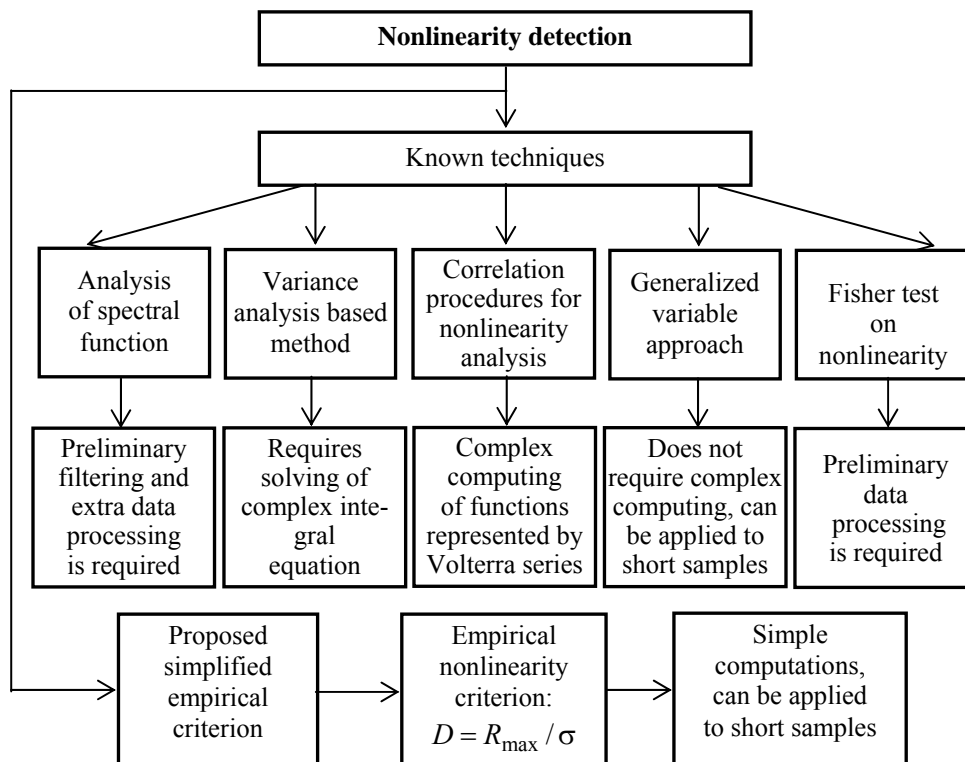


Fig. 3. Some techniques for testing data for nonlinearity

Along with application known technics we proposed a new simplified empirical criterion for detecting nonlinearity in data that is shown below in the Fig. 3: here R is maximum deviation of the process under study from its linear approximation; σ is sample standard deviation of the process. It does not require

sophisticated computations though provides for additional information about availability of nonlinearity.

The sequence of operations allowing for constructing nonlinear model illustrates Fig. 4; actually this is a part of general model constructing procedure given in Fig. 2.

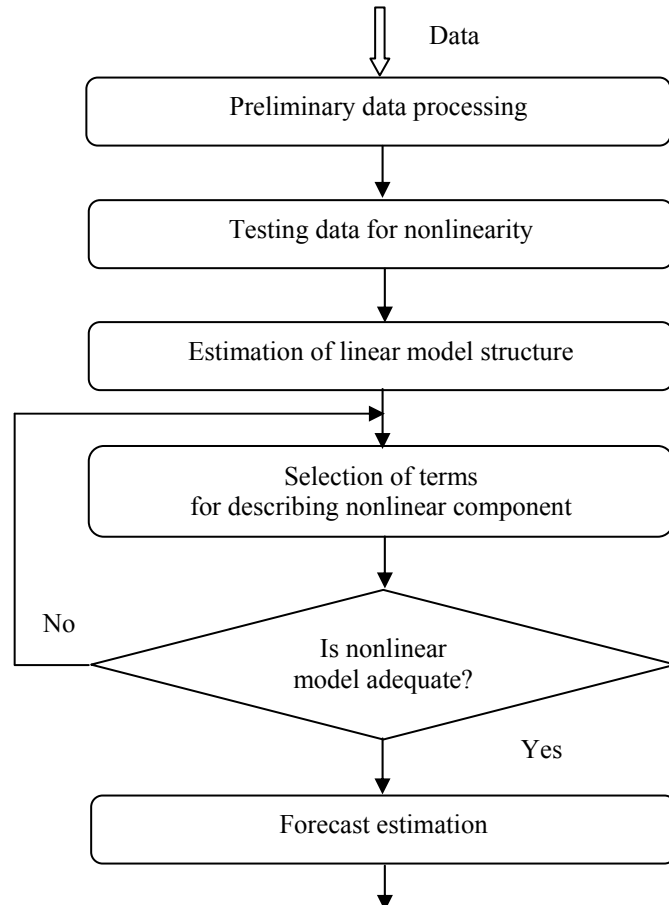


Fig. 4. Procedure for formal describing nonlinear process

Possible nonlinearities (with respect to model variables) could be taken in the following way: first linear part is estimated using known linear structures like autoregressive equations with moving average with linear trend, paired or multiple regression etc. Then nonlinear part of the model is added in the form of nonlinear trend, quadratic, bilinear or higher order terms, nonlinear terms describing cyclic changes of the main variable etc. The modeling practice shows that acceptable model adequacy can be often reached using combination of linear and nonlinear regression, linear regression and Bayesian networks, linear regression and special nonlinear functions like nonparametric kernels. Using this approach a set of candidate models could be constructed with subsequent selecting the best one using appropriate set of statistical adequacy criteria as shown in Fig. 2. Unfortunately formal possibilities for determining in a unique way the type of nonlinearity not always exist, especially when the data samples are short.

The next step is model parameter estimation by making use of alternative techniques; in linear case these are the following ones: ordinary least squares

(OLS) and its clones, maximum likelihood (ML) and many others. In a case of nonlinear model estimation the following methods are useful: ML, Markov Chain Monte Carlo (MCMC) procedures [19], nonlinear least squares (NLS) and other suitable approaches able to provide unbiased parameter estimates under specific probabilistic distributions of model variables and model structures. Correct application of alternative parameter estimation techniques provides a possibility for further comparison of the candidate models and selection of the best one. It is also possible to trace the reasons for existing parametric uncertainties in the following form: parameter estimates computed with statistical data cannot be consistent, they may contain bias, and can be inefficient. All these effects finally result in poor adequacy of the model constructed.

At the next stage is computed a set of statistical parameters characterizing model quality (adequacy) and selecting the most suitable model out of the set of candidate models. There is no need to leave only one model for computing forecasts (or solving control problem). Again, it can be a set of the “best” models constructed on different ideologies. The final choice is always made after models application for solving the problem according to the initial problem statement.

After computing the process (under study) forecasts using candidate models another set of forecast quality criteria is applied to select the best result, say mean absolute percentage error (MAPE), Theil coefficient, mean absolute error (MAE), minimum and maximum errors of forecasting etc. The models constructed should also be tested on similar process, i.e. model calibration process performed.

At this point we can conclude that availability of the data uncertainties mentioned, and the necessity for hierarchical construction of the data processing system with the features of adaptation and optimization (structural and parametric) require application of the modern systemic approach that provides a possibility for successful and high quality solving the problems encountered during statistical data processing, mathematical model construction, forecast estimation and generating the decision alternatives. In this study we propose some practical possibilities for constructing data processing procedures based on modern principles of systemic approach.

Dealing with model structure uncertainties. When using DSS, model structure should practically always be estimated using data. It means that elements of the model structure accept almost always only approximate values. When a model is constructed for forecasting we build several candidates and select the best one of them using a set of model quality (adequacy) statistics. Generally we could define the following techniques to fight structural uncertainties: gradual refinement of model order (for $AR(p)$ or $ARMA(p, q)$ structures) applying adaptive approach to modeling and automatic search for the “best” structure using complex statistical quality criteria; adaptive estimation of input delay time (lag) and the type of data distribution with its parameters; formal description of detected process nonlinearities using alternative analytical forms with subsequent estimation of model adequacy and forecast quality. A simple example of the complex model and forecast criterion may look as follows:

$$J = \left| 1 - R^2 \right| + \left| 2 - DW \right| + \beta \ln(MAPE) \rightarrow \min_{\theta_i};$$

or in more complicated form:

$$J = \left| 1 - R^2 \right| + \alpha \ln \left[\sum_{k=1}^N e^2(k) \right] + |2 - DW| + \beta \ln(MAPE) + U \rightarrow \min_{\hat{\theta}_i},$$

where R^2 is determination coefficient; $\sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2$ is a sum of squared model errors; DW is Durbin-Watson statistic; $MAPE$ is mean absolute percentage error for one step-ahead forecasts; U is Theil coefficient that characterizes forecasting capability of a model; α, β are appropriately selected weighting coefficients; $\hat{\theta}_i$ is parameter vector for i -th candidate model. A combined criterion of this type is used for automatic selection of the best candidate model constructed. The criteria presented also allow operation of DSS in adaptive mode. Obviously, other forms of the combined criteria are possible dependently on specific purpose of model building. What is important while constructing the criterion: not to overweigh separate members in right hand side that would suppress other components.

Coping with uncertainties of a level (amplitude) type. The availability of random and/or non-measurable variables results in the necessity of hiring fuzzy sets for describing processes in such situations. The variable with random amplitude can be described with some probability distribution if the measurements are available or when they come for analysis in acceptable time span. However, some variables cannot be measured in principle, say amount of shadow capital that “disappears” every month in offshore zones, or amount of shadow salaries paid at some company, or a technology parameter that cannot be measured on-line due to absence of appropriate gauge or in-situ physical difficulties. In such situations it is possible to assign to the variable a set of characteristic values in linguistic form, say as follows: *capital amount* = { *very low, low, medium, high, very high* }. There exists a complete set of necessary mathematical operations to be applied to such fuzzy variables. Finally fuzzy value can be transformed into exact non-fuzzy form using known transformation techniques.

Probabilistic uncertainties and their description. The use of random variables leads to the necessity of estimating actual probability distributions and their application in inference computing procedures. Usually observed value is known only approximately though we know the limits for the actual values. Appropriate probability distributions are very useful for describing the processes under study in such situations. When dealing with discrete outcomes, we assign probabilities to specific outcomes using a mass function. It shows how much “weight” (or mass) to assign to each observation or measurement. An answer to the question about the value of a particular outcome will be its mass. The Kolmogorov’s axioms of probability are helpful for deeper understanding of what is going on. If two or more variables are analyzed simultaneously it is necessary to construct and use joint distributions. Joint distributions allow estimation of conditional probabilities using renormalization procedures when necessary.

Very helpful for performing probabilistic computations is a notion of conditional independence: $P(x, y | z) = P(x | z) P(y | z)$, where x and y are independent events. Such identities are very handy though one should be careful when using them, i.e. the events should be actually independent. The remarkable intui-

tive meaning of discrete Bayes' law, $P(A/B)=P(B/A)P(A)/P(B)$, is that it allows to ask the reverse questions: "Given that event A happened, what is the probability that a particular event B evoked it?" The marginal probability, $P(B)$, can be computed using appropriate conditionals. The probability that event B will occur in general, $P(B)$, could be obtained from the following condition: $P(B)=P(B/A)P(A)+P(B/\bar{A})P(\bar{A})$.

The probabilistic types of uncertainties regarding whether or not some event will happen can be taken into consideration with probabilistic models. To solve the problem of describing and taking into account such uncertainties a variety of Bayesian models could be hired that are considered as Bayesian Programming formalism. The set of the models includes Bayesian networks (BN), dynamic Bayesian networks (DBN), Bayesian filters, particle filters, hidden Markov models, Kalman filters, Bayesian maps etc. The structure of Bayesian program includes the following elements: problem description and statement formulation with a basic question of the form: $P(\text{Searched}/\text{Known})$ or $P(X_i/D,Kn)$, where X_i defines one variable only, i.e. what should be estimated using specific inference engine; the use of prior knowledge Kn and experimental data D to perform model structure and parameters identification; selection and application of pertinent inference technique to answer the question stated before; testing quality of the final result. Such approach also works well in adaptation mode aiming to adjusting structure and parameters of a model being developed to new experimental data or a new system operation mode, for example, for estimation of prior distributions or BN structure.

SOME SYSTEM ANALYSIS PRINCIPLES USED IN DSS IMPLEMENTATION

In our study we propose to use the following system analysis principles for implementing specialized DSS for modeling and forecasting: the systemic function coordination principle; the principle of procedural completeness; the functional orthogonality principle; the principle of dependence of mutual information between the functions being implemented; the principle of functional rationality; the principle of multipurpose generalization; the principle of multifactor adaptation, and the principle of rational supplement [20–22].

The principle of systemic functions coordination supposes that all the techniques, approaches, and algorithms (functions) implemented in the system should be structurally and functionally coordinated, and should be mutually dependent. This way it is possible to create and practically implement a unique systemic methodology for statistical data analysis in the frames of modern DSS, and to improve substantially quality of intermediate and final results. The next systemic principle of procedural completeness guaranties that the system developed will provide the possibility for timely and in place execution of all necessary computing functions directed towards data collection (editing, normalizing, filtering and renewing), formalization of a problem statement, model constructing, computing forecasts, and for performing estimation quality of the model and the forecast estimates based upon it.

Development and implementation of all computational procedures in the DSS using mutually independent functions corresponds to the principle of func-

tional orthogonality. Such approach to the DSS constructing is directed towards substantial enhancement of computational stability of the system and simplification of its further possible modifications and functional enhancement. According to the principle of mutual informational dependence the results of computing, generated by each procedure, should correspond to the formats and requirements of other procedures. This feature is easily implemented with respective project development solutions for the system created.

Application of the systemic principle of goal directed correspondence to computational procedures and functions provides a good possibility for reaching of a unique goal set in advance: high (acceptable) quality of the final result in the form of forecast estimates for the process under study as well as alternative decisions based upon the forecasts.

According to the systemic principle of multipurpose generalization all functional modules for the system developed should possess necessary degree of generalization that provides a possibility for reaching high quality solution results for a set of possible problems that belong to the same class (it can be high quality forecasting and decision alternative generation regarding future evolution of linear or nonlinear non-stationary processes). Among these problems could be the following: accumulating necessary data and their preliminary processing; estimation of structure and parameters for a set of candidate mathematical models; constructing forecasting functions on the models developed and computing of appropriate forecasts; selecting the best results of computing using appropriate sets of quality criteria.

The systemic principle for multifactor adaptation is directed towards the possibility of solving the problems of computational procedures adaptation to the problems of modeling various processes of different complexity depending on the completeness of available information and user requirements. The adaptation is performed within the process of model structure and parameters estimation, i.e. the whole identification procedure of a process under study is compiled from a set of adaptive procedures directed towards reaching the main goal of a study: constructing adequate model and computing high quality forecasts.

Hiring the rational supplement principle provides a possibility for expanding the sphere of application of the DSS constructed by adding new processes types, computational procedures and criteria sets. These new procedures could be directed towards implementation of additional preliminary data processing procedures, model structure and parameter estimation as well as selection of the best result for its further use aiming generating of appropriate decision. Implementation in the frames of the constructed DSS of the systemic principles mentioned above favors its functional flexibility, computational reliability, quality enhancement for the intermediate and final results, prolongation of system life span, and simplification of possible drawbacks elimination and modification procedures.

Finally, the forecasting models and methods used in the system are the following: regression analysis, the group method for data handling (GMDH), fuzzy GMDH, fuzzy logic, appropriate versions of the optimal Kalman filter (KF), neural nets, support vector regression, nearest neighbor and probabilistic type techniques like Bayesian networks and regression. The set of modeling techniques used covers linear and many types of nonlinear non-stationary processes. The nearest neighbor technique is hired for generating long term forecasts in a case of

availability long data samples with periodical patterns. All the techniques are implemented in adaptive versions what makes the system more flexible for newly coming data and capable to fight some types of possible uncertainties mentioned above. During the process of model structure estimation an appropriate principal component analysis technique is applied when necessary.

BAYESIAN NETWORK ADAPTATION

Bayesian networks (BN) create one of the powerful modern probabilistic instruments for solving the problems of mathematical modeling, forecasting, classification, control and decision support [23–26]. To estimate BN model structure the algorithms are used on the basis of statistical data that characterize evolution of the network variables. It is possible to develop and use the algorithms that allow for adaptation of the network structure to the new data coming in real time. This is a choice used in the DSS with adaptation features.

The adaptation procedure could be explained using the following notation: $Z = \{X_1, \dots, X_n\}$ is a set of BN model nodes that is determined by the number of variables hired to construct appropriate directed graph; $E = \{(X_i, X_j) | X_i, X_j \in Z\}$ is a set of BN arcs; X_i is a BN node that corresponds to the observations of one variable; $n = |Z|$ is a total number of BN nodes; r_i is a number of values that could be accepted by the node X_i ; v_{ik} is the k -th value of variable X_i ; Π_i is the set of parent nodes for the variable X_i ; φ is the set of possible initializations Π_i for the node X_i ; $q_i = |\varphi_i|$ is the number of possible initializations Π_i ; φ_{ij} is j -th initialization for the set of parent nodes Π_i for X_i ; B_S is structure of BN; B_P is probabilistic specification of BN, i.e. the part of BN description that represents its probabilistic characteristics, $\theta_{ijk} = p(X_i = v_{ik} | \varphi_{ij}, B_P)$ under condition that the sum of the probabilities $\sum_k \theta_{ijk} = 1$; $f(\theta_{ij1}, \dots, \theta_{ijr_i})$ is the probability density for the node X_i and initialization φ_{ij} ; D_0 is database; S_0 is preliminary estimate of BN structure computed on the basis of available data D_0 ; D_1 is database of observations that were not used for estimating preliminary structure S_0 ; S_1 is BN structure found after S_0 adaptation to the new data D_1 . The problem is to construct algorithm for adaptation of initial Bayesian network $G = \langle Z, E \rangle$ having the structure, S_0 , to the new observations D_1 .

This way a new (or modified) model structure will be formed: $S_1 \Leftrightarrow D_1$. The statistical data used could exhibit arbitrary probability distribution, and the processes described by the data could be of nonlinear non-stationary nature i.e. their mathematical expectation $E[X_i] \neq \text{const}$ and variance, $E\{X_i - E[X_i]\}^2 \neq \text{const}$.

Adaptation of the BN to new data is implemented in the following way:

- implementation of the procedure for refining the model structure: here the model arcs can be eliminated or added;

- correcting the probabilistic part of the model (conditional probability tables or CPTs).

At the initial stage of learning BN the probabilistic part of the model is represented in the form of CPTs that are computed on the basis of the frequency analysis of available statistical data. Consider the procedure of correcting this probabilistic part of the model. For this purpose it is more convenient to save (and use) the values of N_{ijk} instead of the CPTs themselves, where N_{ijk} is a number of values corresponding to the, θ_{ijk} . This way it is possible to perform renewing the data faster regarding conditional distributions and the values themselves could be computed using the Dirichlet expression:

$$p(X_i = v_{ik} | \Pi_i = \varphi_{ij}) = \frac{N_{ijk} + 1}{N_{ij} + r_i}.$$

When correcting the BN structure the order of the nodes analysis will be determined by the value that each node provides for the following conditional probability [27]:

$$p(D_1 | D_0, S_0) = \prod_{i=1}^n \frac{\prod_{s=1}^{R_i} \prod_{t=1}^{Q_i} \prod_{u=1}^{m_{its}} (N_{its} + u)}{\prod_{t=1}^{Q_i} \prod_{u=1}^{M_{it}} (N_{it} + r_i - 1 + u)}.$$

An informational importance of the model arcs is performed as follows. To determine the necessity of deleting a node the following value is computed: $K_{\text{delete}}(S_0)$ for the current configuration of the parent nodes set. Also the value of $K_{\text{delete}}(S_{-1}^m)$ is computed for the directed graph configurations that represent the result of deleting one of M ($1 \leq m \leq M$) input arcs for the current node. Under condition $K_{\text{delete}}(S_{-1}^m) \leq K_{\text{delete}}(S_0)$ the m -th arc continues to belong to the model structure because its elimination results in decreasing of the local quality functional (i.e. for the current node). Otherwise the arc is registered in the list of arcs that should be tested further on for elimination. The further testing is based upon computing the value of the local functional for initially set configuration (structure) and for the configurations that result from eliminating of one of the arcs that still are left in the list.

As far as BN model constructing strategy is based upon the general functional

$$P(S_1 | D_1, D_0, S_0) = \arg \max_S \frac{P(S | D_0) P(D_1 | S, D_0)}{P(D_1 | S_0, D_0)},$$

the arcs elimination and adding procedure is of optimization type and is performed in the following way. The arc elimination should result in decreasing the value of the first member in the nominator, $P(S | D_0)$, because it reaches maximum with $S = S_0$ when initial structure S_0 is formed. Generally, to get a positive effect of adaptation it is necessary to compensate the loss due to arc elimination by the effect of adding new arc. That is why the search for the arc to be added to the graph is performed as mentioned above. Estimation of effect due to adding the arc is also based on the local quality functional, its value should increase [27, 28].

EXAMPLES OF THE DSS APPLICATION

Example 1. Numerous examples of model constructing and forecasting have been solved with the DSS developed. In this example bank client's solvency is analyzed, i.e. application scoring is estimated. The database used consisted of 4700 records that were divided into learning sample (4300 records), and test sample (400 records). The default probabilities were computed and compared to actual data, and also errors of the first and second type were computed using various levels of cut-off value. It was established that maximum model accuracy reached for Bayesian network was 0,787 with the cut-off value 0,3. The Bayesian network is "inclined to over insurance", i.e. it rejects more often the clients who could return the credit. The model accuracy and the errors of type I and type II depend on the cut-off level selected. The cut-off value determines the lowest probability limit for client's solvency, i.e. below this limit a client is considered as such that will not return the credit. Or the cut-off value determines the lowest probability limit for client's default, i.e. below this limit a client is considered as such that will return the credit. As far as the cut-off value of 0,1 or 0,2 is considered as not important, in practice it is reasonable to set the cut-off value at the level of about 0,25–0,30. Statistical characteristics characterizing quality of the models constructed are given in Table 1.

Table 1. Adequacy of the models constructed

Model type	Gini index	AUC	Common accuracy	Model quality
Bayesian network	0,719	0,864	0,787 (0,806)	Very high
Logistic regression	0,685	0,858	0,813 (0,828)	Very high
Decision tree	0,597	0,798	0,775	Acceptable
Linear regression	0,396	0,657	0,631 (0,639)	Unacceptable

Thus, the best models for estimation of probability for credit return are logistic regression and Bayesian network. The best common accuracy showed logistic regression, 0,813, though Bayesian network exhibited higher Gini index, 0,719 (the values in parenthesis show improvement due to application of adaptive mode of modeling). The decision tree model is characterized by Gini index of about 0,597, and $CA = 0,775$. It should be stressed that acceptable values of Gini index for developing countries like Ukraine are located usually in the range between 0,4–0,6. The Bayesian network constructed and nonlinear regression showed high values of Gini index that are acceptable for the Ukrainian economy in transition.

Example 2. In this case the following four types of scoring were studied:

- *application scoring* that is based on the data given by clients during the process of analyzing the possibility for providing them with a loan;
- *behavioral scoring* or scoring analysis within the period of loan usage; this study was directed to monitoring of a loan keeper account state, in this case we estimated the probability of timely return of the loan by clients, optimal loan limit for the loans etc.;
- *strategic scoring* that is directed towards determining the strategy regarding non-reliable loan keepers violating the rules established;
- *fraud scoring* the purpose of which is to determine the probability of potential fraud on behalf of clients.

The database used in this case consisted of 96000 records with 30 tokens for each client. Some results of computational experiments are presented in Table 2.

Table 2. Results of computational experiments for application and behavior scoring

Model used	Application scoring			Behavior scoring		
	Mean AUC	Common accuracy	Learning time	Mean AUC	Common accuracy	Learning time
Logistic regression	0,917	0,873	3,47	0,905	0,854 (0,876)	2,66
Bayesian network	0,922	0,862	2,98	0,913	0,851 (0,864)	2,86
Gradient boosting	0,974	0,925	148,64	0,971	0,911 (0,929)	150,78

The table contains common accuracy values for the computational experiments without adaptation and with adaptation in parenthesis. The adaptation mode has always generated better results than the mode without adaptation feature. For the purpose of simulating adaptation mode the data were divided into parts of equal size (3000 records in each part) and then after model constructing and usage the new data portion was fed into model constructing algorithm.

To analyze strategic scoring the subset of data was used that characterizes annual income of active clients and their total expenditures according to their credit cards within a year. The purpose of the study is to divide clients into clusters and to apply a unique management strategy to each cluster using K -means technique. The basic parameter for using K -means clustering technique is a number of clusters K . The parameter is estimated using the concept of minimizing sum of squares criterion within a cluster (WCSS). It was established that six clusters provide for an acceptable clustering of the clients:

- $K1$: an average income and low expenses;
- $K2$: low income and low expenses;
- $K3$: high income and high expenses;
- $K4$: low income and high expenses;
- $K5$: an average income and high expenses;
- $K6$: very high income and high expenses.

The fraud analysis was performed with the highly unbalanced data: 187 operations out of the total number of operations 86754 were classified as the fraud. The positive class of the data (fraud) included 0,215% of all the operations performed. The Bayesian network constructed on the data showed $AUC = 0,863$. After the data was corrected with expanding the smaller class of data (oversampling approach) the result of classification was improved to the following: $AUC = 0,896$. Finally a combined approach was applied to solving the problem that supposes application of oversampling, elimination of “noise” from the observations, and gradual improvement of balance between the classes to about 40 : 60 and 50 : 50. The result of classification was improved to the $AUC = 0,928$, and in adaptation mode to the value of about $AUC = 0,935$.

Example 3. As an example of methodology application a time series was studied, the values of which were gold prices within the period between the years

2005–2006 (sample contains 504 values). The statistical characteristics showing constructed models and forecasts quality are given in Table 3. Here the case is considered when adaptive Kalman filter was not used for preliminary data processing smoothing.

Table 3. Models and forecasts quality without adaptive Kalman filter application

Model type	Model quality			Forecast quality			
	R^2	$\sum e^2(k)$	DW	MSE	MAE	MAPE	Theil
AR(1)	0,99	25644,67	2,15	49,82	41,356	8,37	0,046
AR(1,4)	0,99	25588,10	2,18	49,14	40,355	8,12	0,046
AR(1) + 1st order trend	0,99	25391,39	2,13	34,39	25,109	4,55	0,032
AP(1,4) + 1st order trend	0,99	25332,93	2,18	34,51	25,623	4,67	0,032
AR(1) + 4th order trend	0,99	25173,74	2,12	25,92	17,686	3,19	0,024

Thus, the best model turned out to be AR(1) + trend of 4th order. It provides a possibility for one step ahead forecasting with mean absolute percentage error of about 3,19%, and Theil coefficient is $U = 0,024$. The Theil coefficient shows that this model is generally good for short-term forecasting. Statistical characteristics of the models and respective forecasts computed with adaptive Kalman filter application for data smoothing are given in Table 4. Here optimal filter played positive role what is supported by respective statistical quality parameters.

Table 4. Models and forecasts quality with application of adaptive Kalman filter

Model type	Model quality			Forecast quality			
	R^2	$\sum e^2(k)$	DW	MSE	MAE	MAPE	Theil
AR(1)	0,99	24376,32	2,11	45,21	39,73	7,58	0,037
AR(1,4)	0,99	24141,17	2,09	47,29	38,75	7,06	0,035
AR(1) + 1 st order trend	0,99	23964,73	2,08	31,15	22,11	3,27	0,029
AR(1) + 4 th order trend	0,99	22396,83	2,04	21,35	13,52	2,71	0,019

Again the best model turned out to be AR(1) + trend of 4th order. It provides a possibility for one step ahead forecasting with mean absolute percentage error of about 2,71%, and Theil coefficient is: $U = 0,019$. Thus, in this case the results achieved are better than in previous modeling and short-term forecasting without filter application.

Example 4. Statistical analysis of the time series selected with application of Goldfeld-Quandt test proved that gold prices data create heteroscedastic process with time varying conditional variance. As far as the variance is one of the key parameters that is used in the rules for performing trading operations it is necessary to construct appropriate forecasting models. Table 5 contains statistical charac-

teristics of the models constructed as well as quality of short-term variance forecasting. To solve the problem we used generalized autoregressive conditionally heteroscedastic (GARCH) models together with description of the processes trend which is rather sophisticated (high order process). The models of this type (GARCH) demonstrated low quality of short-term forecasts, and quite acceptable (EGARCH) one-step ahead forecasting properties. The values of MAPE (adapt.) given in the 6th column for the mode of operation with adaptation show improvement of short term forecasting for conditional variance when modeling system operated in the mode with model adaptation.

Table 5. Results of modeling and forecasting conditional variance

Model type	Model quality			Forecast quality			
	R^2	$\sum e^2(k)$	DW	MSE	MAPE (adapt.)	MAPE	Theil
GARCH(1,7)	0,99	153639	0,113	972,5	515,3	517,6	0,113
GARCH (1,10)	0,99	102139	0,174	458,7	208,2	211,3	0,081
GARCH (1,15)	0,99	80419	0,337	418,3	118,7	121,6	0,058
EGARCH (1,7)	0,99	45184	0,429	67,8	7.85	8,74	0,023

Thus, the best model constructed was exponential GARCH(1,7). The achieved value of MAPE = 8,74% (and 7,85% in adaptation mode) comprises very good result for forecasting conditional variance. Further improvements of the forecasts were achieved with application of the adaptation scheme proposed. An average improvement of the forecasts was in the range between 0,8–1,5%, what justifies advantages of the approach proposed. Combination of the forecasts generated with different forecasting techniques helped to further decrease mean absolute percentage forecasting error for about 0,5–0,8% in this particular case. It should be stressed that analysis of heteroscedastic processes is very popular today due to multiple engineering, economic and financial applications of the models and forecasts based upon them.

DISCUSSION

The results of computational experiments achieved lead to the conclusion that today the family of scoring models used including logistic regression, Bayesian networks and gradient boosting belong to the family of the best current instruments for banking system due to the fact they provide a possibility for detecting “bad” clients and to reduce financial risks caused by the clients. It also should be stressed that DSS developed creates very useful instrument for a decision maker that helps to perform quality processing of client’s statistical data using various techniques, generate alternatives and to select the best one relying upon a set of appropriate statistical criteria. An important role in the computational experiments performed played the possibility of model adaptation to available and new data. The adaptation mode has always generated better results than the mode without this adaptation feature. The extra model variables can be created by combining available statistical data, and nonlinearities can be introduced into a model by inserting appropriate polynomial members. The system proposed performs tracking of the whole computational process using separate sets of statistical quality criteria at each stage (each level of the system hierarchy) of decision making: quality

of data, adequacy of models constructed and quality of the forecasts (or risk estimates).

Thus, the systemic approach to modeling and forecasting proposed is definitely helpful for constructing the DSS possessing the features of directed search for the best forecasting model in respective spaces of model structures and parameters, and consequently to enhance its adequacy. The computational experiments with actual data showed high usefulness of the systemic approach to modeling and forecasting. It is necessary to perform its further refinement in the future studies and applications. And it is also important to improve formal descriptions for the uncertainties mentioned and to use them for reducing the degree of uncertainty in model building procedures and forecast estimation. It was found that influence of statistical and probabilistic uncertainties can be reduced substantially by making use of respective data filtering techniques, imputation of missing values, orthogonal transforms, and the models of probabilistic type; first of all those are Bayesian programming models and techniques.

CONCLUSIONS

The systemic methodology was proposed for constructing decision support system for adaptive mathematical modeling and forecasting modern economic and financial processes as well as for credit risk estimation that is based on the following system analysis principles: hierarchical system structure, taking into consideration probabilistic and statistical uncertainties, availability of model adaptation procedures, generating multiple decision alternatives, and tracking of computational processes at all the stages of data processing with appropriate sets of statistical quality criteria (known or newly introduced).

The system developed has a modular architecture that provides a possibility for easy extension of its functional possibilities with new parameter estimation techniques, forecasting methods, financial risk estimation, and generation of decision alternatives. High quality of the final result is achieved thanks to appropriate tracking of the computational processes at all data processing stages: preliminary data processing, model structure and parameter estimation, computing of short- and middle-term forecasts, and estimation of risk variables/parameters. The system is based on the ideologically different methods of dynamic processes modeling and risk forecasting (regression analysis and probabilistic approach) what creates appropriate basis for hiring various approaches to achieve the best results. The illustrative examples of the system application show that it can be used successfully for solving practical problems of forecasting dynamic processes evolution and risk estimation. The results of computational experiments lead to the conclusion that today scoring models, nonlinear regression and Bayesian networks are the best instruments for banking system due to the fact that they provide a possibility for detecting “bad” clients and to reduce financial risks caused by the clients. It also should be stressed that the DSS constructed turned out to be very useful instrument for a decision maker that helps to perform quality processing of statistical data using ideologically different techniques, appropriate sets of statistical quality criteria, generate alternatives and select the best one. The DSS can be used for supporting decision making process in various areas of human activities including development of strategy for banking system regarding risk management and industrial enterprises, investment companies etc.

Further extension of the system functions is planned with new forecasting and decision making techniques based on probabilistic methodology, fuzzy sets and other artificial intelligence methods. An appropriate attention should also be paid to constructing user friendly adaptive interface based on the human factors principles.

REFERENCES

1. *Jao C.S.* Efficient decision support systems – practice and challenges from current to future / C.S. Jao. — Rijeka (Croatia): Intech, 2011. — 556 p.
2. *Fernandez G.* Data mining using SAS applications / G. Fernandez. — New York: CRC Press LLC, 2003. — 360 p.
3. *Dovgyj S.O.* DSS on the basis of statistical and probabilistic methods / S.O. Dovgyj, P.I. Bidyuk, O.M. Trofymchuk. — Kyiv: Logos, 2014. — 419 p.
4. *Zgurowskii M.Z.* System analysis: problems, methodology, applications / M.Z. Zgurowskii, N.D. Pankratova. — Kyiv: Naukova Dumka, 2005. — 745 p.
5. *Harris C.* Adaptive modeling, estimation and fusion from data / C. Harris, X. Hong, Q. Gan. — Berlin: Springer, 2002. — 322 p.
6. *Harvey A.C.* Forecasting, structural time series models and the Kalman filter / A.C. Harvey. — Cambridge: The MIT Press, 1990. — 554 p.
7. *Rasmussen C.E.* Gaussian processes for machine learning / C.E. Rasmussen, C.K.I. Williams. — Cambridge (Massachusetts), The MIT Press, 2006. — 248 p.
8. *Bidyuk P.I.* Time series analysis / P.I. Bidyuk, V.D. Romanenko, O.L. Tymoshchuk. — Kyiv: Polytechnika, NTUU «KPI», 2013. — 600 p.
9. *Almeida E.* Adaptive model rules from data streams / E. Almeida, C. Ferreira, J. Gama // Machine Learning and Knowledge Discovery in Data bases. ECML PKDD-2013. Lecture Notes in Computer Science. — Springer, Berlin. — Vol. 8188. — P. 480–492.
10. *Succarat G.* Automated model selection in finance: general-to-specific modeling of the mean, variance and density / G. Succarat, A. Escribano // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. — 2012. — Vol. 74, Issue 5. — P. 716–735.
11. *Pretis F.* Automated general-to-specific (GETS) regression modeling and indicator saturation for outliers and structural breaks / F. Pretis, J.J. Reade, G. Succarat // Journal of Statistical Software. — 2018. — Vol. 86, Issue 3. — P. 1–44.
12. *Quintana R.* Adaptive exponential smoothing versus conventional approaches for lumpy demand forecasting: case of production planning for a manufacturing line / R. Quintana, M.T. Leung // International Journal of Production Research. — 2007. — Vol. 45, Issue 21. — P. 4937–4957.
13. *Giraitis L.* Adaptive forecasting in the presence of recent and ongoing structural change / L. Giraitis, G. Kapetanis, S. Price // Journal of Econometrics. — 2013. — Vol. 177, Issue 2. — P. 153–170.
14. *Pesaran M.H.* Optimal forecasts in the presence of structural breaks / M.H. Pesaran, A. Pick, M. Pranovich // Journal of Econometrics. — 2013. — Vol. 177, Issue 2. — P. 134–152.
15. *Watsham T.J.* Quantitative Methods in Finance / T.J. Watsham, K. Parramore. — London: International Thomson Business Press, 1997. — 395 p.
16. *Xekalaki E.* ARCH Models for Financial Applications / E. Xekalaki, S. Degiannakis. — New York: John Wiley & Sons, Ltd, Publication, 2010. — 535 p.
17. *Gibbs B.P.* Advanced Kalman filtering, least squares and modeling / B.P. Gibbs. — Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011. — 627 p.
18. *Haykin S.* Adaptive filter theory / S. Haykin. — Upper Saddle River (New Jersey): Prentice Hall, 2002. — 922 p.

