

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 2

2021

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, чл.-кор. НАН України

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, акад. Румунської
Академії

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримання прийняття рішень**

• **Проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тел.: **204-81-44**; факс: **204-81-44**

E-mail: journal.iasa@gmail.com

<http://journal.iasa.kpi.ua>

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 2

2021

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Correspondent
member of NASU

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

L. SAKALAIUSKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESCU, Academician of
Romanian Academy

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal.iasa@gmail.com
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

- **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**
- **Theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support**
- **Problem- and function-oriented computer systems and networks**
- **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує праці теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, що стосуються системних досліджень та інформаційних технологій.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримання прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: Scopus, EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції за адресою: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідувачка редакції **С.М. Шевченко**

Редакторка **Р.М. Шульженко**

Молодша редакторка **Л.О. Тарин**

Комп'ютерна верстка, дизайн **А.А. Патіюхи**

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 23234–13074 ПР від 22.03.2018 р.

Підписано до друку 20.05.2021. Формат 70x108 1/16. Папір офс. Гарнітура Times.

Спосіб друку – цифровий. Ум. друк. арк. 14,411. Обл.-вид. арк. 28,56. Наклад 118 пр. Зам. № 11/04

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію: ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056.

ФОП Пилипенко Н.М., вул. Мічуріна, б. 2/7, м. Київ, 01014.

Виписка з Єдиного державного реєстру № 2 070 000 0000 0214697 від 17.05.2019 р.,

тел.: (044) 361 78 68.

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

2 • 2021

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

<i>Pankratova N., Golinko I.</i> Electric heater mathematical model for cyber-physical systems	7
<i>Зак Ю.А.</i> Кластерный анализ для многомерных объектов в условиях нечетких данных	18

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

<i>Zaychenko Yu., Hamidov G., Gasanov A.</i> Investigation of computational intelligence methods in forecasting problems at stock exchanges	35
<i>Lesnichaya M., Kolchina O. Pahomov E.</i> Developing an algorithm for rapid assessment of living standards and quality of life of the population in the region	50
<i>Kudriavtceva A.</i> Methods for researching the sustainability of production processes when implementing a cyber-physical system	64

ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ

<i>Denisenko A.V., Gurskiy A.A.</i> Information technology of visualization for technological processes for research modes of functioning of complex technological systems	74
<i>Козлюк І.О., Коваленко Ю.Б.</i> Надійність обчислювальних структур інтегрованої модульної авіоніки для конфігурацій апаратних засобів	84
<i>Статкевич В.М.</i> Операция разности для регулярных языков сетей Петри в задаче о производителе и потребителе с ограниченным буфером	94
<i>Штовба С.Д., Петричко М.В.</i> Тематичне моделювання науковців на основі їх інтересів у Google Scholar	113

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

<i>Trofimchuk O., Zelensky K., Nastenko Ie.</i> Modeling of a temperature field for extruder body	130
<i>Капустян О.В., Горбань Н.В.</i> Притягувальні множини для одного класу асимптотично компактних систем з імпульсним збуренням	140
Відомості про авторів	149

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

2 • 2021

CONTENT

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Pankratova N., Golinko I.</i> Electric heater mathematical model for cyber-physical systems	7
<i>Zack Yu.A.</i> Cluster analysis for multidimensional objects in fuzzy data conditions	18
THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING SUPPORT	
<i>Zaychenko Yu., Hamidov G., Gasanov A.</i> Investigation of computational intelligence methods in forecasting problems at stock exchanges	35
<i>Lesnichaya M., Kolchina O. Pahomov E.</i> Developing an algorithm for rapid assessment of living standards and quality of life of the population in the region	50
<i>Kudriavtceva A.</i> Methods for researching the sustainability of production processes when implementing a cyber-physical system	64
PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS	
<i>Denisenko A.V., Gurskiy A.A.</i> Information technology of visualization for technological processes for research modes of functioning of complex technological systems	74
<i>Kozlyuk I.O., Kovalenko Y.B.</i> Reliability of computer structures of integrated modular avionics for hardware configurations	84
<i>Statkevych V.M.</i> Set difference operation for regular petri net languages for the producer/consumer problem with the bounded buffer	94
<i>Shtovba S.D., Petrychko M.V.</i> Topic modeling of researchers based on their interests from google scholar	113
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Trofimchuk O., Zelensky K., Nastenko Ie.</i> Modeling of a temperature field for extruder body	130
<i>Kapustyan O.V., Gorban N.V.</i> Attracting sets for one class of asymptotically compact systems with pulsed perturbation	140
Information about the authors	149

ELECTRIC HEATER MATHEMATICAL MODEL FOR CYBER-PHYSICAL SYSTEMS

N. PANKRATOVA, I. GOLINKO

Abstract. The article discusses the heat and mass transfer dynamic model for an electric heater with lumped parameters, which allows transient processes simulation for the main influences. The proposed model is recommended to be used in cyber-physical systems for forecasting and evaluating the effectiveness of control systems integrated into a single information management system. The developed model can be used by specialists for the analysis and synthesis of control systems for balanced ventilation systems or industrial air conditioners. As an example, a numerical simulation of transient processes along the action main channels for an electric heater HE 36/2 manufactured by VTS CLIMA was carried out. The significant advantage of the proposed model is the possibility for using it for the synthesis and analysis of multidimensional control systems.

Keywords: cyber-physical system, digital twin, mathematical model, state space, electric heater.

INTRODUCTION

In the modern world, the managing technical systems tasks are closely intertwined with the social sphere of human activity. The growth and complexity of management situations in technical systems requires the use of new scientific approaches to management. The computer-integrated control systems properties study from the interaction view point of physical and computational component is a priority in the modern science about cyber-physical systems [1]. To date, such systems have not yet received a generally accepted definition, since they lie at the intersection of several human spheres of activities. Their common characteristic is the interaction between computing and physical processes, where the computing system constantly receives data from the environment and uses them to further optimize the physical processes control. Cyber-physical systems include, for example, networked intelligent control of power supply or transport, automated control systems in production and agriculture, and much more.

While designing cyber-physical systems, it is necessary to solve a variety of interrelated problems. One of the important tasks is the development of real object's digital twin based on mathematical modeling [2, 3]. A digital twin is a digital model obtained based on information from sensors installed on a physical object, which allows you to simulate object's behavior in the real world. Fundamentally, a digital twin can be defined as an ever-changing digital profile containing historical and most current data about a physical object or a production

process. The digital twin is created to predict the real object's behavior in the "virtual space" and to adopt a control strategy. Sometimes the time required to simulate a mathematical model can exceed the physical process flow, and the calculated data becomes outdated. For this reason, the adequate mathematical models' development for technical systems that can be used for calculations in "real time" is an urgent task.

The heat power industry plays an important role in modern society as a tool for creating material wealth and a means of servicing human life. The one of main units in heat power engineering is a heat exchanger, which takes on "various forms" in a particular human activity area. Heat exchangers include heaters, which are designed to heat the air due to the heat flow from the primary heat transfer fluid. In industry, air heaters are often used to heat air in heating, ventilation, air conditioning systems, various dryers and other technical systems [4].

In the mining and coal industries, the most important underground mining task is to organize the effective ventilation [5]. This problem has both technical and economic aspects. In technical terms, the key issue in organizing the mine ventilation is heating the air supplied to the mine to the temperature above 0 °C (from +2 °C to +5 °C). For many decades, the main technical solution for heating the air supplied to the mine has been provided by the water heaters use. Despite the design simplicity, using water heaters creates a variety of problems associated with complex installation, water treatment, continuous maintenance, the danger of water freezing in heaters and, as a consequence, the need to maintain the supplied to the mine air temperature above the optimum level.

Recently, the industry began to use air heating systems, which have established themselves as fast-acting systems with low specific capital investments. For air heating of shopping and business centers, warehouses and industrial buildings, centralized ventilation and air conditioning systems are used, in which air heaters are the main equipment [6]. Residential air heating systems use low-power electric heaters with a distributed automatic control system [7].

Considering the above, in recent years, electric heaters of high power (up to 30 kW) are increasingly used for heating air in various industries. Electricity transportation has many advantages over other types of heat carriers, and the use of thermoelectric heaters (TEH) can significantly increase the air heaters efficiency and design air heaters with a wide heat output range. In addition, electric heaters are efficient at outdoor temperatures down to -50 °C and do not lose their functionality in the event of an emergency power outage.

RESEARCH PROBLEM STATEMENT

The aim of this publication is to develop the heat transfer process dynamic model for an electric air heater, which can be used as a digital twin for a cyber-physical system. An additional requirement for the mathematical model is its ease of use by existing modeling tools on a personal computer.

HEAT TRANSFER PROCESS MATHEMATICAL MODELING

Heat transfer processes are discussed in many publications. To simulate the dynamic processes in heat exchangers, researchers use mathematical models with lumped [8–10] and distributed [11, 12] parameters. Models with lumped parameters provide an analytical solution to the heat transfer task. Models with distributed parameters describe the physical process more accurately, but in the analyti-

cal modeling of such processes, transcendental functions appear in the solution [12], which complicates the calculations. In practice, numerical methods are used to solve distributed heat transfer problems.

The existing dynamic models of air heaters [8–12] are based on the mathematical description of the heat exchange process for devices where the primary heat transfer fluid is steam or water, since these devices have long been used in production as part of automatic control systems. For electric heaters, stationary models are known, which are used to design the equipment. Considering that recently, high-power electric heaters have been used in production as part of cyber-physical systems, we will develop the electric heater dynamic model.

ELECTRIC HEATER MATHEMATICAL MODEL

The modern electric heaters designs are based on blowing the air through a bundle of heating elements, while convective heat exchange is carried out between the moving air and the heater surface. Considering surface heat exchangers used in industrial systems, it is necessary to take into account that the air is intensively mixed by fans. Practical research of unsteady heat transfer characterizes the air heating process as clearly aperiodic [11], which is described with sufficient accuracy by second-order transfer functions. Thus, a lumped-parameter mathematical model for a water cooler would be perfectly acceptable.

When developing a mathematical model, the following simplifications were adopted: there is no heat exchange with the environment; the model contains two dynamic elements with lumped parameters – tubular electric heaters and the air volume of heater. Physical properties of material flows and the heat exchange surface are reduced to the average values of device's operating range. The electric heater design diagram is shown in Fig. 1.

To heat the air in the heater, electric heaters are used, which are connected to the mains through a triac electrical converter. The electrical converter in proportion to the regulator signal changes the electrical power $N_E(t)$, due to which the heating elements are heated to the temperature $\theta_E(t)$. All electrical power is used to heat the air. Air is supplied crosswise to the electric heaters location with a flow rate $G_A(t)$. The inlet air temperature is $\theta_{A0}(t)$, the outlet air temperature is $\theta_A(t)$. The heater geometrical dimensions L, C, H are the depth, width and height, respectively. Let us analyze the heat balance in the dynamics for each dynamic element of the air heater.

The heat balance for heating elements is:

$$N_E - \alpha_0 F_0 (\theta_E - \theta_A) = M_E c_E \frac{d\theta_E}{dt}, \quad (1)$$

where c_E is the heat capacity of heating elements (heating elements contain metal and dielectric parts, so their heat capacity is averaged in proportion to the mass fraction of each part); M_E is the total mass of heating elements; α_0 is the heat transfer coefficient between the air in the heater and the heating elements outer surface; F_0 is the heating elements surface ribbing total area. Let us present equation (1) in canonical form:

$$T_E \frac{d \Delta \theta_E}{dt} + \Delta \theta_E = k_0 \Delta N_E + k_1 \Delta \theta_A, \quad (2)$$

where $K_E = \alpha_0 F_0$; $T_E = \frac{c_E M_E}{K_E}$; $k_0 = \frac{1}{K_E}$; $k_1 = 1$.