19. 19. *Gilks W.R.* Markov Chain Monte Carlo in practice / W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter. — New York: CRC Press LLC, 2000. — 486 p.
20. *Zgurowskii M.Z.* System analysis: problems, methodology, applications / M.Z. Zgurowskii, N.D. Pankratova. — Kyiv: Naukova Dumka, 2005. — 743 p.
21. *Anfilatov V.S.* System analysis in control engineering / V.S. Anfilatov, A.A. Emelyanov, A.A. Kukushkin. — Moscow: Finansy i Statistika, 2002. — 368 p.
22. *Zgurowskii M.Z.* Analytical technics of Kalman filtering / M.Z. Zgurowskii, V.N. Podladchikov. — Kyiv: Naukova Dumka, 1995. — 285 p.
23. *Cowell R.G.* Probabilistic networks and expert systems / R.G. Cowell, A.Ph. Dawid, S.L. Lauritzen, D.J. Spiegelhalter. — Berlin: Springer, 1999. — 321 p.
24. *Jensen F.V.* Bayesian networks and decision graphs / F.V. Jensen, Th.D. Nielsen. — Berlin: Springer, 2007. — 427 p.
25. *Koski T.* Bayesian networks / T. Koski, J.M. Noble. — New York: John Wiley and Sons, Ltd., Publication, 2009. — 347 p.
26. *Zgurowskii M.Z.* Methods of constructing Bayesian networks based on scoring functions / M.Z. Zgurowskii, P.I. Bidyuk, O.M. Terentyev // Cybernetics and System Analysis. — 2008. — Vol. 44, N 2. — P. 219–224.
27. *Ng B.M.* Adaptive dynamic Bayesian networks / B.M. Ng. // Joint Statistical Meetings. — 2007. — 9 p.
28. *Corriveau G.* Bayesian network as an adaptive parameter setting approach for genetic algorithms / G. Corriveau, R. Guilbault, R. Tahan, R. Sabourin // Complex Intelligent Systems. — 2016. — N 1. — P. 1–23.

Received 04.12.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

NUMERICAL SIMULATION OF GRAVITATIONAL WAVES FROM A BLACK HOLE, USING CURVATURE TENSORS

Y. MATSUKI, P.I. BIDYUK

Abstract. In this research we formulated the curvature tensors with the system of spherical polar coordinates, which describe the gravitational field and gravitational waves of a black hole; and then we calculated eigenvalues of the curvature tensors to estimate the relative strengths of their components to the stress-energy tensor in Einstein's field equation. For this simulation, we assumed that the time and the distance interact with each other if we travel from Earth to the inside of the black hole, and then the result of the simulation showed that the gravitational waves carry the same components of the gravitational field of the black hole. On the other hand, when we assumed that the time and the distance are independent, which resembles the situation outside of the boundary of the black hole toward Earth, the curvature tensors are different between those of the gravitational field and the gravitational waves. Upon the results of the simulation we conclude that the gravitational waves that come from the inside of the black hole carry the information of the gravitational field inside of the black hole, if we assume that time and space are dependent each other.

Keywords: Gravitational field, gravitational waves, curvature tensor, black hole, spherical polar coordinates.

INTRODUCTION (Theory)

Curvature tensors of gravitational field and gravitational waves of a black hole

According to Einstein and Dirac [1], the gravitational field of a black hole is described by the curvature tensors:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta},$$

where $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\alpha} \Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} (g_{\alpha\mu, \nu} + g_{\alpha\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \alpha})$, and $g^{\mu\nu}$ are the fundamental tensors that describe the curvature of the 4-dimensional space.

Outside of black hole

Gravitational field outside of a black hole. According to Dirac [1], the fundamental tensors, $g^{\mu\nu}$, of gravitational field outside of a black hole in spherical polar coordinates are as follows:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

where $2m$ is a constant, and m is assumed to be the mass of a black hole; and $g^{\mu\nu}$ are functions of a network of curvilinear coordinates, which provide a geodesic, $ds^2 = g^{00}dt^2 + g^{11}dr^2 + g^{22}d\theta^2 + g^{33}d\varphi^2$, outside of the black hole. And then, the curvature tensors $R_{\mu\nu}$ of gravitational field outside of a black hole in spherical polar coordinates are described as follows:

$$R_{00} = \left(-v'' + \lambda'v' - v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) e^{2\nu-2\lambda}, \quad R_{11} = v'' - \lambda'v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r},$$

$$R_{22} = (1 + rv' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1; \quad R_{33} = \{(1 + rv' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1\} \sin^2 \theta, \quad (1)$$

while the rest of $R_{\mu\nu}$ are all zero. Here, ν and λ are functions of r , and

$$v' = \frac{dv}{dr}, \quad v'' = \frac{d^2v}{dr^2}, \quad \text{and} \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dr}.$$

Gravitational waves outside of a black hole. The gravitational waves in curvature tensors are described by the equations:

$$g^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma,\mu\nu} + g^{\mu\nu}_{,\sigma} (g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}) + g^{\mu\nu}_{,\rho} (g_{\sigma\mu,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\rho\mu}g_{\beta\beta}g_{\rho\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta\sigma} + \frac{1}{2}g^{\rho\mu}g_{\beta\beta}g_{\rho\mu,\beta\sigma}g_{\nu\mu,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\rho\mu}_{,\sigma}g_{\beta\beta}g_{\rho\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta} + \frac{1}{2}g^{\rho\mu}g_{\beta\beta,\sigma}g_{\rho\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}g_{\beta\beta}g_{\sigma\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta\rho} + \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}g_{\beta\beta}g_{\sigma\mu,\beta\rho}g_{\nu\mu,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}_{,\rho}g_{\beta\beta}g_{\sigma\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta} + \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}g_{\beta\beta,\rho}g_{\sigma\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta}.$$

Note. In Dirac's original article [1], only the first term, $g^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma,\mu\nu}$, is discussed, but here in our article we also consider those terms from the second to the 12th, which were neglected in [1].

If $\beta = \rho$, $g^{\rho\mu}g_{\beta\beta}g_{\rho\mu,\beta}g_{\nu\mu,\beta\sigma} = g^{\rho\mu}g_{\rho\rho}g_{\rho\mu,\rho}g_{\nu\mu,\rho\sigma}$; $g^{\rho\mu}g_{\rho\rho} = g^{\mu}_{\rho} = 1$ if $\mu = \rho$; $g^{\rho\mu}g_{\rho\rho} = g^{\mu}_{\rho} = 0$ if $\mu \neq \rho$; $g^{\rho\mu}_{,\sigma}g_{\beta\beta} \neq 0$ if $\mu = \rho = \beta$; otherwise, $g^{\rho\mu}_{,\sigma}g_{\beta\beta} = 0$; and $g^{\rho\mu}g_{\beta\beta,\sigma} \neq 0$ if $\mu = \rho = \beta$; otherwise, $g^{\rho\mu}g_{\beta\beta,\sigma} = 0$. Therefore, many terms become zero, and only the following terms remain:

$$g^{00}g_{00,11} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \right\}_{,rr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left\{ -2m \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \left(\frac{2m}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{4m}{r^3}; \\
 g^{11}g_{11,11} &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left\{ -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \right\}_{,rr} = \frac{-4m}{r^2(r-2m)}; \\
 g^{22}g_{22,11} &= (-r^2)(-r^2)_{,rr} = -r^2(-2r^{-3})_{,r} = 6r^2r^{-4} = \frac{6}{r^2}; \\
 g^{33}g_{33,11} &= (-r^2 \sin^2 \theta)(-r^{-2} \sin^{-2} \theta)_{,rr} = \\
 &= -r^2 \sin^2 \theta (-2r^{-3})_{,r} \sin^{-2} \theta = 6r^2r^{-4} = \frac{6}{r^2}; \\
 g^{33}g_{33,22} &= (-r^2 \sin^2 \theta)(-r^{-2} \sin^{-2} \theta)_{,\theta\theta} = (-r^2 \sin^2 \theta)(2r^{-2} \sin^{-3} \theta \cos \theta)_{,\theta} = \\
 &= -2\sin^2 \theta(3\cos \theta - 1); \\
 g_{,1}^{11}(g_{11,1} - \frac{1}{2}g_{11,1}) + g_{,1}^{11}(g_{11,1} - \frac{1}{2}g_{11,1}) &= \frac{-4m}{r^4 - 4r^3m + 4r^2m^2}; \\
 \frac{1}{2}g^{11}g_{11}g_{11,1}g_{11,1} + \frac{1}{2}g^{11}g_{11}g_{11,1}g_{11,1} &= \frac{-8m^2}{r^3}; \\
 \frac{1}{2}g_{,1}^{11}g_{11}g_{11,1}g_{11,1} + \frac{1}{2}g_{,1}^{11}g_{11}g_{11,1}g_{11,1} &= \frac{2mr - 4m^2}{r^3}; \\
 \frac{1}{2}g^{11}g_{11,1}g_{11,1}g_{11,1} + \frac{1}{2}g^{11}g_{11,1}g_{11,1}g_{11,1} &= \frac{8m^3}{r^5(r-2m)}, \tag{2}
 \end{aligned}$$

where $(*)_{,r} = \frac{\partial(*)}{\partial r}$ and $(*)_{,rr} = \frac{\partial^2(*)}{\partial r^2}$; and, $(*)$ is any given function.

Penetrating the boundary of a black hole

As shown in the equation (1), there is a singularity at $r = 2m$ in one of the curvature tensors, R_{11} , which means the presence of the boundary of a black hole, and we cannot see the inside, where $r < 2m$, from the outside, where $r > 2m$. In order to look inside of the black hole, Dirac [1] invented different coordinate system, assuming that the time and space are dependent, by $\tau = t + f(r)$; and, $\rho = t + g(r)$, where t is time, and r is distance. The steps given below show how Dirac [1] described the system of coordinates that extends to the inside of a black hole.

At first, the geodesic in the spherical polar coordinates is defined as follows: $ds^2 = g^{00}dt^2 + g^{11}dr^2 + g^{22}d\theta^2 + g^{33}d\varphi^2$; but, if t and r are dependent on each other, the first two terms, about time and distance, change to the following:

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 &= d\tau^2 - \frac{2m}{r} d\rho^2 = (dt + f' dr)^2 - \frac{2m}{r} (dt + g' dr)^2 = \\
 &= dt^2 + 2f' dt dr + f'^2 dr^2 - \frac{2m}{r} (dt^2 + 2g' dt dr + g'^2 dr^2) = \\
 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + 2\left(f' - \frac{2m}{r} g'\right) dt dr + \left(f'^2 - \frac{2m}{r} g'^2\right) dr^2,
 \end{aligned}$$

where $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$ and $g' = \frac{\partial g}{\partial r}$.

The necessary conditions for satisfying $\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = d\tau^2 - \frac{2m}{r} d\rho^2$ are:

$$2\left(f' - \frac{2m}{r} g'\right) dt dr = 0, \quad f' = \frac{2m}{r} g' \quad \text{and} \quad \frac{2m}{r} g'^2 - f'^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}.$$

And then, $\frac{2m}{r} g'^2 - \left(\frac{2m}{r} g'\right)^2 = g'^2 \frac{2m}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$; then

$$g'^2 = \frac{r}{2m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2}, \quad \text{and then} \quad g' = \left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}.$$

Now, assume that $r = y^2$ and, $2m = a^2$. If $r > 2m$, $y^2 > a^2$, then $y > a$:

$$\frac{dg}{dr} = g' = \left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-1} = \left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^2 - a^2}{y^2}\right)^{-1} = \frac{y^2}{y^2 - a^2} \sqrt{\frac{y^2}{a^2}} = \frac{y^2}{y^2 - a^2} \frac{y}{a};$$

$$y^2 = r, \quad \text{so,} \quad \frac{dg}{dy} = \frac{dg}{dr} \frac{dr}{dy} = 2y \frac{dg}{dr} = 2y \frac{y^3}{a} \frac{1}{(y^2 - a^2)} = \frac{2y^4}{a} \frac{1}{y^2 - a^2}.$$

Then,

$$g = \int \frac{2y^4}{a} \cdot \frac{1}{(y+a)(y-a)} dy = \int g' \frac{dr}{dy} dy = \int g' 2y dy;$$

$$g = \frac{2}{3a} y^3 + 2ay - a^2 \log\left(\frac{y+a}{y-a}\right);$$

$$g' - f' = g' - \frac{2m}{r} g' = g' \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2m}} r^{(3/2)} = g - f = \rho - \tau.$$

$$\text{Thus, } r = \mu(\rho - \tau)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{where } \mu = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2m}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{and } r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2m}\right)^{\frac{2}{3}} (\rho - \tau)^{\frac{2}{3}},$$

$$r^{3/2} = (\rho - \tau)\sqrt{2m}\frac{3}{2}, \text{ and } r = \left\{ \frac{3}{2}\sqrt{2m}(\rho - \tau) \right\}^{2/3}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g^{00} dt^2 + g^{11} dr^2 + g^{22} d\theta^2 + g^{33} d\phi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = \\ &= d\tau^2 - \frac{2m}{\mu(\rho - \tau)^{2/3}} d\rho^2 - \mu^2(\rho - \tau)^{3/4} d\theta^2 - \mu^2(\rho - \tau)^{4/3} \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned}$$

Therefore, the fundamental tensors $g^{\zeta\eta}$ of gravitational field, which penetrate the boundary of a black hole in spherical polar coordinates, are:

$$\begin{aligned} g^{\zeta\eta} &= \begin{bmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2m}{\mu(\rho - \tau)^{2/3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2(\rho - \tau)^{4/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu^2(\rho - \tau)^{4/3} \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

where $g^{\zeta\eta}$ provide functions of a geodesic, $ds^2 = g^{00} dt^2 + g^{11} dr^2 + g^{22} d\theta^2 + g^{33} d\phi^2$, which penetrates the boundary of the black hole.

THE CURVATURE TENSORS FOR NUMERICAL SIMULATION

Table 1 and Table 2 show the curvature tensors of gravitational field and gravitational waves, which we made for our numerical simulation. These tensors don't have the mathematical singularity; therefore we can simulate the inside of the black hole.

The curvature tensors of gravitational field are:

$$R_{\zeta\eta} = \Gamma_{\zeta\alpha,\eta}^\alpha - \Gamma_{\zeta\eta,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\zeta\eta}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\zeta\beta}^\alpha \Gamma_{\eta\alpha}^\beta.$$

In our simulation, we included the component of, $-\Gamma_{\zeta\eta}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\zeta\beta}^\alpha \Gamma_{\eta\alpha}^\beta$, which Dirac [1] neglected.

For example, for $\zeta = \eta = 0$, $\alpha = 2$ and $\beta = 1$ we have:

$$R_{00} = \Gamma_{02,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 - \Gamma_{00}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{01}^2 \Gamma_{02}^1 =$$

$$= g^{22}\Gamma_{202,0} - g^{22}\Gamma_{200,2} - g^{22}\Gamma_{200}g^{11}\Gamma_{121} + g^{22}\Gamma_{201}g^{11}\Gamma_{102} =$$

$$= \frac{1}{2}\{-\mu^2(\rho - \tau)^{4/3}\}\left\{-\frac{4}{3}(-1)(\rho - \tau)^{(-7/3)}\right\}_{,\tau} = \left\{\frac{-2}{3(\rho - \tau)}\right\}_{,\tau} = \frac{2}{3(\rho - \tau)^2},$$

where $\{*\}_{,\tau} = \frac{\partial\{*\}}{\partial\tau}$ and $\{*\}_{,\tau\tau} = \frac{\partial^2\{*\}}{\partial\tau^2}$, and $\{*\}$ is any given function.

Table 1. Curvature tensors of gravitational field, which extends beyond the boundary of a black hole

Parameter	R_{00}	$R_{01} = R_{10}$	R_{11}	R_{22}	R_{33}
$\alpha = 0, \beta = 0$	0	0	$\frac{-\mu}{6m(\rho - \tau)^{4/3}}$	$\frac{14}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3}}$	$\frac{-14}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$
$\beta = 1$	0	0	$\frac{\mu}{6m(\rho - \tau)^{4/3}}$	$\frac{4}{3\mu^2(\rho - \tau)^{10/3}}$	$\frac{-4}{3\mu^2(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$
$\beta = 2$	0	0	$\frac{5\mu}{18m(\rho - \tau)^{4/3}}$	$\frac{22}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3}}$	$\frac{-2}{\mu^2(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$
$\beta = 3$	0	0	$\frac{5\mu}{18m(\rho - \tau)^{4/3}}$	$\frac{2}{\mu^2(\rho - \tau)^{10/3}}$	$\frac{-14}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$
$\alpha = 1, \beta = 0$	$\frac{-1}{3(\rho - \tau)^2}$	0	$\frac{\mu}{18m(\rho - \tau)^{4/3}}$	$\frac{4m}{\mu^2(\rho - \tau)^4}$	$\frac{4m}{\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$
$\beta = 1$	$\frac{-2}{9(\rho - \tau)^2}$	0	0	$\frac{32m}{9\mu^2(\rho - \tau)^4}$	$\frac{32m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$
$\beta = 2$	$\frac{-1}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{4m}{\mu^2(\rho - \tau)^4}$	$\frac{44m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$
$\beta = 3$	$\frac{-1}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{44m}{9\mu^2(\rho - \tau)^4}$	$\frac{4m}{\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$
$\alpha = 2, \beta = 0$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{4}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3}}$	$\frac{1 + 3 \cot^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
$\beta = 1$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-8m}{9\mu^2(\rho - \tau)^4}$	$\frac{1 + 3 \cot^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
$\beta = 2$	$\frac{10}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-10}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{10}{9(\rho - \tau)^2}$	0	$\frac{1 + 3 \cot^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
$\beta = 3$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	0	$\frac{1 + 3 \cot^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
$\alpha = 3, \beta = 0$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{1}{\sin^2 \theta}$	$\frac{4}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$

Continued Tabl. 1

Parameter	R_{00}	$R_{01} = R_{10}$	R_{11}	R_{22}	R_{33}
$\beta = 1$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{1}{\sin^2 \theta}$	$\frac{-8m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$
$\beta = 2$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{2}{3(\rho - \tau)^2}$	$\frac{1}{\sin^2 \theta}$	$-\frac{\cot^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
$\beta = 3$	$\frac{10}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{-10}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{10}{9(\rho - \tau)^2}$	$\frac{1}{\sin^2 \theta} + \cot^2 \theta$	0

For $R_{02} = R_{20}$, only $-\Gamma_{02}^2 \Gamma_{23}^3 = \frac{2 \cot \theta}{3(\rho - \tau)}$ ($\alpha = 2, \beta = 3$) and $\Gamma_{03}^3 \Gamma_{23}^3 = \frac{-2 \cot \theta}{3(\rho - \tau)}$ ($\alpha = 3, \beta = 3$) remain: therefore $R_{02} = R_{20} = -\Gamma_{02}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{23}^3 = 0$;
 for $R_{12} = R_{21}$, only $-\Gamma_{12}^2 \Gamma_{23}^3 = \frac{-2 \cot \theta}{3(\rho - \tau)}$ ($\alpha = 2, \beta = 3$), and $\Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3 = \frac{2 \cot \theta}{3(\rho - \tau)}$ ($\alpha = 3, \beta = 3$) remain. Therefore $R_{12} = R_{21} = -\Gamma_{12}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3 = 0$; and all other components such as R_{13}, R_{31}, R_{23} and R_{32} are 0. Then, according to Einstein's rule ($R_{\mu\nu} = \sum_{\mu\nu} R_{\mu\nu}$) we summate all the components:

$$R_{\mu\nu} = \frac{56}{9(\rho - \tau)^2} + \frac{11\mu}{18m(\rho - \tau)^3} + \frac{140m}{9\mu^2(\rho - \tau)^4} + \frac{8}{\sin^2 \theta} + \cot^2 \theta +$$

$$+ \frac{140m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta} + \frac{35 \cot^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{28}{9\mu^2(\rho - \tau)^3 \sin^2 \theta}.$$

The curvature tensors of gravitational waves, which penetrate the boundary of a black hole, are:

$$g^{\zeta\eta}{}_{\rho\sigma,\zeta\eta} + g^{\zeta\eta}{}_{,\sigma} (g_{\rho\zeta,\eta} - \frac{1}{2} g_{\zeta\eta,\rho}) + g^{\zeta\eta}{}_{,\rho} (g_{\sigma\zeta,\eta} - \frac{1}{2} g_{\zeta\eta,\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\rho\zeta} g_{\beta\beta} g_{\rho\zeta,\beta} g_{\eta\zeta,\beta\sigma} + \frac{1}{2} g^{\rho\zeta} g_{\beta\beta} g_{\rho\zeta,\beta\sigma} g_{\eta\zeta,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\rho\zeta} g_{,\sigma} g_{\beta\beta} g_{\rho\zeta,\beta} g_{\eta\zeta,\beta} + \frac{1}{2} g^{\rho\zeta} g_{\beta\beta,\sigma} g_{\rho\zeta,\beta} g_{\eta\zeta,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\sigma\zeta} g_{\beta\beta} g_{\sigma\zeta,\beta} g_{\zeta\eta,\beta\rho} + \frac{1}{2} g^{\sigma\zeta} g_{\beta\beta} g_{\sigma\zeta,\beta\rho} g_{\zeta\eta,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\sigma\zeta} g_{,\rho} g_{\beta\beta} g_{\sigma\zeta,\beta} g_{\eta\zeta,\beta} + \frac{1}{2} g^{\sigma\zeta} g_{\beta\beta,\rho} g_{\sigma\zeta,\beta} g_{\eta\zeta,\beta}.$$

If $\beta = \rho$, $g^{\rho\zeta} g_{\beta\beta} g_{\rho\zeta, \beta\sigma} g_{\eta\zeta, \beta} = g^{\rho\zeta} g_{\rho\rho} g_{\rho\zeta, \rho} g_{\eta\zeta, \rho\sigma}$; $g^{\rho\zeta} g_{\rho\rho} = g_{\rho}^{\zeta} = 1$ if $\zeta = \rho$; $g^{\rho\zeta} g_{\rho\rho} = g_{\rho}^{\zeta} = 0$ if $\zeta \neq \rho$; $g_{, \sigma}^{\rho\zeta} g_{\beta\beta} \neq 0$ if $\zeta = \rho = \beta$, otherwise $g_{, \sigma}^{\rho\mu} g_{\beta\beta} = 0$; and, $g^{\rho\zeta} g_{\beta\beta, \sigma} \neq 0$ if $\zeta = \rho = \beta$, otherwise $g^{\rho\zeta} g_{\beta\beta, \sigma} = 0$.

Table 2. Curvature tensors of gravitational waves, which penetrates the boundary of a black hole

$\zeta = \eta = 0,$ $\rho = \sigma =$ $= 1, 2, 3$ $\beta = 0, 1, 2, 3$	$g^{00} g_{11,00} = \left\{ -\frac{\mu}{2m} (\rho - \tau)^{2/3} \right\}_{, \tau\tau} = \left\{ -\frac{\mu}{2m} (-1) \frac{2}{3} (\rho - \tau)^{-(-1/3)} \right\}_{, \tau} =$ $= \frac{\mu}{9m(\rho - \tau)^{4/3}}, \quad g^{00} g_{22,00} = -\frac{28}{9\mu^2 (\rho - \tau)^{10/3}},$ $g^{00} g_{33,00} = -\frac{28}{9\mu^2 (\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$
$\zeta = \eta = 1,$ $\rho = \sigma = 0,$ $\beta = 0, 1, 2, 3$	$-g_{,0}^{11} g_{11,0} = \frac{4}{9(\rho - \tau)^2}$
$\zeta = \eta = 1,$ $\rho = \sigma = 1,$ $\beta = 0$	$g^{11} g_{11,11} + g_{,1}^{11} \left(g_{11,1} - \frac{1}{2} g_{11,1} \right) + g_{,1}^{11} \left(g_{11,1} - \frac{1}{2} g_{11,1} \right) = -\frac{2}{9(\rho - \tau)^2} - \frac{4}{9(\rho - \tau)^2},$ $\frac{1}{2} g^{11} g_{00} g_{11,0} g_{11,01} = \frac{-2\mu}{81m(\rho - \tau)^{10/3}}, \quad \frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{00} g_{11,0} g_{11,0} = \frac{-\mu}{27m(\rho - \tau)^{11/3}},$ $\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} g_{11,0} g_{11,0} = \frac{\mu}{27m(\rho - \tau)^{7/3}}, \quad \frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} g_{11,0} g_{11,0} = 0,$ $\frac{1}{2} g^{11} g_{00} g_{11,0} g_{11,01} = \frac{-\mu}{27m(\rho - \tau)^{7/3}}, \quad \frac{1}{2} g^{11} g_{00} g_{11,01} g_{11,0} = \frac{4\mu}{108m(\rho - \tau)^{7/3}},$ $\frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{00} g_{11,0} g_{11,0} = \frac{2\mu}{27m(\rho - \tau)^{7/3}}, \quad \frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{00,1} g_{11,0} g_{11,0} = \frac{-\mu}{9m(\rho - \tau)^{4/3}}$
$\beta = 1$	$g^{11} g_{11,11} + g_{,1}^{11} \left(g_{11,1} - \frac{1}{2} g_{11,1} \right) + g_{,1}^{11} \left(g_{11,1} - \frac{1}{2} g_{11,1} \right) = -\frac{2}{9(\rho - \tau)^2} - \frac{4}{9(\rho - \tau)^2},$ $\frac{1}{2} g^{11} g_{11} g_{11,1} g_{11,11} = \frac{-\mu^2}{54m^2 (\rho - \tau)^{5/3}}, \quad \frac{1}{2} g^{11} g_{11} g_{11,11} g_{11,1} = \frac{-\mu^2}{54m^2 (\rho - \tau)^{5/3}},$ $\frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{11} g_{11,1} g_{11,1} = \frac{-\mu^2}{27m^2 (\rho - \tau)^{5/3}}, \quad \frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{11,1} g_{11,11} g_{11,1} = \frac{\mu^2}{27m^2 (\rho - \tau)^{5/3}},$ $\frac{1}{2} g^{11} g_{11} g_{11,1} g_{11,11} = \frac{-\mu^2}{54m^2 (\rho - \tau)^{5/3}}, \quad \frac{1}{2} g^{11} g_{11} g_{11,11} g_{11,1} = \frac{-\mu^2}{54m^2 (\rho - \tau)^{5/3}},$ $\frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{11} g_{11,1} g_{11,1} = \frac{\mu^2}{27m^2 (\rho - \tau)^{5/3}}, \quad \frac{1}{2} g_{,1}^{11} g_{11,1} g_{11,11} g_{11,1} = \frac{\mu^2}{27m^2 (\rho - \tau)^{5/3}}$
$\beta = 2$	$g^{11} g_{11,11} + g_{,1}^{11} \left(g_{11,1} - \frac{1}{2} g_{11,1} \right) + g_{,1}^{11} \left(g_{11,1} - \frac{1}{2} g_{11,1} \right) =$ $= -\frac{2}{9(\rho - \tau)^2} - \frac{4}{9(\rho - \tau)^2}$

Continued Tabl. 2

$\beta = 3$	$g^{11}g_{11,11} + g_{,1}^{11}\left(g_{11,1} - \frac{1}{2}g_{11,1}\right) + g_{,1}^{11}\left(g_{11,1} - \frac{1}{2}g_{11,1}\right) =$ $= -\frac{2}{9(\rho - \tau)^2} - \frac{4}{9(\rho - \tau)^2}$
$\zeta = \eta = 1,$ $\rho = \sigma = 2, 3$ $\beta = 0, 1, 2, 3$	$g^{11}g_{22,11} = \frac{56m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4}, \quad g^{11}g_{33,11} = \frac{56m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$
$\zeta = \eta = 2,$ $\rho = \sigma = 0, 1, 3,$ $\beta = 0, 1, 2, 3$	$-g_{,1}^{22}g_{22,0} = -\frac{16}{9(\rho - \tau)^2}, \quad -g_{,1}^{22}g_{22,1} = \frac{16}{9(\rho - \tau)^2},$ $g^{22}g_{33,22} = \frac{6\cos \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta}$
$\zeta = \eta = 3,$ $\rho = \sigma = 0, 1, 2,$ $\beta = 0, 1, 2, 3$	$-g_{,0}^{33}g_{33,0} = -4\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -4\cot^2 \theta, \quad -g_{,1}^{33}g_{33,1} = \frac{16}{9(\rho - \tau)^2},$ $-g_{,2}^{33}g_{33,2} = -4\cot^2 \theta$

Note. All other components are zero.

Now, we summate all the components:

$$\frac{4\mu}{9m(\rho - \tau)^{4/3}} - \frac{112}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3}} - \frac{112}{9\mu^2(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta} + \frac{-16}{9(\rho - \tau)^2} - \frac{2}{3(\rho - \tau)^2} -$$

$$- \frac{2\mu}{81m(\rho - \tau)^{10/3}} + \frac{\mu}{9m(\rho - \tau)^{7/3}} - \frac{\mu}{9m(\rho - \tau)^{4/3}} - \frac{2}{(\rho - \tau)^2} + \frac{224m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4} +$$

$$+ \frac{224m}{9\mu^3(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta} + \frac{24\cos \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{8}{\sin^2 \theta} + \frac{64}{9(\rho - \tau)^2} - 32\cot^2 \theta.$$

NUMERICAL SIMULATION

Algorithm

Einstein's field equation [1] that rules the motion of particles in the gravitational field is: $\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{,v} = 0$, where R is a scalar tensor, $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$,

which are $R = R_0^0 = g^{00}R_{00}$, $R = R_1^1 = g^{11}R_{11}$, $R = R_2^2 = g^{22}R_{22}$, $R = R_3^3 = g^{33}R_{33}$. Then, for example, $R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}g^{00}R_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}R_{00} = \frac{1}{2}R_{00}$.

Now, we use the relation: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT$, where T is the stress-energy tensor and k is a constant [2]. Then, we set the following algorithm to simulate the relative intensities of the components of curvature tensors.

For example, when $\mu = \nu = 0$, $R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}g^{00}R_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}R_{00} = \frac{1}{2}R_{00}$. In our simulation, we omit the factor of, $1/2$, because we only use the selected vec-

tors of the coordinates, which are taken from the obtained curvature tensors in Table 1 for gravitational field and in Table 2 for gravitational waves.

Then, from Table 1, for example when $\alpha = 1$ and $\beta = 0$, $R_{00} = \frac{-1}{3(\rho - \tau)^2}$

and when $\alpha = 3$ and $\beta = 0$, $R_{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$. Then, for example, if we only summate these two components of R_{00} (when $\alpha = 1$ and $\beta = 0$) and R_{22} (when $\alpha = 3$ and $\beta = 0$), and then, our algorithm is shown as follows:

$$H = kT - (R_{00} + R_{22}) = kT - \left\{ \frac{-1}{3(\rho - \tau)^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right\} = kT - \{aX_1 + bX_2\},$$

$$H^2 = \{kT - (R_{00} + R_{22})\}^2 = [kT - \{aX_1 + bX_2\}]^2,$$

where a and b are constants.

Then, we assume: $\frac{\partial E(H^2)}{\partial a} = E\left(\frac{\partial H^2}{\partial a}\right) = 2E\left(H \frac{\partial H}{\partial a}\right) = -2E(X_1H) = 0$, and

$\frac{\partial E(H^2)}{\partial b} = E\left(\frac{\partial H^2}{\partial b}\right) = 2E\left(H \frac{\partial H}{\partial b}\right) = -2E(X_2H) = 0$, where $E(X_1H)$ and $E(X_2H)$ are operators to calculate averages of X_1H and, X_2H .

$E(X_1H) = 0$ and $E(X_2H) = 0$ are equivalent to solving the problem of $C(X_1, H) = 0$ and $C(X_2, H) = 0$, where $C(X_1, H)$ is the covariance of X_1 and H ; and, $C(X_2, H)$ is the covariance of X_2 and, H .

Now, $c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, where a and b are the eigenvalues of $R_{00} + R_{22}$, and $X = [X_1 \ X_2]$; then $H = kT - (R_{00} + R_{22}) = kT - Xc$, and $X'H = 0$, then $X'(kT - Xc) = 0$, where X' is transpose matrix of X . Then, $X'Xc = X'kT$, $c = (X'X)^{-1}X'kT = Q^{-1}X'kT$, and $\Sigma = V(c) = \sigma^2Q^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}$, where $V(c) = \sigma^2$ is the variance of c , and $\sigma^2 = e'e/(n-l)$, where $e = M \cdot kT$, $M = I - X(X'X)^{-1}X'$, n is a number of rows of each column of X (in this simulation $n = 23$), l is a number of columns of X , I is a 23×23 unit matrix, $(X'X)^{-1}$ is the inverse matrix of $X'X$, and e' is the transpose vector of e .

By calculating c and, $V(c)$, we can estimate the strength of each component of $(R_{00} + R_{22})$ to the stress-energy tensor, in the system of spherical polar coordinates.

We can also expand the size of matrix not only, $l = 2$, but also to $l > 2$ such as $c^* = [c_1, c_2, \dots, c_k]$, and $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_k]$, where c^* is a transposed vector of c , so that we were able to calculate not only $(R_{00} + R_{22})$, but more general $R_{\mu\nu}$ in our numerical simulation.

Input data

At first, our time t on Earth is set as shown in Fig. 1 and Fig. 2, with which its slope to the distance r from the center of a black hole toward outside is a con-

stant, which is consistent with Einstein’s theory that the speed of light is a constant. Then, τ is a relative time in the coordinate system, which expands and shrinks depending on the distance r , where $\tau = t + f(r)$; and, ρ is the relative distance, which expands and shrinks depending on the time t , where $\rho = t + g(r)$, and $f(r)$, $g(t)$ are conjugate functions of t and r . (For the simulation, we assumed case-1: $f(r) = \log r$ and $g(t) = e^{-r}$; and, case-2: $f(r) = r$ and $g(t) = (1/4)$). According to Dirac [1], the collapse of a star into a black hole would take an infinite time at our clocks on Earth, but it takes only a finite time relatively to the collapsing matter on the star itself. From this Dirac’s statement, we assumed that τ is larger when the relative distance, ρ , from the center of the black hole is smaller. Also, in this simulation we set the stress-energy tensor kT to be 1; because, the purpose of this simulation is to measure the order of magnitude of the relative strength of each component of $R_{\mu\nu}$ to the stress-energy tensor.

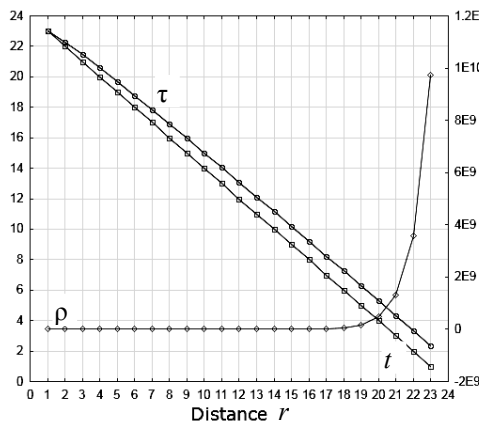


Fig. 1. Input data for simulation Case 1: $f(r) = \log r$ and $g(t) = e^{-r}$

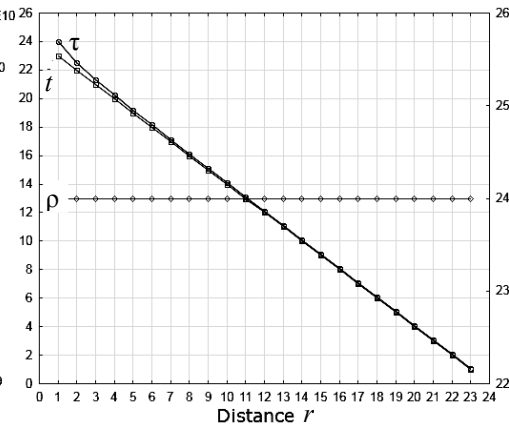


Fig. 2. Input data for simulation Case 2: $f(r) = r$ and $g(t) = 1/4$

For the simulation of the gravitational waves we assumed the angles, θ , as shown in Fig. 3, as if it becomes smaller in far distance from a black hole; on the

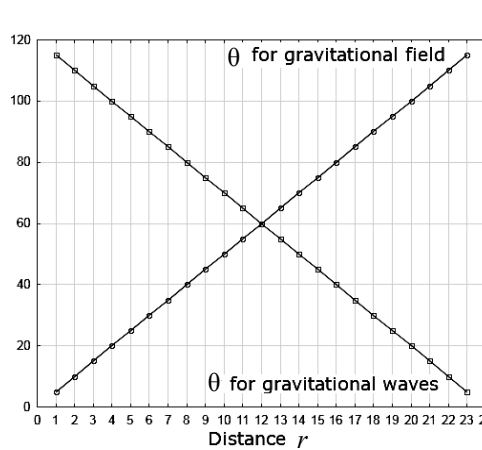


Fig. 3. Angles θ for simulating gravitational field and gravitational waves

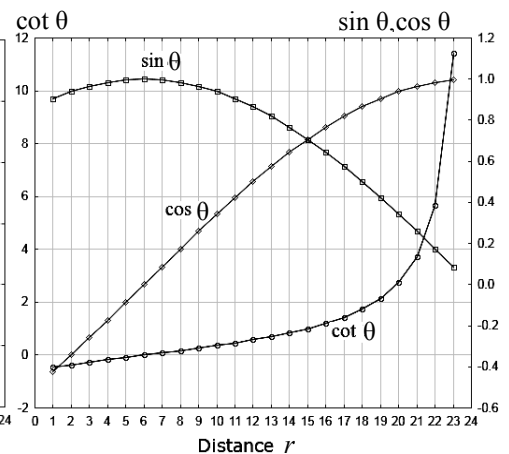


Fig. 4. $\sin \theta$, $\cos \theta$ and $\cot \theta$ for simulation of gravitational waves

other hand, for the simulation of the spatial expansion of the gravitational field of a black hole, we assumed as if θ becomes larger in far distance. With this assumption, the gravitational waves of sign cosign and cotangent curves behave like as shown in Fig. 4.