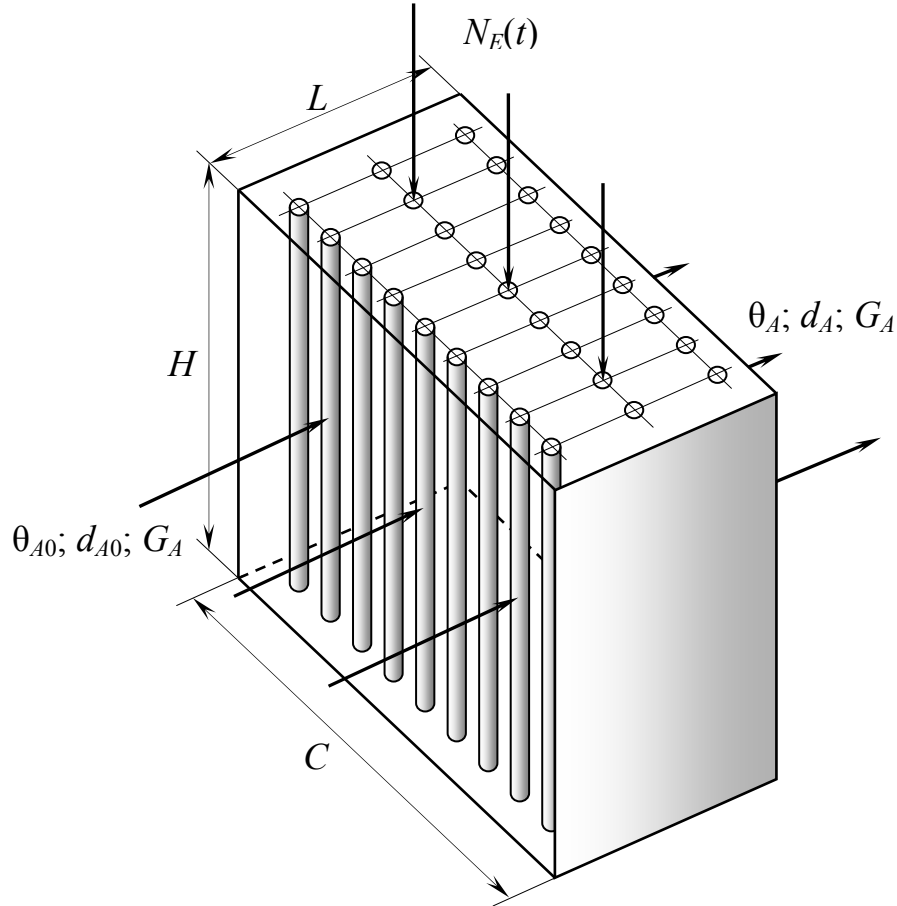


Fig. 1. Design diagram for modelling an electric air heater

The heat balance for the air heater air space is:

$$G_A c_A (\theta_{A0} - \theta_A) + \alpha_0 F_0 (\theta_E - \theta_A) = M_A c_A \frac{d\theta_A}{dt}, \quad (3)$$

where c_A is the air heat capacity; M_A is the air mass in the heater volume $L \times C \times H$. After linearization, let us transform equations (3) to the canonical form:

$$T_A \frac{d\Delta\theta_A}{dt} + \Delta\theta_A = k_2 \Delta\theta_E + k_3 \Delta\theta_{A0} + k_4 \Delta G_A, \quad (4)$$

where $K_A = c_A G_A + \alpha_0 F_0$; $T_A = \frac{c_A M_A}{K_A}$; $k_2 = \frac{\alpha_0 F_0}{K_A}$; $k_3 = 1 - k_2$;

$$k_4 = \frac{c_A (\theta_{A0} - \theta_A)}{K_A}.$$

Electric heaters are often used in air conditioning systems. For such systems, in addition to the temperature regime, it is also important to simulate the heated air humidity characteristics. It is known from the physical properties of air that with an increase in the vapor-air mixture temperature, its relative humidity de-

creases (an increase in temperature by 1 °C leads to a decrease in moisture by about 3%), while the air moisture content remains constant [6]. In addition, atmospheric pressure affects humidity. For these reasons, we write the material balance for the air space of the heater in air moisture content terms:

$$\frac{G_A}{1000} (d_{A0} - d_A) = V_A \frac{d\rho_A}{dt}, \quad (5)$$

where $d_{A0}(t)$ and $d_A(t)$ are the air moisture content at the air inlet and outlet, respectively; ρ_A is the air density; V_A is the heater air space volume. The humid air density is determined from the equation [13]:

$$\rho_A = \omega \left(1 + \frac{d_A}{1000} \right), \quad (6)$$

where ω is the dry air density under normal conditions. Taking into account (6), equation (5) after mathematical transformations will take the form:

$$T_d \frac{d \Delta d_A}{dt} + \Delta d_A = k_5 \Delta d_{A0} + k_6 \Delta G_A, \quad (7)$$

where $T_d = \frac{\omega V_A}{G_A}$; $k_5 = 1$; $k_6 = \frac{d_{A0} - d_A}{G_A}$.

Equations (2), (4) and (7) represent a dynamic model of heat and mass transfer processes when humid air is heated by an electric heater:

$$\begin{cases} T_E \frac{d \Delta \theta_E}{dt} + \Delta \theta_E = k_0 \Delta N_E + k_1 \Delta \theta_A; \\ T_A \frac{d \Delta \theta_A}{dt} + \Delta \theta_A = k_2 \Delta \theta_E + k_3 \Delta \theta_{A0} + k_4 \Delta G_A; \\ T_d \frac{d \Delta d_A}{dt} + \Delta d_A = k_5 \Delta d_{A0} + k_6 \Delta G_A. \end{cases} \quad (8)$$

Mathematical model (8) in the state space has the form:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (9)$$

where $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \Delta \theta'_A \\ \Delta d'_A \\ \Delta \theta'_E \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/T_A & 0 & k_2/T_A \\ 0 & -1/T_d & 0 \\ k_1/T_E & 0 & -1/T_E \end{bmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_A \\ \Delta d_A \\ \Delta \theta_E \end{bmatrix}$;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_3/T_A & 0 & k_4/T_A & 0 \\ 0 & k_5/T_d & k_6/T_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0/T_E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_{A0} \\ \Delta d_{A0} \\ \Delta G_A \\ \Delta N_E \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Let us solve the system of differential equations (8) with respect to the sought variables using the Laplace transform:

$$\begin{cases} \Delta \theta_E (T_E p + 1) = k_0 \Delta N_E + k_1 \Delta \theta_A; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Delta \theta_A (T_A p + 1) = k_2 \Delta \theta_E + k_3 \Delta \theta_{A0} + k_4 \Delta G_A; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta d_A (T_d p + 1) = k_5 \Delta d_{A0} + k_6 \Delta G_A. \end{cases} \quad (13)$$

From (11) we find $\Delta\theta_E(p)$, then we substitute it in (12), and after grouping similar ones we obtain:

$$\Delta\theta_A = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} [(b_1 p + b_0) \Delta\theta_{A0} + (b_3 p + b_2) \Delta G_A + b_4 \Delta N_E], \quad (14)$$

where

$$a_2 = \frac{T_E T_A}{1 - k_1 k_2}; \quad a_1 = \frac{T_E + T_A}{1 - k_1 k_2}; \quad b_0 = \frac{k_3}{1 - k_1 k_2}; \quad b_1 = \frac{k_3 T_E}{1 - k_1 k_2};$$

$$b_2 = \frac{k_4}{1 - k_1 k_2}; \quad b_3 = \frac{k_4 T_E}{1 - k_1 k_2}; \quad b_4 = \frac{k_0 k_2}{1 - k_1 k_2}.$$

From (13) we obtain a solution for the variable Δd_A :

$$\Delta d_A = \frac{1}{T_d p + 1} [k_6 \Delta d_{A0} + k_7 \Delta G_A]. \quad (15)$$

Applying the inverse Laplace transform, it is possible to find an analytical solution for (14) and (15) by the influence channels. We represent (14) and (15) by a multidimensional model in the Laplace domain

$$\mathbf{Y} = \mathbf{WZ}, \quad (16)$$

where

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta d_A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} & W_{14} \\ 0 & W_{22} & W_{23} & 0 \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$$\mathbf{Z}^T = [\Delta\theta_{A0} \quad \Delta d_{A0} \quad \Delta G_A \quad \Delta N_E];$$

$$W_{11} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; \quad W_{13} = \frac{b_3 p + b_2}{a_2 p^2 + a_1 p + 1};$$

$$W_{14} = \frac{b_4}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; \quad W_{22} = \frac{k_6}{T_d p + 1}; \quad W_{23} = \frac{k_7}{T_d p + 1}.$$

The proposed electric heater dynamic model in the differential equations system form (8), in the state space (9), or in the Laplace region (16)–(17), when modelling mass transfer processes, uses the air moisture content, which by definition is expressed as:

$$d_A = \frac{M_W}{M_A}, \quad (18)$$

where M_W is the water steam mass in the air mixture; M_A is the dry air mass in the air mixture. Often, when synthesizing and analysing industrial air conditioners control systems, it is necessary to use the relative humidity of air, which is defined as:

$$\Phi_A = \frac{P_P}{P_S}, \quad (19)$$

where P_S is the saturated steam pressure; P_P is the water steam partial pressure. The water steam partial pressure of humid air is uniquely determined by the moisture content and does not depend on the steam temperature [14]

$$P_P = \frac{P_B d_A}{623 + d_A} \quad (20)$$

where P_B is the barometric air pressure. The saturated steam pressure can be determined by the approximating dependence of N.I. Filneem [15]

$$P_S = 133,3 \cdot 10^{\frac{156+8,12 \theta_A}{236+\theta_A}} \quad (21)$$

If the air temperature θ_A and its relative humidity φ are known, using dependencies (18)–(21), it is possible to determine the air mixture moisture content d

$$d_A = \frac{83045,9 \varphi_A 10^{\frac{156+8,12 \theta_A}{236+\theta_A}}}{P_B - 133,3 \varphi_A 10^{\frac{156+8,12 \theta_A}{236+\theta_A}}} \quad (22)$$

Moisture content recalculation into relative humidity can be carried out according to the inverse relationship

$$\varphi_A = \frac{P_B d_A}{133,3 (623 + d_A) 10^{\frac{156+8,12 \theta_A}{236+\theta_A}}} \quad (23)$$

It is worth noting that the moisture content (22) and relative humidity (23) are calculated in absolute values, and in models (8), (9), and (16), variables increments are considered, and this feature must be taken into account during modelling.

AIR HEATER DYNAMIC MODE SIMULATION

As an example, let us carry out dynamic processes' simulation modelling for the eclectic heater HE 36/2 of the central air conditioner CV-P 2L N-63B/F-N manufactured by VTS CLIMA. In Table the thermal and physical parameters for modelling the air heater HE 36/2 are shown.

Parameters of the electric heater HE 36/2

N	Parameter name	Symbol	Numerical value	Dimension
1	Electric heater dimensions	$H \times C \times L$	$0,38 \times 1 \times 0,4$	m
2	Heating element material density	ρ_E	7900	kg/m^3
3	Heating element material heat capacity	c_E	460	$J/(kg \text{ } ^\circ C)$
4	Heating element material mass	M_E	0,6	kg
5	Air flow through the electric heater	G_A	0,43	kg/s
6	Dry air density	ω	1,2	kg/m^3
7	Air heat capacity	c_A	1010	$J/(kg \text{ } ^\circ C)$
8	Air mass in the heater	M_A	0,182	kg
9	Heat exchange area between heating elements and air	F_0	0,306	m^2
10	Heat transfer coefficient between heating elements and air	α_0	161	$W/(m^2 \text{ } ^\circ C)$
11	Input air temperature	θ_{A0}	11	$^\circ C$
12	Output air temperature	θ_A	15	$^\circ C$
13	Input air moisture content	d_{A0}	9	g/kg
14	Output air moisture content	d_A	9	g/kg
15	Heater power	N_E	3300	W

The elements for the matrices **A** and **B** of the electric heater model (9) were calculated according to the dependencies (10) in the MatLab environment using the program module:

```
H=0.38; C=1; L=0.4;
A0=161; F0=0.306; Ga=0.43; w=1.2;
Ma=0.182; ca=1010; Me=0.6; ce=460;
TetA0=11; TetA=15; dA0=9; dA=9;
Ke=A0*F0; Te=ce*Me/Ke; k0=1/Ke; k1=1;
Ka=ca*Ga+A0*F0; Ta=ca*Ma/Ka; k2=A0*F0/Ka; k3=1-k2;
k4=ca*(TetA0-TetA)/Ka; k5=1-k1*k2;
Td=w*H*L*C/Ga; k5=1; k6=(dA0-dA)/Ga;
A=[-1/Ta, 0, k2/Ta; 0, -1/Td, 0; k1/Te, 0, -1/Te];
B=[k3/Ta, 0, k4/Ta, 0; 0, k5/Td, k6/Td, 0; 0, 0, 0, k0/Te];
```

According to the calculations, the following numerical values were obtained for the matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2,631 & 0 & 0,268 \\ 0 & -2,357 & 0 \\ 0,179 & 0 & -0,178 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2,362 & 0 & -21,98 & 0 \\ 0 & 2,358 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0036 \end{bmatrix}.$$

The dynamic mode simulation for the HE 36/2 electric heater was carried out in the Simulink MatLab environment using the State Space function block. Fig. 2, *a–c* show the research results for transient processes in the electric heater for the perturbation channels, and Fig. 2, *d* – shows such results for the control channel.

From the conducted research, it can be concluded that a change in the inlet temperature $\Delta\theta_{A0}$ does not affect the air moisture content at the electric heater outlet Δd_A (Fig. 2, *a*). A change in the air moisture content at the inlet Δd_{A0} does not affect the outlet temperature (Fig. 2, *b*). A change in the steam-air mixture flow rate ΔG_{A0} affects the heated air temperature $\Delta\theta_A$ (Fig. 2, *c*). Control actions ΔN_E do not affect the heated air moisture content Δd_A (Fig. 2, *d*). The considered effect of heating the steam-air mixture on air heaters is recommended to be used in the artificial microclimate control systems development. The air moisture content use as a control variable (relative humidity instead) can significantly reduce the mutual influences of the temperature and humidity control loops in the air conditioner and improve the control system dynamic properties.

The resulting transients are aperiodic without delay. The control channel inertia is greater than the disturbance channels inertia. This dynamic is explained by the small heater airspace volume $V_A=0,152 \text{ m}^3$ with a relatively large flow rate of heated air $G_A=0,43 \text{ kg/s}$. For this reason, if necessary, it is recommended to calculate the relative humidity at the output of the electric heater according to dependence (23). The transient processes inertia in the electric heater is comparable to the temperature sensor inertia, therefore, the dynamic sensor properties must be taken into account when developing a control system. From practical recommendations in control systems with electric heaters, it is sufficient to use control PI-law. Using the more complex control law is not justified for these devices.

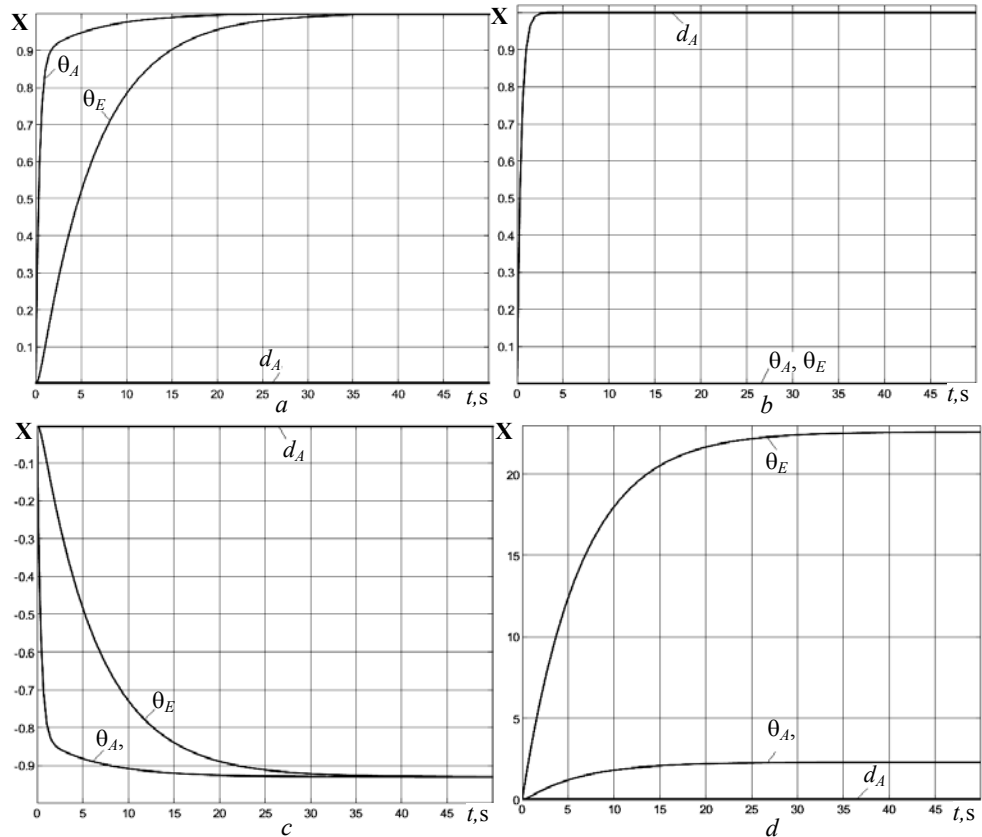


Fig. 2. Transient processes modelling in the heater HE 36/2 for the action main channels: *a* — $\Delta\theta_{A0} \rightarrow \mathbf{X}$, $\Delta\theta_{A0} = 1^\circ\text{C}$; *b* — $\Delta d_{A0} \rightarrow \mathbf{X}$, $\Delta d_{A0} = 1 \text{ g/kg}$; *c* — $\Delta G_{A0} \rightarrow \mathbf{X}$, $\Delta G_{A0} = 0,1 \text{ kg/s}$; *d* — $\Delta N_E \rightarrow \mathbf{X}$, $\Delta N_E = 1000 \text{ W}$

CONCLUSIONS

The article proposes a mathematical description of heating the steam-air mixture by an electric heater. The mathematical model is obtained in the equivalent dependencies form: the system of differential equations (8); in the state space (9); in the Laplace domain (16). The mathematical model can be used as a digital twin for a digital controller with a reference model. In addition, the proposed model is recommended to be used for the synthesis and analysis of control systems for balanced ventilation systems or industrial artificial microclimate systems. The mathematical description makes it possible to obtain the air heater dynamic characteristics for the main channels of control and disturbance. An example for the transient processes simulation for an electric heater HE 36/2 is given.

The choice of a mathematical model (8), (9) or (16) is determined by the approach to designing a cyber-physical system. The model in the state space (9) has a number of advantages over the notation in the transfer functions form (16). For example, it allows to describe the internal model structures using a minimum number of parameters. An additional argument in favor of vector models is a large number of software packages for the computer analysis of technical systems in the state space, which allow complex mathematical research to be carried out with little time.

A separate direction in the technical systems modeling is the identification of dynamic model coefficients and the resulting model adequacy assessment. The electric heater model coefficients were calculated according to the parameters given in Table. Thermal and physical parameters for the considered model are determined with a high accuracy from reference books, except for the heat transfer coefficient α_0 . This coefficient depends on many factors [16]. Therefore, the heat transfer coefficient should be attributed to the proposed model parametric uncertainty, which affects almost all elements in matrices **A** and **B** of model (9). The heat transfer coefficient can be determined with a high accuracy based on experimental studies. Thus, there is a need for the proposed model parametric adaptation to the specific conditions of air preparation on the experiment basis. This research will be the topic for the next publication, where the model coefficients will be identified based on an active experiment using computer technology.

REFERENCES

1. K. Khaitan and J.D. McCalley, "Design Techniques and Applications of Cyber Physical Systems: A Survey", *IEEE Systems Journal*, no. 9(2), pp. 1–16, 2014.
2. A. Shuravin and A. Moskovichenko, "What the digital twin can give us", *Control Engineering Russia*, no. 3(87), pp. 13–15, 2020.
3. V.A. Minaev, A.V. Mazin, K.B. Zdiruk, and L.S. Kulikov, "Digital twins of plants in solving control problems", *Radio industry*, no. 3, pp. 68–78, 2019.
4. V.K. Pyzhov and N.N. Smirnov, *Air conditioning, ventilation and heating systems*. Moscow-Vologda: Infra-Engineering, 2019, 528 p.
5. A.V. Veresov, "Electric heaters for mining and coal enterprises", *Coal*, no. 4, pp. 9–11, 2011.
6. E.S. Bondar, A.S. Gordienko, V.A. Mikhailov, and G.V. Nimich, *Automation of ventilation and air conditioning systems*. Kiev: LLC "Publishing house "Avanpost-Prim", 2005, 560 p.
7. V. Tkachov, G. Gruhler, A. Zaslavski, A. Bublikov, and S. Protsenko, "Development of the algorithm for the automated synchronization of energy consumption by electric heaters under condition of limited energy resource", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 2/8 (92), pp. 50–61, 2018.
8. V.V. Vychuzhanin, "Mathematical models of air treatment non-stationary modes in the central SLE", *Odessa National Maritime University Bulletin*, Odessa: ONMU, no. 23, pp. 172–185, 2007.
9. I. Golinko and I. Galytska, "Mathematical Model of Heat Exchange for Non-stationary Mode of Water Heater", *ICCSEEA 2019: Advances in Computer Science for Engineering and Education II*, pp. 58–67.
10. A.G. Sotnikov, *Automation of air conditioning and ventilation systems*. Leningrad: Mashinostroenie, 1984, 240 p.
11. V.N. Bogoslovsky, O.Ya. Kokorin, and L.V. Petrov, *Air conditioning and cold supply*. Moscow: Stroyizdat, 1985, 367 p.
12. I.M. Golinko and A.I. Kubrak, *Modeling and optimization of control systems*. Kamyanets-Podilsky: PE Buynytsky, 2012, 262 p.
13. E.M. Belova, *Central air conditioning systems in buildings*. Moscow: Euroclimate, 2006, 640 p.
14. E.V. Stefanov, *Engineering systems of buildings. Ventilation and air conditioning*. SPb.: AVOK North-West, 2005, 399 p.
15. Yu.S. Krasnov, A.P. Borisoglebskaya, and A.V. Antipov, *Ventilation and air conditioning systems*. Moscow: TermoKul, 2004, 373 p.
16. V.P. Isachenko, *Heat transfer*. Moscow: Energoizdat, 1981, 416 p.