Results

Table 3 shows the calculated eigenvalues c of $R_{\mu\nu}$ and $\sqrt{V(c)}$ for the gravitational field, and Fig. 5, 6 and Fig. 7 show selected functions that have the negative coefficients, which mean the gravity, and of which each element of $\sqrt{V(c)}$ is smaller than each element of c . Table 3 also shows the calculated eigenvalues of the gravitational waves, and Fig. 8 shows the function of $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ that have the positive coefficients, and of which $\sqrt{V(c)}$ is smaller than its value of c . We selected only, $\frac{1}{\sin^2 \theta}$, because it has the positive coefficient, assuming that the gravitational waves should give positive impact to the stress-energy tensor, kT .

Table 3. Results of the simulation of gravitational field and gravitational waves

Components	c and $\sqrt{V(c)}$ of Gravitational field		c and $\sqrt{V(c)}$ of Gravitational waves	
	Case-1	Case-2	Case-1	Case-2
$\frac{1}{(\rho - \tau)^2}$	$-1,850 \cdot 10^{-2}$ (6,298)	$4,406 \cdot 10^{-4}$ (0,0002776)	$5,950 \cdot 10^{-8}$ ($-1,059 \times 10^{16}$)	$-3,190 \cdot 10^{-3}$ (0,7698)
$\frac{1}{(\rho - \tau)^{4/3}}$	$-5,750 \cdot 10^{-2}$ ($2,060 \cdot 10^{-17}$)	$5,118 \cdot 10^{-8}$ ($3,211 \cdot 10^{-8}$)	$-2,088 \cdot 10^{-12}$ (0,03356)	$-5,308 \cdot 10^{-8}$ ($1,511 \cdot 10^{-5}$)
$\frac{1}{(\rho - \tau)^4}$	$-24,58$ (6546,0)	$-6,932 \cdot 10^{-3}$ (0,002527)	$6,591 \cdot 10^{-12}$ ($2,672 \cdot 10^{19}$)	$-6,957 \cdot 10^{-2}$ (33,92)
$\frac{1}{\sin^2 \theta}$	1,000 ($6,550 \cdot 10^{-5}$)	1,000 ($2,146 \cdot 10^{-6}$)	0,1870 ($-1,753 \cdot 10^{-8}$)	1,000 ($9,408 \cdot 10^{-5}$)
$\cot^2 \theta$	-1,000 ($2,430 \cdot 10^{-4}$)	-1,000 ($6,034 \cdot 10^{-7}$)	$-1,180 \cdot 10^{-2}$ ($-1,373 \cdot 10^9$)	-1,000 ($3,128 \cdot 10^{-4}$)
$\frac{1}{(\rho - \tau)^4 \sin^2 \theta}$	-0,4142 (111,2)	$-1,714 \cdot 10^{-4}$ ($4,359 \cdot 10^{-5}$)	$6,311 \cdot 10^{-12}$ ($1,833 \cdot 10^{19}$)	$5,784 \cdot 10^{-2}$ (26,55)
$-\frac{1}{(\rho - \tau)^{10/3} \sin^2 \theta}$	-0,2985 (79,94)	$-2,705 \cdot 10^{-4}$ ($8,060 \cdot 10^{-5}$)	$8,995 \cdot 10^{12}$ ($-1,442 \cdot 10^{19}$)	$-2,258 \cdot 10^{-2}$ (9,089)
$\frac{\cot^2 \theta}{\sin^2 \theta}$	$9,974 \cdot 10^{-8}$ ($4,800 \cdot 10^{-5}$)	$1,732 \cdot 10^{-8}$ ($1,324 \cdot 10^{-8}$)	-	-
$-\frac{1}{(\rho - \tau)^{10/3}}$	-	-	$-1,630 \cdot 10^{-12}$ ($-1,618 \cdot 10^{19}$)	$2,608 \cdot 10^{-2}$ (14,21)
$\frac{1}{(\rho - \tau)^{7/3}}$	-	-	$-1,065 \cdot 10^{-10}$ ($-5,221 \times 10^{16}$)	$6,675 \cdot 10^{-3}$ (1,866)
$\frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta}$	-	-	$-3,160 \cdot 10^{-4}$ ($6,635 \cdot 10^6$)	$5,047 \cdot 10^{-10}$ ($1,469 \cdot 10^{-7}$)

Note. The numeric values in the brackets are, $\sqrt{V(c)}$, the standard errors of c .

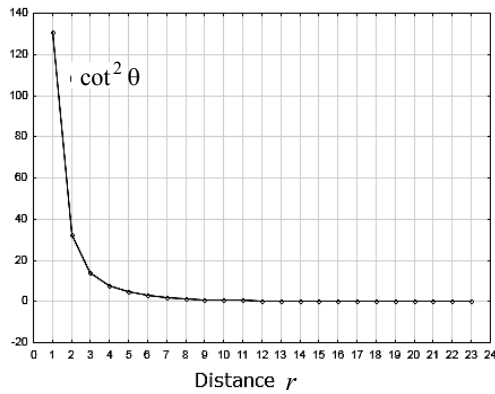


Fig. 5. Components of gravitational field, case 1

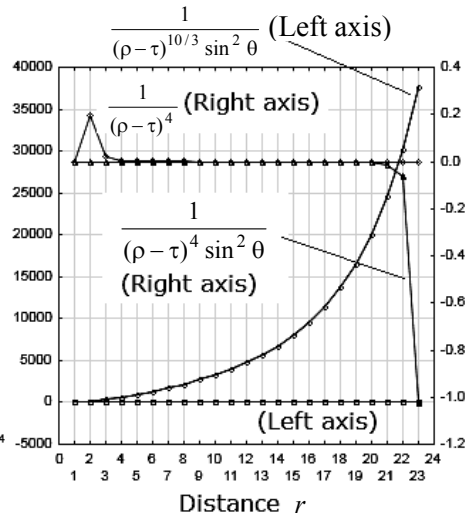


Fig. 6. Components of gravitational field, case 2 (1)

Note. (Left axis) means that the scale of the function is shown in the left axis; and, (Right axis) in the right axis.

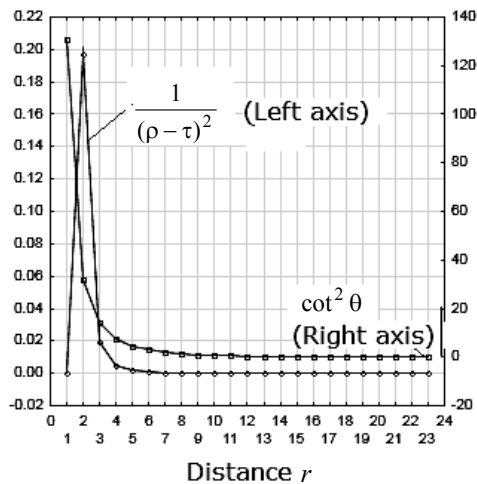


Fig. 7. Components of gravitational field, case 2 (2)

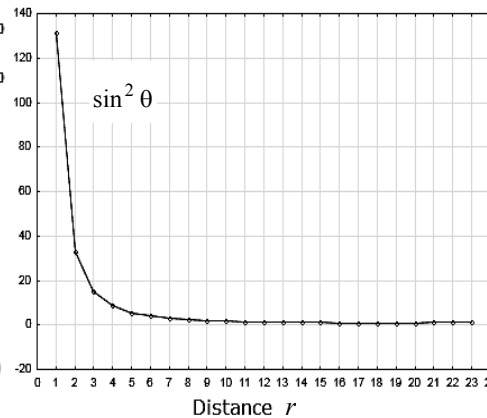


Fig. 8. Components of gravitational field, case 2

CONCLUSION AND RECOMMENDATION

In this research, we investigated the structure of gravitational field inside of a black hole, assuming that time and space interact each other with $\rho = t + g(r)$, $\tau = t + f(r)$, (t is the time, r is the distance from the center of the black hole, and f and g , are functions of r). And we also investigated the functions of gravitational waves that are emitted from the inside of the black hole. As the result we found that some of the functions of gravitational waves carry the components of the curvature tensor of gravitational field. It means that we are able to investigate the structure of a black hole by the information carried by the gravitational waves.

Inside of the black hole the functions shown in Table 1 for the gravitational field and in Table 2 for the gravitational waves, show the same functions: $(\rho - \tau)^{-4}$, $\cot^2 \theta$ and $\sin^{-2} \theta$. The function of $(\rho - \tau)^{-4}$ in Fig. 6 suggests the presence of a boundary of the black hole, where the gravitational waves are disturbed once before they are moving toward the outside.

On the other hand, if we don't assume the dependence of time and space, the gravitational waves are to be made outside of the black hole, and they do not carry the same functions of the gravitational field. The equations (1) about the gravitational field are $R_{00} \propto r^{-1}$, $R_{11} \propto r^{-1}$, $R_{22} \propto r$ and $R_{33} \propto r$; while the equations (2) about the gravitational waves are r^{-2} , r^{-3} , r^{-4} and r^{-6} .

In this research, we used the spherical polar coordinate system to describe the curvature of gravitational field, and this system helped us to make numerical simulation possible. However, further mathematical investigations are needed about the curvature tensors.

REFERENCE

1. *Dirac P.A.M.* General Theory of Relativity / P.A.M. Dirac. — New York: Florida University, A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1975. — 69 p.
2. *Goldstein H.* Classical Mechanics / H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko. — 3rd Edition. — Pearson Education, Inc., 2002. — P. 646 (especially Chapter 7.11 “Introduction to the general theory of relativity”), P. 324–328.

Received 06.01.2020

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ДИАГНОСТИКА МРТ-ИЗОБРАЖЕНИЙ ОПУХОЛЕЙ ГОЛОВНОГО МОЗГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНЫХ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОНЕЧЕТКИХ СЕТЕЙ

Ю.П. ЗАЙЧЕНКО, К.А. ЗДОР, Г. ГАМИДОВ

Аннотация. Рассмотрена проблема классификации опухолей головного мозга по медицинским МРТ-изображениям. Для ее решения разработаны гибридные нечеткие сверточные нейронные сети (CNN), в которых сверточные сети VGG-16 и ResNetV2_50 были использованы для извлечения признаков изображения, а нечеткая нейронная сеть ANFIS — в качестве классификатора. Разработаны алгоритмы обучения гибридных сетей. Проведены экспериментальные исследования предложенных гибридных сетей на стандартном датасете МРТ-изображений головного мозга и сравнения результатов с известными альтернативными структурами сверточных сетей.

Ключевые слова: медицинская диагностика, классификация опухолей головного мозга, нечеткая нейронная сеть ANFIS, сверточные нейронные сети, гибридная сеть.

ВВЕДЕНИЕ. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Одной из актуальных сфер применения информационных технологий в медицине является диагностика опухолей головного мозга на основе обработки медицинских изображений мозга [1,2].

Диагностика вследствие локализации опухоли внутри черепа затруднена. Диагноз онкологического заболевания окончательно ставится только после гистологического заключения; без гистологического или цитологического исследования диагноз неправомерен. В связи с тем, что опухоль находится в полости черепа и прорастает в ткань мозга, забор биоптата представляет собой сложную нейрохирургическую операцию. Диагноз «опухоль мозга» ставится поэтапно — сначала амбулаторно, затем подтверждается в стационаре. Можно выделить три этапа в диагностике.

1. Больной обращается к терапевту (реже к неврологу или врачу другой специальности). Обратиться его вынуждает прогрессирование очаговой или общемозговой симптоматики. Пока клиника выражена слабо, больной редко попадает в поле зрения врачей, и только когда ситуация начинает стремительно ухудшаться, он обращается за помощью к специалисту.

2. Врач оценивает состояние поступившего больного и, в зависимости от его тяжести, принимает решение о госпитализации или амбулаторном

лечения. Критерием оценки тяжести состояния является наличие и выраженность очаговой и общемозговой симптоматики, а также наличие и тяжесть сопутствующих заболеваний. При обнаружении у больного неврологической симптоматики он направляется для консультации к неврологу. При впервые возникшем эпилептическом или судорожном припадке обязательно проводится компьютерная томография головного мозга для выявления онкологической патологии.

3. Невролог оценивает тяжесть симптомов и производит дифференциальную диагностику. Сначала ставит, как минимум, предварительный, а после дообследований — и клинический диагноз. Врач на основании жалоб больного и доступных ему методов обследования должен принять решение, на каких заболеваниях ему следует сосредоточиться и какие инструментальные и лабораторные методы обследования назначить.

К обязательным методам обследования относятся: определение активности сухожильных рефлексов, проверка тактильной и болевой чувствительности. Диагностические мероприятия могут быть расширены в зависимости от жалоб пациента и с целью дифференциальной диагностики. Так, например, если больной отмечает нарушения координации, необходимо провести пальце-носовую пробу, проверить устойчивость в позе Ромберга. Если возникает подозрение на опухоль мозга, то больного направляют на компьютерную (КТ) или магнитно-резонансную томографию (МРТ). Магнитно-резонансная томография с контрастным усилением является «золотым стандартом» в диагностике опухолей головного мозга [4]. При обнаружении на томограмме объёмного образования больной подлежит госпитализации в специализированный стационар.

После поступления в онкологический диспансер проводится ряд обследований с целью определения тактики лечения данного больного, необходимости хирургического вмешательства и его последствия, а также целесообразности стационарного лечения. Проводится повторная КТ или МРТ головного мозга. Определяются режимы и дозы лучевой и химиотерапии, катрируется опухоль, определяются её границы, размеры, точная локализация. Если больному показано хирургическое лечение, то берут биоптат опухоли и производят её гистологическую верификацию с целью подбора оптимального режима последующей терапии. Препарат ткани опухоли может быть получен путём стереотаксической биопсии.

В новом исследовании научными сотрудниками отделения нейрорадиологии Университетской клиники Хайдельберга (Department of Neuroradiology, Heidelberg University Hospital), Германия, была разработана модель анализа, основанная на искусственных нейронных сетях, позволяющая полностью автоматизировать процесс количественной оценки МРТ-сканов в нейроонкологии и снимающая, таким образом, ограничения механического анализа. В работе авторы продемонстрировали, что методы машинного обучения, применяемые для оценки эффективности, проводимой в нейрорадиологии терапии, могут быть более надежными и точными, являясь ценным вкладом в процесс индивидуализированной терапии опухолей. Статья по материалам исследования опубликована в издании «The Lancet Oncology» 2 апреля 2019 г.

Используя базу данных МРТ-сканов более 500 пациентов с опухолями головного мозга, исследователи разработали систему алгоритмов, позволяющую автоматизировать процесс идентификации морфологических ха-

рактических зон опухолевого роста, применив искусственные нейронные сети. Кроме того, были разработаны алгоритмы, позволяющие оценить параметры отдельных областей (локусы опухолевых тканей, поглощающих контраст, а также зоны перитуморального отека) в ответ на применяемую терапию.

Комментируя полученные результаты, Ф. Кикингередер отметил: «Проведенный анализ более 2000 МРТ-сканов 534 пациентов с глиобластомой показал, что компьютеризированный подход позволяет более надежно оценить терапевтический ответ в сравнении с традиционным методом ручного измерения. Применение системы алгоритмов позволило повысить достоверность оценки на 36%. Это действительно может иметь решающее значение для оценки эффективности терапии на основе визуальных данных МРТ в клинических исследованиях. Кроме того, использование метода машинного обучения достоверно повышало точность расчета прогноза общей выживаемости».

Большинство последних работ, относящихся к области классификации опухолей, ориентированы на цифровые изображения. До настоящего времени большинство работ, основанных на гистологическом анализе, выполнялись на небольших датасетах.

Существенным сдвигом в этом направлении является датасет, состоящий из 7909 изображений молочной железы, полученных от 82 пациентов [5]. На этом датасете авторы оценивали различные текстурные дескрипторы и классификаторы, провели эксперименты и достигли точности от 82% до 85%.

Новым подходом для обработки медицинских изображений и диагностики является использование сверточных сетей (CNN) [7, 8]. Показано в ряде работ, что сверточные сети способны превзойти другие методы анализа изображений. Кроме того, традиционный подход к выделению признаков на основе дескрипторов требует больших усилий и высокого уровня знаний экспертов и обычно является специфичным для каждой задачи, что препятствует его непосредственному применению к другим задачам. Обычно CNN используется в качестве экстрактора информативных признаков медицинского изображения, а как классификатор — либо машина опорных векторов, либо деревья решений.

Существенным достижением является разработка гибридных сверточных сетей, в которых в качестве классификатора используется нечеткая нейронная сеть (ННС) NEFClass [9]. В работе впервые предложена такая архитектура сверточной сети, которая применялась для классификации опухолей молочной железы и показала более высокую точность классификации в сравнении с традиционными классификаторами SVM и Decision tree [9].

Представляет интерес использование и других типов ННС в качестве классификаторов в составе сверточных сетей. Поэтому в настоящем исследовании предлагается новая гибридная сверточная нечеткая сеть CNN–ANFIS, в которой CNN используется для выделения признаков на медицинских, а ННС ANFIS — для классификации обнаруженных опухолей на изображениях на два класса: доброкачественные и злокачественные.

Основная цель работы — разработка и исследование гибридной сети CNN–ANFIS и исследование ее эффективности в задаче распознавания медицинских изображений опухолей мозга и классификации опухолей, сравнение ее эффективности с известными работами на стандартном датасете медицинских изображений [11].

СВЕРТОЧНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ (КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ)

Сверточные сети — современный метод, широко используемый для обработки изображений. Они обладают способностью извлекать глобальные признаки изображения в иерархическом виде. Сверточные сети включают следующие слои [7,8].

Сверточный слой. Он рассматривается как основной рабочий компонент сверточной сети и играет жизненно важную роль в этой сети. Ядро свертки (фильтр) , обычно представляющее матрицу $n \times n$, последовательно проходит по всем пикселям изображения и выделяет информацию из него путем операции свертки.

Шаги (Stride) и дополнение (Padding). Матрица фильтра (ядро) движется по изображению с шагом **Stride**), определяемым его размером; по умолчанию его размер принимается равным 1. Если размер изображения 5×5 сканируется фильтром размером 3×3 и шагом 1, то получим после свертки выходную матрицу 3×3 . Однако если используется шаг 2, то размер выходного изображения будет 2×2 .

Таким образом, размер выходного изображения определяется размерами фильтра (ядра) и шага. Чтобы обойти это явление, можно дополнить исходное изображение столбцами и строками, содержащими 0 (Padding). В таком случае размер выходного изображения после свертки будет равняться исходному. Такое добавление строк и столбцов, содержащих только 0, называется *zero padding* [7, 8].

Нелинейное преобразование (Nonlinear Performance). Каждый слой нейронной сети дает линейный выход и добавление двух таких слоев также осуществляет линейное преобразование. Поэтому увеличение количества слоев нейронной сети не изменяет характера сети. Для преодоления этого недостатка используется нелинейное преобразование в виде следующих функций: Rectified Linear Unit (ReLU), Leaky ReLU и др.

Операция пулинга (Pooling Operation). Сверточная нейронная сеть генерирует большой объем информации. Поэтому, чтобы уменьшить размерность пространства признаков, используется операция пулинга. Известны несколько стандартных операций пулинга, такие как MaxPooling, Average Pooling. [7, 8].

В работе используется операция MaxPooling, которая выбирает максимальное значение из некоторой подматрицы после свертки.

Операция Drop-Out. В результате обучения сети возможно явление переобучения на тестовой выборке, известное как *over-fitting*. Это явление можно устранить, используя процедуру дропаут (Drop-Out), которая состоит в выключении некоторых нейронов из сети при обучении.

Решающий слой Decision Layer. Для классификации изображений на конце сверточной сети используется решающий слой, обычно в виде многослойного перцептрона (MLP). С этой целью используется слой Softmax layer или слой метода опорных векторов (SVM layer). Этот слой реализует нормализованную экспоненциальную функцию и определяет функцию потерь (loss function) для данных классификации.

CNN МОДЕЛЬ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Архитектура сверточной сети VGG-16, которая используется в работе в качестве детектора информативных признаков изображения, показана на рис. 1. Она обучалась стохастическим градиентным методом на датасете Imagenet. Как альтернативная основа применялась архитектура ResNetV2_50 (рис. 2). Эта архитектура более глубокая и имеет лучшую производительность.

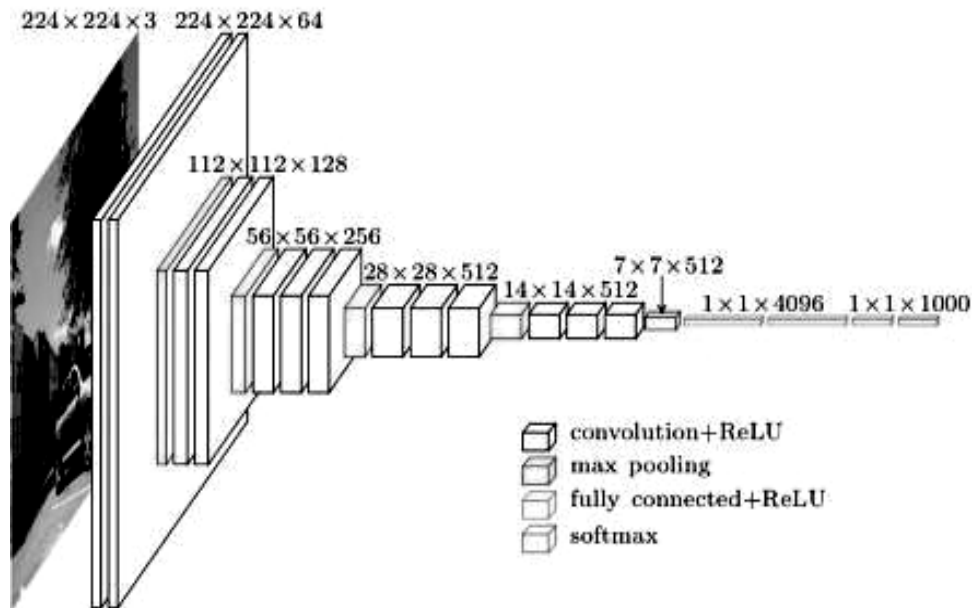


Рис. 1. Сверточная нейронная сеть VGG-16. 1

В качестве классификатора полученных признаков в данной работе предложено использовать ANFIS в отличие от известных работ, в которых применялся многослойный перцепрон и слой машины опорных векторов (SVM).

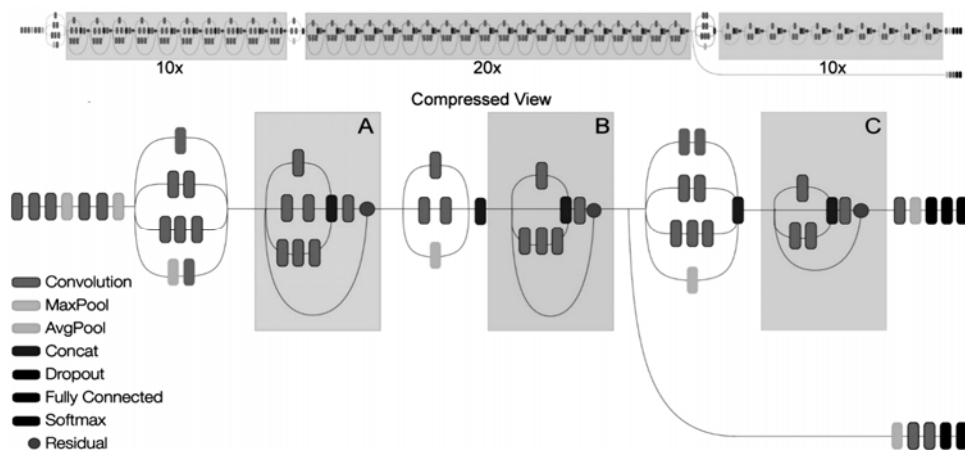


Рис. 2. Сверточная нейронная сеть ResNet V2

ANFIS — это искусственная нейронная сеть, основанная на нечеткой системе вывода Такаги–Сугено [10]. Сеть разработана в начале 1990-х годов.

Так как эта сеть интегрирует принципы нейронных сетей с принципами нечеткой логики, то у нее есть потенциал, позволяющий совместить их преимущества в одной структуре. Вывод такой системы соответствует набору нечетких правил «если–то», которые имеют способность к обучению с целью аппроксимации нелинейных функций. Следовательно, ANFIS считается универсальным аппроксиматором. Для использования ANFIS наиболее эффективным способом, можно использовать параметры, полученные с помощью генетического алгоритма.

ДАТАСЕТ

Исходные данные для проведения экспериментов взяты с сайта Kaggle [11]. Всего было 253 изображения, из которых 98 без опухоли (рис. 3) и 155 с опухолью мозга (рис. 4). Все образцы разбиты на обучающую и тестовую подвыборки в соотношении 80% / 20%.

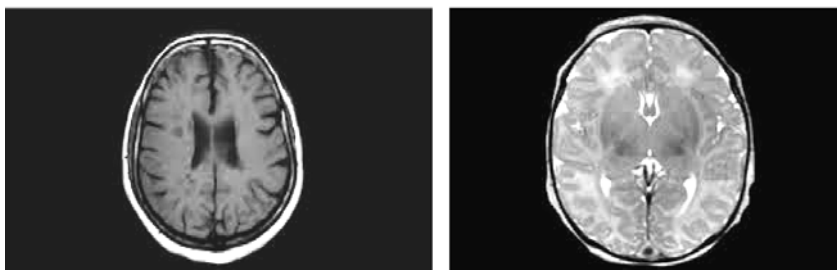


Рис. 3. Изображения МРТ мозга без опухоли мозга

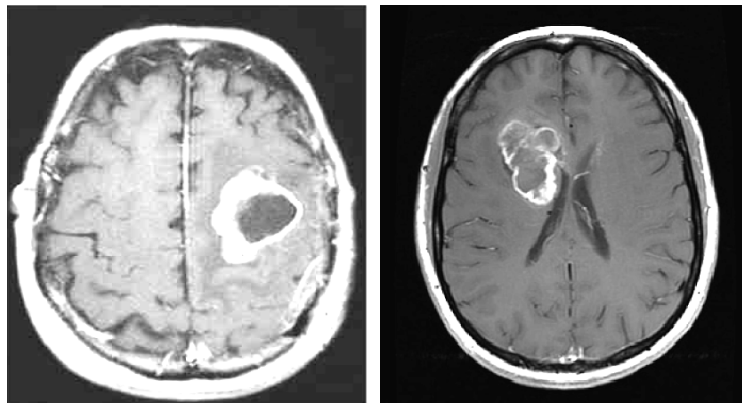


Рис. 4. Изображения МРТ с опухолями мозга

Для аугментации данных использованы: сдвиг данных горизонтально и вертикально, изменение яркости, горизонтальное отзеркаливание и повороты до 15%.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

В данном исследовании использовано предварительное обучение сверточных сетей CNN-VGG 16 и ResNetV2_50. Существуют два основных сценария обучения НС.

1. **Извлечение признаков (Feature extraction).** Полносвязные слои отключаются, а оставшаяся часть сети используется как экстрактор признаков в новых данных (датасетах).

2. **Тонкая настройка (Fine Tuning).** Новый датасет используется для тонкой настройки предварительно обученной нейронной сети.

В исследовании сеть CNN VGG-16 использовалась для извлечения признаков в медицинских изображениях опухолей мозга. Найденные признаки подавались на вход ANFIS. Для обучения использовались алгоритм стохастический градиентный спуск и его модификации.

Были проведены серии экспериментов и сравнение с результатами предшествующих работ.

Лучшие результаты обучения ANFIS и альтернативных архитектур приведены в табл. 1. Количество итераций обучения фиксировано 50 эпохами.

Таблица 1. Результаты классификации, полученные различными архитектурами CNN

Номер архитектуры	Архитектура	Accuracy, %	Specificity, %	Precision, %	Recall, %	F1 score, %
1	VGG16+NN+Warm-up AdamW	0,8526	0,8649	0,8607	0,9052	0,8514
2	VGG16+Warm-up AdamW+ ANFIS	0,8368	0,7671	0,8839	0,8462	0,8378
3	VGG16+SVM+Warm-up AdamW+ SVM	0,8737	0,8784	0,8710	0,9310	0,8722
4	ResnetV2_50 + DR + AdamW	0,7789	0,8052	0,7840	0,8673	0,7789

В архитектуре 1 (табл. 1) за основу взята CNN VGG-16, выход из которой приведён к виду: размер батча × количество признаков с помощью операции Flatten [13]. К полученным признакам в качестве классификатора применена нейронная сеть, структура которой приведена в табл. 2. Для улучшения сходимости добавлен слой батч-нормализации, а для избежания оверфиттинга — слой Dropout с величиной обнуления 35%. Для этой сети использовалась бинарная кросс-энтропийная функция потерь. Как алгоритм оптимизации использовался AdamW[13] с применением техники Warm-up [14, 15].

Таблица 2. Архитектура используемой сети CNN

Слой сети	Форма выхода слоя	Количество параметров
VGG16 (Model)	(None, 7, 7, 512)	14714688
Flatten	(None, 25088)	0
Batch Normalization	(None, 25088)	100352
Dropout	(None, 25088)	0
Dense	(None, 1)	25089

Общее количество параметров: 14840129.

Количество обучаемых параметров: 75265.

Количество необучаемых параметров: 14764864.

В архитектуре 2 (табл. 1) за основу взята VGG-16, выход из которой приведён к виду: размер батча × количество признаков с помощью операции Flatten. Для уменьшения количества признаков использован полносвязный слой нейронной сети. К этим признакам применён как классификатор ANFIS (табл. 3).

Количество правил для ANFIS — 32. Для избежания оверфиттинга добавлено два слоя dropout с величиной обнуления 50% и 25% соответственно. Для функции потерь использовалась бинарная кросс-энтропийная функция потерь. Как алгоритм оптимизации использовался AdamW [13] с применением техники Warm-up [14, 15].

Таблица 3. ANFIS классификатор

Слой сети	Форма выхода слоя	Количество параметров
VGG16 (Model)	(None, 7, 7, 512)	14714688
Flatten	(None, 25088)	0
Dropout	(None, 25088)	0
Dense	(None, 8)	200712
Dropout	(None, 8)	0
ANFIS	(None, 1)	544
Dense	(None, 1)	2

Общее количество параметров: 14915946.

Количество обучаемых параметров: 201258.

Количество необучаемых параметров: 14714668.

В архитектуре 3 (табл. 1) за основу взята VGG-16, выход из которой приведен к виду: размер батча × количество признаков с помощью операции Flatten. К этим признакам применён как классификатор SVM (табл. 4). Параметр «коэффициент регуляризации» установлен в 0,01. Для расчета функции потерь использована функция Hinge Loss [12]. Как алгоритм оптимизации использовался AdamW с применением техники Warm-up.

Таблица 4. SVM классификатор

Слой сети	Форма выхода слоя	Число параметров
VGG16 (Model)	(None, 7, 7, 512)	14714688
Flatten	(None, 25088)	0
Dense	(None, 1)	25089

Общее количество параметров: 14739777.

Количество обучаемых параметров: 25089.

Количество необучаемых параметров: 14714688.

В архитектуре 4 (табл. 1) за основу взята ResNetV2_50, выход из которой приведён к виду: размер батча × количество фильтров с помощью операции Global Average Pooling_2D, которая для трёхмерного ядра фильтра находит среднее для каждого двухмерного пространства (в виде таблицы) так, чтобы в результате получилось одномерное ядро.

К этим признакам применены сверточные слои для уменьшения размерности. После уменьшения размерности выхода, которой был приведён к виду: размер батча × количество признаков с помощью операции Flatten, применён классификатор в виде нейронной сети (табл. 5). Для улучшения сходимости добавлены слой батч-нормализации. Для избежания оверфитти-

нга добавлен слой dropout с величиной обнуления 25% на сверточных слоях и 30% на полносвязном. Для этой сети использовалась бинарная кросс-энтропийная функция потерь, а как алгоритм оптимизации использовался AdamW.

Таблица 5. Структура сети ResNetV2_50 со свёрточными слоями для уменьшения размерности

Слой сети	Форма выхода слоя	Количество параметров
Resnet50v2 (Model)	(None, 7, 7, 2048)	23564800
Global Average Pooling 2D	(None, 2048)	0
Reshape	(None, 2048, 1)	0
Conv1D	(None, 512, 8)	264
Max Pooling 1D	(None, 256, 8)	0
Batch Normalization	(None, 256, 8)	32
Dropout	(None, 256, 8)	0
Conv1D	(None, 64, 16)	4112
Max Pooling 1D	(None, 32, 16)	0
Batch Normalization	(None, 32, 16)	64
Dropout	(None, 32, 16)	0
Conv1D	(None, 16, 32)	16416
Max Pooling 1D	(None, 8, 32)	0
Batch Normalization	(None, 8, 32)	128
Dropout	(None, 8, 32)	0
Flatten	(None, 256)	0
Dropout	(None, 256)	0
Dense	(None, 1)	257

Общее количество параметров: 23586073.

Количество обучаемых параметров: 21161.

Количество необучаемых параметров: 23564912.

В результате анализа экспериментов установлено, что наилучшие результаты показал классификатор SVM. Данный метод имел наивысшую точность (по показателям Accuracy, Specificity, Recall и F1 Score). Однако наилучший результат по метрике Precision показал классификатор ANFIS. С использованием методики уменьшения размерности получены невысокие результаты; методика требует большей регуляризации и большего количества данных. С применением нейронной сети ANFIS в качестве классификатора получены средние результаты. Для улучшения результатов необходимо увеличить объем обучающих данных. Также возможен вариант с размораживанием сверточных слоев в процессе обучения.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена проблема анализа медицинских изображений мозга и классификации обнаруженных опухолей на два класса: доброкачественные и злокачественные.

Для распознавания опухолей разработана гибридная сверточная нечеткая сеть CNN–ANFIS, в которой CNN–VGG 16 была использована для выделения признаков на изображениях, а ННС ANFIS — для классификации обнаруженных опухолей на основе этих признаков.

Для обучения ANFIS предложен и реализован алгоритм обучения адаптивный стохастический градиентный спуск и исследована его эффективность.

Проведены экспериментальные исследования предложенной гибридной CNN–ANFIS сети в задаче классификации реальных изображений на специальном датасете Brain MRI images for brain tumor detection.

Сравнение точности классификации предложенной гибридной CNN–ANFIS с результатами сверточной сети с алгоритмами классификации SVM, NN и Dimensionality reduction показало целесообразность использования гибридной сети. Сравнивая результаты работы ННС ANFIS с результатами ННС NEFClass в качестве классификаторов обработки медицинских изображений сделан вывод о целесообразности использования ННС ANFIS для этих целей. Это можно объяснить тем, что ННС ANFIS специально разработана для задач классификации.

Наилучшие результаты показал классификатор SVM. Однако результаты могут быть значительно улучшены путем расширения датасета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dong H.* Automatic Brain Tumor Detection and Segmentation Using U-Net Based Fully Convolutional Networks / H. Dong, G. Yang, F. Liu et al. — 2017.
2. *Arya P.* A Survey on Brain Tumor Detection and Segmentation from Magnetic Resonance Image / P. Arya, A.K. Malviya. — 2019.
3. *Zhang Y.* One-class kernel subspace ensemble for medical image classification / Y. Zhang, B. Zhang, F. Coenen et al. // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. — 2014. — Vol. 2014, N 17. — P. 1–13.
4. *Sundar R.* Brain Tumor Detection and Segmentation by Intensity Adjustment / R. Sundar. — 2017.
5. *Singh A.* Classifying Biological Images Using Pre-trained CNNs / A. Singh, H. Mansourifar, H. Bilgrami et al. — Available at: <https://docs.google.com/document/d/1H7xVK7nwXcv11CYh7h15F6pM0m218FQloAXQODP-Hsg/edit?usp=sharing>.
6. *Bengio Y.* Representation learning: A review and new perspectives / Y. Bengio, A. Courville, P. Vincent // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2013. — Vol. 35. — P. 1798–1828.
7. *LeCun Y.* Deep learning / Y. LeCun, Y. Bengio, G. Hinton // Nature. — 2015. — Vol. 521. — P. 436–444.
8. *Krizhevsky A.* Imagenet classification with deep convolutional neural networks / A. Krizhevsky, I. Sutskever, G.E. Hinton // Advances in Neural Information Processing Systems. — 2012. — 25. — P. 1097–1105.
9. *Zaychenko Yu.* Medical images of breast tumors diagnostics with application of hybrid CNN–FNN network / Yu. Zaychenko, G. Hamidov, I. Varga // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 4. — С.37–47.
10. *Zgurovsky M.* The Fundamentals of Computational Intelligence: System Approach / M. Zgurovsky, Yu. Zaychenko // Springer International Publishing AG, Switzerland. — 2016. — 308 p.
11. *Brain MRI Images for Brain Tumor Detection.* — Available at: <https://www.kaggle.com/navoneel/brain-mri-images-for-brain-tumor-detection>.
12. *Understanding loss functions: Hinge loss.* — Available at: <https://medium.com/analytics-vidhya/understanding-loss-functions-hinge-loss-a0ff112b40a1>
13. *Decoupled weight decay regularization.* — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1711.05101.pdf>
14. *A Closer Look at Deep Learning Heuristics: Learning rate restarts, Warmup and Distillation.* — Available at: <https://arxiv.org/abs/1810.13243>
15. *On the Difficulty of Warm-Starting Neural Network Training.* — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1910.08475.pdf>

Поступила 31.01.2020

НЕЧІТКА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ОБМЕЖЕННЯМИ НА РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

О.М. КІСЕЛЬОВА, О.М. ПРИТОМАНОВА

Анотація. Запропоновано алгоритм розв'язання нечіткої неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множин на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин та обмеженнями на їх розміщення. Алгоритм ґрунтується на синтезі методів розв'язання нескінченновимірних задач оптимального розбиття множин із n -вимірною евклідовою простору на підмножини з нейронечіткими технологіями та модифікаціями r -алгоритму Н.З. Шора, які застосовуються для числового розв'язання двоїстих скінченновимірних негладких задач оптимізації. Розроблену програмну реалізацію алгоритму проілюстровано на модельній задачі.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, теорія оптимального розбиття множин, обмеження на розміщення центрів підмножин, недиференційовна оптимізація, нечіткі параметри, r -алгоритм Шора.