Received 01.05.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Nataliya D. Pankratova, ORCID: 0000-0002-6372-5813, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: natalidmp@gmail.com

Igor M. Golinko, ORCID: 0000-0002-7640-4760, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: conis@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО КАЛОРИФЕРА ДЛЯ КІБЕРФІЗИЧНИХ СИСТЕМ / Н.Д. Панкратова, І.М. Голінко

Анотація. Розглянуто динамічну модель тепло- і масообміну для електричного калорифера із зосередженими параметрами, яка дозволяє проводити імітаційне моделювання перехідних процесів за основними каналами впливу. Запропоновану модель рекомендується використовувати в кіберфізичних системах для прогнозування та оцінювання ефективності систем управління, інтегрованих в єдину інформаційну систему управління. Розроблену модель можуть використовувати фахівці для аналізу та синтезу систем управління припливно-втяжної вентиляції або промислових кондиціонерів. Як приклад виконано числове моделювання перехідних процесів за основними каналами впливу для електрокалорифера HE 36/2 виробництва VTS CLIMA. Суттєвою перевагою запропонованої моделі є можливість використання її для синтезу та аналізу багатовимірних систем управління.

Ключові слова: кіберфізична система, цифровий двійник, математична модель, простір станів, електричний калорифер.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КАЛОРИФЕРА ДЛЯ КИБЕРФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ / Н.Д. Панкратова, И.М. Голинко

Аннотация. Рассмотрена динамическая модель тепломассообмена для электрического калорифера с сосредоточенными параметрами, которая позволяет проводить имитационное моделирование переходных процессов по основным каналам воздействия. Предложенную модель рекомендуется использовать в киберфизических системах для прогнозирования и оценки эффективности систем регулирования, которые интегрированы в единую информационную систему управления. Разработанную модель могут использовать специалисты для анализа и синтеза систем регулирования приточно-вытяжной вентиляции или промышленных кондиционеров. В качестве примера проведено численное моделирование переходных процессов по основным каналам воздействия для электрического калорифера HE 36/2 производства фирмы VTS CLIMA. Существенным преимуществом предложенной модели является возможность ее использования для синтеза и анализа многомерных систем управления.

Ключевые слова: киберфизическая система, цифровой двойник, математическая модель, пространство состояний, электрический калорифер.

КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ

Ю.А. ЗАК

Аннотация. Приведены описанные в литературе множества различных областей практических приложений многофакторного кластерного анализа в условиях нечетких исходных данных. Предложены новые алгоритмы и формульные выражения объединения различных многомерных объектов, параметры которых заданы fuzzy-множествами, в кластеры и вычисления координат центроидов их функций принадлежности. Сформулированы различные виды критериев кластеризации в виде минимизации средневзвешенной и представленной в различной метрике суммы расстояний между центроидами объектов и кластеров, а также максимизации расстояний между центроидами различных кластеров. Предложены постановки и математические модели трех различных *NP*-сложных задач многомерной кластеризации в условиях fuzzy-данных, при решении которых может быть использован любой из рассмотренных критериев оптимальности. Разработаны эвристические алгоритмы приближенного решения двух сформулированных задач. Алгоритм решения первой задачи проиллюстрирован на числовом примере. Полученные результаты могут послужить направлением дальнейших исследований и найти широкое практическое применение.

Ключевые слова: кластерный анализ, многомерные функции принадлежности, центроиды fuzzy-множеств объектов и кластеров, центры тяжести и середины сечений нечетких множеств, критерии оптимальности и алгоритмы кластеризации.

ВВЕДЕНИЕ

Кластерный анализ — это разбиение заданного множества, состоящего из N многомерных объектов ($i = 1, \dots, N$), на некоторое количество подмножеств (групп), называемых кластерами. При этом каждый кластер должен включать близкие по свойствам, характеристикам или своим значениям объекты, а объекты разных кластеров существенно отличались друг от друга [1–4; 12]. Количество таких кластеров O_k равно K ($k = 1, \dots, K$), где $K \ll N$. Количество кластеров может быть задано или определяться в процессе реализации алгоритма при возможных заданных граничных значениях на количества кластеров. Каждый из объектов может определяться одним параметром, представленным числовым или качественным значением, либо некоторым вектором параметров в m -мерном пространстве x_i^j , $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$. Тогда каждый кластер также представлен некоторым множеством точек в этом m -мерном векторном пространстве. Так как разные параметры (свойства) объектов могут быть представлены в различных единицах и различных диапазонах изменения, что может исказить или даже дать неправильный результат, необходимо привести эти данные к одним и тем же единицам измерения. Это достигается применением коэффициентов масштабирования

значений отдельных свойств. Степень важности различных свойств учитывается введением соответствующих весовых коэффициентов.

Выборка таких объектов должна быть однородной, т.е. не содержать не характерных для данного класса задач «выбросов».

Степень сходства между данными из одного кластера должна быть как можно более высокой, а между данными из разных кластеров — как можно меньшей, в связи с чем концепция подобия имеет здесь решающее значение. В качестве степени сходства между данными из одного кластера могут быть использованы евклидово расстояние, а также суммарное квадратичное отклонение объектов кластера от их центров (центроидов). Квадратичное евклидово расстояние способствует увеличению контрастности кластеров. Расстояния между центроидами данных различных кластеров, которые должны быть максимизированы, могут также определяться суммарными средне-взвешенными квадратичными или линейными значениями. Каждый объект A_i и каждый кластер O_k являются нечеткими множествами. Алгоритм кластеризации — это определение функции или некоторого решающего правила, на основе которого каждому объекту ставится в соответствие номер кластера, к которому этот объект принадлежит.

Область применений кластерного анализа очень широка. Эти методы используются в медицине, технической диагностике, психологии, биологии, археологии, маркетинге и во многих других дисциплинах [9–19].

В медицине пациенты со схожими характеристиками и симптомами по результатам иерархического кластерного анализа могут быть сгруппированы таким образом, чтобы можно было определить наличие и степень некоторого заболевания и начать соответствующие лечебные меры в соответствии с установленным диагнозом (см., например, [10, 16, 17, 19]). Примеры использования кластерного анализа в экономике для классификации ситуаций приведены в работе [9]. В системе государственного управления кластерный анализ позволяет распределить налогоплательщиков по категориям внимания, к которым будут применяться соответствующие комплексы мероприятий [13]. В маркетинге можно определить сегменты клиентов с аналогичными моделями покупательского поведения, а также перечни продуктов, пользующихся наибольшим спросом среди каждой из групп покупателей. Это даст возможность координации и повышения эффективности маркетинговой деятельности конкретно с определенными сегментами покупателей, что, в свою очередь, приведет к увеличению объема продаж. В проблемах защиты окружающей среды по результатам мониторинга могут быть определены зоны в воздухе с определенными степенями загрязнения, что даст возможность принять любые необходимые мероприятия по улучшению ситуации. В биологии с помощью кластерного анализа анализируются сложные сети взаимодействующих генов, состоящие порой из сотен или даже тысяч элементов. В информатике кластерный анализ используется для «интеллектуальной» группировки результатов, распознавания изображений [11] при поиске файлов и веб-сайтов, а также других информационных объектов, предоставляя пользователю возможность быстрой навигации для ускорения поиска необходимой ему информации.

Большое количество практических приложений основаны на том, что решения принимаются, опираясь на нечеткие данные. Разные параметры

или свойства объектов могут быть представлены нечеткими подмножествами с функциями принадлежности вида (см., например, [7, 8, 14, 15]):

$$\{x, [\mu_x(x)]\}; \mu_{Y_i(C_k)}[Y_i(C_k)] = \sum_{x \in C_k} \gamma_i [\mu_{x_i}(x_i)],$$

где γ_i — весовые коэффициенты, которые в частном случае могут быть равны 1.

Если при так называемой четкой или жесткой кластеризации каждый объект может принадлежать только одному кластеру, то при нечеткой кластеризации каждый объект с различными значениями функции принадлежности может одновременно принадлежать сразу нескольким кластерам. Одним из наиболее широко используемых алгоритмов нечеткой кластеризации является алгоритм (FCM) [1, 7, 12]). Любой объект x_i имеет некоторый набор данных, определяющих его принадлежность к некоторому кластеру. В алгоритме нечетких C -средних центроид кластера $O_k - C_k$ является средним значением всех точек в многомерном пространстве, взвешенных по степени их принадлежности к данному кластеру:

$$C_k = \frac{\sum_{x_i \in C_k} [\mu_x(x), x]^r x}{\sum_{x_i \in C_k} [\mu_x, x]^r}.$$

Здесь r — показатель степени, с увеличением которого растет показатель нечеткости кластера.

Алгоритм FCM минимизирует функционал вида

$$F = \min \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{C_k} [\mu_x(x), x]^r (x_i - z_k)^2.$$

Этот алгоритм осуществляет распределение N объектов, заданных нечеткими множествами, по K определяемым нечеткими множествами кластерам в соответствии с выбранным критерием оптимальности. Эффективность получения результата повышается при реализации алгоритма не с заранее заданным, а с автоматическим определяемым количеством кластеров.

ПАРАМЕТРЫ КЛАСТЕРОВ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ОБЪЕКТЫ, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Рассматриваются объекты, параметры или свойства которых, а также параметры кластеров представлены нечеткими подмножествами с функциями принадлежности вида

$$A_i = \{x_i, \mu_{A_i}(x_i) \mid x_i \in X_i\}, \mu_{A_i}(x_i) \in [0,1],$$

где

$$\int_{\min X_i}^{\max X_i} \mu_{A_i}(x_i) = 1, i = 1, \dots, N; \quad (1)$$

$$O_k = \{z_k, \mu_{O_k}(z_k) \mid z_k \in Z_k\},$$

где
$$\int_{\min Z_k}^{\max Z_k} \mu_{Z_k}(z_k) = 1, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2)$$

Здесь $i = 1, \dots, N$ — индексы, N — количество рассматриваемых объектов; $k = 1, \dots, K$, — индексы и количество априори рассматриваемых кластеров.

Пусть нечеткое множество кластера O_k , включающего некоторое подмножество объектов $A_i \in O_k$, определяется согласно выражению

$$\mu_{O_k}(z_k) = \max_{A_i \in O_k} \{\mu_{A_i}(x_i) \mid x \in X_i\}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Образование функции принадлежности такого кластера (ABCDEFHG), включающего два объекта иллюстрирует рис. 1.

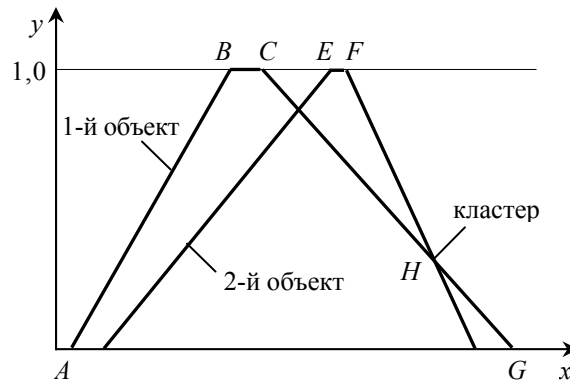


Рис. 1. Функция принадлежности нечетких множеств двух объектов и кластера

Каждый объект может определяться некоторым множеством свойств (параметров) x_i^j , количество которых равно m , значение каждого из которых определяется функцией принадлежности $\mu_{A_i^j}(x_i^j)$, $x_i^j \in X_i^j$. Кластеры в этом случае также являются многомерными и выражены вектором функций принадлежности той же размерности m . Обобщенная функция принадлежности этого объекта и кластера O_k могут быть вычислены, например, по формулам:

$$\{x_i, \mu_{A_i}(x_i) \mid x_i \in X_i\} = \sum_{j=1}^m \alpha^j \{x_i^j, \mu_{A_i^j}(x_i^j) \mid x_i^j \in X_i^j\}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (3)$$

$$\{z_k, \mu_{Z_k}(z_k) \mid z_k \in Z_k\} = \sum_{j=1}^m \alpha^j \{z_k^j, \mu_{Z_k^j}(z_k^j) \mid z_k^j \in Z_k^j\}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4)$$

Здесь α^j — весовые коэффициенты, определяющие значимость каждого из этих свойств, величины которых удовлетворяют соотношениям

$$0 \leq \alpha^j \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m \alpha^j = 1.$$

В качестве основной характеристики как отдельных объектов, так и каждого из кластеров выберем координату абсцисс центра тяжести соответствующего fuzzy-множества, которые рассчитываются по формулам (см., например, [5, 6]):

$$g_i^j = \int_{\min x_i^j}^{\max x_i^j} \frac{x_i^j \mu_{A_i^j}(x_i^j)}{\mu_{A_i^j}(x_i^j)}, \quad i=1, \dots, m; \quad g_i = \int_{\min X_i}^{\max X_i} \frac{x_i \mu_{A_i}(x_i)}{\mu_{A_i}(x_i)}, \quad i=1, \dots, N; \quad (5)$$

$$G_k^j = \int_{\min Z_k^j}^{\max Z_k^j} \frac{z_k^j \mu_{Z_k^j}(z_k^j)}{\mu_{Z_k^j}(z_k^j)}, \quad j=1, \dots, m, \quad G_k = \int_{\min Z_k}^{\max Z_k} \frac{z_k \mu_{Z_k}(z_k)}{\mu_{Z_k}(z_k)}, \quad k=1, \dots, K. \quad (6)$$

Ограничимся рассмотрением нечетких множеств объектов с функцией принадлежности треугольного или трапециевидального вида (рис. 2):

$$\mu_{A_i}(x_i) = (a_i, c_i, b_i), \quad \mu_{A_i}(x_i) = (a_i, c_{1i}, c_{2i}, b_i),$$

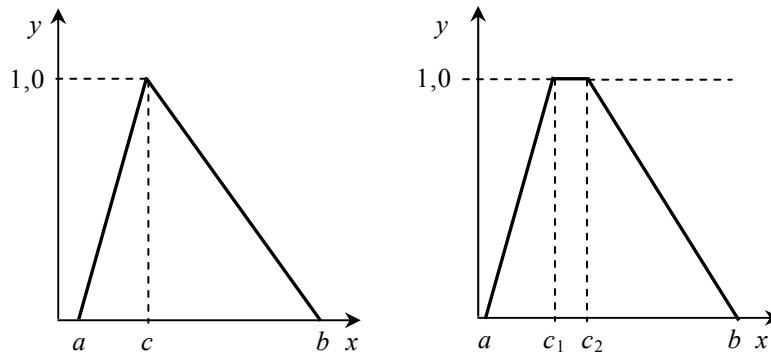


Рис. 2. Функции принадлежности fuzzy-множеств треугольного и трапециевидного типа

$$\mu_{A_k}(z_k) = (a_k, c_k, b_k), \quad \mu_{A_k}(z_k) = (a_k, c_{1k}, c_{2k}, b_k),$$

$$Z_k^{p+1} = [a(Z_k^{p+1}), c_1(Z_k^{p+1}), c_2(Z_k^{p+1}), b(Z_k^{p+1})],$$

$$a(Z_k^{p+1}) = \min[a_i, a(Z_k^p)], \quad b(Z_k^{p+1}) = \max[b_i, b(Z_k^p)], \quad (7)$$

$$c_1(Z_k^{p+1}) = \min[c_{1i}, c_{1i}(Z_k^p)], \quad c_2(Z_k^{p+1}) = \max[c_{2i}, c_{2i}(Z_k^p)], \quad (8)$$

$$c_1(Z_k^{p+1}) = \min[c_i, c_{1i}(Z_k^p)], \quad c_2(Z_k^{p+1}) = \max[c_i, c_{2i}(Z_k^p)]. \quad (9)$$

Формулы для вычисления значения функции принадлежности для этих fuzzy-множеств приведены, например, в работе [5]. Координаты оси абсцисс центра тяжести для треугольных fuzzy-множеств могут вычислены по простым формулам [5, 6]:

$$G_1(A_i) = \frac{1}{3}[a(A_i) + c(A_i) + b(A_i)], \quad G_2(A_k) = \frac{1}{3}[a(A_k) + c(A_k) + b(A_k)]. \quad (10)$$

Для трапециевидных fuzzy-множеств в качестве координаты $G_1(O_k)$ может быть принято значение, вычисленное по следующему алгоритму.

Вычислим площади соответствующих частей fuzzy-множества: двух треугольников, которые обозначим $S_1(O_k)$ и $S_3(O_k)$ и прямоугольника, которую обозначим как $S_2(O_k)$, а также координаты оси абсцисс центров

тяжести этих частей, которые соответственно равны $G[S_1(O_k)]$, $G[S_3(O_k)]$ и $G[S_2(O_k)]$.

Определим весовые коэффициенты

$$\gamma_1 = \frac{S_1(O_k)}{S_1(O_k) + S_2(O_k) + S_3(O_k)}; \quad \gamma_2 = \frac{S_2(O_k)}{S_1(O_k) + S_2(O_k) + S_3(O_k)};$$

$$\gamma_3 = \frac{S_3(O_k)}{S_1(O_k) + S_2(O_k) + S_3(O_k)},$$

где $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Тогда координаты оси абсцисс центра тяжести трапеции равна

$$G(O_k) = \gamma_1 G[S_1(O_k)] + \gamma_2 G[S_2(O_k)] + \gamma_3 G[S_3(O_k)]. \quad (11)$$

Если объект A_i с треугольной функцией принадлежности включается в кластер O_k с трапециевидальной функцией принадлежности, то параметры функции принадлежности кластера изменяются в соответствии со следующими выражениями:

$$a(O_k) = \begin{cases} a(O_k), & \text{if } a(O_k) \leq a(A_i), \\ a(A_i), & \text{if } a(O_k) > a(A_i); \end{cases} \quad b(O_k) = \begin{cases} b(O_k), & \text{if } b(O_k) \geq b(A_i), \\ b(A_i), & \text{if } b(O_k) < b(A_i); \end{cases}$$

$$c_1(O_k) = \begin{cases} c_1(O_k), & \text{if } c_1(O_k) \leq c(A_i), \\ a(A_i), & \text{if } c_1(O_k) > c(A_i); \end{cases} \quad c_2(O_k) = \begin{cases} c_2(O_k), & \text{if } c_2(O_k) \geq c(A_i), \\ c(A_i), & \text{if } c_2(O_k) < c(A_i). \end{cases}$$

Если первые два объекта A_i и A_v с треугольными функциями принадлежности объединяются в один кластер, то параметры этого кластера определяются по формулам:

$$a(O_k) = \begin{cases} a(A_v), & \text{if } a(A_v) \leq a(A_i), \\ a(A_i), & \text{if } a(A_v) > a(A_i); \end{cases} \quad b(O_k) = \begin{cases} b(A_v), & \text{if } b(A_v) \geq b(A_i), \\ b(A_i), & \text{if } b(A_v) < b(A_i); \end{cases}$$

$$c_1(O_k) = \begin{cases} c(A_v), & \text{if } c(A_v) \leq c(A_i), \\ a(A_i), & \text{if } c(A_v) > c(A_i); \end{cases} \quad c_2(O_k) = \begin{cases} c(A_v), & \text{if } c(A_v) \geq c(A_i), \\ c(A_i), & \text{if } c(A_v) < c(A_i). \end{cases}$$

В качестве другой характеристики каждого fuzzy-множества в задачах кластерного анализа может быть принята средневзвешенная координат оси абсцисс средин сечений этих множеств при различных значениях ординаты функции принадлежности (рис. 3), т.е. точек на прямой $Z_1 - Z_2$.

Обозначим координаты оси абсцисс середины соответствующих сечений $x(\mu_\tau)$. Здесь μ_τ — значение координаты y в этом сечении. Как правило,

$$0 \leq \mu_{\tau_0} < \mu_{\tau_1} < \mu_{\tau_2} < \dots < \mu_{\tau_q} < \dots < \mu_{\tau_Q} \leq 1,0.$$

Тогда
$$x(Z) = \sum_{q=0}^Q \delta_q x(\mu_q), \quad (12)$$

где $0 \leq \delta_q \leq 1,0$ — весовые коэффициенты, причем $\sum_{q=0}^Q \delta_q = 1,0$.

В частном случае $\delta_q = 1, 0; q = 0, 1, \dots, Q$.

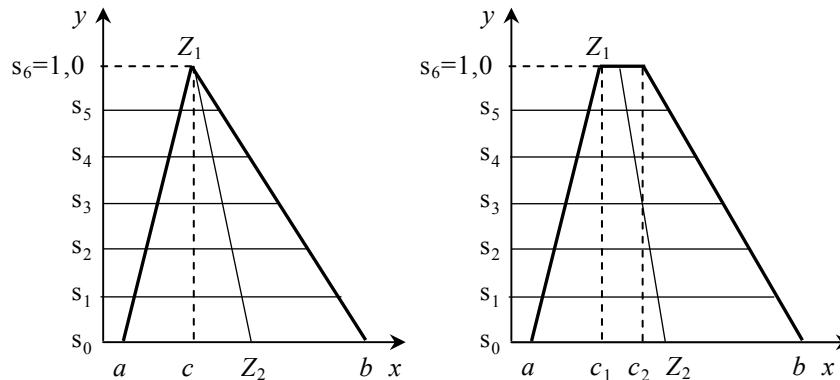


Рис. 3. Горизонтальные сечения функций принадлежности fuzzy-множеств

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В качестве критериев оптимальности при отнесении множества, включающего N объектов к одному из K кластеров, могут быть приняты параметры расстояний в различных метриках между центрами тяжести объектов и кластеров, а также между центроидами кластеров G_k и G_l .

$$F_1 = \sum_{k=1}^K \frac{1}{N_k} \sum_{A_i \in O_k} \tau_{ki}^1 |G_k - g_i| \rightarrow \min; \quad (13)$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^K \frac{1}{N_k} \sum_{A_i \in O_k} \tau_{ki}^2 (G_k - g_i)^2 \rightarrow \min; \quad (14)$$

$$F_3 = \sum_{k=1}^K \max_{A_i \in O_k} \tau_{ki}^3 |G_k - g_i| \rightarrow \min; \quad (15)$$

$$F_4 = \sum_{k=1}^K \sum_{l=k+1}^K \pi_{kl}^1 |G_k - G_l| \rightarrow \max; \quad (16)$$

$$F_5 = \sum_{k=1}^K \sum_{l=k+1}^K \pi_{kl}^2 (G_k - G_l)^2 \rightarrow \max; \quad (17)$$

$$F_6 = \sum_{k=1}^K \sum_{l=k+1}^K \max_{(k,l)} \pi_{kl}^3 |G_k - G_l| \rightarrow \max. \quad (18)$$

В выражениях (13)–(18) и в дальнейшем G_k и g_i — соответственно координаты центров тяжести оси абсцисс центроидов k -го кластера и i -го объекта, а также между центроидами кластеров G_k и G_l . Здесь τ_{ki}^p , $0 < \tau_{ki}^p \leq 1$ $p = 1, 2, 3$ — весовые коэффициенты, сумма которых в каждом из этих выражений равна $\sum_{A_i \in O_k} \tau_{ki}^p = 1$, $k = 1, \dots, K$. Весовые коэффициенты

$0 < \pi_{kl}^p \leq 1$, $p = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, K-1$, $l = 2, \dots, K$, $\sum_{l=k+1}^K \pi_{kl}^p = 1$; N_k — количество объектов, включенных в кластер O_k .