ВСТУП

Актуальність задач оптимального розбиття множин пов'язана з широким практичним і теоретичним застосуванням теорії оптимального розбиття множин [1]. Структуру теорії оптимального розбиття множин, сформовану дотепер, подано у праці [2].

Одним з напрямів розвитку теорії оптимального розбиття множин є дослідження задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_n в нечітких умовах. Нечіткість є природною властивістю навколишнього світу, тому врахування у математичній постановці задач оптимального розбиття множин можливості нечіткості вхідних даних очікувано зумовить підвищення адекватності досліджуваних математичних моделей.

У роботі розглядається нечітка неперервна лінійна однопродуктова задача оптимального розбиття множин на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин, математична постановка якої ускладнена наявністю додаткових обмежень на розміщення центрів підмножин та припущенням, що деякі вхідні дані задачі можуть бути задані нечітко. Нечіткою задачею вважаємо неперервну задачу оптимального розбиття з додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин з нечіткими па-

раметрами у цільовому функціоналі. Відзначимо, що одну нескінченновимірну задачу оптимального розбиття в умовах нечітких вхідних даних сформульовано та розв'язано у праці [3]. Задача, що розглядається у цій роботі, є її узагальненням.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Спочатку сформулюємо математичну постановку задачі оптимального розбиття множин з додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин у чітких умовах.

Нехай Ω — обмежена, вимірна за Лебегом множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_N$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ — міра Лебега.

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Уведемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx. \quad (1)$$

Тоді під неперервною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття множини Ω з n -вимірного евклідового простору E_n на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, за обмежень у формі рівностей та нерівностей з відшуканням координат центрів τ_1, \dots, τ_N цих підмножин та додатковими обмеженнями на їх розміщення будемо розуміти таку задачу.

Задача 1. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$; A_1, \dots, A_N — замкнені множини простої структури, наприклад, n -вимірний невід'ємний октант, n -вимірний

паралелепіед та ін.; $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ — задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язуваності задачі 1:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Пару $(\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}, \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\})$, яка є розв’язком задачі 1, будемо називати оптимальною.

Задача 1 є нескінченновимірною задачею оптимального розбиття у чітких умовах (якщо $a_i = 0, i = 1, \dots, N$, — це нескінченновимірна транспортна задача).

Однак нескінченновимірні задачі оптимального розбиття з цільовим функціоналом (1) істотно ускладнюються в умовах невизначеності, зокрема, коли ряд параметрів у (1) є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі.

У цій роботі розглянемо випадок, коли у функціоналі (1) параметри a_1, \dots, a_N можуть бути задані нечітко. Для зняття нечіткості в задачі 1 застосуємо метод нейролінгвістичної ідентифікації складних нелінійних залежностей із праць [4, 5]. Опишемо коротко його суть.

МЕТОД НЕЙРОЛІНГВІСТИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_N позначимо їх відновлені значення як y і розглянемо функціональну залежність виходу y від входів z_1, \dots, z_q об’єкта ідентифікації у вигляді

$$y = y(z_1, \dots, z_q), \quad (2)$$

тут z_1, \dots, z_q — фактори, що впливають на y , і можуть бути задані нечітко. Для задачі ідентифікації передбачаються відомими області визначення входів z_1, \dots, z_q , область зміни виходу y для залежності (2), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (2) у вигляді вибірки даних про входи і вихід об’єкта ідентифікації.

Задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності вигляду (2) розглядається як побудова моделі об’єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв’язки <входи> – <вихід> і розв’язується, як правило, в два етапи [5]:

1) структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об’єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об’єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО–ТО», що генеруються з експериментальних даних;

2) параметрична ідентифікація (налаштування): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

У результаті застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації отримуємо точне (чітке) значення вихідної змінної y , яке розраховується за такими формулами:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \mu_{D_k}^*(y)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(y)} ; \quad (3)$$

$$\mu_{D_k}^*(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q) \leq 1, \\ 1 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (4)$$

$$p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q) = v_j^{*k} \prod_{i=1}^q \mu_{ij}^{*k}(z_i), \quad (5)$$

$$\mu_{ij}^{*k}(z_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z_i - t_{ij}^{*k}}{e_{ij}^{*k}} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (6)$$

де у формулах (3)–(6):

- $\mu_{D_k}^*(y)$ — функція належності вихідної змінної y класу D_k , $k = 1, 2, \dots, L$; L — кількість класів (лінгвістичних термів) вихідної змінної y ; d_k — центр класу D_k ;
- $p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q)$ — нечіткі продукційні правила, отримувані з експертно-експериментальної інформації про залежність (2); j — номер правила у k -му класі; $j = 1, 2, \dots, s_k$, s_k — кількість правил у k -му класі; v_j^{*k} — вага j -го правила у k -му класі виходу;
- $\mu_{ij}^{*k}(z_i)$ — дзвонова функція належності змінної z_i її лінгвістичному терму у j -му правилі k -го класу виходу вихідної змінної y ; t_{ij}^{*k} — координата максимуму і e_{ij}^{*k} — коефіцієнт концентрації цієї функції належності.

Зауваження 1. Значення v_j^{*k} — ваг правил у (5) та параметрів t_{ij}^{*k} , e_{ij}^{*k} функції належності (6) відмічено зірочкою як оптимальні, тобто такі, що отримані у результаті етапу параметричної ідентифікації методу нейролінгвістичної ідентифікації, у яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після налаштування нечіткої моделі об'єкта (2), досягає мінімального значення. Значення $\mu_{D_k}^*(y)$, $p_j^{*k}(z_1, z_2, \dots, z_q)$ та $\mu_{ij}^{*k}(z_i)$ у формулах (3)–(6) обчислюються за оптимальних значень v_j^{*k} , t_{ij}^{*k} , e_{ij}^{*k} .

Зауваження 2. Для налаштування нечіткої моделі моделі застосовано r -алгоритм Шора [6].

Таким чином, у функціоналі (1) кожний з параметрів a_1, \dots, a_N , позначених вище як вихід y , що залежить від входів z_1, \dots, z_q , у методі нейролінгвістичної ідентифікації, розраховується за формулами (3)–(6).

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для розв'язання задачі 1 з відновленими значеннями a_1, \dots, a_N уведемо характеристичні функції підмножин Ω_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

і перепишемо задачу 1 у термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ у такому вигляді.

Задача 2. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times A^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma_2 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N\},$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N\}.$$

Функції $c(x, \tau_i)$ — дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом x за будь-якого фіксованого $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ — сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, які називають центрами цих підмножин, причому координати центрів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ заздалегідь невідомі і потребують свого визначення за умови

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N ;$$

b_1, \dots, b_N — задані невід'ємні числа, причому

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + \bar{a}_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (7)$$

У виразі (7) через \bar{a}_i позначені нечіткі параметри a_1, \dots, a_N , значення яких відновлені за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації. За-

дача 2 є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$.

Для задачі 2 у праці [7] доведено теорему, яка визначає вид її оптимального розв'язку $(\lambda^*(\cdot), \tau^*)$ для $i = 1, \dots, N$, і майже всіх $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, c(x, \tau_i^*) + \bar{a}_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_j^*) + \bar{a}_j + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad (8)$$

де у якості $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ обирається оптимальний розв'язок скінченновимірної недиференційовної задачі оптимізації:

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in A^N} G_1(\tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in A^N} \left[\int_{\Omega} \min_{j=1, N} [c(x, \tau_j) + \bar{a}_j + \psi_j] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right] \rightarrow \max \end{aligned} \quad (9)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (10)$$

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} [c(x, \tau_j) + \bar{a}_j + \psi_j] \rho(x) dx. \quad (11)$$

Для відшукування розв'язку задачі (9)–(11) використаємо алгоритм узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів, близький до r -алгоритму Шора [6]. Для цього від задачі (9)–(11) перейдемо до задачі безумовної максимізації за ψ за допомогою введення в цільову функцію (9) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N\}$, знайти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in A^N} P(\tau, \psi), \quad (12)$$

де

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - s \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i).$$

Тут s — досить велике додатне число (значно більше максимальне з множників Лагранжа для функції (11)). Можливість переходу від задачі (9)–(11) до (12) показано у праці [7].

Визначимо i -у компоненту $2N$ -вимірною вектора узагальненого псевдоградієнта

$$\begin{aligned} g_P(\tau, \psi) &= (g_P^{\tau}(\tau, \psi), -g_P^{\psi}(\tau, \psi)) = \\ &= (g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi)) \end{aligned}$$

функції (5) у точці $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ таким чином:

$$g_P^{\Psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + s \cdot \max[0, \text{sign}(\psi_i)], & i = p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (13)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

де $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$ — i -а компонента N -вимірного вектора узагальненого градієнта $g_c^{\tau}(\tau, x)$ функції $c(x, \tau_i)$ у точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$.

Опишемо алгоритм.

Алгоритм. Попередній етап. Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат; вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{[0]}, \psi^{[0]})$. Обчислюємо значення характеристичної функції $\lambda^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулою (8), якщо $\tau = \tau^{[0]}$, $\psi = \psi^{[0]}$. Обчислюємо компоненти вектора $g_P(\tau, \psi)$ у вузлах сітки за формулами (13) і (14), якщо $\tau = \tau^{[0]}$, $\psi = \psi^{[0]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$. Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r -алгоритму.

Крок 1. Алгоритм проводимо за формулами:

$$\begin{aligned} \tau^{[1]} &= P_{A^N}(\tau^{[0]} - h_0 g_P^{\tau}(\tau^{[0]}, \psi^{[0]}); \\ \psi^{[1]} &= \psi^{[0]} + h_0 g_P^{\psi}(\tau^{[0]}, \psi^{[0]}), \end{aligned}$$

де P_{A^N} — оператор проектування кожного з центрів підмножин $\tau_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, N$) на його допустиму множину $A_i \subseteq \Omega$.

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після k , $k = 1, 2, \dots, n$ кроків алгоритму отримано певні значення $\tau = \tau^{[k]}$, $\psi = \psi^{[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[k-1]}(x)$ у вузлах сітки.

Крок $[k + 1]$ -й:

1) обчислюємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ у вузлах сітки за формулою (8) при $\tau = \tau^{[k]}$, $\psi = \psi^{[k]}$;

2) обчислюємо значення $g_P(\tau, \psi)$ в узлах сітки за формулами (13) і (14) для $\tau = \tau^{[k]}$, $\psi = \psi^{[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$;

3) виконуємо обчислення за ітераційними формулами:

$$\begin{aligned} \tau^{[k+1]} &= P_{A^N}(\tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^{\tau} g_P^{\tau}(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}); \\ \psi^{[k+1]} &= \psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^{\psi} g_P^{\psi}(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}), \end{aligned}$$

де $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ — оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n , причому $B_0^\tau = I_N, I_N$ — одинична матриця; $\tilde{g}_P(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}) = B_{k+1}^* g_P(\tau^{[k]}, \psi^{[k]})$; h_k — величина кроку, яка розраховується з умови мінімуму різниці $[G_1(\tau^{[k-1]}, \psi^{[k-1]}) - G_1(\tau^{[k]}, \psi^{[k-1]})]$ у напрямку узагальненого антипсевдоградієнта $-g_P(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі [7];

4) якщо умова

$$\|(\tau^{[k+1]}, \psi^{[k+1]}) - (\tau^{[k]}, \psi^{[k]})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (15)$$

не виконується, переходимо до $[k + 2]$ -го кроку алгоритму, якщо виконується, — то до п.5;

5) вважаємо $\tau^* = \tau^{[l]}, \psi^* = \psi^{[l]}, \lambda^*(x) = \lambda^{[l]}(x)$, де l — номер ітерації, на якій виконалась умова (15);

б) обчислюємо оптимальне значення цільового функціонала $G_1(\tau, \psi)$ за формулою (11), якщо $\tau = \tau^*, \psi = \psi^*$, і для контролю правильності розрахунків оптимальне значення цільового функціонала задачі 2 знаходимо за формулою

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau^*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i^*) + \bar{a}_i) \rho(x) \lambda_i^*(x) dx.$$

Завершення роботи алгоритму. Розроблений алгоритм програмно реалізований мовою програмування Java у середовищі розробки IntelliJ IDEA. Його роботу проілюстровано на модельній задачі.

МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА

Нехай задано множину $\Omega = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$ споживачів однорідної продукції, яка може вироблятися за п'ятьма пунктами виробництва. Вартість транспортування одиниці продукції з i -го, $i = \overline{1, 5}$, пункту виробництва до споживача $(x^{(1)}, x^{(2)})$ задається у вигляді

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Попит на продукцію $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \equiv 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$. При цьому потужність i -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i , і не перевищує заданих обсягів $b_i = 1, i = \overline{1, 5}$.

Не виключається випадок, коли деякі з підмножин Ω_i можуть виявитися порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування Ω_i п'ятьма пунктами виробництва та розмістити ці пункти в області Ω так, щоб мінімізувати функціонал (1) сумарних витрат на доставку про-

дукції до споживача. Також на координати τ_i розташування пунктів виробництва накладено додаткові обмеження:

варіант 1:

$$\tau_2 \in A_2, \text{ де } A_2 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0,6 \leq x^{(1)} \leq 0,8; 0,3 \leq x^{(2)} \leq 0,5\};$$

варіант 2:

$$\tau_4 \in A_4, \text{ де } A_4 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): \|x - z_0\| \leq 0,12\}, z_0 = (0,3; 0,6).$$

Для розв'язання модельної задачі за допомогою описаного алгоритму та його програмної реалізації множина Ω покривалася прямокутною сіткою з вузлами (i, j) , $i = 1, \dots, 100$, $j = 1, \dots, 100$. Як початкові значення двоїстих змінних задано $\psi^{[0]} = 0$, початкові координати розташування пунктів виробництва $\tau^{[0]} = (0; 0)$, $i = 1, \dots, 5$. Для умови припинення обчислень (15) задано значення $\varepsilon = 10^{-4}$.

Наведемо спочатку результати оптимального розбиття множини Ω за точних значень параметрів a_i : $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,1$; $a_3 = 0,38$; $a_4 = 0,2$; $a_5 = 0$. Для випадку відсутності додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 150 ітерацій отримано: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,2679$; оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,2848; 0,2415)$; $\tau_2 = (0,2019; 0,7632)$; $\tau_4 = (0,8099; 0,1496)$; $\tau_5 = (0,7103; 0,6575)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 1, а). Тут замість розбиття на п'ять підмножин оптимальним виявилось розбиття на чотири підмножини, одна підмножина Ω_3 виявилася порожньою тому, що значення a_3 значно більше за a_i , $i = 1, 2, 4, 5$.

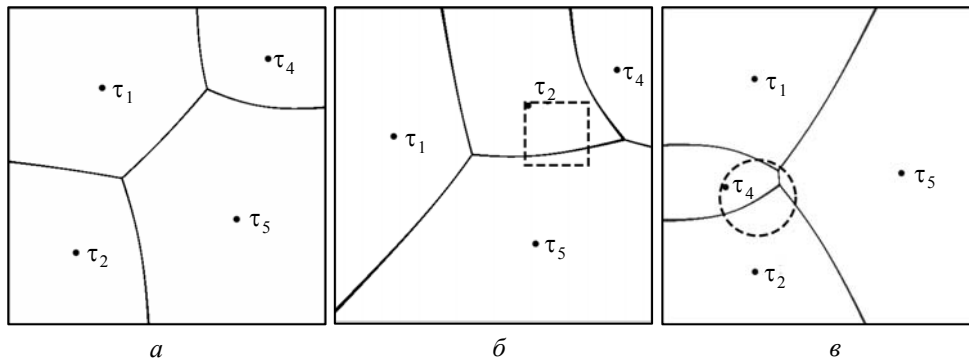


Рис. 1. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для чітких параметрів a_i , $i = 1, 2, 4, 5$: а — без додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва ($F = 0,2679$); б — з додатковим обмеженням на розміщення пунктів виробництва ($F = 0,2850$); в — з додатковим обмеженням на розміщення пунктів виробництва ($F = 0,2850$)

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 1 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 8 ітерацій отримано: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,2850$,

оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,1755; 0,3981)$; $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$; $\tau_4 = (0,8805; 0,1861)$; $\tau_5 = (0,6238; 0,7402)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 1, б).

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 2 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 28 ітерацій отримано: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,2792$, оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,2798; 0,2137)$; $\tau_2 = (0,2813; 0,8242)$; $\tau_4 = (0,1882; 0,5564)$; $\tau_5 = (0,7446; 0,5119)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 1, в).

Для розв'язання модельної задачі з нечіткими параметрами a_1, \dots, a_5 застосовано розроблений алгоритм з тими ж вхідними даними, що і для чітких параметрів a_1, \dots, a_5 .

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 1 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму для відновлених значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 до налаштування отримано за 21 ітерацію: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,3189$, оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,2198; 0,3275)$; $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$; $\tau_4 = (0,8689; 0,2048)$; $\tau_5 = (0,5792; 0,7479)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 2, а). За відновлених значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 після налаштування отримано за 8 ітерацій: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,2850$, оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,1755; 0,3981)$; $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$; $\tau_4 = (0,8805; 0,1861)$; $\tau_5 = (0,6234; 0,7402)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 2, б).

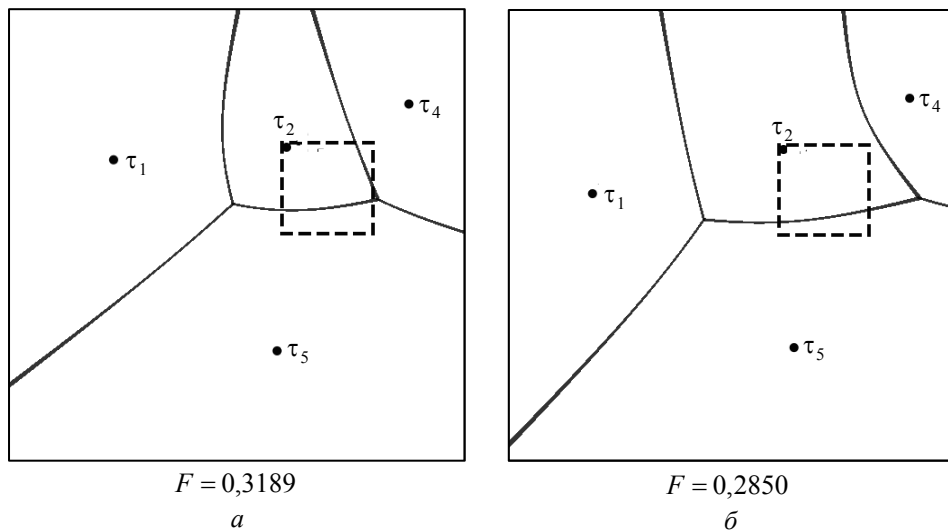


Рис. 2. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва з додатковими обмеженнями для варіанта 1: а — для відновлених значень нечітких параметрів a_i , $i = 1, 2, 4, 5$, до налаштування, б — після налаштування

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 2 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму для відновлених

значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 до налаштування отримано за 10 ітерацій: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,3145$, оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,2490; 0,2753)$; $\tau_2 = (0,1547; 0,8174)$; $\tau_4 = (0,3801; 0,6893)$; $\tau_5 = (0,7523; 0,4238)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 3, а). За відновлених значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 після налаштування отримано за 27 ітерацій: мінімальне значення цільового функціонала $F = 0,2792$, оптимальні координати центрів: $\tau_1 = (0,2802; 0,2090)$; $\tau_2 = (0,2845; 0,8230)$; $\tau_4 = (0,1878; 0,5575)$; $\tau_5 = (0,7439; 0,5086)$. Оптимальне розбиття для цього випадку показано на рис. 3, б).

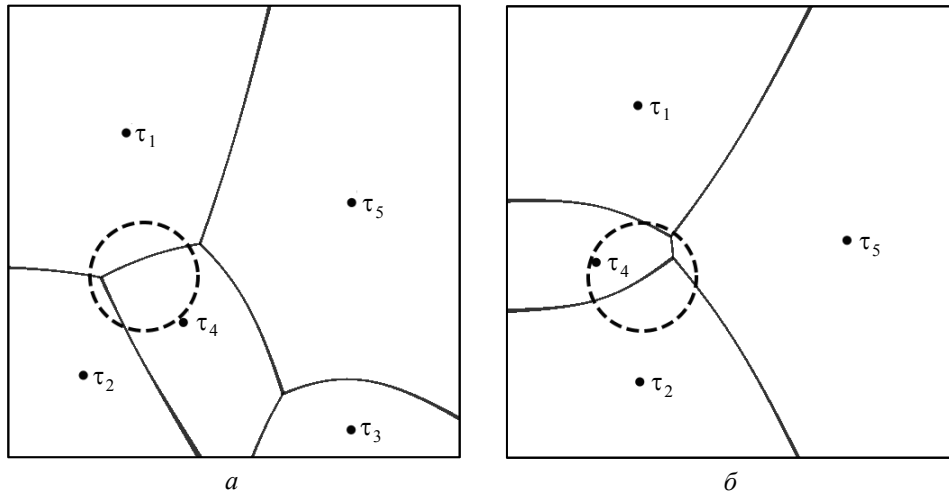


Рис. 3. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва з додатковими обмеженнями для варіанта 2: а — для відновлених значень нечітких параметрів a_i , $i = 1, \dots, 5$, до налаштування ($F = 0,3145$), б — після налаштування ($F = 0,2792$)

Порівнюючи результати розв'язання модельної задачі (див. рис. 1, 2, 3), отримані для чітких параметрів та нечітких параметрів, відновлених за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації після налаштування, бачимо, що оптимальні розв'язки збігаються з достатнім ступенем точності.

Таким чином, можна зробити висновок, що метод нейролінгвістичної ідентифікації з достатнім ступенем точності відновлює значення параметрів, які невідомі або неточні. Причому, як очікувалося, значення цільових функціоналів для задачі з обмеженнями на розміщення центрів не менші, ніж значення цільових функціоналів без таких обмежень.

ВИСНОВКИ

Роботу присвячено подальшому розвитку теорії оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_n на випадок неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множин за наявності додаткових обмежень на розміщення центрів підмножин та нечітких параметрів у цільовому функціоналі.

Розроблено алгоритм розв'язання цієї задачі, який ґрунтується на застосуванні загального підходу, розробленого у теорії оптимального розбиття множин [2], а саме: зведення неперервної нескінченновимірної задачі оптимального розбиття до негладкої скінченновимірної задачі оптимізації, для числового розв'язання якої застосовується метод узагальнених псевдоградієнтів, близький до r -алгоритму Шора. Для відновлення значень нечітких параметрів у цільовому функціоналі задачі застосовано нейронечіткі технології.

Розроблений алгоритм програмно реалізований мовою програмування Java у середовищі розробки IntelliJ IDEA. Його роботу проілюстровано на модельній задачі. Аналіз результатів розв'язання модельної задачі показав ефективність роботи розробленого алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Kiseleva E.M.* The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n -Dimensional Euclidean Space. Theory and Application / E.M. Kiseleva // Journal of Automation and Information Sciences. — 2018. — Vol. 50, Issue 9. — P. 1–24. — DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
2. *Кісельова О.М.* Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: моногр. / О.М. Кісельова. — Д.: Ліра, 2018. — 532 с.
3. *Кісельова О.М.* Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі / О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: Ліра, 2018. — С. 91–104. — DOI: 10.15421/321810.
4. *Борисов В.В.* Нечеткие модели и сети / В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федюлов. — М.: Горячая линия-Телеком, 2015. — 284 с.
5. *Kiseleva E.M.* Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies / E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, S.V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences. — 2016. — Vol. 48, Issue 9. — P. 1–22. — DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
6. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. — К.: Наук. думка, 1979. — 200 с.
7. *Киселева Е.М.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. — К.: Наук. думка, 2005. — 564 с.

Надійшла 18.02.2020

OPTIMAL STOCK PORTFOLIO DIVERSIFICATION UNDER MARKET CONSTRAINTS

V. KULIAN, M. KOROBOVA, O. YUNKOVA

Abstract. The problem of optimal portfolio diversification is considered. Based on mathematical models of the dynamics of the market value formation of a single share and an optimal stock portfolio, the structure of the optimal portfolio is determined. Such models are built in a class of ordinary differential equations. One of the problems of optimal investing is optimizing the expected return of the stock portfolio for the desired level of risk. Another problem is the choice of the stock portfolio with the same expected return, but with a smaller risk. For this purpose, we use a set of acceptable and effective portfolios. This sequence of steps of the algorithm allows consistently solve two optimization problems. The problem of portfolio diversification consists of the problem of determining the moments of time and the necessity to perform such a diversification. In the article, we constructed an algorithm for determining these points of time, based on the solution of an optimal control problem. The application of this algorithm enables to select an optimal risk portfolio at a certain level of its expected profitability. It uses an efficient and acceptable set of investment portfolios.

Keywords: optimal portfolio, diversification, admissible set, effective set.

THE GOAL OF THE WORK

In this paper an attempt to construct new fundamental approaches for solving portfolio investment problems, based on the application of dynamic systems mathematical modeling and the admissible and effective set of portfolio is made.

Main purpose of this paper is to apply mathematical modeling methods and management theory to solve dynamic investment management problems, to explore asset and liability portfolio management strategies, and in general financial instruments in a dynamic case. We develop analytical methods and computational procedures for solving the problem of two-criterion optimization of a portfolio of risky securities. The problems are presented in the formulation of H. Markowitz [1] in the presence of quantitative and qualitative instrumental market constraints on the structure of the portfolio. It's important to say, that an alternative approach to solving the problem of investment optimization and which has proved to be quite effective is to use the apparatus of fuzzy sets [6,7].

MATHEMATICAL FORMALIZATION AND CONSTRUCTION OF MODELS

Dynamic Asset and Liability Management (ALM) [1] models have found the most successful use in long-term financial planning, where the need for multiple decision-making is determined by the essence of the process. Examples of ALM work include implemented models for pension funds, insurance companies, investment companies, banks, university funds [1].

The general scheme of active management of a stock portfolio, as a rule, consists of the following steps:

1. Calculation of the price of an individual share on the basis of static deterministic models.
2. Analysis of static stock portfolio.
3. Modeling of asset dynamics.
4. Modeling the dynamics of the asset portfolio.
5. Integrated management and diversification of assets portfolio.

In order to move from the problem of static to dynamic consider Sharp's market model

$$r = \alpha + \beta SM_{\text{ind}} + \varepsilon,$$

where r — the market price of the stock; SM_{ind} — stock market index; α — some basic value for r . The equation describes the only general principles for determining market value of a stock. From the above correlation it can be seen that the market value of the stock is formed by the integral influence of the stock market index and the random component. The ratio can be formally regarded as a characteristic of the impact of the market index on the formation of one share market value. Given that such processes occur over time, we can write down

$$r(t) = \alpha(t) + \beta SM_{\text{ind}}(t) + \varepsilon.$$

It would be a great simplification, when modeling such a complex process, to consider function as the primary and the only one that generates value. The analysis of the factors influencing the dynamics of the process gives grounds to argue that such significant factors can also be attributed to the correlation between securities and inflation. So let's write it in the form

$$r_i(t + \delta t) = r_i(t) + \beta(SM_{\text{ind}}(t), I(t), \rho_{ij}, r_i(t))\delta t, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Given the above, we write the right part in the form

$$r_i(t + \delta t) = r_i(t) + ((\alpha_1 SM_{\text{ind}}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t))\delta t,$$

$$\frac{r_i(t + \delta t) - r_i(t)}{\delta t} = (\alpha_1 SM_{\text{ind}}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Modern securities trading technologies and conditions of formation of market value of shares on the stock market make it possible to take the next step

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{\text{ind}}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t), \quad i = \overline{1, n},$$

where α_1, α_2 — model parameters.

In the case $\rho_{ij}, i = \overline{1, n}$, is also a vector of model parameters that takes into account correlations between stocks. Here n — the number of shares with which it correlates i — share.

In the time interval $t \in [t_0, t_1]$ equation that describes the return of the stock portfolio r_p , looks like

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t)r_i(t),$$

where x_i — part of shares i — kind in the portfolio; r_i — expected return on shares of i — kind. Differentiating both parts by t , we will get

$$\frac{dr_p}{dt} = \sum_i (r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt}).$$

Let us consider that for $i \neq j$ there are relationships

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}.$$

Function f is the right part of the mathematical model of stock price formation [3]

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{\text{ind}}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \alpha_3(x(t), r(t)).$$

Then the dynamic equation of pricing of the stock portfolio will look like

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), \quad i \neq j.$$

The last ratio, assuming the above, describes the dynamics of the behavior of a portfolio of risky securities. His more detailed analysis points to two important features that characterize the market value of the portfolio and that it depends on the dynamics of both the expected return on the shares and the change in the structure of the portfolio.

For solving and analyzing applied portfolio investment problems there are wide range of approaches [2], [3]. A significant part of them involves the active use of technical analysis methods, which make it possible to determine the market value of the stock in the future. Such rules for constructing the forecast, due to the well-developed mathematical formalizations and approaches and relatively not complicated practical implementation, are actively developing and effectively applied not only in the stock market. An application of fundamental analysis analytical methods allows for us to answer the question: why the market value of a stock in the future will be just such? At present, due to the complexity of mathematical models in the study of the market pricing processes of stock market assets, the methods of fundamental analysis have not yet found effective development and constructive application. Principles for analyzing processes based on the development and application of mathematical modeling methods [2–6] are obviously the most promising and devote much attention to the research.

MATHEMATICAL FORMULATION OF THE PROBLEM

The mathematical problem of constructing the optimal dynamics of the portfolio of shares in the most general formulation of H. Markowitz has the form [1]

$$\left. \begin{array}{l} r^T x = \max_x, \\ x^T V x \rightarrow \min_x, \\ I^T x = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Here T — is the sign of transposition.

The content of this two-criterion task (1) is to determine the optimal investment strategy, which involves maximizing the expected profitability and minimizing the risk at the same time. According to H. Markowitz, the criteria in the task are controversial, that is, improving the outcome of one of them leads to deterioration beyond others. In practice, this means that increasing the profitability of a portfolio corresponds to an increase in its riskiness. There are different approaches to solving the problem (1), but they are more academic in nature and difficult to apply to real investment in securities. A step that can bring the problem formulation (1) closer to the practical investment needs divide this two-criterion problem into two one-criterion ones. The first of them involves risk optimization at a predetermined level of expected profitability at the chosen time point, and the second is the optimization of the expected profitability for the investor-defined "optimal" portfolio risk level. In some cases, such mathematical statements of nonlinear programming problems allow for analytical solutions [2], but do not consider the essential features. They consist in the fact that at each step the solution of the problem of diversification of the portfolio of portfolios must be taken into account as budgetary and instrumental constraints. The constraints make possible to analyze the availability of the required quantity and quality of financial instruments on the market

$$x_i(t) \in X(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Here $X(t)$ — limited set of admissible portfolios. The mathematical formulation of the problem of optimizing the risk of an investment portfolio at a time point determined by the level of its expected profitability is

$$\left. \begin{array}{l} r^T(T)x(T) = r_p(T), \\ x^T(T)Vx(T) \rightarrow \min_x, \\ I^T x(T) = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, T], \\ x_i(t) \in X(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, T]. \end{array} \right\} \quad (3)$$

On an example of investing in a stock, we consider the problem of optimizing portfolio risk for a given level of its expected return (3), while taking into account the constraints (2).

THE PROBLEM OF OPTIMAL PORTFOLIO DIVERSIFICATION

The optimal diversification procedure consists of successive steps, each of which makes the decision on the best one, taking into account the limitations of the structure of the stock portfolio.

The first step in solving the problem is to identify the times at which it is appropriate to diversify the portfolio. For this purpose, we will use Algorithm 2 [3] to solve the problem of determining the optimal moments of stock portfolio diversification. The algorithm procedure allows to determine consecutive time points that divide the study interval into separate intervals, each of them builds optimal trajectories of acceptable portfolios in the presence of market constraints on the portfolio structure. The mathematical problem of optimizing a stock portfolio based on a programme trajectory and possible algorithms for solving it are described in [3]. A graph showing an example of the interval breakdown and corresponding trajectories at each time interval is given on fig. 1.

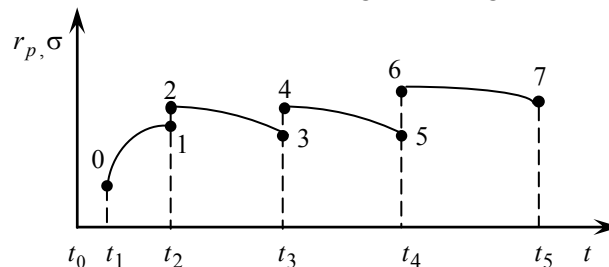


Fig. 1. Stock portfolio trajectories that are optimal over time

On the basis of modeling the dynamics of one share market value and the portfolio of shares, the task of optimal management of different types of shares in the portfolio is solving. The result of this task is trajectories 0–1, 2–3, 4–5, 6–7.

The next step is to build an optimal diversification procedure for the investment portfolio at each individual interval. General task of H. Markowitz of risky assets portfolio optimization (1) involves consideration of another criterion – riskiness. Let's use this in the future by the set of admissible and effective portfolios. At the same time, one of the main tasks of portfolio investment is the problem of optimal diversification of such portfolio.

The risk optimization procedure for optimal portfolio profitability is to select at each step the permissible portfolios that lie on the appropriate line. This line connects the point, that corresponds to the optimal market value of the portfolio with the point, belonging to the effective set. This line is parallel to the axis of riskiness of portfolios. The feature of this choice of optimal portfolio is that in this line, according to the definition, each of the portfolios corresponds to the same expected profitability, but the risk decreases in the direction of the axis. This property of the admissible set of investment portfolios allows from one side to take into account the limitations (2) and on the other — to determine the portfolio of “optimal” expected returns with less risk. For t_1 time moment admissible and effective sets will look like as on a fig. 2.

In fig. 1 points 1 and 2 are defined for the time moment t_1 . Point 1 is the optimal portfolio for the moment, calculated on the basis of solving the problem of optimal portfolio management structure using one of the algorithms described

in [3]. In order to obtain the initial optimal portfolio value for the next time moment t_2 , we apply a valid and effective set.

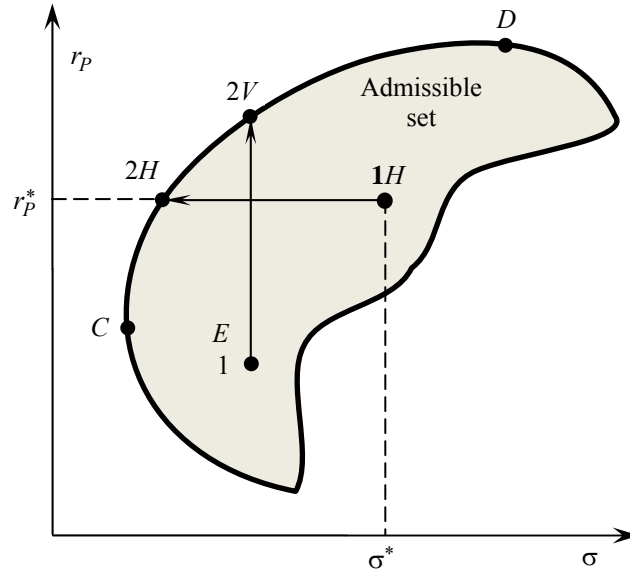


Fig. 2. Solving the problem of optimizing the stock portfolio risk for t_1 time moment

In line 1–2, fig. 2, depending on the formulation of the problem, choose the optimal value of the initial value for the next interval portfolio value. It should be noted that one of the tasks may involve determining the optimal value of the expected return for a given level of risk, and the other – on the contrary. Thus, the built-in algorithm of diversification of the optimal stock portfolio makes it possible to take into account the instrumental and quantitative constraints in the construction of the optimal stock portfolio that emerges on the market at any given time.

We will apply this procedure to build an optimal stock portfolio for the following time intervals.

For t_2 time moment admissible and effective sets will look like as on a fig. 3.

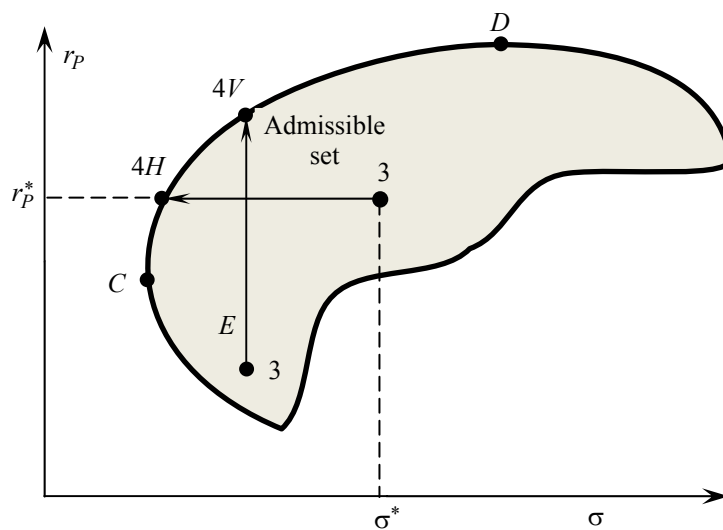


Fig. 3. Solving the problem of optimizing the stock portfolio risk for t_2 time moment

For t_3 time moment admissible and effective sets will look like as on a fig. 4.