Кроме того, могут использоваться многокритериальные подходы принятия решений с использованием минимизации аддитивной свертки критериев, как, например,

$$\Phi_1 = \alpha_1 \frac{1}{K} F_1 - \alpha_2 \frac{1}{K(K-1)} F_4; \quad \Phi_2 = \alpha_3 \frac{1}{K} F_2 - \alpha_4 \frac{1}{K(K-1)} F_5; \quad (19)$$

$$\Phi_3 = \alpha_5 \frac{1}{K} F_3 - \alpha_6 \frac{1}{K(K-1)} F_6, \quad (20)$$

а также

$$\Phi_4 = \alpha_7 \frac{1}{K} F_1 - \alpha_8 \frac{1}{K(K-1)} F_6; \quad \Phi_5 = \alpha_9 \frac{1}{K} F_3 - \alpha_{10} \frac{1}{K(K-1)} F_4; \quad (21)$$

$$\Phi_6 = \alpha_{11} \frac{1}{K} F_2 - \alpha_{12} \frac{1}{K(K-1)} F_4; \quad \Phi_7 = \alpha_{12} \frac{1}{K} F_3 - \alpha_{13} \frac{1}{K(K-1)} F_5; \quad (22)$$

$$\Phi_8 = \alpha_{14} \frac{1}{K} F_2 - \alpha_{15} \frac{1}{K(K-1)} F_6; \quad \Phi_9 = \alpha_{16} \frac{1}{K} F_1 - \alpha_{17} \frac{1}{K(K-1)} F_6. \quad (23)$$

Здесь α_p , $0 < \alpha_p \leq 1$. $p = 1, 2, \dots, 17$ — весовые коэффициенты, сумма которых в каждом из этих выражений равна 1.

Если каждый объект представлен некоторым вектором параметров в m -мерном пространстве x_i^j , $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$, то в критерии оптимальности кластеризации могут быть представлены в виде:

$$E_1 = \min \frac{1}{N_k} \sum_{X_i \in O_k} \sum_{j=1}^m \beta_1^j |z_k^j - x_i^j|, \quad E_2 = \min \frac{1}{N_k} \sum_{X_i \in O_k} \sum_{j=1}^m \beta_2^j (z_k^j - x_i^j)^2,$$

$$E_3 = \min \frac{1}{N_k} \sum_{X_i \in O_k} \max_{1 \leq j \leq m} \beta_3^j |z_k^j - x_i^j|; \quad (23)$$

$$\Phi_1 = \max \left\{ \frac{1}{K(K-1)} \sum_{k=1}^K \sum_{l=k+1}^K \sum_{j=1}^m \delta_1^j |z_k^j - z_l^j| \right\},$$

$$\Phi_2 = \max \left\{ \frac{1}{K(K-1)} \sum_{k=1}^K \sum_{l=k+1}^K \sum_{j=1}^m \delta_2^j (z_k^j - z_l^j)^2 \right\},$$

$$\Phi_3 = \max \left\{ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{l=k+1}^K \sum_{j=1}^m \max_{1 \leq j \leq m} \delta_3^j |z_k^j - z_l^j| \right\}. \quad (24)$$

Здесь β_p^j , $0 < \beta_p^j \leq 1$. $p = 1, 2, 3$; и δ_r^j , $0 < \delta_r^j \leq 1$. $r = 1, 2, 3$; — весовые коэффициенты, сумма которых в каждом из этих выражений равна 1.

Отметим, что в выше приведенных выражениях, так и в других критериях и алгоритмах принятия решений задач кластеризации в условиях нечетких данных, вместо значений координаты абсцисс центра тяжести нечетких множеств могут использоваться так и середины соответствующих сечений этих fuzzy-множеств.

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Приведенные ниже постановки задач предусматривают работу с многомерными объектами и кластерами, параметры которых представлены нечеткими множествами. Рассмотрим три различные постановки задачи в условиях нечетких данных.

Задача 1. Определены функции принадлежности всех характеристик (признаков) каждого из K кластеров, $O_k = \{z_k, \mu_{O_k}(z_k) | z_k \in Z_k\}$, $\mu_{O_k}(z_k) \in [0, 1]$, $k=1, \dots, K$, а также известны функции принадлежности всех характеристик N многомерных объектов $A_i = \{x_i, \mu_{A_i}(x_i) | x_i \in X_i\}$, $\mu_{A_i}(x_i) \in [0, 1]$, $i=1, \dots, N$. Необходимо в соответствии с одним из выше приведенных критериев оптимальности распределить это множество объектов среди этих K кластеров.

Такая постановка задача очень характерна для медицинской диагностики, когда определены различные факторы отсутствия наличия и степени серьезности различных диагнозов и заболеваний, для технической диагностики, когда установлены признаки различного вида неисправностей, а также в задачах определения и классификации аварийных ситуаций причин и последствий экологических катастроф.

Задача 2. Известны функции принадлежности всех характеристик (признаков) N многомерных объектов $A_i = \{x_i, \mu_{A_i}(x_i) | x_i \in X_i\}$, $\mu_{A_i}(x_i) \in [0, 1]$, $i=1, \dots, N$. Установлено только количество кластеров K . Необходимо в процессе решения задачи определить функции принадлежности всех характеристик (признаков) каждого из K кластеров, $O_k = \{z_k, \mu_{O_k}(z_k) | z_k \in Z_k\}$, $\mu_{O_k}(z_k) \in [0, 1]$, $k=1, \dots, K$, и отнести каждый из объектов A_i , $i=1, \dots, N$, только к одному из этих кластеров в соответствии с одним из выше приведенных критериев оптимальности (19)–(24).

Задача 3. Известны только функции принадлежности всех характеристик (признаков) N многомерных объектов A_i , $i=1, \dots, N$. Количество выделяемых кластеров заранее не определено и может быть только ограничено некоторым числом B . Необходимо определить количество кластеров $1 \leq K \leq B$, а также функции принадлежности всех характеристик (признаков) каждого из этих K , отнести каждый из объектов A_i , $i=1, \dots, N$, только к одному из этих кластеров в соответствии с одним из выше приведенных комплексных критериев оптимальности (19)–(24).

Отметим, что задачи 2 и 3 являются задачами NP -сложности и для решения этих задач в условиях большой размерности могут быть предложены только эвристические алгоритмы приближенного решения

АЛГОРИТМ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим алгоритмы решения двух различных выше сформулированных задач. В двух описанных алгоритмах А.1 и А.2 решения задачи 1 используется один из критериев оптимальности $F_1 - F_6$, приведенных в формулах (13)–(18).

В начале работы алгоритмов приведем единицы и диапазоны изменения значений всех параметров объектов и кластеров (координат оси абсцисс этих параметров) к одним и тем же безразмерным единицам измерения:

$$X_{\min}^j = \min[\min_{1 \leq i \leq N} x_i^j; \min_{1 \leq k \leq K} x_k^j], \quad X_{\max}^j = \max[\max_{1 \leq i \leq N} x_i^j; \max_{1 \leq k \leq K} x_k^j],$$

$$X^j = (X_{\max}^j - X_{\min}^j).$$

Обозначим: $\bar{X}_-^j = X_{\min}^j$, $\bar{X}_+^j = X_{\max}^j$. Тогда $\bar{x}_i^j = \bar{X}_-^j + \frac{x_i^j}{X^j}$, $i = 1, \dots, N$;

$$\bar{x}_k^j = \bar{X}_-^j + \frac{x_k^j}{X^j}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Алгоритм А.1.

1. Вычислим координаты абсцисс центров тяжести или средневзвешенную координату середин оси абсцисс выбранных сечений функций принадлежности нечетких множеств для каждого из признаков всех объектов и центров кластеров в соответствии с формулами (5)–(10) или (12).

2. Вычислим значения:

$$w_{ki}^j = |G_k^j - g_i^j|, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K;$$

$$\bar{W}_{ki} = \sum_{j=1}^m \rho^j w_{ki}^j, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K.$$

Объект A_i относится к кластеру $O_{\bar{k}}$, для которого значение \bar{W}_{ki} минимально, т.е. $\bar{k}(A_i) = \arg \min_{1 \leq k \leq K} \bar{W}_{ki}$.

Другой алгоритм решения задачи 1 отличается от описанного выше тем, что в процессе решения производится пересчет координаты абсцисс центроидов вновь преобразованных кластеров.

Алгоритм А.2.

1. Выполняем пункты 1 и 2 алгоритма А.1.

2. Дальнейшие вычисления предусматривают выполнение N шагов. После выполнения каждого i -го шага отнесения объекта A_i , $i = 1, \dots, N$ к какому-либо кластеру O_k , $k = 1, \dots, K$, рассчитываем значение координаты абсцисс центроидов вновь преобразованного кластера по формулам (5)–(10) или (12). Координаты оси абсцисс центроидов всех вновь преобразованных кластеров $O_k(A_n)$ обозначим как $G_k^j(A_n^j)$, $j = 1, \dots, m$, $n = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K$. Переходим к п. 3.

3. Рассчитываем значения

$$w_{kn}^j = |G_k^j(A_n^j) - g_n^j|, \quad j = 1, \dots, m, \quad n = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K.$$

$$\bar{W}_{kn} = \sum_{j=1}^m \rho^j w_{kn}^j, \quad k = 1, \dots, K.$$

Объект A_n относится к кластеру $O_{\bar{k}}$, для которого значение \bar{W}_{kn} минимально, т.е. $\bar{k}(A_n) = \arg \max_{1 \leq k \leq K} \bar{W}_{kn}$. Переходим к шагу 4.

4. Если количество распределенных по кластерам объектов меньше N , то переходим к выполнению пункта 1. В противном случае алгоритм А.2 завершает свою работу.

Алгоритм В.

Для решения задачи 2 может быть использован любой из приведенных выше критериев оптимальности и предусматривается выполнение $(N + K - 1)$ шагов, что заключается в следующем.

1. Выполняем вычисления пункта 1 алгоритмов А.1 и А.2. Переходим к п. 2.

2. Вычисляем значения

$$v_i = \sum_{j=1}^m g_i^j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Упорядочим все объекты в последовательность в порядке возрастания значений v_i :

$$\tilde{U} = \{A(v_1), A(v_2), \dots, A(v_n), A(v_{n+1}), \dots, A(v_N) \mid v_n \leq v_{n+1}\}.$$

Здесь $A(v_n)$ — объект, для которого координата оси абсцисс циклоида равна v_n . Переходим к п. 3.

3. Вычисления п. 3 предусматривают выполнение N шагов, связанных с построением кратчайшей связывающей сети системы объектов.

На каждом из этих шагов в цепь включается объект A_n , стоящий на последнем n -м месте в последовательности \tilde{U} . Обозначим кратчайшую связывающую сеть на этом этапе решения $C(A_n)$. Рассматривая преобразованную связывающую сеть как некоторый кластер, рассчитываем значение оси абсцисс центроида этого кластера по формулам (5)–(10) или (12). Если включены все N объектов в строящуюся цепь, то переходим к выполнению пункта 4. В противном случае продолжаем включение следующих, стоящих в последовательности, объектов.

4. На данном этапе вычислений выполняется $(K - 1)$ шагов, связанных с разрывом участков связывающей сети в некотором выбранном $(K - 1)$ -м месте. При этом может быть использован любой из приведенных в разделе 3 критериев оптимальности.

Пусть на некотором p -м малом шаге итерации, где $p = 1, 2, \dots, (N - 1)$, образовано $(p + 1)$ кластеров, в которые включены все N рассматриваемых объектов. Отметим, что на первом шаге цепь разбивается на два кластера. Выполняем следующие вычисления:

1. На 1-м шаге итерации выбираем объект A_n , где $n = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ — целая часть от деления этих величин. Образует второй кластер. В первый кластер O_1 включаем объекты A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а во второй кластер O_2 — объекты $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_N$. Рассчитываем координаты оси абсцисс центроидов обоих кластеров $Z_x(O_1)$ и $Z_x(O_2)$ по выше приведенным формулам.

2. Пусть на некотором p -м шаге, где $p = 2, \dots, (N - 2)$ второй итерации построено p кластеров O_1, O_2, \dots, O_p . В каждом из этих кластеров содержатся подмножества объектов $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kh}$, которые упорядочены в последовательности убывания значений координаты оси абсцисс центроидов обоих кластеров:

$$\tilde{U}_k = \{A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kh} \mid Z_x(O_k) \leq Z_x(O_{k+1}), k = 1, 2, \dots, (h - 1)\}.$$

3. В каждом из кластеров O_k выбираем соответственно два объекта A_{kq} и $A_{k,q+1}$, где $q = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$. Кластер O_k разбиваем на четыре кластера O_k^1, O_k^2, O_k^3 и O_k^4 . Каждый из этих кластеров включает следующие объекты:

$$O_k^1 = (A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kq}), \quad O_k^2 = (A_{k,q+1}, A_{k,q+2}, \dots, A_{kh});$$

$$O_k^3 = (A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{k,q}, A_{k,q+1}), \quad O_k^4 = (A_{kq}, A_{k,q+1}, A_{k,q+2}, \dots, A_{kh}).$$

Рассчитываем значения координаты оси абсцисс центроидов обоих кластеров $Z_x(O_k^1), Z_x(O_k^2)$ и $Z_x(O_k^3), Z_x(O_k^4)$. Координаты оси абсцисс центроидов всех остальных кластеров $Z_x(O_l), l = 1, \dots, (k-1), (k+1), \dots, p$ (кроме выбранного k -го кластера) остаются без изменения.

4. Вычисляем по приведенным формулам значения одного из выбранных критериев оптимальности для каждого из вновь образованных 4-х кластеров — $\Phi(O_k^1), \Phi(O_k^2)$ и $\Phi(O_k^3), \Phi(O_k^4)$. Рассматриваем также и остальные оставшиеся без изменения кластеры $O_1, O_2, \dots, O_{k-1}, O_{k+1}, \dots, O_p$. Для каждого разделяемого кластера O_k находим минимальное среди четырех возможных значений, которое обозначим как $\bar{\Phi}(O_k^v)$. Здесь v — номер выбранного кластера t , для которого достигается это минимальное значение.

Определяем индекс кластера, разбиение которого на два кластера обеспечивает минимальное значение одного из критериев оптимальности (23).

$$\bar{\Phi}_q^v = \min_{1 \leq k \leq p} \bar{\Phi}(O_k^v).$$

В зависимости от полученного решения количество кластеров увеличиваем на 1 следующим образом:

$$O_1, O_2, \dots, O_{q-1}, O_q^1, O_q^2, O_{q+1}, \dots, O_{p+1}$$

или $O_1, O_2, \dots, O_{q-1}, O_q^3, O_q^4, O_{q+1}, \dots, O_{p+1}$.

Если $(p + 1) = K$, то алгоритм завершает свою работу. В противном случае производим переиндексацию всех преобразованных кластеров и переходим к выполнению п. 4.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Параметры треугольных функций принадлежности 2 признаков 12 объектов и 2 признаков 2 кластеров приведены в табл. 1. Значения признаков всех объектов и кластеров приведены к одним и тем же единицам измерения.

Таблица 1. Параметры функций принадлежности 12 объектов и 2-х кластеров

Номер объекта	Параметры функций принадлежности объектов и кластеров															
	Параметры объектов								Параметры кластеров							
	1-й признак				2-й признак				1-й признак				2-й признак			
	a_i^1	c_i^1	b_i^1	$x(A_i^1)$	a_i^2	c_i^2	b_i^2	$x(A_i^2)$	a_k^1	c_k^1	b_k^1	$x(O_k^1)$	a_k^2	c_k^2	b_k^2	$x(O_k^2)$
1	1	4	6	3,67	5	8	10	9,67	4	5	6	5,0	8	10	11	10,0
2	5	7	9	7,0	6	7	8	7,0	8	10	12	9,67	3	4	6	4,33
3	10	11	12	11,0	2	4	5	3,67								
4	3	8	9	6,67	9	10	12	10,33								
5	10	12	15	12,33	4	6	9	6,33								
6	7	8	10	11,67	2	3	4	3,0								
7	8	10	11	9,67	4	5	7	5,33								
8	3	6	9	6,0	5	8	10	7,67								
9	10	13	16	13,0	7	8	10	8,33								
10	7	10	11	9,33	1	5	6	4,0								
11	12	13	15	13,33	4	7	8	6,33								
12	6	8	10	8,0	6	7	11	7,33								

В табл. 2 приведены результаты решения иллюстративного примера алгоритмом 1 на основе применения критерия оптимальности (13).

Таблица 2. Результаты решения задачи алгоритмом 1

Номер объекта	Расчетные данные отнесения рассматриваемых объектов к одному из 2-х кластеров							Кластер
	Обобщенные расстояния к кластеру 1			Обобщенные расстояния к кластеру 2				
	H_{1i}^1	H_{1i}^2	$H_{1i}^1 + H_{1i}^2$	H_{2i}^1	H_{2i}^2	$H_{2i}^1 + H_{2i}^2$		
1	1,33	0,33	1,66	4,33	5,34	9,67	O_1	
2	2,0	3,0	5,0	2,67	2,67	5,34	O_1	
3	6,0	6,33	12,33	1,33	0,66	1,99	O_2	
4	1,67	0,33	2,0	3,0	6,0	9,0	O_1	
5	7,33	3,67	11,0	2,66	2,0	4,66	O_2	
6	6,67	7,0	13,67	2,0	1,33	3,33	O_2	
7	4,67	4,67	9,34	0	1,0	1,0	O_2	
8	1,0	2,33	3,33	3,67	3,34	7,01	O_1	
9	8,0	1,67	9,67	3,33	4,0	7,33	O_2	
10	4,33	6,0	10,33	0,34	0,33	0,67	O_2	
11	8,33	3,67	12,0	3,66	2,0	5,66	O_2	
12	3,0	2,67	5,67	1,67	3,0	4,67	O_2	

Следовательно, $O_1 = \{A_1, A_2, A_4, A_8\}$, $O_2 = \{A_3, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}\}$. Трапецидальные параметры функций принадлежности 2-х объектов нечетких множеств вновь образованных кластеров имеют вид:

$$\mu_{O_1^1}(O_1^1) = (1, 4, 8, 9), \mu_{O_1^2}(O_1^2) = (5, 7, 10, 12);$$

$$\mu_{O_2^1}(O_2^1) = (6, 8, 13, 16), \mu_{O_2^2}(O_2^2) = (1, 3, 8, 11),$$

а координаты абсцисс центров тяжести функций принадлежности 2-х объектов этих нечетких множеств соответственно равны:

$$Z_x[\mu_{O_1^1}(O_1^1)] = 5,068, Z_x[\mu_{O_1^2}(O_1^2)] = 8,5;$$

$$Z_x[\mu_{O_2^1}(O_2^1)] = 10,788, Z_x[\mu_{O_2^2}(O_2^2)] = 7,268.$$

Следует отметить, что при выборе второго критерия оптимальности результаты решения этой задачи могут оказаться другими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кластерный анализ в условиях представления многомерных объектов и кластеров нечеткими множествами имеет много практических приложений: в биологии, медицинской и технической диагностике; в проблемах охраны окружающей среды; в экономике и маркетинге, а также в системе государственного управления для классификации производителей, потребителей и ситуаций; в информатике для быстрой навигации и поиска информации в больших массивах данных и многих других областях.

Предложены алгоритмы и формульные выражения (для функций принадлежности треугольного и трапецидального вида) объединения различных многомерных объектов, параметры которых заданы fuzzy-множествами, в кластеры, вычисления координат центроидов функций принадлежности, а также расстояний между центроидами таких объектов и кластеров.

Сформулированы различные критерии оптимальности в виде минимизации средневзвешенной суммы представленной в различной метрике расстояний между центроидами объектов и кластеров, а также максимизации расстояний между центроидами различных кластеров. Рассматриваются многокритериальные подходы, основанные на аддитивной свертке различных критериев.

Рассмотрены постановки и математические формулировки, каждая из которых может использовать любой из приведенных выше критериев оптимальности. Сформулированные задачи 2 и 3 являются задачами экспоненциальной сложности в условиях большой размерности и могут быть решены только приближенными методами. Предложены полиномиальные алгоритмы получения приближенного решения двух из трех сформулированных задач. Один из алгоритмов решения задачи 1 проиллюстрирован на числовом примере. Алгоритмы решения других задач будут рассмотрены в других работах автора.