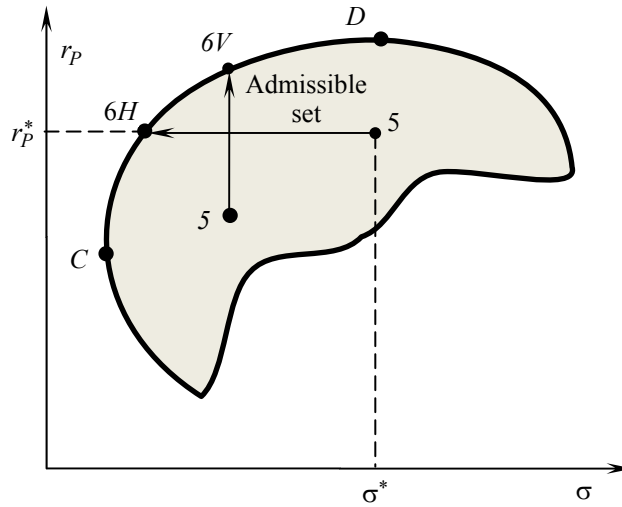


Fig. 4. Solving the problem of optimizing the stock portfolio risk for t_3 time moment

Let's turn to the second task in the general statement of H. Markowitz about optimization of risk optimal for the expected profitability of the portfolio of shares. To do this, we use the sets of admissible and effective portfolios that correspond to the selected set of shares [1, 2].

If a certain portfolio is at a point 5, that is, for which there is no risk of reducing according to the above rule, then we define the “optimal portfolio” by moving it from point 5 to point 6V that is an element of an effective portfolio of portfolios. In fact, this means the definition of a portfolio of stocks with a higher expected return. At the same time, such a procedure allows constructively to take into account the existing limitations when diversifying the portfolio.

Another mathematical statement of the problem of optimizing the expected return on the investment portfolio at a time point determined by the level of its risk, is such

$$\left. \begin{aligned} & r^T(T)x(T) \rightarrow \max_x, \\ & x^T(T)Vx(T) = \tau, \\ & I^T x(T) = 1, \\ & x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T], \\ & x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T]. \end{aligned} \right\}$$

The procedure for optimizing the expected return on a portfolio for a certain level of its risk is to select a procedure for optimizing the expected return of a portfolio for a certain level of its risk is to select at each step the admissible portfolios that lie of the straight line 5–6 (fig. 4). The line connects the points 5 that corresponds to the optimal expected return on the calculated portfolio and the point 6 belonging to the effective set. This line is parallel to the axis of market value. The feature of this choice of optimal portfolio is that in this line, according

to the definition, each of the portfolios is responsible for the same risk, but the market value increases.

This property of the admissible set of investment portfolios, as in the previous case, allows one to take into account the restrictions (2), on the other hand, to define a portfolio with “optimal” risk and higher expected returns.

As defined above, portfolio is at a point 5, that is, for which there is no possibility to increase the expected yield, according to the above rule, then we determine the “optimal portfolio” by moving it from point 5 to point 6H that is an element of an effective portfolio of portfolios. In fact, this means reducing the risk profile of the stock portfolio.

The above examples of admissible and effective sets are based on statistical information on the market value of shares in the FMTS and UM markets. Such information is concise and is provided to describe the computational capabilities of the stock portfolio diversification algorithm.

CONCLUSION

In this study, new mathematical statements of optimization of stock portfolio structure are presented and methods of their solution are developed. Mathematical problems formulated on the basis of models of the dynamics of market value of one share and portfolio of shares. That gives an opportunity to solve the problem of optimal diversification of the portfolio of investments, taking into account of quantitative and qualitative market restrictions on the structure of the portfolio.

REFERENCES

1. *Sharpe W. F.* Investments / W.F. Sharpe, G.J. Alexander, J.V. Bailey. — Prentice Hall PTR, 1998. — 992 p.
2. *Garashchenko F.G.* Quality analysis of mathematical models of investment management / F.G. Garashchenko, V.R. Kulian, V.V. Rutitskaya // Cybernetics and Computer Engineering. — 2005. — No. 148. — P. 3–10.
3. *Garashchenko F.G.* Modelling and Analysis of Investment Trends / F.G. Garashchenko, V.R. Kulian, V.V. Rutitskaya // Journal of Automation and Information. — New York: Connecticut. — 2011. — Vol. 43, Issue 12. — P. 48–58.
4. *Zaychenko Yuri.* Direct and dual problem of investment portfolio optimization under uncertainty / Yu. Zaychenko, I. Sydoruk // International Journal “Information Technologies & Knowledge”. — 2014. — Vol. 8, No. 3. — P. 225–242.
5. *Zaychenko Y.P.* Analysis of the investment portfolio on the basis of forecasting stock prices / Zaychenko Y.P., Malyhah Esfandyarfard // Visnyk NTUU “KPI”. Informatics, operation and computer science. — 2007. — No. 47. — P. 168–179.
6. *Zaychenko Y.* Analysis of multicriteria problem of the portfolio optimization based on prediction of the assets / Zaychenko Y., Sydoruk I. // Visnyk NTUU “KPI”. Informatics, operation and computer science. — 2015. — No. 62. — P. 79–88.
7. *Orlovsky S.A.* Problems of decision making at fuzzy initial information / S.A. Orlovsky. — M.: Nauka, 1981. — 208 p.

Received 13.02.2020

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ НА ОДНОЙ МАШИНЕ ВО ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Ю.А. ЗАК

Аннотация. Классическая в теории расписаний задача построения последовательности выполнения заданий на одной машине, учитывающая не только затраты времени на работу оборудования, но и потери на постобработку, рассматривается для многостадийных производственных систем, состоящих из взаимосвязанной цепочки участков и цехов промышленного предприятия. В качестве критерия оптимальности рассматривается выполнение многостадийного расписания в кратчайшие сроки. Предложены методы расчета нижней границы длины оптимального расписания и эвристические алгоритмы получения приближенных решений, требующие небольших объемов вычислений. Предложенные алгоритмы иллюстрируются числовыми примерами.

Ключевые слова: последовательности выполнения заданий, многостадийные расписания, минимальное время, эвристический алгоритм, нижняя граница значения критерия оптимальности.

ВВЕДЕНИЕ

Построение расписаний в многостадийных системах имеет много практических приложений в машиностроении и приборостроении, автомобильной, электронной, деревообрабатывающей, легкой, пищевой и других отраслях промышленности, а также в организации технического и сервисного обслуживания объектов. Календарное планирование работы всей последовательной цепочки производств позволит повысить эффективность работы взаимосвязанной системы участков и цехов промышленного предприятия, определит конкретизацию во времени изготовления всех изделий, обеспечит выпуск различных видов продукции в установленные договорами сроки и с наилучшими технико-экономическими показателями. В монографиях и большинстве публикаций по теории расписаний в периодической литературе в различных постановках и с различными критериями оптимальности рассматривались математические модели, точные и приближенные методы решения классических задач построения последовательностей выполнения заданий на одной машине применительно только к одному структурному подразделению предприятия. Наибольший интерес представляет учет времени, необходимого на постобработку после завершения изготовления изделий на машине. В качестве критериев оптимальности выбирается выполнение всего комплекса работ в кратчайшие сроки [1–5]. При этом независимые друг от друга расписания для каждого отдельного участка могут оказаться совершенно неэффективными для общей многостадийной сис-

темы, включающей последовательную цепочку, состоящую из нескольких участков. Задачам построения многостадийных расписаний выполнения заданий на одной машине, которые имеют большое практическое значение и ярко выраженную специфику, не уделялось достаточного внимания в литературе. Практически важные постановки и пути решения задач построения двухстадийных расписаний рассматривались в работах М.З. Згуровского и А.А. Павлова [3], а в случае, когда второй стадией обработки является процесс сборки изделий, — в публикациях Е.Н. Хоботова [11]. В работах автора [4, 6, 7] рассматривались постановки, математические модели, точные и приближенные методы решения некоторых классических задач в многостадийных производственных системах.

Задачи теории расписаний для многостадийных производственных систем, как правило, относятся к классу NP-полных задач экспоненциальной сложности. Они сложнее задач построения одностадийных расписаний и связаны с существенно большим числом переменных и ограничений. Построение математических моделей таких задач, исследование свойств их допустимых и оптимальных решений, а также алгоритмов получения эффективных и приближенных решений является чрезвычайно актуальным для построения систем календарного планирования производства, планирования ремонтных работ, обслуживания объектов и работы транспорта.

ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Технологический процесс предусматривает изготовление некоторого подмножества различных не связанных друг с другом изделий на нескольких стадиях обработки. Такими стадиями обработки могут быть стоящие в последовательной цепочке станки, многопроцессорные и многопоточные или автоматические линии, а также различные структурные единицы предприятия. В дальнейшем, как и во всех классических постановках задач построения последовательности выполнения заданий на одной машине, каждая стадия обработки рассматривается как одна машина, т.е. на каждой стадии производится обработка изделий на одной машине. Изготовление изделия на последней стадии обработки рассматривается как выполнение задания. Если даже технологией производства может предусматриваться на каждой стадии обработки изделия выполнение некоторого подмножества операций, задано суммарное время обработки на каждой стадии. После изготовления на технологическом оборудовании каждой стадии производится постобработка каждого изделия, связанная с контролем, испытанием, необходимым временем пролеживания (например, с охлаждением или нагреванием), оформлением необходимой документации, транспортными потерями времени и т.п., что наряду с необходимым временем на изготовление также требует затрат времени. На всех стадиях обработки изготовление изделий на технологическом оборудовании производится в одной и той же последовательности, и на оборудовании каждой из этих стадий ведется без прерываний. После изготовления изделия на k -й стадии и последующей постобработки изделие поступает на следующую стадию обработки. На машине каждой стадии обработки может начаться изготовление следующего в последовательности изделия непосредственно после завершения изготовления

предыдущего изделия. Начало обработки каждого изделия на следующем стоящем в последовательной цепочке участке может начаться только после завершения постобработки его на предыдущей стадии. Необходимо найти последовательность изготовления изделий, которая обеспечит минимальное время выполнения расписания на всех стадиях обработки. Эффективные алгоритмы точного решения такой задачи в одностадийных системах, учитывающей потери времени на постобработку с помощью Schrage-algorithms и его модификации впервые были предложены в работе J. Carlier (1982) [8] и развиты в условиях различного вида ограничений в работах автора [2, 4, 12].

Введем следующие обозначения:

$i = 1, \dots, n$ — индексы обрабатываемых изделий;

$k = 1, \dots, K$ — индексы различных стадий обработки;

d_i^k — допустимый наиболее ранний срок начала выполнения i -го задания на k -й стадии обработки;

d_i, D_i — соответственно граничное время начала и завершения выполнения i -го задания;

t_i^k — время выполнения i -го задания на k -й стадии обработки;

r_i^k — необходимое время постобработки после выполнения i -го задания на k -й стадии обработки;

x_i^k, θ_i^k — соответственно время начала и завершения выполнения i -го задания на машинах k -й стадии обработки;

z_i^k, r_i^k, Z_i^k — соответственно время начала, длительности и завершения постобработки i -го задания на k -й стадии технологического процесса;

$T_i = Z_i^k$ — время завершения всех работ многостадийного изготовления и постобработки i -го изделия;

$F = \max_{i \in I} T_i$ — время завершения всех работ многостадийного расписания, т.е. значение критерия оптимальности задачи.

Пусть построена некоторая последовательность выполнения заданий

$$\tilde{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j, \dots, u_n\}.$$

Время начала и время завершения выполнения каждого из заданий и постобработки изделий на всех стадиях обработки определяются по формулам:

$$x_{u_1}^1 = d_{u_1}^1 + 1, \theta_{u_1}^1 = x_{u_1}^1 + t_{u_1}^1 - 1, z_{u_1}^1 = \theta_{u_1}^1 + 1, Z_{u_1}^1 = z_{u_1}^1 + r_{u_1}^1 - 1; \quad (1)$$

$$x_{u_1}^k = \max(d_{u_1}, \theta_{u_1}^{k-1}) + 1, \theta_{u_1}^k = x_{u_1}^k + t_{u_1}^k - 1, z_{u_1}^k = \theta_{u_1}^k + 1,$$

$$Z_{u_1}^k = z_{u_1}^k + r_{u_1}^k - 1 \quad k = 2, \dots, K, \quad (2)$$

$$x_{u_j}^1 = \max(d_{u_j}, Z_{u_{j-1}}^K) + 1, x_{u_j}^k = \max(d_{u_j}, \theta_{u_j}^{k-1}) + 1, \theta_{u_j}^k = x_{u_j}^k + t_{u_j}^k - 1, z_{u_j}^k = \theta_{u_j}^k + 1,$$

$$Z_{u_j}^k = z_{u_j}^k + r_{u_j}^k - 1, \quad k = 2, \dots, K; \quad j = 2, \dots, n; \quad (3)$$

$$T_{u_j} = Z_{u_j}^K, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Необходимо найти последовательность выполнения независимых друг от друга и одинаковую на всех стадиях обработки заданий, обеспечивающую выполнение критерия оптимальности $F = \min T_{u_n}$. В качестве дополнительных ограничений могут использоваться условия

$$x_{u_1}^1 \geq d_{u_1}^1, \quad Z_{u_1}^k \leq D_{u_1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛИНЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ

Время завершения выполнения и постобработки всех заданий многостадийной обработки изделий не может быть меньше каждой из следующих величин

$$f^k = \min_{1 \leq i \leq n} \left(d_i^k + \sum_{i=1}^n t_i^k \right) + \min_{1 \leq i \leq n} r_i^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (5)$$

После выполнения всех заданий с соответствующей постобработкой на k -й стадии технологического процесса необходимы еще временные затраты на всех других остальных стадиях обработки, величина которых не может быть меньше значения

$$\mu^l = \min_{1 \leq i \leq n} (d_i^l + t_i^l + r_i^l), \quad l = 1, \dots, (k-1), (k+1), \dots, K, \quad l \neq k. \quad (6)$$

Следовательно, нижняя граница длины расписания — $\mathfrak{G}(F)$ должна быть не меньше значения

$$\mathfrak{G}^k(F) = f^k + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K \mu^l, \quad k = 1, \dots, K. \quad (7)$$

Учитывая вышеизложенное, значение нижней границы длины многостадийного расписания вычисляется по формуле

$$\mathfrak{G}(F) = \max_{1 \leq k \leq K} \left(f^k + \sum_{l=1, l \neq k}^K \mu^l \right). \quad (8)$$

Пусть на некотором s -м шаге алгоритма построена подпоследовательность выполнения подмножества заданий $\tilde{I}^1 - \tilde{U}(s) = \{u_1(s), u_2(s), \dots, u_{j-1}(s), u_j(s), \dots, u_n(s)\}$, m — нижняя граница длины расписания $m \leq n$, и вычислены значения $\theta_{u_m(s)}^k, k = 1, \dots, K$, $\tilde{I}^2(s) = \{\tilde{I} / \tilde{I}^1(s)\}$ — подмножество подлежащих выполнению заданий. Тогда

$$f^k(s) = \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} [\max(d_i^k, \theta_{u_m(s)}^k) + \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} r_i^k], \quad k = 1, \dots, K;$$

$$\mu^l(s) = \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} [\max(d_i^l, \theta_{u_m(s)}^l) + t_i^l + r_i^l], \quad l = 1, \dots, (k-1), (k+1), \dots, K, \quad l \neq k.$$

Нижняя граница длины расписания для подпоследовательности выполнения подмножества заданий вычисляется по формуле

$$\mathfrak{G}[\tilde{U}(s)] = \max_{1 \leq k \leq K} \left\{ f^k(s) + \sum_{l=1, l \neq k}^K \mu^l(s) \right\}.$$

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Алгоритм 1

Обозначим $\tilde{I} = \{1, \dots, n\}$ — множество всех изделий, подлежащих обработке;

$s = 1, \dots, S = n$ — последовательные этапы выбора изделий, включаемых в обработку, т.е. выбор очередного члена последовательности, стоящего на последнем месте в строящейся подпоследовательности;

$\tilde{I}^1(s), \tilde{I}^2(s)$ — соответственно подмножество изделий, для которых уже в процессе выполнения алгоритма определено и не определено место в последовательности обработки на s -м этапе принятия решений: $\tilde{I}^1(s) \cup \tilde{I}^2(s) = \tilde{I}$, $\tilde{I}^1(s) \cap \tilde{I}^2(s) = \emptyset$;

$\tilde{U}(s) = \{u_1(s), u_2(s), \dots, u_{j-1}(s), u_j(s), \dots, u_n(s)\}$, $m \leq n$; — построенная подпоследовательность выполнения заданий многостадийной обработки на s -м этапе принятия решений;

$d_i^k(s), x_i^k(s), \theta_i^k(s), z_i^k(s), T_i(s) = Z_i^k(s)$ — значения выше определенных показателей на s -м этапе принятия решений.

В начале процесса, когда $s = 0$, положим $\tilde{I}^1(s) = \emptyset$, $\tilde{I}^2(s) = \{i = 1, 2, \dots, n\}$.

Шаг 0. На этом шаге вычисляем значения параметров $d_i^k(s=0)$, $x_i^k(s=0)$, $\theta_i^k(s=0)$, $z_i^k(s=0)$, $k = 1, \dots, K$, а также $T_i(s=0) = Z_i^k(s=0)$, для всех подлежащих обработке изделий, $i = 1, 2, \dots, n$ по формулам (1), (2), (4), (5).

Определяем $\theta_{u_1}^k(s=0) = \max_{1 \leq i \leq n} \theta_i^k(s=0)$. Устанавливаем изделие с индексом $i = u_1$ на 1-е место в строящейся последовательности $\tilde{U}(s+1) = \{u_1\}$. Если значение $\theta_{u_1}^k(s=0)$ справедливо для нескольких индексов, то в качестве $i = u_1$ выбирается изделие с наименьшим значением индекса или изделие с наименьшим значением $\theta_{u_1}^{K-1}(s=0)$.

Полагаем $\tilde{I}^2(s) = \{\tilde{I} / u_1\}$. Вычисляем $T_{u_1} = Z_{u_1}^K$.

В дальнейшем алгоритм предусматривает выполнение следующих шагов $s = 1, \dots, (n-1)$.

Шаг s. На s -м этапе решения, когда построена подпоследовательность выполнения заданий $\tilde{U}(s) = \{u_1, u_2, \dots, u_j\}$, для каждого из подмножества изделий выполняем вычисления следующих параметров:

$$x_{u_i}^1(s) = \max[d_{u_i}^1, Z_{u_{i-1}}^K] + 1, \quad x_{u_i}^k(s) = \max[d_{u_i}^k, \theta_{u_{i-1}}^k] + 1, \quad i \in \tilde{I}^2(s), \quad k = 2, \dots, K; \quad (9)$$

$$\theta_i^k(s) = x_i^k(s) + t_i^k, \quad Z_i^k(s) = \theta_i^k + r_i^k, \quad i \in \tilde{I}^2(s), \quad k = 1, \dots, K; \quad (10)$$

Вычисляем $\theta_{u_{j+1}}^K(s) = \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} \theta_i^K(s)$. Если значение $\theta_{u_{j+1}}^{K-1}(s=0)$ справедливо для нескольких индексов, то в качестве $i = u_{j+1}$ из подмножества выбирается изделие с наименьшим значением индекса или изделие с наименьшим значением $\theta_{u_{j+1}}^{K-1}(s=0)$.

Определяем

$$\tilde{I}^1(s+1) = \{\tilde{I}^1 \cup u_{j+1}\}, \tilde{I}^2(s+1) = \{\tilde{I}^2(s)/u_{j+1}\}, \tilde{U}(s+1) = \{u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}\}.$$

Находим $T_{u_{j+1}} = Z_{u_{j+1}}^K(s)$. Если выполняются условия

$$(j+1 = n), \tilde{I}^2(s+1) = \emptyset, \tilde{I}^1(s+1) = \tilde{I}, \quad (11)$$

то построенная последовательность $\tilde{U}(s+1) = \{u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}\}$ является решением задачи. Время выполнения расписания определяется выражением

$$F = \max_{1 \leq j \leq n} T_{u_j}.$$

Если условия (11) не выполняются, то полагаем $s := (s+1)$ и снова выполняем s -й шаг.

Алгоритм 2

Для решения задачи на двух машинах, что эквивалентно двухстадийной обработке на одной машине без постобработки и отсутствия ограничений на сроки выполнения заданий, наиболее эффективным является полиномиальный по времени алгоритм Джонсона [12, 13]. Все изделия разбиваются на 2 группы. Первая группа включает изделия, для которых $\bar{t}_i^1 \leq \bar{t}_i^2$, а вторая — для которых $\bar{t}_i^1 > \bar{t}_i^2$. Изделия 1-й группы упорядочиваются по неубыванию времен \bar{t}_i^1 в последовательности $\tilde{V}^1 = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{l-1}^1, v_l^1, \dots, v_L^1 \mid \bar{t}_{l-1}^1 \leq \bar{t}_l^1, l = 1, \dots, L\}$, а вторые — по невозрастанию времени \bar{t}_i^2 в последовательности $\tilde{V}^2 = \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_{r-1}^2, v_r^2, \dots, v_R^2 \mid \bar{t}_{r-1}^2 \geq \bar{t}_r^2, r = 2, \dots, R\}$. Здесь L и R — соответственно количество заданий в подмножествах \tilde{V}^1 и \tilde{V}^2 . Обработка изделий на двух машинах осуществляется в последовательности

$$\tilde{V} = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{l-1}^1, v_l^1, \dots, v_L^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{r-1}^2, v_r^2, \dots, v_R^2\}. \quad (12)$$

Доказано [13], что в случае 2 машин данный алгоритм обеспечивает оптимальное решение задачи и имеет полиномиальную сложность порядка $O(n^2)$. Данная эвристика может быть использована для получения приближенного решения сформулированной в данной работе задачи многостадийной обработки. При этом не принимается во внимание допустимое время начала выполнения заданий на всех стадиях обработки, кроме первой, а время постобработки на каждой стадии рассматривается как фиктивное время обработки на некоторой другой машине. Рассмотрим один из вариантов расчета значений \bar{t}_i^1 и \bar{t}_i^2 .

Определим $t_i^1 := t_i^1 + d_i^1$, $t_i^k := t_i^k$, $k = 2, \dots, K$. Пусть $m = \lfloor K/2 \rfloor$, где $\lfloor K/2 \rfloor$ — целая часть результата деления двух величин,

$$\bar{t}_j^1 = (d_j^1 + t_j^1 + t_j^1) + \sum_{k=2}^m (f_j^k + r_j^k), \quad \bar{t}_j^2 = \sum_{k=(m+1)}^K (t_j^k + r_j^k).$$

Решаем задачу построения расписания для 2 машин описанным выше алгоритмом Джонсона. В качестве решения задачи выбираем вариант и соответствующую последовательность двухстадийной обработки \tilde{V} . При выполнении заданий в последовательности \tilde{V} , построенной в соответствии с выражением (12), времена начала и завершения выполнения заданий и постобработки на машинах всех стадий обработки определяем по формулам (1)–(5). Описанный алгоритм, как и алгоритм Джонсона, имеет полиномиальную сложность и требует только в 2 раза большего объема вычислений.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Параметры затрат времени на изготовление и постобработку каждого изделия на каждой стадии технологического процесса сведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Номер заданий	Временные параметры на различных стадиях обработки $k = 1, 2, 3$								
	1-я стадия			2-я стадия			2-я стадия		
	d_i^1	t_i^1	r_i^1	d_i^2	t_i^2	r_i^2	d_i^3	t_i^3	r_i^3
1	2	7	8	12	10	3	3	15	10
2	4	8	6	4	7	5	15	10	15
3	0	12	5	3	8	6	8	9	4
4	5	5	10	0	12	4	10	8	10
5	3	16	3	10	4	6	6	7	7
6	5	10	5	0	10	7	20	10	6

Нижняя граница длины многостадийного расписания, вычисленная по формулам (5)–(8), равна

$$\mathfrak{G}(F) = \max[(58 + 16 + 18), (17 + 50 + 18), (17 + 16 + 59)] = 92.$$

Решение примера по алгоритму 1

На каждом шаге вычисляем по формулам (9), (10) значения $i \in J^2(s)$:

$$\theta_1^3(1) = (2 + 7 + 8) + (10 + 3) + 15 = 45, \quad \theta_2^3(1) = (8 + 9 + 6) + (7 + 5) + 10 = 41,$$

$$\theta_3^3(1) = (0 + 12 + 5) + (8 + 6) + 9 = 40, \quad \theta_4^3(1) = (5 + 10 + 15) + (2 + 4) + 8 = 41,$$

$$\theta_5^3(1) = (3 + 16 + 3) + (6 + 10) + 7 = 45, \quad \theta_6^3(1) = (5 + 10 + 4) + (9 + 7) + 10 = 45,$$

$$\theta_{u_{j+1}}^K(s) = \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} \theta_i^K(s), \quad \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} \theta_i^P(1) = \theta_1^3(1) = 40.$$

Устанавливаем 3-е задание на 1-е место в строящейся последовательности.

Последовательность выполнения заданий

$$\tilde{W} = \{w_1(1), \dots, w_6(1) \mid \theta_{w_{i-1}(1)}^3 \leq \theta_{w_i(1)}^3\} = \{3, 2, 4, 5, 6\}.$$

Требующая небольшого объема вычислений последовательность выполнения заданий и построенная по неубыванию значений $\theta_i^2(1)$, может рассматриваться как приближенное решение задачи. Время начала и время завершения выполнения заданий на различных стадиях обработки в последовательности, построенной в оптимальном расписании, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Последовательность выполнения заданий	Время начала и время завершения выполнения заданий								
	1-я стадия			2-я стадия			2-я стадия		
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	x_i^3	θ_i^3	T_i^3
3	1	12	17	18	25	31	32	40	44
2	13	20	26	27	33	38	41	50	55
4	21	25	35	36	47	51	52	59	69
1	26	32	40	48	57	60	61	75	85
5	33	48	51	58	61	67	76	82	89
6	49	58	63	64	73	80	83	92	98

Решение примера по алгоритму 2

Вычислим значения параметров

$$\bar{t}_j^1 = (d_j^1 + t_j^1 + r_j^1) + \sum_{k=2}^3 (t_j^k + r_j^k), \quad \bar{t}_j^2 = (t_j^k + r_j^k), \quad j = 1, \dots, 6,$$

$$\bar{t}^1 = (27, 26, 25, 32, 26, 28), \quad \bar{t}^2 = (28, 20, 19, 22, 20, 23), \quad \tilde{V}^1 = \{1\}, \quad \tilde{V}^2 = \{6, 4, 2, 5, 3\}.$$

Следовательно, последовательность выполнения заданий многостадийной обработки имеет вид $\tilde{V} = \{1, 6, 4, 2, 5, 3\}$. Время начала и время завершения выполнения всех заданий, а также завершения постобработки на всех стадиях обработки сведены в табл. 3.

Таблица 3

Последовательность выполнения заданий	Время начала и время завершения выполнения заданий								
	1-я стадия			2-я стадия			2-я стадия		
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	x_i^3	θ_i^3	T_i^3
1	3	9	17	18	27	30	31	45	48
6	10	19	24	28	37	44	46	55	61
4	20	24	34	38	49	53	56	63	73
2	25	32	38	50	56	61	64	73	88
5	33	48	51	57	60	66	74	80	87
3	49	60	65	66	73	79	81	89	93

Следовательно, по алгоритму 2 получено более эффективное решение. Значение критерия оптимальности очень близко к значению нижней границы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе постановки и приближенные методы решения задач построения расписаний работы последовательных цепочек участков и цехов взаимосвязанных производств могут найти широкое применение в системах календарного планирования мелко- и среднесерийного производства. В качестве критерия оптимальности рассматривается построение последовательности выполнения всех заданий системой взаимосвязанных производств в кратчайшие сроки. Сформулированные задачи, учитывающие не только затраты времени на работу оборудования, но и временные потери на постобработку изделий, относятся к классу NP-полных задач экспоненциальной сложности. Алгоритмы получения точных решений таких задач применимы на практике только для решения задач малой размерности. В работе приведены математическая постановка, формульные выражения вычисления нижней границы значения критерия оптимальности и 2 эвристических алгоритма решения сформулированных задач. Полученные результаты иллюстрируются числовым примером. Предложенные в работе эвристические алгоритмы получения приближенных решений этих задач применимы для практического использования в автоматизированных системах календарного планирования. Проведенные автором вычислительные эксперименты показывают, что полученное приближенное решение не превосходит значение нижней границы критерия оптимальности более, чем на 5–10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Conway R.W. Theory of Scheduling / R.W. Conway, W.L. Maxwell, L.W. Miller. — Addison-Wesley Publishing Company, 1967. — 294 p.
2. Zack Yu.A. Applied problems of the theory of scheduling and traffic routing [in Russian] / Yu.A. Zack. — М., URSS, 2012. — 394 p.
3. Zgurovsky M.Z. Decision making in networked systems with limited resources [in Russian] / M.Z. Zgurovsky, A.A. Pavlov. — К.: Nauk. dumka, 2010. — 573 p.
4. Zack Yu.A. Construction of two-stage schedules of processing of products on one machine / Yu.A. Zack // System research and information technologies. — 2018. — № 4. — P. 19–36.
5. Zack Yu.A. Developing admissible and optimal schedules of works on one machine / Yu.A. Zack // Cybernetics and systems analysis. — № 1. — 2012.
6. Zak Yu.A. Two-stage planning tasks for the flow line / Yu.A. Zak // Control Sciences. — М., 2019. — № 6. — P. 52–62.
7. Zack Yu.A. Algorithms for approximate multi-stage Flow-Shop-Problem solution / Yu.A. Zack // System research and information technologies. — 2019. — № 3. — P. 100–109.
8. Carlier J. The one-machine sequencing problem / J. Carlier // European Journal of Operational Research. — 1982. — N 11. — P. 42–47.
9. Domschke W. Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte / W. Domschke, A. Scholl, S. Voß. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 456 p.
10. Brucker P. Scheduling Algorithms / P. Brucker // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York, 1998. — 377 p.
11. Sidorenko A.M. Work planning and scheduling subject to modules and articles assembly / A.M. Sidorenko, E.N. Khobotov // Automation in industry. — 2012. — № 10. — P. 21–25.
12. Zak Ju.A. Properties of admissible and optimum sequences of performance of works on a single machine / Ju.A. Zak // Control Sciences. — 2012. — № 5. — P. 54–61.

Поступила 12.02.2020

**МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ
ДВОХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ
ПІВПРОСТОРІВ ЗА НАЯВНОСТІ ЖОРСТКОГО
ДИСКОПОДІБНОГО ВКЛЮЧЕННЯ МІЖ НИМИ І ТИСКУ
НА ДІЛЯНЦІ РОЗШАРУВАННЯ**

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК

Анотація. Використано строгу математичну модель для аналізу контактної взаємодії двох різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів під час стискання за наявності жорсткого дископодібного включення між ними і тиску в ділянці розшарування матеріалів. Розв'язок задачі отримано на основі подання загального розв'язку системи рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції, зведення крайової задачі до розгляду інтегрального рівняння, розкладу шуканої функції по малому параметру. Як окремий випадок зі знайдених виразів впливають основні параметри контакту для двох пружних ізотропних півпросторів (за наявності включення між ними і тиску в ділянці розшарування). Отримано числові результати, вивчено вплив пружних властивостей півпросторів, геометричних розмірів включення і навантажень на параметри контактної взаємодії.

Ключові слова: математичне моделювання, трансверсально-ізотропний матеріал, пружний півпростір, жорстке дископодібне включення, тиск на ділянці розшарування, параметри контактної взаємодії.

ВСТУП

У різних галузях промисловості для створення елементів конструкцій широко застосовуються біматеріали, складові яких мають різні фізичні властивості, зокрема анізотропні. Це, у свою чергу, стимулює інтерес до вивчення і аналізу розподілу напружень у таких тілах поблизу концентраторів напружень, а також під час контактної взаємодії. Водночас розв'язання просторових задач теорії пружності для анізотропних тіл ускладнюється, оскільки у цьому випадку необхідно розв'язувати крайову задачу для система рівнянь рівноваги анізотропного тіла, яка має складнішу структуру (порівняно з відповідною системою для ізотропного пружного тіла).

Натепер для трансверсально-ізотропних тіл з концентраторами напружень ґрунтовно досліджено двовимірні задачі теорії пружності та електропружності [9, 16, 17, 27]. Для задач у тривимірній постановці для трансвер-

сально-ізотропних пружних та електропружних матеріалів подання загальних розв'язків систем рівнянь рівноваги через гармонічні функції запропоновано у працях [11] та [24, 28] відповідно, а подання розв'язків системи рівнянь гідропружності для трансверсально-ізотропного тіла — у праці [30]. Важливі результати визначення напруженого стану тривимірних трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тіл отримано у працях [3, 4–6, 8, 10–12, 15, 18, 22, 23, 26, 29, 30] та [1, 2, 7, 19, 20, 24, 31, 32] відповідно.

Відзначимо, що задачі контактної взаємодії для двох пружних ізотропних півпросторів під час стискання (з урахуванням наявності між півпросторами жорсткого дископодібного включення) досліджувались у працях [14, 21, 25]. Але задача контактної взаємодії для двох трансверсально-ізотропних півпросторів (або хоча б одного з них) за наявності жорсткого включення між контактними тілами і тиску на ділянці розшарування досі не вивчалась.

У роботі на основі математичного моделювання досліджено контактну взаємодію двох різних за властивостями пружних трансверсально-ізотропних півпросторів під час стискання за наявності між ними жорсткого дископодібного включення сталої товщини та тиску на ділянці розшарування контактних тіл. Для постановки задачі вважається, що поверхня поділу двох пружних тіл розташована на площині ізотропії трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів. Припускається також, що між тілами наявний гладкий (без тертя) контакт. За допомогою подання розв'язку рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного тіла (подання Еліота) через гармонічні функції, подальшого зведення задачі до розгляду інтегрального рівняння та розкладу шуканої функції за малим параметром отримано наближений аналітичний розв'язок задачі. Знайдено основні параметри контактної взаємодії різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності жорсткого включення між ними і тиску на ділянці розшарування). Як окремий випадок з отриманих виразів впливають параметри контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів за наявності включення [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо математичну модель, на основі якої вивчимо контактну взаємодію двох різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення сталої товщини між ними та тиску на ділянці розшарування матеріалів (рис. 1).

Припускаємо, що площина $z = 0$ (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії трансверсально-ізотропних матеріалів кожного з півпросторів, тобто вісь Oz є віссю симетрії обох трансверсально-ізотропних матеріалів. Також вважаємо, що на площині контактної взаємодії $z = 0$ виконуються умови гладкого (без тертя) контакту пружних тіл. Розміри ділянки розшарування двох пружних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються у процесі розв'язання задачі. Параметри контактної взаємодії пружних тіл залежать від значення стискальних зусиль p , значення тиску P_0 на ділянці розшарування, пружних властивостей двох трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів (усього десять незалежних величин) і двох геометричних параметрів жорсткого включення (значень його радіуса і товщини).

Для визначення напружено-деформованого стану у кожному з трансверсально-ізотропних пружних півпросторів на поверхні поділу тіл (на площині $z = 0$) отримуємо такі граничні умови:

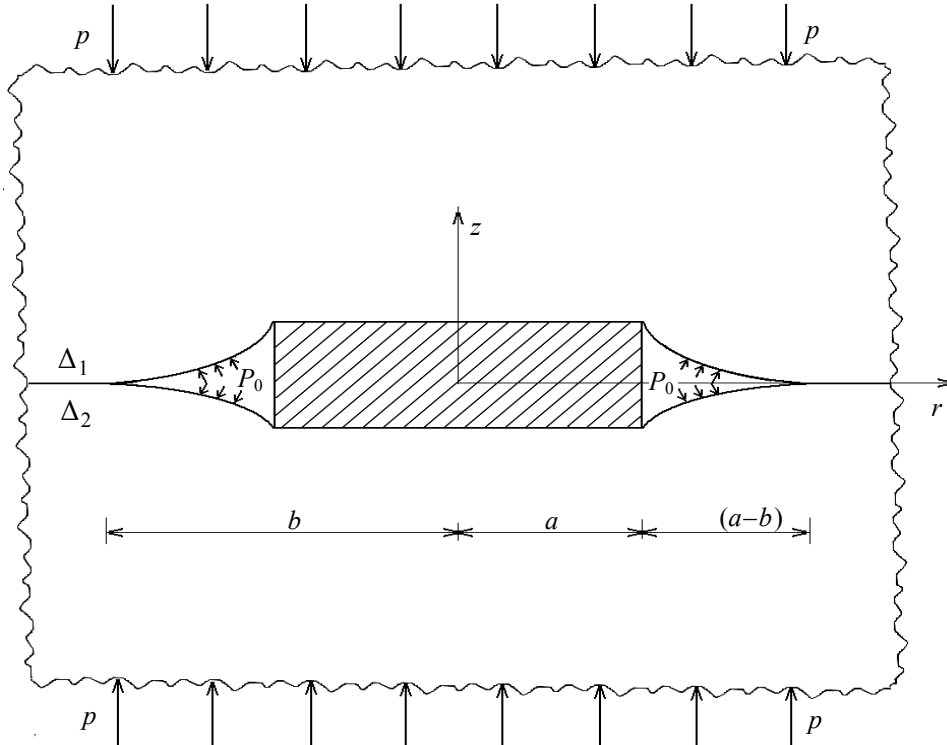


Рис. 1. Контактна взаємодія двох пружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску у зоні розшарування

$$\begin{aligned}
 u_z^{(1)}(r,0) &= \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a; \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= -P_0, \quad a < r < b; \\
 \sigma_{rz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{rz}^{(2)}(r,0) = 0, \quad 0 < r < \infty; \\
 u_z^{(2)}(r,0) &= -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a; \\
 \sigma_{zz}^{(2)}(r,0) &= -P_0, \quad a < r < b; \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(r,0), \quad b \leq r < \infty; \\
 u_z^{(1)}(r,0) &= u_z^{(2)}(r,0), \quad b \leq r < \infty; \\
 \Delta_1 + \Delta_2 &= \Delta,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де індекси «1» і «2» відповідають першому і другому півпросторам; P_0 — величина тиску на ділянці розшарування; Δ і a — товщина і радіус дископодібного жорсткого включення відповідно; значення $b - a$ відповідає розміру зони розшарування між півпросторами. З наведених граничних умов на площині поділу умови (1) відповідають умовам відсутності дотичних напружень на всій поверхні поділу, умови (2), (3) — умовам ідеального механіч-

ного контакту поза зоною розшарування матеріалу. Крім того, маємо такі умови на нескінченності:

$$\sigma_{zz}^{(1)} \rightarrow -p \text{ (якщо } z \rightarrow \infty); \sigma_{zz}^{(2)} \rightarrow -p \text{ (якщо } z \rightarrow -\infty).$$

Подамо напружений стан у кожному з пружних півпросторів суперпозицією основного стану (простого стискання $\sigma_{zz}^{(1)} = -p$; $\sigma_{zz}^{(2)} = -p$) та збуреного стану. Для знаходження збуреного стану в кожному з півпросторів на площині $z = 0$ маємо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)}(r,0) &= \Delta_1, 0 \leq r \leq a; \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= p - P_0, a < r < b; \\ \sigma_{rz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{rz}^{(2)}(r,0) = 0, 0 < r < \infty; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(2)}(r,0) &= -\Delta_2, 0 \leq r \leq a; \\ \sigma_{zz}^{(2)}(r,0) &= p - P_0, a < r < b; \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(r,0), b \leq r < \infty; \end{aligned} \quad (5)$$

$$u_z^{(1)}(r,0) = u_z^{(2)}(r,0), b \leq r < \infty; \quad (6)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Умови (4), (5), (6) мають той же зміст, що й умови (1), (2), (3), але для збуреного стану. Для того щоб дослідити задачу на основі використовуваної строгої математичної моделі, необхідно знайти розв'язки рівнянь теорії пружності у кожному з трансверсально-ізотропних півпросторів, що задовольняють граничні умови на поверхні поділу матеріалів.

Основні рівняння і співвідношення. Статичні рівняння теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла у переміщеннях набувають вигляду [3, 4]:

$$\begin{aligned} &c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0; \\ &\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0; \\ &c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ — незалежні пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу.

Розв'язок системи рівнянь (7) згідно із працею [11] можна виразити через три потенціальні функції Φ_i ($i=1,2,3$) таким чином:

$$\begin{aligned} u_x &= \partial\Phi_1/\partial x + \partial\Phi_2/\partial x + \partial\Phi_3/\partial y; \\ u_y &= \partial\Phi_1/\partial y + \partial\Phi_2/\partial y - \partial\Phi_3/\partial x; \\ u_z &= m_1\partial\Phi_1/\partial z + m_2\partial\Phi_2/\partial z, \end{aligned} \quad (8)$$

де Φ_1, Φ_2, Φ_3 — функції, що містяться в системі (8), задовольняють рівняння

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \nu_j\partial^2/\partial z^2)\Phi_j = 0, \quad (9)$$

а також $\nu_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$; ν_1, ν_2 — корені квадратного рівняння

$$c_{11}c_{44}\nu^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]\nu + c_{33}c_{44} = 0; \quad (10)$$

$$m_j = \frac{c_{11}\nu_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{\nu_j(c_{13} + c_{44})}{c_{33} - \nu_j c_{44}} \quad (j=1,2). \quad (11)$$

Увівши позначення $z_j = z\nu_j^{-1/2}$ ($j=1,2,3$) з використанням виразів (9)–(11), легко встановити, що функції $\Phi_1(x, y, z_1), \Phi_2(x, y, z_2), \Phi_3(x, y, z_3)$ будуть гармонічними функціями у відповідній системі координат (x, y, z_i) .

Надалі скористаємось позначеннями

$$\begin{aligned} k_1 = m_1 &= \frac{c_{11}\nu_1 + c_{44}}{c_{13} + c_{44}} - 1; \quad k_2 = m_2 = \frac{c_{11}\nu_2 + c_{44}}{c_{13} + c_{44}} - 1; \\ a_j &= c_{44}(1 + m_j) \quad (j=1,2). \end{aligned} \quad (12)$$

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для побудови розв'язку граничної задачі теорії пружності скористаємось поданням (8), виразами (9)–(12). Функції $\Phi_i(x, y, z_i)$ (для кожного трансверсально-ізотропного півпростору з урахуванням властивостей матеріалу) візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_i^* F^*(x, y, z_i), \quad (i=1, 2); \quad \Phi_3 \equiv 0. \quad (13)$$

Сталі α_i^* у виразах потенціальних функцій (13) визначимо з такої системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^2 \alpha_j^*(c_{44}(1 + k_j)) = 1; \quad \sum_{j=1}^2 \alpha_j^*(c_{44}(1 + k_j))/\sqrt{\nu_j} = 0. \quad (14)$$

У результаті визначення сталих α_i^* за системою (14) задовольняються граничні умови по дотичних напруженнях уздовж всієї поверхні поділу для трансверсально-ізотропного півпростору, а також умови рівності нормальних

компонентів напружень поза зоною розшарування матеріалів. Для граничних умов, що залишились, з використанням потенціальних функцій на основі функцій $F_1^*(x, y, z_i)$ і $F_2^*(x, y, z_i)$ (функцій для першого та другого пружних півпросторів) та з урахуванням системи рівнянь (14) отримуємо умови на площині $z=0$ для визначення невідомих гармонічних функцій $F_1^*(x, y, z)$ і $F_2^*(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z}(r, 0) &= \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) = p - P_0, \quad a < r < b; \\ \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(r, 0) &= -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r, 0) = p - P_0, \quad a < r < b; \\ \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z} &= \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}, \quad b \leq r < \infty; \\ \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) &= \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r, 0), \quad b \leq r < \infty, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо для порівняння більш просту задачу теорії пружності про стискання двох пружних ізотропних півпросторів, між якими розташоване жорстке дископодібне включення сталої товщини. За допомогою подання Папковича–Нейбера визначення зони розшарування стосовно збуреного стану зводиться до пошуку двох гармонічних функцій $f_1^*(x, y, z)$ і $f_2^*(x, y, z)$, для знаходження яких отримуємо на площині поділу матеріалів $z=0$ граничні умови, які структурно подібні до формул (15). Єдина відмінність полягає у тому, що в цих виразах (для ізотропних матеріалів) замість множників $\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}$ і $\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}$ використовуються вирази $(1 - \nu_1) / \mu_1$ і $(1 - \nu_2) / \mu_2$, де ν_1, ν_2 — коефіцієнти Пуассона, а μ_1, μ_2 — модулі зсуву для ізотропних матеріалів пружних півпросторів. Виходячи з такої відповідності граничних задач контактної взаємодії двох ізотропних та двох трансверсально-ізотропних півпросторів для визначення двох гармонічних функцій, надалі використаємо схему розгляду більш простої задачі теорії пружності для ізотропних півпросторів.

На основі результатів [25] для двох пружних ізотропних тіл (за наявності дископодібного включення) та встановленої відповідності задач контактної взаємодії у випадку двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними та тиску на ділянці розшарування) задачу зводимо до розв'язку інтегрального рівняння до невідомого значення $c = b/a$, тобто відношення розміру невідомої ділянки розшарування до радіуса жорсткого дископодібного включення. Отримуємо

$$\begin{aligned} & \varphi(\eta) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)} \left(\eta \ln \left[\frac{c - \eta}{c + \eta} \right] - \xi \ln \left[\frac{c - \xi}{c + \xi} \right] \right) d\xi = \\ & = \frac{\Delta}{ap(1 + \alpha) \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}}} + \frac{2}{\pi} (1 - \eta^2) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c^2 - 1}{1 - \eta^2} \right), \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (16)$$

з додатковою умовою, що вказує на відсутність сингулярної складової у зоні розшарування матеріалів, якщо $r = b$:

$$\frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(c^2 - \xi^2)} d\xi + (c^2 - 1)^{1/2} = 0,$$

$$\text{де } \eta = r/a, \quad c = b/a, \quad \alpha = \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right) / \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right).$$

Далі, на основі розкладу за малим параметром $\varepsilon = a/b = 1/c < 1$ шуканої функції, що входить до інтегрального рівняння (16) (цілком аналогічно випадку контакту двох пружних ізотропних півпросторів [25]), наближений розв'язок інтегрального рівняння з додатковою умовою можна отримати за допомогою розв'язку алгебричного рівняння п'ятого порядку

$$\frac{\Omega_1(\varepsilon)}{(1 + \alpha)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) - 2(p - P_0) \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) \frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad (17)$$

де використано позначення

$$\begin{aligned} \Omega_1(\varepsilon) &= \frac{4}{\pi} \varepsilon + \frac{16}{\pi^3} \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^5} + \frac{4}{3\pi} \right) + \\ &+ \varepsilon^4 \left(\frac{80}{9\pi^3} + \frac{256}{\pi^7} \right) + \varepsilon^5 \left(\frac{448}{9\pi^5} + \frac{1024}{\pi^9} + \frac{4}{5\pi} \right) + O(\varepsilon^6); \\ \Omega_2(\varepsilon) &= 1 - \frac{4}{\pi^2} \varepsilon - \frac{16}{\pi^4} \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^6} + \frac{1}{8} \right) - \varepsilon^4 \left(\frac{16}{3\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{8}{9\pi^2} + \frac{64}{\pi^6} + \frac{4}{9\pi^3} \right) \right) - \\ &- \varepsilon^5 \left(\frac{16}{\pi^4} \left(\frac{1}{24} + \frac{64}{\pi^6} - \frac{8}{9\pi^3} + \frac{8}{9\pi^2} \right) + \frac{256}{9\pi^6} - \frac{4}{15\pi^2} \right) + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (18)$$

Знайдене з алгебричного рівняння (17) та з урахуванням формул (18) значення $\varepsilon = a/b$ визначає розміри зони розшарування між двома трансверсально-ізотропними пружними півпросторами (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) за стискання та врахування тиску на ділянці розшарування матеріалів. Розміри заглиблення включення у відповідний трансверсально-ізотропний півпростір залежать від пружних властивостей матеріалів обох півпросторів і визначаються співвідношенням

$$\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right)} \Delta_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \Delta_2,$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Тобто заглиблення включення у перший півпростір пропорційне значенню $\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right)$, а заглиблення у другий півпростір — значенню $\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)$.

Із формул (17) дістаємо співвідношення, що пов’язує значення стискальних навантажень p і тиску на ділянці розшарування P_0 з розміром зони розшарування між півпросторами у вигляді

$$p - P_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{N^*} \left(\frac{\Delta}{a} \right), \quad (19)$$

де

$$N^* = \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right). \quad (20)$$

За допомогою виразів (19), (20) можна знайти значення різниці навантажень $p - P_0$, що для відомих геометричних параметрів дископодібного включення, пружних властивостей трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів відповідає фіксованому розміру зони розшарування пружних трансверсально-ізотропних півпросторів.

Перетворимо вирази, що входять до формул (19), (20), для більш зручного їх використання. Для цього скористаємось формулами (10)–(12). У результаті маємо

$$\begin{aligned} A^{\text{Trans}} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \frac{\frac{a_2}{\sqrt{v_2}} \frac{m_1}{\sqrt{v_1}} - \frac{a_1}{\sqrt{v_1}} \frac{m_2}{\sqrt{v_2}}}{\Delta} = \\ &= \frac{(-a_1 m_2 + a_2 m_1) \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}}}{\frac{a_1 a_2}{\sqrt{v_2}} - \frac{a_1 a_2}{\sqrt{v_1}}} = \frac{-m_2 + m_1}{\frac{a_2}{\sqrt{v_1}} - \frac{a_1}{\sqrt{v_2}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})} \left[\frac{-m_2}{c_{44}(1+m_2)} + \frac{m_1}{c_{44}(1+m_1)} \right] = \\
 &= \frac{1}{c_{44}(v_1^{1/2} - v_2^{1/2})} \left[\frac{m_1 - m_2}{(1+m_1)(1+m_2)} \right] = \frac{c_{11}}{c_{44}} \frac{(v_1^{1/2} + v_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{(c_{11}v_1 + c_{13})(c_{11}v_2 + c_{13})}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Після переходу від трансверсально-ізотропного до ізотропного матеріалу отримуємо

$$c_{11} = \lambda + 2\mu; \quad c_{13} = \lambda; \quad c_{44} = \mu; \quad v_1 = v_2 = 1;$$

$$A^{Iso} = \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

У результаті подальших перетворень виразу (21) (з використанням теореми Вієта) згідно з працею [20] дістаємо

$$\begin{aligned}
 A^{Trans} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \\
 &= \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\sqrt{c_{44}}} \left[\sqrt{c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}c_{13} + 2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \right]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Отриманий вираз (22), на відміну від формули (21), дозволяє одразу знаходити шукане значення безпосереднім підставленням у нього пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу, не знаходячи попередньо корені квадратного рівняння (9).

Зазначимо, що в кутовій зоні жорсткого плоского включення (уздовж контуру $r = a$) спостерігається сингулярність напруженого стану, характерна для задач контактної взаємодії плоских жорстких штампів з пружним півпростором, водночас уздовж контуру зони розшарування двох півпросторів напруження не містять сингулярної складової (саме з цієї умови і визначаються розміри зони розшарування матеріалів, яка перебуває під тиском).

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Зв'язок діючих навантажень, розміри яких відповідають ділянці розшарування (за фіксованого відношення товщини включення до її радіуса Δ/a), зображено на рис. 2. Для розрахунків значення Δ/a становили 0,15 (лінія 1), 0,25 (лінія 2), 0,35 (лінія 3). Видно, що зі збільшенням відносної товщини дископодібного включення для досягнення такого самого розміру зони розшарування, як і для більш тонкого включення, необхідно прикласти навантаження.

Дослідимо вплив діючих навантажень (різницю стискальних зусиль і тиску на ділянці розшарування матеріалів) на розміри зони розшарування, фіксуючи відносну товщину жорсткого включення. Покладемо для розрахунків відносну товщину дископодібного включення $\Delta/a = 0,1$.

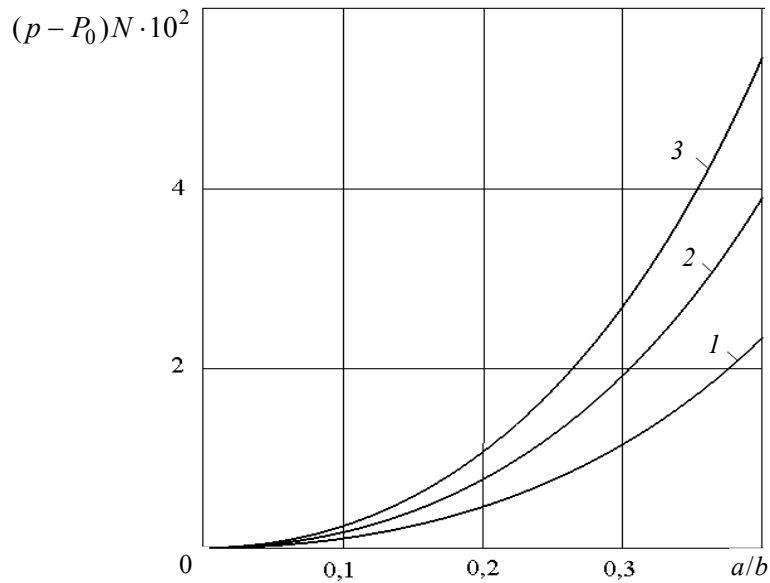


Рис. 2. Зв'язок діючих навантажень з розмірами зони розшарування

Результати виконаних розрахунків нелінійної залежності зони розшарування між трансверсально-ізотропними пружними півпросторами від різниці діючих навантажень подано у вигляді рис. 3. Множник N^* залежить від властивостей кожного з трансверсально-ізотропних пружних матеріалів згідно з формулами (20).

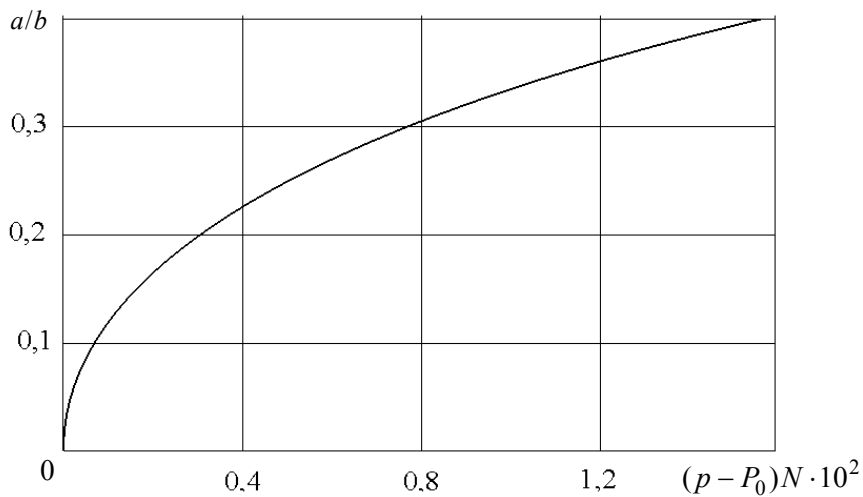


Рис. 3. Залежність зони розшарування від діючих навантажень (за фіксованої відносної товщини включення)

Отримані результати контактної взаємодії дають змогу знайти розв'язок задачі для випадку контакту трансверсально-ізотропного пружного півпростору з ізотропним пружним півпростором (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними). Тоді у формулах (20) вираз N^* потрібно замінити значенням $N^{TRANS-ISO}$, де $N^{TRANS-ISO} =$

$$= \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \frac{(1-\nu_2)}{\mu_2}; \nu_2, \mu_2 \text{ — коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву}$$

ізотропного пружного півпростору відповідно.

Дослідимо відношення Δ_2 / Δ_1 (відношення глибин проникнення жорсткого включення у пружні півпростори) для реальних трансверсально-ізотропних матеріалів. Використаємо дані праці [13] стосовно пружних властивостей 10 різних матеріалів (див. таблицю). Номери, за якими трансверсально-ізотропні матеріали подано у таблиці, будемо використовувати для позначень параметрів контакту півпросторів з цих матеріалів.

Пружні властивості трансверсально-ізотропних матеріалів

Номер матеріалу	c_{ij} , ГПа					
	Матеріал	c_{11}	c_{33}	c_{44}	c_{12}	c_{13}
1	Be	292,3	336,4	162,5	26,7	14,0
2	C (graphite)	1160,0	46,6	2,3	290,0	109,0
3	Cd	115,8	51,4	20,4	39,8	40,6
4	Co	307,0	358,1	78,3	165,0	103,0
5	Hf	181,1	196,9	55,7	77,2	66,1
6	Mg	59,7	61,7	16,4	26,2	21,7
7	Ti	162,4	180,7	46,7	92,0	69,0
8	Zn	161,0	61,0	38,3	34,2	50,1
9	Zr	143,4	164,8	32,0	72,8	65,3
10	ZnO	209,7	210,9	42,5	121,1	105,1

У результаті проведених досліджень маємо такі відношення глибин проникнення жорсткого дископодібного включення у трансверсально-ізотропні матеріали:

$$\Delta_2 / \Delta_1 = 18.218; \Delta_3 / \Delta_1 = 6.974; \Delta_4 / \Delta_1 = 1.213;$$

$$\Delta_5 / \Delta_1 = 2.022; \Delta_6 / \Delta_1 = 6.587; \Delta_7 / \Delta_1 = 2.319;$$

$$\Delta_8 / \Delta_1 = 4.882; \Delta_9 / \Delta_1 = 2.862; \Delta_{10} / \Delta_1 = 2.274.$$

Тобто глибина проникнення жорсткого включення у матеріал 1 у 18,2 разу менша, ніж у матеріал 2 (у разі контакту півпросторів з цих матеріалів), а також у 6,97 разу менша, ніж у матеріал 3 (у разі контакту півпросторів з матеріалів 1 і 3) і т.д. Наведені значення дозволяють легко знайти відносні глибини проникнення для будь-якої вибраної пари з наведених у таблиці матеріалів.

ВИСНОВОК

У роботі за допомогою строгої математичної моделі отримано аналітичний розв'язок задачі про контактну взаємодію двох трансверсаль-

но-ізотропних пружних півпросторів під час стискання (за наявності жорсткого плоского дископодібного включення сталої товщини між ними). Виконано числові розрахунки і досліджено вплив відносної товщини жорсткого включення та силових навантажень (стискальних зусиль і тиску на ділянці розшарування півпросторів) на розміри зони розшарування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kirilyuk V.S. Modeling of contact interaction of piezoelectric half-space and elastic isotropic base with surface groove of circular section / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // System research and information technologies. — 2016. — № 4. — P. 120–132.
2. Kirilyuk V.S. Mathematical modeling of contact interaction of two electroelastic half-spaces under compression with rigid disc-shaped inclusion between them / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk, O.V. Gavrilenko // System research and information technologies. — 2018. — № 2. — P. 89–98. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.2.09
3. Podil'chuk Yu.N. Boundary value problems of statics of elastic bodies [in Russian] / Yu.N. Podil'chuk. — K.: Nauk. dumka, 1984. — 304 p.
4. Podil'chuk Yu.N. Exact analytic solutions of three-dimensional boundary-value problems of the statics of a transversely isotropic body of canonical form (Survey) / Yu.N. Podil'chuk // International Applied Mechanics. — 1997. — **33**, № 10. — P. 763–787.
5. Borodich F.M. The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids / F.M. Borodich, B.A. Galanov, L.M. Keer, M.M. Suarez-Alvarez // Mechanics of Materials. — 2014. — **75**. — P. 34–44.
6. Chai Y.S. Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies / Y.S. Chai, I.I. Argatov // Meccanica. — 2018. — **53**, N 11–12. — P. 3137–3143.
7. Chen W.Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / W.Q. Chen, C.W. Lim // Int. J. Fract. — 2005. — **131**, N 3. — P. 231–246.
8. Chen W.Q. General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review / W.Q. Chen, J. Zhu, X.Y. Li // Int. J. Mech. Sciencis. — 2019. — **151**. — P. 471–497.
9. Dai L. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. — 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
10. Davtyan D.B. Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space/ D.B. Davtyan, D.A. Pozharskii // Mechanics of Solids. — 2014. — **49**, N 5. — P. 578–586.
11. Elliott H.A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals / H.A. Elliott, N.F. Mott // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1948. — **44**, N 4. — P.522–533.
12. Fabrikant V.I. Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space/ V.I. Fabrikant // Acta Mechanica. — 2017. — **228**, N 4. — P. 1541–1560.
13. Freund L.B. Thin Film Materials / L.B. Freund, S. Suresh. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 802 p.
14. Gladwell G.M.L. On Inclusions at a Bi-Material Elastic Interface / G.M.L. Gladwell // Journal of Elasticity. — 1999. — **54**, N 1. — P.27–41.
15. Hou P.F. Three-dimensional exact solutions of homogeneous transversely isotropic coated structures under spherical contact / P.F. Hou, W.H. Zhang, J.-Y. Chen // Int. J. Solids Structures. — 2019. — **161**. — P. 136–173.

16. *Kaloerov S.A.* Problem of Electromagnet viscoelasticity for Multiply Connected Plates / S.A. Kaloerov, A.A. Samodurov // *International Applied Mechanics*. — 2015. — **51**, N 6. — P. 623–639.
17. *Kaloerov S.A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, N 6. — P. 631–637.
18. *Kirilyuk V.S.* On stressed state of transversely isotropic medium with an arbitrarily orientated spheroidal void or penny-shaped crack under internal pressure / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // *Strength of Materials*. — 2005. — **37**, N 5. — P. 480–488.
19. *Kirilyuk V.S.* Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2008. — **44**, N 2. — P. 150–157.
20. *Kirilyuk V.S.* Stress state of a piezoceramic body with a plane crack opened by a rigid inclusion / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2008. — **44**, N 7. — P. 757–768.
21. *Kotousov A.* On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces / A. Kotousov, L.B. Neto, A. Khanna // *Mechanics of Materials*. — 2014. — **68**, N 1. — P. 38–44.
22. *Kumar R.* Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimetals / R. Kumar, V. Gupta // *Journal of Thermal Stresses*. — 2014. — **37**, N 10. — P. 1201–1229.
23. *Marmo F.* Analytical formulas and design charts for transversely isotropic half-spaces subject to linearly distributed pressures / F. Marmo, F. Toraldo, L. Rosati // *Meccanica*. — 2016. — **51**, N 11. — P. 2909–2928.
24. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions / Yu.N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics*. — 1998. — **34**, N 7. — P. 623–628.
25. *Selvadurai A.P.S.* A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces / A.P.S. Selvadurai // *Q. J. Mech. Appl. Math.* — 1994. — N 3. — P. 493–509.
26. *Tokovy Yu.V.* Three-Dimensional Elastic Analysis of Transversely-Isotropic Composites / Yu.V. Tokovy, C.C. Ma // *Journal of Mechanics*. — 2018. — **33**, N 6. — P. 821–830.
27. *Wang Y.J.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material / Y.J. Wang, C.F. Gao, H.P. Song // *Mechanics Research Communications*. — 2015. — Vol. 65. — P. 17–23.
28. *Wang Z.K.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // *Int. J. Solids Structures*. — 1995. — **32**, N 1. — P. 105–115.
29. *Yu H.Y.* A concise treatment of indentation problems in transversely isotropic half-spaces / H.Y. Yu // *Int. J. Solids Struct.* — 2001. — **38**, N 7. — P. 2213–2232.
30. *Zhao M.* Three-dimensional steady-state general solution for transversely isotropic hygrothermoelastic media / M. Zhao, H. Dang, C. Fan, Z. Chen // *Journal of Thermal Stresses*. — 2018. — **41**, N 8. — P. 951–972.
31. *Zhao M.H.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method / M.H. Zhao, Y. Li, Y. Yan, C.Y. Fan // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2016. — Vol. 67. — P. 115–125.
32. *Zhao M.H.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors / M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, G.T. Xu // *International Journal of Solids and Structures*. — 2016. — Vol. 94–95. — P. 50–59.

Надійшла 02.09.2019

ТЕОРЕМА ПРО РЕКОНСТРУКЦІЮ ДЕЯКИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В.Г. ГОРОДЕЦЬКИЙ

Анотація. Доведено теорему, яка дає строге обґрунтування застосування диференціальної моделі для створення оригінальної системи, що описує реальний фізичний процес. Теорема може бути використана для реконструкції моделі за єдиною спостережуваною змінною, наявність якої дозволяє отримати диференціальну модель. У диференціальній моделі змінні, яких бракує, замінюються похідними за часом спостережуваної змінної процесу. Існування співвідношень, які пов'язують оригінальну систему та диференціальну модель, дає змогу здійснити перехід від диференціальної моделі до оригінальної системи. При цьому можна отримати декілька оригінальних моделей-кандидатів. У результаті дослідник може вибрати ту модель, яка якомога повніше відображує фізику процесу. Теорему можна використовувати і для спрощення уже наявної моделі, яка, ймовірно, містить надлишкові складові.

Ключові слова: оригінальна система, диференціальна модель, реконструкція, спостережувана змінна, модель-кандидат.

ВСТУП

Ідентифікація математичної моделі будь-якого фізичного процесу за даними вимірювань є актуальним завданням багатьох досліджень [1]. Якщо відома структура певної моделі, то таке завдання зводиться до її параметричної ідентифікації [2,3]. Якщо структура невідома, задача істотно ускладнюється, оскільки в загальному випадку передбачає наявність декількох можливих структур-кандидатів [4] у межах заданого класу. Додаткові труднощі можуть виникнути під час пошуку адекватних моделей для систем з детермінованим хаосом [5]. Ці труднощі зумовлено істотною залежністю динаміки моделі від початкових умов [6], що накладає додаткові вимоги до точності визначення параметрів моделі.

Важливим окремим випадком проблеми ідентифікації є задача реконструкції моделі за єдиною спостережуваною змінною [7, 8]. У цих дослідженнях для моделювання нелінійних систем використовувалися співвідношення, що зв'язують різні моделі, які мають однакові спостережувані змінні. У працях [9, 10] показано, що такі співвідношення можна використати для отримання множини моделей-кандидатів, які мають задані властивості.

Мета роботи — доведення теореми, яка є строгим обґрунтуванням використовуваного підходу і може бути корисною для розв'язання задачі реконструкції нелінійних систем.

ТЕОРЕМА ПРО РЕКОНСТРУКЦІЮ

Нехай шукана модель має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = p_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

де p_i — поліноми, $i = 1, \dots, n$. Будемо вважати відомою тільки змінну $x_1(t)$ системи (1), яку назвемо спостережуваною, а саму систему (1) — оригінальною системою (ОС). Під час аналізу поведінки нелінійних систем часто невідомі змінні замінюються похідними за часом спостережуваної змінної. Така заміна ґрунтується на теоремі Такенса [11], згідно з якою ОС (1) і система, що має як змінні спостережувану і її похідні, мають ряд загальних властивостей.

Розглянемо систему вигляду

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \dots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \quad \dot{y}_n = P_N/P_D, \quad (2)$$

де P_N і P_D — поліноми:

$$P_N = \sum_{L=0}^m N_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n}, \quad P_D = \sum_{L=0}^m D_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n}$$

де $N_{l_1 l_2 \dots l_n}$, $D_{l_1 l_2 \dots l_n}$ — сталі коефіцієнти; $L = l_1 + l_2 + \dots + l_n$, m — найвищий степінь поліномів. Зауважимо, що права частина останнього рівняння (2) має дріб, що може призвести до неоднозначності у визначенні його коефіцієнтів. Для запобігання цьому можна зафіксувати один з коефіцієнтів моделі, наприклад, поділивши всі коефіцієнти поліномів P_N і P_D на перший коефіцієнт знаменника $D_{00\dots 0}$. Тоді система (2) набуде вигляду

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \dots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \quad \dot{y}_n = p_N/p_D, \quad (3)$$

де

$$p_N = \sum_{L=0}^m n_{l_1 l_2 \dots l_n} \cdot y_1^{l_1} \cdot y_2^{l_2} \cdot \dots \cdot y_n^{l_n}; \quad p_D = 1 + \sum_{L=1}^m d_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} \cdot y_2^{l_2} \cdot \dots \cdot y_n^{l_n};$$

$$n_{l_1 l_2 \dots l_n} = N_{l_1 l_2 \dots l_n} / D_{00\dots 0}, \quad d_{l_1 l_2 \dots l_n} = D_{l_1 l_2 \dots l_n} / D_{00\dots 0}, \quad D_{00\dots 0} / D_{00\dots 0} = 1.$$

Визначення 1. Будемо називати систему (2) диференціальною моделлю (ДМ) для системи (1) за змінною $x_1(t)$, якщо існують співвідношення, які зв'язують коефіцієнти систем (1) і (2), за яких

$$y_1(t) \equiv x_1(t). \quad (4)$$

Визначення 2. Будемо називати систему (3) нормованою диференціальною моделлю (НДМ) для системи (1) за змінною $x_1(t)$, якщо існують співвідношення, які зв'язують коефіцієнти систем (1) і (3), за яких виконується (4).

Розглянемо систему, що належить до того ж класу, що і система (1):

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = q_1(u_1, \dots, u_n), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{u}_n = q_n(u_1, \dots, u_n), \end{cases} \quad (5)$$

де q_i — поліноми.

Теорема. Якщо ОС (1) має НДМ за змінною $x_1(t)$, а ОС (5) має НДМ за змінною $u_1(t)$ і виконується співвідношення

$$u_1(t) \equiv x_1(t), \quad (6)$$

то ці НДМ збігаються.

Доведення. Перетворимо останнє рівняння системи (3), перемноживши його праву і ліву частини на p_D , і перенесемо всі доданки, крім \dot{y}_n , у праву частину. Тоді

$$\dot{y}_n = \sum_{L=0}^m n_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n} - \sum_{L=1}^m d_{l_1 l_2 \dots l_n} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n} \dot{y}_n. \quad (7)$$

Нехай права частина (7) містить усього K доданків. Подамо вираз (7) у вигляді

$$\dot{y}_n = \sum_{j=1}^K C_j f_j, \quad (8)$$

де $C_j = n_{l_1 l_2 \dots l_n}$ або $C_j = d_{l_1 l_2 \dots l_n}$, а $f_j = y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n}$ або $f_j = y_1^{l_1} y_2^{l_2} \times \dots \times y_n^{l_n} \dot{y}_n$.

Оскільки вважатимемо спостережувані $x_1(t)$ і $u_1(t)$ відомими, то можна обчислити всі їх похідні за часом. Тобто у рівнянні (8) залишаються невідомими сталі коефіцієнти C_j . Для їх визначення сформуємо систему алгебричних рівнянь для K моментів часу:

$$\begin{cases} \dot{y}_n(t_1) = C_1 f_1(t_1) + C_2 f_2(t_1) + \dots + C_j f_j(t_1) + \dots + C_K f_K(t_1), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_n(t_j) = C_1 f_1(t_j) + C_2 f_2(t_j) + \dots + C_j f_j(t_j) + \dots + C_K f_K(t_j), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_n(t_K) = C_1 f_1(t_K) + C_2 f_2(t_K) + \dots + C_j f_j(t_K) + \dots + C_K f_K(t_K). \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язком цієї системи буде вектор сталих коефіцієнтів НДМ (3): C_1, \dots, C_K .

Сформуємо систему алгебричних рівнянь, аналогічну (9), для НДМ за змінною $u_1(t)$ системи (5). Оскільки за умовою теореми виконується співвідношення (6), тобто $u_1(t) \equiv x_1(t)$, то величини $\dot{y}_n(t_j)$, $f_j(t_j)$ для змінної $u_1(t)$ будуть збігатися з аналогічними значеннями в системі (9). Отже, і розв'язок цієї алгебричної системи — вектор C_1, \dots, C_K — також збігатиметься з розв'язком системи (9). Таким чином, обидві НДМ збігаються, тобто теорему доведено.

РЕЗУЛЬТАТИ

Теорему можна проілюструвати, використовуючи деякі результати з роботи [12]. Розглянемо ОС вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ \dot{x}_2 = b_1x_1, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1x_2. \end{cases} \quad (10)$$

Згідно із працею [12] їй відповідає ДМ за змінною $x_1(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \frac{N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_1^2 + N_6y_1y_3 + N_7y_2^2 + N_8y_2y_3 + N_{10}y_1^3}{D_0 + D_1y_1}. \end{cases} \quad (11)$$

або НДМ:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \frac{n_1y_1 + n_2y_2 + n_3y_3 + n_4y_1^2 + n_6y_1y_3 + n_7y_2^2 + n_8y_2y_3 + n_{10}y_1^3}{1 + d_1y_1}. \end{cases} \quad (12)$$

У праці [12] отримано співвідношення

$$\begin{cases} N_1 = a_3b_1(a_2c_3 - a_3c_2)^2, \\ N_2 = a_3^2c_4(a_0c_3 - a_3c_0) + a_3(a_2c_3 - a_3c_2)(a_1c_3 - a_3c_1 - a_2b_1), \\ N_3 = -a_3(c_3 + a_1)(a_2c_3 - a_3c_2), \\ N_4 = -2a_3^2b_1c_4(a_2c_3 - a_3c_2), \\ N_6 = a_3^2c_4(c_3 + a_1), \\ N_7 = -a_3^2c_4(c_3 + a_1), \\ N_8 = a_3^2c_4, \\ N_{10} = a_3^3b_1c_4^2, \\ D_0 = -a_3(a_2c_3 - a_3c_2), \\ D_1 \equiv N_8, \end{cases} \quad (13)$$

які пов'язують коефіцієнти ОС (10) і ДМ (11) і за яких виконується рівність (4).

Якщо надати деяким коефіцієнтам системи (10) нульові значення, отримуємо її окремий випадок, наприклад, систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ \dot{x}_2 = b_1x_1, \\ \dot{x}_3 = c_3x_3 + c_4x_1x_2. \end{cases} \quad (14)$$

Для того щоб отримати НДМ, яка відповідає системі (14), треба в системі (13) дорівняти до нуля коефіцієнти, яких немає в системі (14). Щоб перейти від ДМ до НДМ, можна вирази для всіх коефіцієнтів (13) поділити на вираз для D_0 . Тоді маємо $d_0 = 1$, а НДМ для ОС (14) набуде вигляду

$$\begin{cases} n_1 = -a_2b_1c_3, n_2 = -(a_1c_3 - a_2b_1), n_3 = c_3 + a_1, \\ n_4 = 2a_3b_1c_4, n_6 = -a_3c_4(c_3 + a_1)/(a_2c_3), \\ n_7 = a_3c_4(c_3 + a_1)/(a_2c_3), n_8 = -a_3c_4/(a_2c_3), \\ n_{10} = -(a_3^2b_1c_4^2)/(a_2c_3), d_0 = 1, d_1 = n_8. \end{cases} \quad (15)$$

Система (14) досліджувалась за таких значень коефіцієнтів:

$$a_1 = 1,147, a_2 = -22,786, a_3 = 1, b_1 = 1, c_3 = -11,147, c_4 = -143. \quad (16)$$

При цьому значення коефіцієнтів НДМ (15) склали:

$$\begin{aligned} n_1 = -254, n_2 = -10, n_3 = -10, n_4 = -286, n_6 = -5,62992, \\ n_7 = 5,62992, n_8 = 0,56299, n_{10} = -80,50787, d_1 = 0,56299. \end{aligned} \quad (17)$$

За значень коефіцієнтів (16) ОС (14) має режим детермінованого хаосу. Часовий ряд змінної $x_1(t)$ системи (14) зображено на рис. 1.

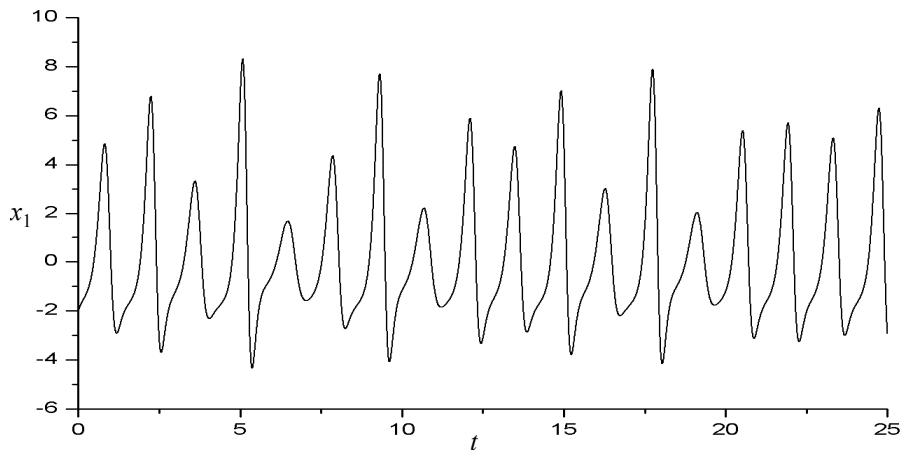


Рис. 1. Часовий ряд спостережуваної змінної $x_1(t)$ ОС (14)

Варто зауважити, що ОС (14) — не єдиний окремий випадок системи (10), який може мати таку саму спостережувану змінну $x_1(t)$, і якій відповідає НДМ (12) з коефіцієнтами (17). Якщо розглядати тільки системи вигляду (10), які мають в правих частинах рівнянь по 6 доданків (тобто стільки ж, скільки в системі (14)), то таких ОС виявиться 5. Числові значення коефіцієнтів таких систем наведено в таблиці, у якій ОС (1) відповідає системі (14). Усі системи з таблиці здатні за відповідних початкових умов точно відтворити часовий ряд змінної $x_1(t)$, поданий на рис. 1.

Числові значення коефіцієнтів ОС

ОС	Значення коефіцієнтів									
	a_0	a_1	a_2	a_3	b_1	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
1	–	1,147	–22,786	1	1	–	–	–	–11,147	–143
2	–	–	–25,4	1	1	–	15,4	–	–10	–143
3	–2,735	–	–25,4	1	1	–	–	–	–10	–143
4	–	–	–25,4	1	1	–27,354	–	–	–10	–143
5	–	–	–10	1	1	–	–	–154	–10	–143

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3, n_2 = a_3 c_1 + a_2 b_1, n_3 = c_3, \\ n_4 = 2a_3 b_1 c_4, n_6 = -a_3 c_4 / a_2, \\ n_7 = a_3 c_4 / a_2, n_8 = -c_4 / (a_2 c_3), \\ n_{10} = -(b_1 c_4^2) / (a_2 c_3), d_0 = 1, d_1 = n_8. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3, n_2 = -(a_0 a_3 c_4 - a_2^2 b_1) / a_2, \\ n_3 = c_3, n_4 = 2a_3 b_1 c_4, n_6 = -a_3 c_4 / a_2, \\ n_7 = a_3 c_4 / a_2, n_8 = -a_3 c_4 / (a_2 c_3), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2) / (a_2 c_3), d_0 = 1, d_1 = n_8. \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} n_1 = -a_2 b_1 c_3, n_2 = -(a_3^2 c_0 c_4 + a_2^2 b_1 c_3) / (a_2 c_3), \\ n_3 = c_3, n_4 = 2a_3 b_1 c_4, n_6 = -a_3 c_4 / a_2, \\ n_7 = a_3 c_4 / a_2, n_8 = -a_3 c_4 / (a_2 c_3), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2) / (a_2 c_3), d_0 = 1, d_1 = n_8. \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} n_1 = -b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2), n_2 = a_2 b_1, n_3 = c_3, \\ n_4 = 2a_3 b_1 c_4, n_6 = -a_3 c_3 c_4 / (a_2 c_3 - a_3 c_2), \\ n_7 = a_3 c_3 c_4 / (a_2 c_3 - a_3 c_2), n_8 = -a_3 c_4 / (a_2 c_3 - a_3 c_2), \\ n_{10} = -(a_3^2 b_1 c_4^2) / (a_2 c_3 - a_3 c_2), d_0 = 1, d_1 = n_8. \end{cases} \quad (21)$$

Співвідношення між коефіцієнтами ОС (2–5), наведеними у таблиці, і коефіцієнтами НДМ (12), подано системами (18)–(21). Ці співвідношення виведено на основі залежностей (13) аналогічно співвідношенням (15) для ОС (14).

Фазові портрети ОС 1–5 з таблиці показано на рис. 2 в тій самій послідовності, що і в таблиці. З рисунка видно, що ці портрети відрізняються один від одного, оскільки в них збігаються тільки спостережувані змінні $x_1(t)$, а $x_2(t)$ і $x_3(t)$ можуть відрізнитися. Також для порівняння на рис. 3 наведено фазовий портрет НДМ (12).

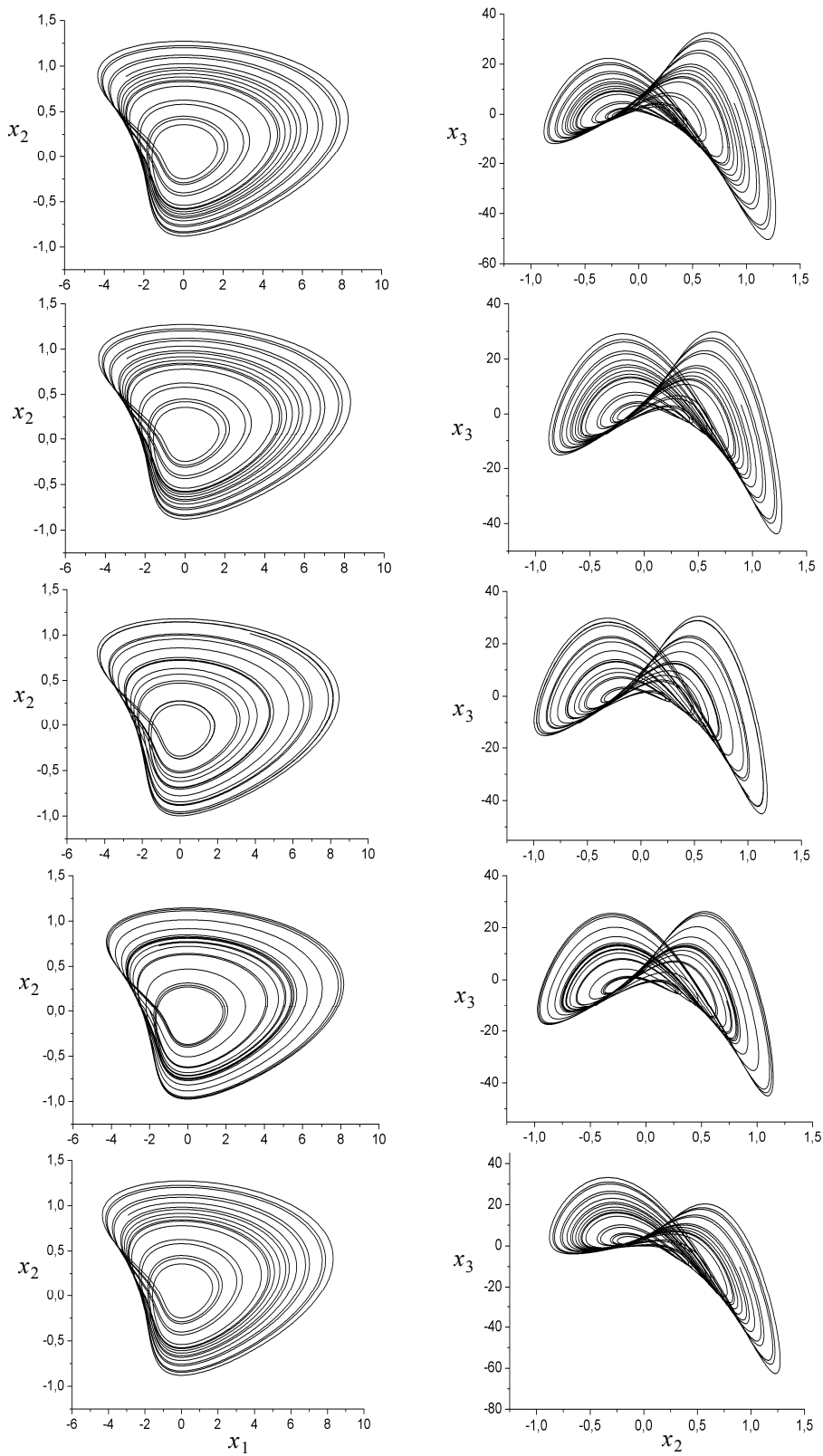


Рис. 2. Фазові характеристики систем 1–5

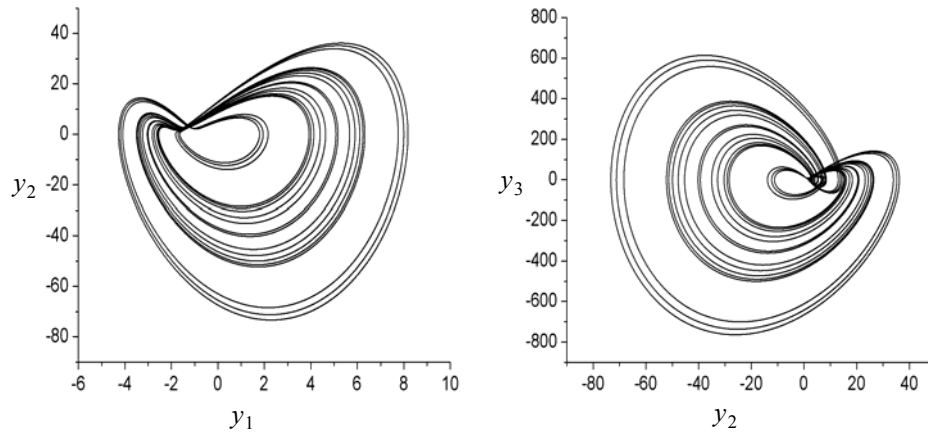


Рис. 3. Фазові характеристики НДМ (12)

ВИСНОВКИ

Доведена в роботі теорема обґрунтовує можливість переходу від досліджуваної оригінальної нелінійної системи до системи спеціального типу, так званої диференціальної моделі, яку можна отримати на підставі єдиної спостережуваної змінної. Наявність такої моделі дає змогу отримати в загальному випадку деяку множину оригінальних систем-кандидатів. Маючи такий набір ОС, дослідник може вибрати ту модель, яка якомога повніше відображає фізику процесу.

Теорема може бути застосована для спрощення вже наявних моделей, які можуть мати надлишковість [10]. В обох випадках теорема є строгим математичним обґрунтуванням для задач такого типу, що дозволяє уникнути некоректності, яка можлива за інтуїтивного підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Aguirre L.A.* Modeling nonlinear dynamics and chaos: A review / L.A. Aguirre, C. Letellier // *Mathematical Problems in Engineering*. — 2009. — 238960. — URL: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2009/238960/>
2. *Nyarko E. K.* Solving the parameter identification problem of mathematical models using genetic algorithms / E. K. Nyarko, R. Scitovski // *Applied Mathematics and Computation*. — 2004. — Vol. 153. — P. 651–658.
3. *Kabanikhin S.* A parameter identification problem for the mathematical model of HIV dynamics / S. Kabanikhin, O. Krivorotko, D. Yermolenko // 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). — IEEE. — Novosibirsk.
4. *Ljung L.* System Identification – Theory For the User / L. Ljung. — N.J.: PTR Prentice Hall, 1999. — 609 p.
5. *Shvets A.Yu.* Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems / A.Yu. Shvets V.O. Sirenko // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*. — 2012. — N 2. — P. 303–310.
6. *Moon F.C.* Chaotic Vibrations: An introduction for applied scientists and Engineers / F.C. Moon. — John Wiley & Sons, 1987. — 309 p.

7. *Gouesbet G.* Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system / G. Gouesbet // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 44. — P. 6264–6280.
8. *Gouesbet G.* Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series / G. Gouesbet // *Phys. Rev. A.* — 1991. — **43.** — P. 5321–5331.
9. *Lainscsek C.* A class of Lorenz-like systems / C. Lainscsek // *Chaos.* — 2012. — **22.** — P. 013126.
10. *Gorodetskyi V.* Simplification of a reconstructed model / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // *International Journal of Dynamics and Control.* — 2019. — DOI: 10.1007/s40435-019-00579-w.
11. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // *Lec. Notes in Math.* — 1981. — Vol. 898. — P. 366–381.
12. *Gorodetskyi V.* Reconstruction of chaotic systems of a certain class / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk. // *International Journal of Dynamics and Control.* — 2015. — N 3. — P. 341–353.

Надійшла 16.01.2020

МЕТОД ТРИКУТНИКА ДЛЯ ПОБУДОВИ ПОЛІНОМА ЖЕГАЛКІНА: ЗВ'ЯЗОК З ТРИКУТНИКОМ ПАСКАЛЯ

І.Я. СПЕКТОРСЬКИЙ, О.А. ГАЛГАНОВ

Анотація. Поліном Жегалкіна — зручний спосіб зображення булевої функції у вигляді суми за операцією \oplus (хог, або сума за модулем 2) скінченної кількості кон'юнкцій змінних — запропонований у 1927 р. радянським ученим І.І. Жегалкіним. Одним з алгоритмів побудови полінома Жегалкіна для заданої булевої функції є метод трикутника, запропонований у 1985–1987 рр. радянським математиком В.П. Супруном. Застосування методу трикутника збігається з почерговою побудовою рядків трикутника Паскаля з використанням відомого співвідношення $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. Природно очікувати на зв'язок обчислення полінома Жегалкіна методом трикутника з розташуванням біноміальних коефіцієнтів у трикутнику Паскаля. Проаналізовано зв'язок методу трикутника з побудовою рядків трикутника Паскаля; запропоновано відносно просте доведення коректності методу трикутника шляхом зіставлення кожного кроку алгоритма з покроковою побудовою рядків біноміальних коефіцієнтів у трикутнику Паскаля.

Ключові слова: булева функція, поліном Жегалкіна, метод трикутника, трикутник Паскаля.

ВСТУП

Поліном Жегалкіна — зручний спосіб зображення булевої функції у вигляді суми за операцією \oplus (хог, або сума за модулем 2) скінченної кількості кон'юнкцій (логічного добутку) змінних — запропонований у 1927 р. радянським ученим І.І. Жегалкіним ([1]). Відомо (див., напр., [2, 3]), що кожен булеву функцію можна зобразити у вигляді полінома Жегалкіна єдиним способом (з точністю до переставлення доданків та множників у межах доданка).

Відомі різні алгоритми побудови полінома Жегалкіна для заданої булевої функції — метод еквівалентних перетворень (з побудованою диз'юнктивної або кон'юнктивної нормальної форми), метод невизначених коефіцієнтів, метод Паскаля (половинне ділення) тощо. Менш відомий зручний (хоча не найефективніший) метод трикутника, запропонований у 1985 р. радянським математиком В.П. Супруном для симетричних булевих функцій [4], а в 1987 р. — поширений на довільні булеві функції [5].

Застосування методу трикутника по суті збігається з побудовою кожного наступного рядка трикутника Паскаля почерговим додаванням двох сусідніх значень у попередньому рядку, тобто з використанням співвідношення $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. Природно очікувати на зв'язок обчислення полінома Жегалкіна методом трикутника (і зрештою будь-яким іншим методом) з розташуванням біноміальних коефіцієнтів у трикутнику Паскаля. Проте ані опис

методу трикутника у працях [5, 6], ані доведення у [5] (як узагальнення аналогічного результату, доведеному для симетричних булевих функцій [4]) не розкривають зв'язок цього методу з біноміальними коефіцієнтами.

Мета роботи: надати відносно просте доведення методу трикутника з розкриттям тісного зв'язку між матрицею перетворення вектора значень булевої функції у вектор коефіцієнтів полінома Жегалкіна з розташуванням біноміальних коефіцієнтів у трикутнику Паскаля.

ОПЕРАТОР ПЕРЕТВОРЕННЯ ВЕКТОРА ЗНАЧЕНЬ БУЛЕВОЇ ФУНКЦІЇ У ВЕКТОР КОЕФІЦІЄНТІВ ПОЛІНОМА ЖЕГАЛКІНА

Нехай f — n -арна булева функція, тобто $f : B^n \rightarrow B$, де $B = \{0,1\}$; за потреби арність $n \geq 0$ вказують у позначенні функції f , використовуючи позначення $f^{(n)}$. У випадку $n = 0$ функцію $f^{(0)}$ вважають константою 0 або 1.

Булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ зазвичай задають її вектором значень $w_f = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})$, де f_k ($0 \leq k \leq 2^n - 1$) — значення f на двійковому наборі $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$, що відповідає двійковому запису числа k , тобто

$$f_k = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ якщо } k = \sum_{i=1}^n x_i 2^{n-i}.$$

Поліномом Жегалкіна називають суму за операцією \oplus (суму за модулем 2) скінченної кількості кон'юнктив (добутку змінних); кожна змінна входить у кожен кон'юнкт не більше одного разу; порожній кон'юнкт (що не містить жодної змінної) є константою 1; кон'юнкти, що містять ті самі змінні і відрізняються лише порядком їх запису, вважають однаковими; кожен кон'юнкт входить у поліном не більше одного разу. Очевидно, що поліном Жегалкіна є «традиційним» поліномом над полем $\langle \{0,1\}, \oplus, \cdot \rangle$, яке ізоморфне полю Галуа $\text{GF}(2)$ (також використовують позначення \mathbb{F}_2) та кільцю класів лишків $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, і яке у цьому контексті називають алгеброю Жегалкіна.

Поліном Жегалкіна можна подати у вигляді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n \\ 0 \leq k \leq n}} a_m x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}, \quad (1)$$

де $a_m \in \{0,1\}$ ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$), індекси j_1, j_2, \dots, j_k відповідають розрядам у двійковому записі номера m , тобто

$$m = \sum_{i=1}^k 2^{n-j_i} = \overbrace{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0}^n.$$

Приклад 1. Зведемо у таблицю номери коефіцієнтів a_m у десятковій системі та двійковому коді для $n = 0, 1, 2, 3$ і запишемо відповідні кон'юнкти (див. таблицю).

Кодування кон'юнктив у поліномі Жегалкіна для $n = 3$

m		Кон'юнкт	m		Кон'юнкт
десятькова система	двійковий код		десятькова система	двійковий код	
$n = 0$: номер відсутній		1	$n = 3$		
$n = 1$			000	0	1
0	0	1	001	1	x_3
1	1	x_1	010	2	x_2
$n = 2$			011	3	x_1x_2
0	00	1	100	4	x_1
1	01	x_1	101	5	x_1x_3
2	10	x_2	110	6	x_1x_2
3	11	x_1x_2	111	7	$x_1x_2x_3$

Для $n = 1, 2, 3$ співвідношення (1) набуває вигляду

$$f(x_1) = a_0 \oplus a_1x_1, \quad f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1x_2 \oplus a_2x_1 \oplus a_3x_1x_2;$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1x_3 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_2x_3 \oplus a_4x_1 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_2x_3 \oplus a_7x_1x_2x_3;$$

у випадку $n = 0$ булева функція f та відповідний поліном Жегалкіна a є константою 0 або 1.

Очевидно, що поліном Жегалкіна над змінними x_1, x_2, \dots, x_n однозначно (з точністю до порядку доданків та множників у межах кожного доданка) визначено коефіцієнтами a_m ($0 \leq m \leq 2^n - 1$), які формують вектор p_f коефіцієнтів полінома Жегалкіна.

Відомо [2, 3], що для кожної булевої функції існує єдиний (з точністю до порядку доданків та множників у межах кожного доданка) поліном Жегалкіна. Ураховуючи очевидну лінійну залежність між вектором значень w_f та вектором коефіцієнтів полінома Жегалкіна p_f булевої функції $f^{(n)}$, можемо розглядати співвідношення (тут і далі, якщо не вказано інше, операції додавання та множення, визначені за арифметикою поля \mathbb{F}_2)

$$A_n p_f = w_f, \tag{2}$$

де A_n — матриця розмірності $2^n \times 2^n$ над полем \mathbb{F}_2 (двійкова матриця). Матриця A_n у співвідношенні (2) визначає систему 2^n лінійних рівнянь, які (а отже і A_n) можна отримати підставленням у формулу (1) усіх можливих наборів значень змінних x_1, x_2, \dots, x_n у порядку зростання за номером

$$k = \sum_{i=1}^n x_i 2^{n-i}.$$

Приклад 2. Для $n = 0, 1, 2, 3$ співвідношення (2) набуває вигляду

$$(1)a = f; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0,0) \\ f(0,1) \\ f(1,0) \\ f(1,1) \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0,0,0) \\ f(0,0,1) \\ f(0,1,0) \\ f(0,1,1) \\ f(1,0,0) \\ f(1,0,1) \\ f(1,1,0) \\ f(1,1,1) \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що за обраної нумерації елементів у векторах w_f та p_f матриця A_n для будь-якого $n \geq 0$ є нижньотрикутною. З огляду на існування та єдиність полінома Жегалкіна для кожної булевої функції рівняння (2) відносно p_f за будь-якого фіксованого w_f має єдиний розв’язок.

Множину B^k для $k \geq 1$ розглядатимемо як лінійний простір над полем \mathbb{F}_2 з покоординатним застосуванням \oplus як суми векторів; A_n — матриця лінійного перетворення у B^{2^n} , визначеного за співвідношенням (2).

Матрицю A_n можна побудувати рекурсивно за $n \geq 0$ (див., напр., [6]); для зручності наведемо відповідне твердження та його просте доведення.

Лема 1. Для послідовності матриць A_n ($n \geq 0$) справджується рекурентне співвідношення:

- база рекурсії

$$A_0 = (1); \tag{3}$$

- крок рекурсії

$$A_{n+1} = \begin{matrix} 2^n \{ \overbrace{A_n}^{2^n} & \overbrace{0}^{2^n} \} \\ 2^n \{ \overbrace{A_n}^{2^n} & \overbrace{A_n}^{2^n} \} \end{matrix}. \tag{4}$$

Доведення. Застосуємо принцип математичної індукції, якщо $n \geq 0$.

База. Для $n = 0$ отримуємо: $f^{(0)}(x) = a_0$, $p_f = w_f = (a_0)$, звідки $A_0 = (1)$

як матриця тотожного перетворення у $B^1 = B$. Отже, співвідношення (3) справджується.

Припущення. Нехай $t \geq 0$, і для $n = t$ твердження леми справджується.

Крок. Доведемо твердження лєми для $n = t + 1$. Увівши t -арні функції $f_{x_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = f(1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$ та $f_{\bar{x}_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = f(0, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$, отримаємо:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) &= \bar{x}_1 f_{\bar{x}_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \oplus x_1 f_{x_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = \\ &= (x_1 \oplus 1) f_{\bar{x}_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \oplus x_1 f_{x_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = \\ &= f_{\bar{x}_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \oplus x_1 (f_{\bar{x}_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \oplus f_{x_1}(x_2, \dots, x_m, x_{m+1})). \end{aligned} \quad (5)$$

Визначення функцій f_{x_1} і $f_{\bar{x}_1}$ та розклад (5) дозволяють записати вектор коефіцієнтів p_f та вектор значень w_f і через $p_{f_{\bar{x}_1}}$ і $p_{f_{x_1}}$ та через $w_{f_{\bar{x}_1}}$ і $w_{f_{x_1}}$ відповідно (тут і далі операція \oplus на векторах застосовується по координатно):

$$w_f = \begin{matrix} 2^m \{ \\ 2^m \{ \end{matrix} \begin{pmatrix} w_{f_{\bar{x}_1}} \\ w_{f_{x_1}} \end{pmatrix}; \quad p_f = \begin{matrix} 2^m \{ \\ 2^m \{ \end{matrix} \begin{pmatrix} p_{f_{\bar{x}_1}} \\ p_{f_{\bar{x}_1}} \oplus p_{f_{x_1}} \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ A_m & A_m \end{pmatrix} p_f &= \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ A_m & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{f_{\bar{x}_1}} \\ p_{f_{\bar{x}_1}} \oplus p_{f_{x_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m p_{f_{\bar{x}_1}} \\ A_m p_{f_{\bar{x}_1}} \oplus A_m (p_{f_{\bar{x}_1}} \oplus p_{f_{x_1}}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_m p_{f_{\bar{x}_1}} \\ A_m p_{f_{x_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{f_{\bar{x}_1}} \\ w_{f_{x_1}} \end{pmatrix} = w_f. \end{aligned}$$

Отже, $\begin{pmatrix} A_m & 0 \\ A_m & A_m \end{pmatrix} p_f = w_f$ для довільної булевої функції $f^{(m)}$. Оскільки

матрицю лінійного у B^n перетворенні $p_f \mapsto w_f$ у співвідношенні (2) визначено однозначно, отримуємо твердження кроку рекурсії (4):

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ A_m & A_m \end{pmatrix}.$$

Наслідок. Перетворення $p_f \mapsto w_f$ інволютивне, тобто $A_n^2 = I_{2^n}$ (або $A_n = A_n^{-1}$) для кожного $n \geq 0$.

Доведення. Достатньо довести рівність $A_n^2 = I_{2^n}$ для довільного $n \geq 0$, застосовуючи принцип математичної індукції.

База. Для $n = 0$ з урахуванням співвідношення (3) отримуємо: $A_0^2 = (1)^2 = (1) = I_1$.

Припущення. Нехай $t \geq 0$, і для $n = t$ твердження $A_n^2 = I_{2^n}$ справджується.

Крок. Доведемо твердження $A_n^2 = I_{2^n}$ для $n = m + 1$. З урахуванням співвідношення (4) маємо:

$$A_n^2 = A_{m+1}^2 = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ A_m & A_m \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A_m^2 & 0 \\ A_m \oplus A_m & A_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2^m} & 0 \\ 0 & I_{2^m} \end{pmatrix} = I_{2^{m+1}} = I_{2^n}.$$

Приклад 3. Обчислимо A_n для $0 \leq n \leq 3$ за рекурентними співвідношеннями (3) і (4):

$$A_0 = (1); \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_0 & A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_1 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ A_2 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 1. Існування та єдиність розв’язку рівняння (2) і трикутність матриці A_n для довільного $n \geq 0$ дозволяє знаходити коефіцієнти полінома Жегалкіна добре відомим методом невизначених коефіцієнтів, розв’язуючи рівняння (2) послідовним обчисленням координат вектора p_f без безпосереднього обчислення A_n (детальніше див., напр., [6]).

Зауваження 2. Твердження леми 1 фактично обґрунтовує коректність відомого методу Паскаля — рекурсивне обчислення вектора коефіцієнтів полінома Жегалкіна за вектором значень булевої функції послідовним діленням вектора значень навпіл (детальніше див., напр., [6]).

Зауваження 3. Завдяки співвідношенню $A_n = A_n^{-1}$, яке забезпечує наслідок з леми 1, рівняння (2) допускає обертання: $A_n w_f = p_f$, що дозволяє (за наявності матриці A_n) безпосередньо обчислювати вектор коефіцієнтів полінома Жегалкіна p_f за заданим вектором значень w_f .

МЕТОД ТРИКУТНИКА: МАТРИЦЯ ОПЕРАТОРА ПЕРЕТВОРЕННЯ

Метод трикутника побудови полінома Жегалкіна для булевої функції $f: B^n \rightarrow B$, який запропонував радянський вчений В.П. Супрун [4–6], полягає у побудові векторів $v^0, v^1, \dots, v^{2^n-1} \in B^{2^n}$ за рекурентними співвідношеннями

$$v^0 = w_f, v_i^{k+1} = \begin{cases} v_i^k, & \text{якщо } 0 \leq i \leq k; \\ v_{i-1}^k \oplus v_i^k, & \text{якщо } k+1 \leq i \leq 2^n \end{cases} \quad (6)$$

для $0 \leq k \leq 2^n - 2$. Доведено [5] і для випадку симетричних булевих функцій [4], що координати v_0^k ($0 \leq k \leq 2^n - 1$) утворюють вектор коефіцієнтів полінома Жегалкіна, тобто

$$p_f = \left(v_0^0, v_1^1, \dots, v_{2^n-1}^{2^n-1} \right).$$

Зі співвідношення (6) очевидно, що $v_k^k = v_k^{k+1} = \dots = v_k^{2^n-1}$ ($0 \leq k \leq 2^n - 1$), а отже,

$$p_f = \left(v_0^0, v_1^1, \dots, v_{2^n-1}^{2^n-1} \right) = \left(v_0^{2^n-1}, v_1^{2^n-1}, \dots, v_{2^n-1}^{2^n-1} \right) = v^{2^n-1},$$

тобто застосуванням рекурентного співвідношення (6) дістаємо $p_f = v^{2^n-1}$ за $2^n - 2$ кроків.

Приклад 4. Для булевої функції $f^{(2)}$ з вектором значень $w_f = (1101)$ маємо:

$$\begin{aligned} v^0 &= w_f = (1101); \\ v^1 &= (1, 1 \oplus 1, 1 \oplus 0, 0 \oplus 1) = (1011); \\ v^2 &= (1, 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1) = (1010); \\ v^3 &= (1, 0, 1, 1 \oplus 0) = (1011). \end{aligned}$$

Таким чином, $p_f = v^3 = (1011)$, тобто поліном Жегалкіна функції f містить кон'юнкції з номерами 0, 2 і 3, що відповідає двійковим кодам 0010 та 11. Отже, отримуємо такий поліном Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2.$$

Приклад 5. Для булевої функції $f^{(3)}$ з вектором значень $w_f = (11111101)$ отримуємо:

$$\begin{aligned} v^0 &= w_f = (11111101); \\ v^1 &= (1, 1 \oplus 1, 1 \oplus 1, 1 \oplus 1, 1 \oplus 1, 1 \oplus 0, 0 \oplus 1) = (10000011); \\ v^2 &= (1, 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1) = (10000010); \\ v^3 &= (1, 0, 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 0) = (10000011); \\ v^4 &= (1, 0, 0, 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1) = (10000010); \\ v^5 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0 \oplus 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 0) = (10000011); \\ v^6 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1) = (10000010); \\ v^7 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1 \oplus 0) = (10000011). \end{aligned}$$

Таким чином, $p_f = v^7 = (10000011)$, тобто поліном Жегалкіна функції f містить кон'юнкти з номерами 0, 6 та 7, що відповідає двійковим кодам 000, 110 та 111. Отже, маємо такий поліном Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3.$$

Зазначимо, що за побудовою (співвідношення (6)) у кожному з векторів $v^k \in B^{2^n}$ ($1 \leq k \leq 2^n - 1$) перші k координат збігаються з відповідними координатами вектора v^{k-1} , що дозволяє визначати вектори v^k ($0 \leq k \leq 2^n - 1$) як вектори меншої розмірності ($v^k \in B^{2^n - k}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$), і саме так зазвичай діють під час опису методу [4–6]. Однак у цій роботі для подальшого розгляду доцільно не зменшувати розмірність векторів v^k ($0 \leq k \leq 2^n - 1$) на кожному кроці рекурсії, доповнюючи перші k координат відповідними координатами вектора v^{k-1} , отриманого на попередньому кроці.

Запишемо рекурентне співвідношення (6) у векторно-матричному вигляді над полем \mathbb{F}_2 :

$$v^0 = w_f, v^{k+1} = T_{n,k+1} v^k,$$

$$\text{де } T_{n,k} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), 1 \leq k \leq 2^n - 1,$$

звідки для перетворення $w_f \mapsto p_f$ дістаємо $p_f = T_{n,2^n-1} T_{n,2^n-2} \dots T_{n,1} w_f$ за арифметикою \mathbb{F}_2 .

Уведемо до розгляду матриці

$$T_n = T_{n,2^n-1} T_{n,2^n-2} \dots T_{n,1} \text{ за арифметикою поля } \mathbb{F}_2;$$

$$T_n^{\mathbb{Z}} = T_{n,2^n-1} T_{n,2^n-2} \dots T_{n,1} \text{ за арифметикою кільця } \mathbb{Z}.$$

Очевидно, що $T_n = T_n^{\mathbb{Z}} \bmod 2$, де $\bmod 2$ застосовується до кожного елемента матриці $T_n^{\mathbb{Z}}$.

Приклад 6. Для $n = 2$ отримуємо:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

за арифметикою \mathbb{F}_2 ;

$$T_2^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

за арифметикою \mathbb{Z} .

Легко пересвідчитися, що $T_2 = T_2^{\mathbb{Z}} \bmod 2$. Наведемо проміжний етап обчислення для $T_2^{\mathbb{Z}}$:

$$T_{2,2}^{\mathbb{Z}} T_{2,1}^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Для $n=3$ отримуємо:

$$T_3^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{3,5}^{\mathbb{Z}} T_{3,4}^{\mathbb{Z}} T_{3,3}^{\mathbb{Z}} T_{3,2}^{\mathbb{Z}} T_{3,1}^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_{3,6}^{\mathbb{Z}} T_{3,5}^{\mathbb{Z}} T_{3,4}^{\mathbb{Z}} T_{3,3}^{\mathbb{Z}} T_{3,2}^{\mathbb{Z}} T_{3,1}^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Матриця $T_n^{\mathbb{Z}}$ ($n \geq 0$) містить трикутник Паскаля під головною діагоналлю:

$$T_n^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ C_{2^n-1}^0 & C_{2^n-1}^1 & C_{2^n-1}^2 & \dots & C_{2^n-1}^{2^n-1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Доведення. Математичною індукцією за $k \geq 1$ ($k \leq 2^n - 1$) доведемо рівність

$$T_{n,k}^{\mathbb{Z}} T_{n,k-1}^{\mathbb{Z}} \dots T_{n,1}^{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & \vdots & & \\ C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^k \end{pmatrix}. \quad (8)$$

База. У випадку $k=1$ співвідношення (8) є тривіальним:

$$T_{n,1}^{\mathbb{Z}} = \left(\begin{array}{c|cccccc} & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Припущення. Нехай $1 \leq m \leq 2^n - 2$, і для $k = m$ співвідношення (8) справджується.

Крок. Доведемо рівність (8) для $k = m + 1$. Використовуючи відому тотожність $C_m^{i+1} + C_m^i = C_{m+1}^{i+1}$, а також очевидні рівності $C_m^0 + 0 = C_{m+1}^0$ та $0 + C_m^m = C_{m+1}^m$, отримуємо:

$$T_{n,m+1}^{\mathbb{Z}} T_{n,m}^{\mathbb{Z}} \dots T_{n,1}^{\mathbb{Z}} = \left(\begin{array}{c|cccccc} & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \times$$

$$\times v \left(\begin{array}{ccccc|cccc} C_0^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots & \\ C_{m-1}^0 & C_{m-1}^1 & \dots & C_{m-1}^{m-1} & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^{m-1} & C_m^m & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^{m-1} & C_m^m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & C_m^0 & \dots & C_m^{m-2} & C_m^{m-1} & C_m^m & C_m^m & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^m & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^m & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^m & & & & \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc} C_0^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & \vdots & & & & & \\ C_{m-1}^0 & C_{m-1}^1 & \dots & C_{m-1}^{m-1} & 0 & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^{m-1} & C_m^m & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^{m-1} & C_{m+1}^m & C_{m+1}^{m+1} & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_{m+1}^0 & \dots & C_{m+1}^1 & C_{m+1}^{m-1} & C_{m+1}^m & C_{m+1}^{m+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{m+1}^0 & \dots & C_{m+1}^{m-2} & C_{m+1}^{m-1} & C_{m+1}^m & C_{m+1}^{m+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^{m+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^{m+1} & 0 \end{array} \right)$$

Отже, співвідношення (8) справджується для $k = m + 1$. Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, рівність (8) справджується для кожного $1 \leq k \leq 2^n - 1$. Шукану рівність (7) тепер дістаємо зі співвідношення (8), якщо $k = 2^n - 1$. □

Твердження теореми 1, а також «проміжну» рівність (8), продемонстровано у прикладах 6 та 7.

КОРЕКТНІСТЬ МЕТОДУ ТРИКУТНИКА

Деякі властивості парності біноміальних коефіцієнтів

Парність біноміальних коефіцієнтів зручно досліджувати, використовуючи техніку кільця поліномів $\mathbb{F}_2[x]$ над полем \mathbb{F}_2 . Нагадаємо (див. [7]), що кільце поліномів $K[x]$ над комутативним кільцем K з одиницею визначають як сукупність нескінченних послідовностей елементів із K , у кожній з яких усі члени, починаючи з деякого, дорівнюють 0 (нулю кільця K). Операції додавання та множення кільця K природним чином поширюють на $K[x]$, трактуючи елементи послідовностей як коефіцієнти полінома. Елементи кільця $K[x]$ для зручності зображують поліномами зі змінною x (змінну x уведено винятково для зручності позначень).

У кільці поліномів $K[x]$ справджується низка алгебричних властивостей, відомих для класичних поліномів кільця $\mathbb{R}[x]$; зокрема, у кільці $K[x]$ справджується біноміальна формула. Детальніше про кільце поліномів див., напр. [7].

Лема 2. Число $C_{2^n}^k$ є парним для всіх $n \geq 0$, $1 \leq k \leq 2^n - 1$.

Доведення. Твердження леми доводитимемо математичною індукцією за $n \geq 0$.

База. Для $n = 0$ твердження леми тривіальне завдяки відсутності цілих $1 \leq k \leq 2^0 - 1$.

Припущення. Нехай твердження леми справджується для $n = n_0$, тобто $C_{2^{n_0}}^k$ є парним для всіх $1 \leq k \leq 2^{n_0} - 1$.

Крок. Нехай $n = n_0 + 1$. Для полінома $(1 \oplus x)^{2^{n_0+1}}$ за біноміальною формулою отримуємо розклад

$$\begin{aligned} (1 \oplus x)^{2^{n_0+1}} &= \\ &= C_{2^{n_0+1}}^0 \oplus C_{2^{n_0+1}}^1 x \oplus C_{2^{n_0+1}}^2 x^2 \oplus \dots \oplus C_{2^{n_0+1}}^{2^{n_0+1}-1} x^{2^{n_0+1}-1} \oplus C_{2^{n_0+1}}^{2^{n_0+1}} x^{2^{n_0+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

а з урахуванням припущення індукції за арифметикою \mathbb{F}_2 :

$$(1 \oplus x)^{2^{n_0+1}} = \left((1 \oplus x)^{2^{n_0}} \right)^2 = \left(1 \oplus x^{2^{n_0}} \right)^2 = 1 \oplus 2x^{2^{n_0}} \oplus x^{2^{n_0+1}} = 1 \oplus x^{2^{n_0+1}}. \quad (10)$$

Порівнюючи коефіцієнти поліномів у розкладах (9) та (10) за арифметикою \mathbb{F}_2 (зокрема, ототожнюючи цілі числа за еквівалентністю $\text{mod } 2$), отримуємо твердження кроку індукції:

$$C_{2^{n_0+1}}^k \equiv \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = 0 \text{ або } k = 2^{n_0+1}; \\ 0, & \text{якщо } 1 \leq k \leq 2^{n_0+1}. \end{cases} \pmod{2}.$$

Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, твердження леми справджується для кожного $n \geq 0$, тобто число $C_{2^n}^k$ є парним для всіх $n \geq 0, 1 \leq k \leq 2^n - 1$.

Надалі для зручності позначень покладемо

$$C_i^j = 0 \text{ для } j > i, \quad (11)$$

вважаючи біноміальні коефіцієнти C_i^j визначеними для всіх невід'ємних $i, j \in \mathbb{Z}$. Легко пересвідчитись, що тотожність $C_i^j + C_i^{j+1} = C_{i+1}^{j+1}$ для $j \geq i$ також справджується:

$$\begin{aligned} j > i: C_i^j + C_i^{j+1} &= C_{i+1}^{j+1} = 0; \\ j = i: C_i^i + C_i^{i+1} &= C_{i+1}^{i+1} = 1. \end{aligned}$$

Лема 3. Числа $C_m^k, C_{m+2^n}^k, C_{m+2^n}^{k+2^n}$ мають однакову парність для всіх $0 \leq m \leq 2^n - 1, 0 \leq k \leq 2^n - 1, n \geq 0$.

Доведення. Для полінома $(1 \oplus x)^{2^n+m}$ ($0 \leq m \leq 2^n - 1$) за арифметикою \mathbb{F}_2 з урахуванням леми 2 отримуємо:

$$\begin{aligned} (1 \oplus x)^{2^n+m} &= (1 \oplus x)^{2^n} (1 \oplus x)^m = (1 \oplus x^{2^n}) (C_m^0 \oplus C_m^1 x \oplus \dots \oplus C_m^m x^m) = \\ &= C_m^0 \oplus C_m^1 x \oplus \dots \oplus C_m^m x^m \oplus C_m^0 x^{2^n} \oplus C_m^1 x^{2^n+1} \oplus \dots \oplus C_m^m x^{2^n+m}. \end{aligned} \quad (12)$$

Порівнюючи коефіцієнти у розкладі (12) з відповідними коефіцієнтами у розкладі за біноміальною формулою, дістаємо шукане твердження леми:

$$C_m^k \equiv C_{m+2^n}^k \equiv C_{m+2^n}^{k+2^n} \pmod{2}$$

для $0 \leq m \leq 2^n - 1$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, $n \geq 0$.

Приклад 8. Продемонструємо результат леми 3 для $n = 2$, $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq k \leq 3$:

1	0	0	0				
1,1	4,0	6,0	4,0				
1	1	0	0				
1,5	5,1	10,0	10,0				
1	2	1	0				
1,15	6,6	15,1	20,0				
1	3	3	1				
1,35	7,21	21,7	35,1				
1	4	6	4	1	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0
1	7	21	35	35	21	7	1

У наведеному фрагменті трикутника Паскаля з урахуванням рівності (11) біля кожного елемента C_m^k для $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq k \leq 3$ (лівий верхній кут) наведено елементи C_{m+4}^k , C_{m+4}^{k+4} . Легко пересвідчитися, що для кожних $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq k \leq 3$ елементи C_m^k , C_{m+4}^k , C_{m+4}^{k+4} дійсно мають однакову парність.

Зауваження 4. Розглядаючи розклад поліномів над полем \mathbb{F}_p , можна досліджувати подільність біноміальних коефіцієнтів на довільне просте p ; наприклад, нескладно довести:

- $C_{p^n}^k \equiv 0 \pmod{p}$ для $1 \leq k \leq p^n - 1$, $n \geq 0$;
- $C_{p^n-1}^k \equiv 0 \pmod{p}$ для $0 \leq k \leq p^n$, $n \geq 0$.

Детальніше про властивості біноміальних коефіцієнтів за $\text{mod } p$ для простого p див., напр., [8].

Доведення коректності методу трикутника

Теорема 2. Матриця T_n , що визначає метод трикутника для булевої функції $f^{(n)}$, визначає перетворення $w_f \mapsto p_f$, тобто $T_n w_f = p_f$ за арифметикою поля \mathbb{F}_2 .

Доведення. З урахуванням леми 1 для доведення рівності $T_n = A_n$ достатньо довести математичною індукцією рекурентні співвідношення (3) і (4) для T_n ($n \geq 0$).

База. Для $n = 0$ отримуємо: $T_0 = A_0 = (1)$, тобто співвідношення (3) для $T_0 = A_0$ справджується.

Припущення. Нехай твердження теореми справджується для $n = n_0$, тобто $T_{n_0} = A_{n_0}$.

Крок. Нехай $n = n_0 + 1$. За теоремою 1 для $0 \leq i, j \leq 2^{n_0+1} - 1$ та з урахуванням рівності (11) маємо:

$$(T_{n_0+1})_{i,j} = \begin{cases} C_i^j \bmod 2, & \text{якщо } j \leq i; \\ 0, & \text{якщо } j > i, \end{cases} = C_i^j \bmod 2;$$

де \bmod — бінарна операція взяття остачі від ділення; зокрема, для $a \in \mathbb{Z}$

$$a \bmod 2 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a \text{ парне;} \\ 1, & \text{якщо } a \text{ непарне.} \end{cases}$$

Далі з теореми 1 негайно випливає рівність $(T_{n_0+1})_{i,j} = (T_{n_0})_{i,j} = C_i^j \bmod 2$ для $0 \leq i, j \leq 2^{n_0} - 1$. Звідси за лемою 3 отримуємо:

$$(T_{n_0})_{i,j} = (T_{n_0+1})_{i,j} = (T_{n_0+1})_{i+2^{n_0},j} = (T_{n_0+1})_{i+2^{n_0},j+2^{n_0}} = C_i^j \bmod 2$$

для $0 \leq i, j \leq 2^{n_0} - 1$. Таким чином, три блоки $(T_{n_0+1})_{\substack{0 \leq i \leq 2^{n_0} - 1, \\ 0 \leq j \leq 2^{n_0} - 1}}$,

$(T_{n_0+1})_{\substack{0 \leq i \leq 2^{n_0} - 1, \\ 2^{n_0} \leq j \leq 2^{n_0+1} - 1}}$, $(T_{n_0+1})_{\substack{2^{n_0} \leq i \leq 2^{n_0+1} - 1, \\ 2^{n_0} \leq j \leq 2^{n_0+1} - 1}}$ збігаються між собою та з матрицею T_{n_0} .

Отже, з урахуванням кроку індукції та леми 1

$$T_{n_0+1} = \begin{pmatrix} T_{n_0} & 0 \\ T_{n_0} & T_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n_0} & 0 \\ A_{n_0} & A_{n_0} \end{pmatrix} = A_{n_0+1},$$

що доводить твердження кроку індукції. Згідно з принципом математичної індукції співвідношення рекурсії (4) для T_n справджується для всіх $n \geq 0$, що завершує доведення теореми. \square

ВИСНОВКИ

1. Метод трикутника побудови полінома Жегалкіна, запропонований у працях [4, 5], тісно пов'язаний з трикутником Паскаля: рядки трикутника Паскаля з точністю до еквівалентності за $\bmod 2$ формують не тільки матрицю методу T_n , а і проміжні матриці $T_{n,k}$ ($1 \leq k \leq 2^n - 1$), які відповідають окремим крокам алгоритма.

2. Зв'язок з трикутником Паскаля дозволяє обґрунтувати коректність методу трикутника, зіставляючи рекурентну побудову матриць T_n ($n \geq 0$) та покрокову побудову рядків трикутника Паскаля (див. доведення теореми 1).

ЛІТЕРАТУРА

1. Жегалкин И.И. О технике вычислений предложений в символической логике / И.И. Жегалкин // Математический сборник. — 1927. — С. 9–28.
2. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций / С.С. Марченков. — М.: Физматлит, 2000. — 128 с.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. — М.: Наука. — 1986. — 272 с.
4. Супрун В.П. Полиномиальное разложение симметрических булевых функций / В.П. Супрун // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1985. — № 4. — С. 123–127.
5. Супрун В.П. Табличный метод полиномиального разложения булевых функций / В.П. Супрун // Кибернетика. — 1987. — № 1. — С. 116–117.
6. Супрун В.П. Основы теории булевых функций / В.П. Супрун. — М.: Ленанд, 2017. — 208 с.
7. Завало С.Т. Курс алгебры / С.Т. Завало. — К.: Вища шк., 1985. — 503 с.
8. Granville A. Arithmetic Properties of Binomial Coefficients I: Binomial coefficients modulo prime powers / A. Granville // Canadian Mathematical Society Conference Proceedings. — 1997. — N 20. — P. 253–275.

Надійшла 10.01.2020

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 681.5.015.8:519

Синтез багатовимірної системи керування для прецизійного комплексу штучного мікроклімату / Панкратова Н.Д., Бидюк П.І., Голінко І.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 7–20.

Розглянуто процедуру синтезу багатовимірного цифрового регулятора для промислових систем штучного мікроклімату. Для промислових кондиціонерів запропоновано методика розроблення комплексної динамічної математичної моделі в просторі станів як єдиного багатовимірного об'єкта управління. Виконано аналіз критеріїв для оптимізації системи управління кондиціонером. Розглянуто процедуру синтезу оптимального багатовимірного лінійно-квадратичного цифрового регулятора та синтезовано матрицю зворотного зв'язку, яка за параметрами стану об'єкта управління визначає траєкторію руху вектора оптимального впливу і мінімізує квадратичний критерій якості. Запропонований багатовимірний лінійно-квадратичний цифровий регулятор відрізняється наявністю логічного вибору обладнання для здійснення оптимального управління кліматичним устаткуванням кондиціонера. Такий підхід дозволяє переосмислити процедуру синтезу автоматичної системи управління для промислових кондиціонерів на основі розмежування взаємовпливу регульованих параметрів. Рис.: 5. Бібліогр.: 13 назв.

UDC 681.5.015.8:519

Multidimensional control system synthesis for a precision air-conditioner / Pankratova N.D., Bidiyuk P.I., Golinko I.M. // System Research and Information Technologies. — 2020. — № 1. — P. 7–20.

The article considers the synthesis procedure for multidimensional digital controller embedded into industrial artificial microclimate systems. The methodology is proposed for constructing the complex dynamic mathematical model for industrial air conditioners represented in the state space of a combined multidimensional controlled system. An analysis of possible control system optimization criteria is performed. Also, the synthesis procedure for an optimal multidimensional digital linear quadratic controller is given. The feedback matrix is synthesized that determines the control vector optimal trajectory using controlled system states by minimizing the quadratic quality criterion. The proposed multidimensional linear digital controller has a feature of logical selection for elements of industrial equipment for performing the optimal control of a microclimate conditioner. The proposed approach allows for reconfiguring the synthesis procedure for the industrial conditioners automatic control system on the basis of delimiting the mutual influence of control parameters. Figs: 5. Refs: 13 titles.

УДК 004.92

Реконструкція 3D моделей будівель за їх тінями за допомогою супутникових знімків / Хабраман Х., Мозговий Д.К. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 21–27.

Створення тривимірних моделей будівель за допомогою аерокосмічних знімків в останні роки стало дуже актуальним і затребуваним напрямом, оскільки такі моделі використовуються в різних галузях людської діяльності. Натепер ці моделі можна створювати різними методами: за допомогою стереозйомки із супутника, фотозйомки з квадрокоптера, вимірювання літаковим лідаром сканування будівлі із Землі. Ці методи потребують дорогого устаткування і висококваліфікованих фахівців, що є стримувальним фактором для широкого використання таких технологій рядовими користувачами. Показано альтернативне рішення для створення тривимі-

рних моделей будівель на основі супутникових знімків і безкоштовного програмного забезпечення. Використано відомі пакети програм Google Earth і SketchUp. Рис.: 8. Бібліогр.: 7 назв.

UDC 004.92

Reconstruction of 3D models of buildings from their shadows using satellite images / Habraman H., Mozhovoy D.K. // System Research and Information Technologies. — 2020. — № 1. — P. 21–27.

The creation of three-dimensional models of buildings using aerospace images in recent years has become a very relevant and sought-after area, since such models are now used in various fields of human activity. Currently, the creation of such models can be performed in various ways: using stereo shooting from a satellite, taking pictures from a quadcopter, measuring by an airplane lidar by scanning a building from the Earth. But all these methods require expensive equipment and highly qualified professionals, which is a limiting factor for the widespread use of these technologies by ordinary users. The purpose of this article was to show an alternative solution for creating three-dimensional models of buildings based on satellite imagery and free software. In this work, we used the well-known software packages – Google Earth and SketchUp. Figs: 8. Refs: 7 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND
SOCIAL SYSTEMS

УДК 303.732.4, 519.816

Оцінювання обчислювальних моделей функціонування кіберфізичних систем / Панкратова Н.Д., Птуха Я.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 28–33.

Розглянуто використання обчислювальних моделей для підтримання функціонування кіберфізичних систем (CPS) у паралельному світі інтернету речей (IoT). Вивчено існуючі моделі, методи, прийоми та їх реалізація в цьому напрямі. Обґрунтовано необхідність використання методів машинного навчання через неточність, нечіткість, незавершеність переданих даних від датчиків фізичних систем з метою своєчасного обґрунтування рішення щодо підтримання функціонування реальних об'єктів певної кіберфізичної системи в умовах реального часу. Рис.: 1. Бібліогр.: 36 назв.

УДК 303.732.4, 519.816

Оценивание вычислительных моделей функционирования киберфизических систем / Панкратова Н.Д., Птуха Я.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 28–33.

Рассмотрено использование вычислительных моделей для поддержки функционирования киберфизических систем (CPS) в параллельном мире интернета вещей (IoT). Изучены существующие модели, методы, методики и их реализация в этом направлении. Обоснована необходимость использования методов машинного обучения из-за неточности, нечеткости, неполноты передаваемых данных с датчиков физических систем с целью своевременного обоснования решения по поддержанию функционирования реальных объектов конкретной киберфизической системы в режиме реального времени. Рис.: 1. Библиогр.: 36 назв.

УДК 004.942+519.816

Адаптивне прогнозування та оцінювання фінансових ризиків / Данилов В.Я., Гожий О.П., Калініна І.О., Белас А.О., Бідюк П.І., Жиров О.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 34–53.

Дослідження спрямовано на створення адаптивної системи підтримання прийняття рішень для моделювання і прогнозування нелінійних нестационарних проце-

сів в економіці, фінансах та інших галузях людської діяльності. Запропоновано процедури для адаптивного оцінювання структури і параметрів регресійних і ймовірнісних моделей, а також архітектуру і функціональну схему відповідної інформаційної системи. Розроблення системи ґрунтується на принципах системного аналізу, таких як адаптивне оцінювання структури моделей, оптимізація процедур оцінювання параметрів моделей, ідентифікація та врахування можливих невизначеностей, які враховуються під час оброблення даних і побудови математичних моделей, а також для збирання даних, побудови моделей, у процедурах прогнозування і відіграють роль факторів негативного впливу на обчислювальні процедури в інформаційній системі. Зменшення їх впливу сприяє підвищенню якості проміжних та остаточних результатів обчислень. Розглянуто ілюстративні приклади практичного застосування розробленої системи, що підтверджують її функціональність. Рис.: 4. Табл.: 5. Бібліогр.: 28 назв.

УДК 004.942+519.816

Адаптивное прогнозирование и оценивание финансового риска / Данилов В.Я., Гожий А.П., Калинина И.А., Белас А.О., Бидюк П.И., Жиров А.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 34–53.

Исследование направлено на создание адаптивной системы поддержки принятия решений для моделирования и прогнозирования нелинейных нестационарных процессов в экономике, финансах и других отраслях деятельности человека. Предложены процедуры для адаптивного оценивания структуры и параметров регрессионных и вероятностных моделей, а также архитектура и функциональная схема соответствующей информационной системы. Разработка системы основывается на принципах системного анализа, таких как адаптивное оценивание структуры моделей, оптимизация процедур оценивания параметров моделей, идентификация и учет возможных неопределенностей, которые учитываются при сборе данных, построении моделей, в процедурах прогнозирования и играют роль негативных факторов влияния на вычислительные процедуры в информационной системе. Уменьшение их влияния способствует повышению качества промежуточных и окончательных результатов вычислений. Рассмотрены иллюстративные примеры практического использования разработанной системы, которые подтверждают ее функциональность. Рис.: 4. Табл.: 5. Библиогр.: 28 назв.

УДК 519.004.942

Числове моделювання гравітаційних хвиль чорної діри за допомогою тензорів викривлення / Мацукі Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 54–67.

Сформульовано тензори викривлення за системою полярно-сферичних координат, які описують гравітаційне поле та гравітаційні хвилі чорної діри; обчислено власні значення тензорів викривлення з метою оцінення відносних сил їх компонентів порівняно зі значенням тензора напруги-енергії в рівнянні поля Ейнштейна. У межах моделювання зроблено припущення, що час і відстань взаємопов'язані за умови, якщо рухатися від Землі до внутрішньої частини чорної діри; результат моделювання показав, що гравітаційні хвилі мають однакові компоненти гравітаційного поля чорної діри. За припущення, що час і відстань є незалежними, що нагадує ситуацію поза межами чорної діри відносно Землі, тензори викривлення відрізнялися від тензорів гравітаційного поля і гравітаційних хвиль. За результатами моделювання зроблено висновок, що гравітаційні хвилі, які надходять із середини чорної діри, містять інформацію про гравітаційне поле всередині чорної діри за умови, якщо вважати, що час та простір взаємопов'язані. Рис.: 8. Табл.: 3. Бібліогр.: 2 назв.

УДК 519.004.942

Численное моделирование гравитационных волн черной дыры с помощью тензоров искривления / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 54–67.

Сформулированы тензоры искривления по системе полярно-сферических координат, которые описывают гравитационное поле и гравитационные волны черной дыры; вычислены собственные значения тензоров искривления с целью оценки относительных сил их компонентов по сравнению со значением тензора напряжения энергии в уравнении поля Эйнштейна. В рамках моделирования сделано предположение, что время и расстояние взаимосвязаны при условии, если двигаться от Земли до внутренней части черной дыры; результат моделирования показал, что гравитационные волны имеют одинаковые компоненты гравитационного поля черной дыры. При предположении, что время и расстояние независимы, что напоминает ситуацию за пределами черной дыры по отношению к Земле, тензоры искривления отличались от тензоров гравитационного поля и гравитационных волн. По результатам моделирования сделан вывод, что гравитационные волны, поступающие изнутри черной дыры, несут информацию о гравитационном поле внутри черной дыры при условии, если предполагать, что время и пространство взаимосвязаны. Рис.: 8. Табл.: 3. Библиогр.: 2 назв.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF
INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION
MAKING SUPPORT

УДК 519.925.51

Діагностика медичних зображень пухлин головного мозку з використанням гібридних згорткових нейронечітких мереж / Зайченко Ю.П., Здор К.А., Гамідов Г. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 68–77.

Розглянуто проблему класифікації пухлин головного мозку по МРТ- зображеннях. Для її вирішення розроблено гібридні нечіткі згорткові нейронні мережі, у яких згорткові мережі CNN VGG-16 і ResNetV2_50 використані для екстракції ознак зображень, а нечітка нейронна мережа ANFIS — як класифікатор пухлин. Розроблено алгоритми навчання гібридних мереж. Виконано експериментальні дослідження запропонованих гібридних мереж на стандартному датасеті МРТ-зображень головного мозку і порівняння результатів з відомими альтернативними структурами згорткових мереж. Рис.: 4. Табл.: 5. Бібліогр.: 15 назв.

UDC 519.925.51

Brain tumor diagnostics with application of hybrid fuzzy convolutional neural networks / Zaychenko Yu.P., Zdor K.A., Hamidov G. // System Research and Information Technologies. — 2020. — № 1. — P. 68–77.

The problem of classification of brain tumors on medical images is considered. For its solution hybrid CNN-ANFIS is developed in which convolutional neural network VGG-16 and ResNetV2_50 are used as feature extractors while ANFIS is used as the classifier. Training algorithms of ANFIS were implemented. The experimental investigations of the suggested hybrid network on the standard dataset Brain MRI images for brain tumor detection were carried out and comparison with known results was performed. Figs: 4. Tables: 5. Refs: 15 titles.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ
УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM
CONTROL AND THEORY OF GAMES

УДК 519.8

Нечеткая задача оптимального разбиения множеств с ограничениям на размещение центров подмножеств / Киселева Е.М., Притоманова О.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 78–89.

Предложен алгоритм решения нечеткой непрерывной линейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств на подмножества с отысканием

координат центров этих подмножеств и ограничениями на их размещение. Алгоритм базируется на синтезе методов решения бесконечномерных задач оптимального разбиения множеств из n -мерного евклидова пространства на подмножества с нейронечеткими технологиями и модификациями r -алгоритма Н.З. Шора, которые применяются для численного решения двойственных конечномерных негладких задач оптимизации. Разработанную программную реализацию алгоритма проиллюстрировано на модельной задаче. Рис.: 3. Библиогр.: 7 назв.

UDC 519.8

Fuzzy problem of the optimal set partition with constraints on the subsets centers location / Kiseleva E.M., Prytomanova O.M. // System Research and Information Technologies. — 2020. — № 1. — P. 78–89.

An algorithm is proposed for solving the fuzzy continuous optimal sets partitioning problem with constraints for the centers location. The algorithm is based on a synthesis of methods for solving infinite-dimensional problems of optimal set partitioning from an n -dimensional Euclidean space into subsets with neuro-fuzzy technologies and modifications of the Shor's r -algorithm, which are used for the numerical solution of dual finite-dimensional nonsmooth optimization problems. The developed software implementation of the algorithm is illustrated on the model problem. Figs: 3. Refs: 7 titles.

УДК 519.925.51

Оптимальна диверсифікація портфеля акцій за ринкових обмежень/ Кулян В.Р., Коробова М.В., Юнькова О.О. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 90–97.

Присвячено розробленню нових та застосуванню відомих методів математичного моделювання для розв'язання задачі оптимального інвестування у ризиковані цінні папери. Сформульовано нові постановки задач і побудовано методи траєкторного моделювання динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Для розв'язання задачі моделювання оптимальної траєкторії портфеля акцій застосовано методи оптимального управління системою, у якій параметрами керування є частки акцій різних видів у портфелі. Задачу оптимального управління динамікою інвестиційного портфеля сформульовано для критерію, що використовує «програмну траєкторію». Розв'язано задачу побудови оптимального за очікуваною ринковою вартістю та/або ризикованістю портфеля акцій. Розглянуто задачу про диверсифікацію побудованого портфеля інвестицій. Для її розв'язання застосовано допустиму та ефективну множину портфелів. Алгоритм розв'язання задачі дозволяє динамічно враховувати інструментальні ринкові обмеження, які задаються для математичного формулювання задачі. Рис.: 4. Бібліогр.: 7 назв.

УДК 519.925.51

Оптимальная диверсификация портфеля акций при рыночных ограничениях/ Кулян В.Р., Коробова М.В., Юнькова Е.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 90–97.

Посвящено построению новых и применению существующих методов математического моделирования при решении задачи оптимального инвестирования в рисковые ценные бумаги. Сформулированы новые постановки задач и разработаны методы траекторного моделирования динамики рыночной стоимости одной акции и портфеля акций. При решении задачи моделирования оптимальной траектории портфеля акций применены методы оптимального управления системой, параметрами управления в которой являются части акций разного вида в портфеле. Задача оптимального управления динамикой портфеля инвестиций сформулирована для критерия качества, который использует «программную траекторию». Решена задача построения оптимального по прогнозируемой рыночной стоимости и/или риску портфеля акций. Рассмотрена задача о диверсификации построенного портфеля.

Для ее решения применено допустимое и эффективное множества инвестиционных портфелей. Алгоритм решения задачи позволяет динамично учитывать инструментальные рыночные ограничения, которые формулируются при математической постановке задачи. Рис.: 4. Библиогр.: 7 назв.

УДК 519.8

Евристичні алгоритми побудови ефективних послідовностей виконання завдань на одній машині у взаємопов'язаних виробничих системах / Зак Ю.О. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 98–106.

Класичне в теорії розкладів завдання побудови послідовності виконання завдань на одній машині, що враховує не тільки витрати часу на роботу обладнання, а й на постоброблення, розглядається для багатостадійних виробничих систем, що складається із взаємозалежного ланцюжка ділянок і цехів промислового підприємства. Як критерій оптимальності розглядається виконання багатостадійного розкладу в найкоротші терміни. Запропоновано методи розрахунку нижньої межі довжини оптимального розкладу і евристичні алгоритми отримання наближених розв'язків, що потребують невеликих обсягів обчислень. Запропоновані алгоритми ілюструються числовими прикладами. Табл.: 3. Бібліогр.: 12 назв.

UDC 519.8

Heuristic algorithms for constructing effective sequences of tasks on one machine in interconnected production systems / Zack Yu. O. // System Research and Information Technologies. — 2020. — № 1. — P. 98–106.

The classical task in the theory of scheduling which is the task of constructing a sequence of tasks on one machine, taking into account not only the time spent on equipment operation, but also the loss of post-processing, is considered for multi-stage production systems consisting of an interconnected chain of sections and workshops of an industrial enterprise. As an optimality criterion, the implementation of a multi-stage schedule in the shortest possible time is considered. Methods are proposed for calculating the lower bound on the length of the optimal pattern along with heuristic algorithms for obtaining approximate solutions that require small amounts of computation. The proposed algorithms are illustrated by numerical examples. Tables: 3. Refs: 12 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 539.3

Моделирование контактного взаимодействия двух трансверсально-изотропных упругих полупространств при наличии жесткого дискообразного включения между ними и давления в области расслоения / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 107–119.

Использована строгая математическая модель для анализа контактного взаимодействия двух различных по свойствам трансверсально-изотропных упругих полупространств при сжатии при наличии жесткого дискообразного включения между ними и давления в области расслоения материалов. Решение задачи получено на основе представления общего решения системы уравнений равновесия для трансверсально-изотропного тела с помощью гармонических функций, сведения краевой задачи к рассмотрению интегрального уравнения, разложения искомой функции по малому параметру. Как частный случай из найденных выражений вытекают основные параметры контакта для двух упругих изотропных полупространств (при наличии включения между ними и давления в области расслоения). Получены численные результаты, изучено влияние упругих свойств полупространств,

геометрических размеров включения и нагрузок на параметры контактного взаимодействия. Рис.: 3. Табл.: 1. Библиогр.: 32 назв.

UDC 539.3

Modeling the contact interaction of two transversally isotropic elastic half-spaces in the presence of a hard disk-like inclusion between them and pressure in the region of separation / Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. // *System Research and Information Technologies*. — 2020. — № 1. — P. 107–119.

A rigorous mathematical model is used for analyzing the contact interaction of two transversally isotropic elastic half-spaces with different properties under compression in the presence of a hard disk-like inclusion between them and pressure in the region of material separation. The solution to the problem is obtained by presenting a general solution of the system of equilibrium equations for a transversely isotropic body through harmonic functions, reducing the boundary-value problem to considering the integral equation, expanding the desired function in a small parameter. As a special case, the found contact results for the main contact parameters for two elastic isotropic half-spaces (in the presence of inclusion between them and pressure in the region of separation). Numerical results are obtained, the influence of the elastic properties of half-spaces, the geometric dimensions of the inclusion and loads on the parameters of contact interaction are studied. Figs: 3. Tables: 1. Refs: 32 titles.

УДК 517.925

Теорема о реконструкции некоторых динамических систем / Городецкий В.Г. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2020. — № 1. — С. 120–128.

Доказана теорема, которая дает строгое обоснование применения дифференциальной модели для получения оригинальной системы, описывающей реальный физический процесс. Теорема может быть использована при реконструкции модели по единственной наблюдаемой переменной, наличие которой позволяет получить дифференциальную модель. В дифференциальной модели отсутствующие переменные заменяются производными по времени наблюдаемой переменной процесса. Существование соотношений, которые связывают оригинальную систему и дифференциальную модель, позволяет осуществить переход от дифференциальной модели к оригинальной системе. При этом может быть получено несколько оригинальных моделей-кандидатов. В результате исследователь может выбрать ту модель, которая наиболее полно отражает физику процесса. Также теореме можно использовать при упрощении ранее полученной модели, которая может содержать избыточные слагаемые. Рис.: 3. Табл.: 1. Библиогр.: 12 назв.

UDC 517.925

Reconstruction theorem for certain dynamical systems / Gorodetskyi V.G. // *System Research and Information Technologies*. — 2020. — № 1. — P. 120–128.

A theorem which gives a rigorous justification for using the differential model to obtain an original system that describes a real physical process is proved. The theorem can be used to reconstruct the model from a single observed variable, the presence of which allows us to obtain a differential model. In the differential model, the variables that are missing are replaced by the time derivatives of the observed variable. The existence of relations that connect the original system and the differential model allows the transition from the differential model to the original system. In this case, several original candidate models can be obtained. As a result, the researcher can choose the model that most fully reflects the physics of the process. The proved theorem can also be used to simplify the previously obtained model, which probably contains redundant terms. Figs: 3. Tables: 1. Refs: 12 titles.

УДК 512.563: 517.987.3

Метод треугольника для построения полинома Жегалкина: связь с треугольником Паскаля / Спекторский И.Я., Галганов А.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2020. — № 1. — С. 129–145.

Полином Жегалкина — удобный способ представления булевой функции в виде суммы по операции \oplus (хор, или сумма по модулю 2) конечного числа конъюнкций переменных — предложен в 1927 г. советским ученым И.И. Жегалкиным. Одним из алгоритмов построения полинома Жегалкина для заданной булевой функции есть метод треугольника, предложенный в 1985–1987 гг. советским математиком В.П. Супруном. Применение метода треугольника совпадает с пошаговым построением треугольника Паскаля «строка за строкой» по известному соотношению $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. Естественно ожидать связь между вычислением полинома Жегалкина методом треугольника с расположением биномиальных коэффициентов в треугольнике Паскаля. Проанализирована связь метода треугольника с построением строк треугольника Паскаля; предложено относительно простое доказательство корректности метода треугольника путем сопоставления шагов алгоритма с пошаговым построением строк биномиальных коэффициентов в треугольнике Паскаля. Табл.: 1. Библиогр.: 8 назв.

UDC 512.563: 517.987.3

Triangle method for constructing Zhegalkin polynomial: connection with Pascal's triangle / Spectorisky I.Ya., Galganov O.A. // System Research and Information Technologies. — 2020. — № 1. — P. 129–145.

Introduced by Soviet scientist I. Zhegalkin in 1927, Zhegalkin polynomial is a way to represent a Boolean function as an exclusive or of conjunctions of variables. One of the known algorithms for constructing Zhegalkin polynomial is so called ‘triangle method’ proposed in 1985–1987 by Soviet mathematician V.P. Suprun. Applying of the triangle method mainly coincides with step-by-step constructing Pascal triangle rows using the equality $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. Therefore, it would be natural to expect for the relation between the calculation of Zhegalkin polynomial by the triangle method and an arrangement of binomial coefficients in Pascal triangle. In this paper, the connection between the triangle method and constructing of Pascal triangle is studied. Besides that, a rather simple proof of the triangle method correctness is proposed. This proof is based on juxtaposition of the triangle method steps and a step-by-step construction of Pascal triangle. Tables: 1. Refs: 8 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Белас Андрій Олегович,

магістр, аспірант ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Галганов Олексій Андрійович,

студент ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Гамідов Галіб,

доктор філософії, директор інформаційного департаменту компанії «Азершиг», Азербайджан, Баку

Гожий Олександр Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор Чорноморського державного університету імені Петра Могили, Україна, Миколаїв

Голінко Ігор Михайлович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів теплоенергетичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Городецький Віктор Георгійович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри електромеханічного обладнання енергоємних виробництв Інституту енергозбереження та енергоменеджменту КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Данилов Валерій Якович,

професор, доктор технічних наук, професор ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Жиров Олександр Леонідович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зайченко Юрій Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зак Юрій Олександрович,

доктор технічних наук, науковий експерт і консультант, Німеччина, Аахен

Здор Костянтин Андрійович,

бакалавр КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Калініна Ірина Олександрівна,

доцент, кандидат технічних наук, доцент Чорноморського державного університету імені Петра Могили, Україна, Миколаїв

Кирилок Віталій Семенович,

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, Київ

Кісельова Олена Михайлівна,

член-кореспондент НАН України, професор, доктор фізико-математичних наук, декан факультету прикладної математики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро

Коробова Марина Віталіївна,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Кулян Віктор Романович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Левчук Ольга Іванівна,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ

Мацукі Йошіо,

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Мозговий Дмитро Костянтинович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри електронних засобів телекомунікацій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро

Панкратова Наталія Дмитрівна,

член-кореспондент НАН України, професор, доктор технічних наук, заступник директора ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Притоманова Ольга Михайлівна,

доцент, кандидат економічних наук, доцент кафедри обчислювальної математики і математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро

Птуха Юлія Анатоліївна,

аспірантка ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Спекторський Ігор Якович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Хабраман Хаді,

аспірант кафедри електронних засобів телекомунікацій факультету фізики, електроніки та комп'ютерних систем Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро

Юнькова Олена Олександрівна,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичного моделювання Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана, Україна, Київ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для журналу

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

1. Стаття з анотаціями та іншою інформацією подається з використанням веб-сайту журналу (<http://journal.iasa.kpi.ua>).

Назва статті, прізвище та ініціали автора (авторів), а також анотація (від 700 до 1000 символів) подаються українською, російською та англійською мовами.

2. Текст статті набирається в редакторі Microsoft Word 2003 шрифтом Times New Roman із вирівнюванням по ширині.

3. На початку статті вказується індекс УДК, назва статті, ініціали та прізвище автора (авторів).

4. Список літератури подається в порядку посилання після тексту статті. Якщо є можливість, у списку вказується DOI кожного посилання.

5. Набір формул здійснюється в редакторі формул «Equations». Для змінних з індексами та без індексів застосовуються дужки клавіатурного набору, наприклад (x_i^j, y_k^l) .

6. Символи у формулах (крім особливих випадків) набираються курсивом. Допускаються прямі символи, але їх треба розмітити або включити до списку спеціальних символів.

7. Нумерувати необхідно тільки ті формули (винесені на середину рядків), на які є посилання в тексті.

8. Таблиці та рисунки виконуються в одному стилі, їм надається номер, назва і розташовуються після посилань у тексті. Не слід повторювати в статті підписи до рисунків та таблиць.

9. Стаття разом із таблицями, рисунками і списком літератури має бути не більше 15 сторінок. Оглядові статті обсягом до 25 сторінок приймаються за домовленістю із редколегією.

10. До рукопису додаються відомості про кожного автора: країна, місто, місце роботи, службова посада, вчений ступінь та звання, сфера наукових досліджень, контактні телефони, адреса та e-mail.