Полученные в работе результаты могут быть развиты в работах других авторов и найти применение в целом ряде практических приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bacher , A. Pöge , und K. Wenzig, Clusteranalyse – *Anwendungsorientierte Einführung in Klassifikationsverfahren. 3. Auflage.* Oldenbourg, München, 2010, 538 s.
2. С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, и Л.Д.Мешалкин, *Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности.* Москва: Финансы и статистика, 1989, 607 с.
3. И.Д. Мандель, *Кластерный анализ.* Москва: Финансы и статистика, 1988, 176 с.
4. М. Жамбю, *Иерархический кластер-анализ и соответствия.* Москва: Финансы и статистика, 1988, 345 с.
5. Ю.А. Зак, *Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных.* Москва: URSS, 2013, 352 с.
6. Ю.А. Зак, *Принятие эффективных решений в экономике и менеджменте в условиях наличия нечисловой информации и размытых данных.* Москва: Экономика, 2018, 245 с.
7. Д.А. Вятчинин, *Нечёткие методы автоматической классификации.* Минск: Технопринт, 2004, 219 с.
8. Д.А. Вятчинин, “Применение нечетких чисел для обоснования кластеров в методах нечеткой кластеризации”, *Искусственный интеллект*, № 3, с. 523–533, 2008.
9. Ю.П. Зайченко и М.А. Гончар, “Нечеткие методы кластерного анализа в задачах автоматической классификации в экономике”, *Вісник Національного технічного університету України “КПІ”. Інформатика, управління та обчислювальна техніка*, вип. 47, с. 198–206, 2007.
10. Н.А. Гудилина, Э.С. Иванова, А.В. Сибиряков, Н.В. Мехоношина, Н.Б. Ростова, и Р.А. Файзрахманов, “Использование кластерного анализа при разработке подходов по выбору и назначению схем лечения ВИЧ-инфицированным пациентам”, *Бюллетень сибирской медицины*, № 16 (3), с. 52–60, 2017.
11. F. Höppner, F. Klawonn, R. Kruse, and T. Runkler, *Fuzzy Cluster Analysis: Methods for Classification, Data Analysis and Image Recognition.* Chichester: Wiley Intersciences, 1999, 289 p.
12. J.C. Bezdek, J.M. Keller, R. Krishnapuram, and N.R. Pal, *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing.* New York: Springer Science, 2005, 776 p.
13. В.С. Заболотникова и О.Н. Ромашкова, “Анализ методов кластеризации для эффективного управления процессами налоговой службы”, *Фундаментальные исследования*, № 9, с. 303–330, 2017.
14. E. El-Khamy, R.A. Sadek, and M.A. El-Khoreby, “An efficient brain mass detection with adaptive clustered based fuzzy C-mean and thresholding”, *IEEE International Conference on Signal and Image Processing Applications*, pp. 429–433, 2015.
15. T. Banerjee, “Day or Night Activity Recognition From Video Using Fuzzy Clustering Techniques”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22 (3), pp. 483–493, 2014.
16. S. Sridevi and S. Nirmala, “ANFIS based decision support system for prenatal detection of Truncus Arteriosus congenital heart defect”, *Applied Soft Computing*, no. 46, pp. 577–587, 2016.
17. M.A.M. Abushariah, A.A.M. Alqudah, O.Y. Adwan, and R.M.M. Yousef, “Automatic Heart Disease Diagnosis System Based on Artificial Neural Network (ANN) and Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems (ANFIS) Approaches”, *Journal of Software Engineering and Applications*, no. 07(12), pp. 1055–1064, 2014.
18. S. Sridevi and S. Nirmala, “ANFIS based decision support system for prenatal detection of Truncus Arteriosus congenital heart defect”, *Applied Soft Computing*, 46, pp. 577–587, 2016.
19. Н.А. Кореновский, “Использование нечеткой логики принятия решений для медицинских экспертных систем”, *Медицинская техника*, № 1, с. 33–35, 2015.

Поступила 01.05.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Yuriy A. Zack, Dr. Tech. Sc., scientific expert, Deutschland, e-mail: yuriy_zack@hotmail.com

КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ В УМОВАХ НЕЧІТКИХ ДАНИХ / Ю.О. Зак

Анотація. Наведено описані в літературі безлічі різних галузей практичних застосувань багатомірних кластерного аналізу в умовах нечітких вихідних даних. Запропоновано нові алгоритми і формульні вирази об'єднання різних багатомірних об'єктів, параметри яких задано fuzzy-множинами, у кластери і обчислення координат центрів їх функцій належності. Сформульовано різні види критеріїв кластеризації у вигляді мінімізації середньозваженої і поданої в різній метриці суми відстаней між центрами об'єктів і кластерів, а також максимізації відстаней між центрами різних кластерів. Запропоновано постановки і математичні моделі трьох різних NP-складних задач багатомірної кластеризації в умовах fuzzy-даних, для розв'язання яких може бути використаний будь-який з розглянутих критеріїв оптимальності. Розроблено евристичні алгоритми наближеного розв'язку двох сформульованих задач. Алгоритм розв'язання першої задачі проілюстровано на числовому прикладі. Отримані результати можуть стати напрямом подальших досліджень і знайти широке практичне застосування.

Ключові слова: кластерний аналіз, багатомірні функції належності, центри fuzzy-множин об'єктів і кластерів, центри ваги і середини перетинів нечітких множин, критерії оптимальності та алгоритми кластеризації.

CLUSTER ANALYSIS FOR MULTIDIMENSIONAL OBJECTS IN FUZZY DATA CONDITIONS / Yu.A. Zack

Abstract. This article presents many different areas of practical applications of multivariate cluster analysis under conditions of fuzzy initial data that are described in the literature. New algorithms and formula expressions are proposed for combining various multi-dimensional objects, the parameters of which are given by fuzzy-sets, into clusters along with calculating the coordinates of the centroids of their membership functions. Various types of clustering criteria are formulated in the form of minimizing the weighted average and the sum of distances between the centroids of objects and clusters presented in different metrics, as well as maximizing the distances between the centroids of different clusters. The formulations and mathematical models of three different NP-hard problems of multidimensional clustering in fuzzy-data conditions are proposed; while solving them any of the considered optimality criteria can be used. Heuristic algorithms for the approximate solution of two formulated problems have been developed. The algorithm for solving the 1st problem is illustrated with a numerical example. The obtained results can serve as a direction for further research and have wide practical applications.

Keywords: cluster analysis, multidimensional membership functions, centroids of fuzzy-sets of objects and clusters, centers of gravity and mid-sections of fuzzy sets, optimality criteria and clustering algorithms.

REFERENCES

1. J. Bacher, A. Pöge, K. Wenzig, *Clusteranalyse – Anwendungsorientierte Einführung in Klassifikationsverfahren*. 3. Auflage. Oldenbourg, München, 2010, 538 s.
2. S.A. Ajvazjan, V.M. Buchstaber, I.S. Enyukov, and L.D. Meshalkin, *Applied Statistics: Classification and Dimension Reduction*. Moscow: Finansi & Statistika, 1989, 607 p.
3. I.D. Mandel, *Cluster Analysis*. Moscow: Finansi & Statistika, 1988, 176 p.
4. M.Zhambyu, *Hierarchical Cluster Analysis and Compliance*. Moscow: Finansi & Statistika, 1988, 345 p.

5. Yu.A. Zack, *Making decisions in the face of blurry and fuzzy data*. Moscow: URSS, 2013, 352 p.
6. Yu.A. Zack, *Making effective decisions in economics and management in the presence of non-numerical information and blurry data*. Moscow: Ekonomika, 2018, 245 p.
7. D.A. Vyatchenin, *Fuzzy automatic classification methods*. Minsk: Technoprint, 2004, 219 p.
8. D.A. Vyatchenin, "The use of fuzzy numbers to substantiate clusters in fuzzy clustering methods", *Iskusstvenij intellect*, no. 3, pp. 523–533, 2008.
9. Yu.P. Zaychenko and M.A. Gonchar, "Fuzzy methods of cluster analysis in problems of automatic classification in economics", *Bulletin of the National Technical University of Ukraine "KPI". Informatics, control and computer engineering*, vol. 47, pp. 198–206, 2007.
10. N.A. Grudinina, E.S. Ivanova, A.V. Sibiryakov, N.V. Maüjnshina, N.B. Rostova, R.A. Fajsrachmanov, "The use of cluster analysis in the development of approaches to the selection and prescription of treatment regimens for HIV-infected patients", *Bulletin of Siberian Medicine*, no. 16 (3), pp. 52–60, 2017.
11. F. Höppner, F. Klawonn, R. Kruse, and T. Runkler, *Fuzzy Cluster Analysis: Methods for Classification, Data Analysis and Image Recognition*. Chichester: Wiley Intersciences, 1999, 289 p.
12. J.C. Bezdek, J.M. Keller, R. Krishnapuram, and N.R. Pal, *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing*. New York: Springer Science, 2005, 776 p.
13. V.S. Zabolotnikova and O.N. Romashkova, "Analysis of clustering methods for effective management of tax service processes", *Fundamental Research*, no. 9, pp. 303–330, 2017.
14. E. El-Khamy, R.A. Sadek, M.A. El-Khoreby, "An efficient brain mass detection with adaptive clustered based fuzzy C-mean and thresholding", *IEEE International Conference on Signal and Image Processing Applications*, pp. 429–433, 2015.
15. T. Banerjee, "Day or Night Activity Recognition From Video Using Fuzzy Clustering Techniques", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22 (3), pp. 483–493, 2014.
16. S. Sridevi and S. Nirmala, "ANFIS based decision support system for prenatal detection of Truncus Arteriosus congenital heart defect", *Applied Soft Computing*, no. 46, pp. 577–587, 2016.
17. M.A.M. Abushariah, A.A.M. Alqudah, O.Y. Adwan, and R.M.M. Yousef, "Automatic Heart Disease Diagnosis System Based on Artificial Neural Network (ANN) and Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems (ANFIS) Approaches", *Journal of Software Engineering and Applications*, no. 07(12), pp. 1055–1064, 2014.
18. S. Sridevi and S. Nirmala, "ANFIS based decision support system for prenatal detection of Truncus Arteriosus congenital heart defect", *Applied Soft Computing*, 46, pp. 577–587, 2016.
19. N.A. Korenovsky, "The use of fuzzy decision-making logic for medical expert systems", *Medical equipment*, no. 1, pp. 33–35, 2015.

**INVESTIGATION OF COMPUTATIONAL INTELLIGENCE
METHODS IN FORECASTING
PROBLEMS AT STOCK EXCHANGES**

Yu. ZAYCHENKO, G. HAMIDOV, A. GASANOV

Abstract. In this paper, the forecasting problem of share prices at the New York Stock Exchange (NYSE) was considered and investigated. For its solution the alternative methods of computational intelligence were suggested and investigated: LSTM networks, GRU, simple recurrent neural networks (RNN) and Group Method of Data Handling (GMDH). The experimental investigations of intelligent methods for the problem of CISCO share prices were carried out and the efficiency of forecasting methods was estimated and compared. It was established that method GMDH had the best forecasting accuracy compared to other methods in the problem of share prices forecasting.

Keywords: share prices forecasting, LSTM, GRU, RNN, GMDH.

INTRODUCTION

The problem of share prices and market indicators forecasting attracts great attention from the specialists and financial managers. Traditionally for this problem statistical methods, ARMA, ARIMA, exponential smoothing method, Kalman filters and other methods were used.

But these methods have some drawbacks and based on assumptions which usually don't fulfill in practice: financial processes are non-stationary, and non-linear by parameters, errors are correlated and may haven't zero mean and bounded variance.

Therefore last years for forecasting financial processes at stock exchanges intelligent methods are widely used. One class of such methods are recurrent neural networks (RNN) [1–7]. They enable to detect hidden dependences in data and perform long-term forecast of time series.

Now this class of RNN includes simple recurrent networks, LSTM and GRU [1-10]. As alternative intelligent method GMDH from the other side is also widely used for forecasting share prices at stock exchanges [11; 12] and other financial processes. GMDH has some advantages over other forecasting methods: 1) it enables to construct structure of forecasting model using experimental sample and find analytical models; 2) it may work with short samples.

It's interesting to compare these alternative methods at solution of practical forecasting problems. The goal of this paper is to investigate recurrent networks

and method GMDH at forecasting of share prices, compare their efficiency and find the best method for this class of problem.

LSTM AND GRU MODELS DESCRIPTION

Networks of Long Short Term Memory (LSTM) were developed by “LSTM”, Hochreiter and Schmidhuber [1; 2] LSTM — is a special type of RNN, capable to train long-term dependencies. They work well for the most problems and are constructed so that to exclude problems which usually occur with deep learning networks. LSTM enable to prevent problem of decay or explosion of gradient when training using Back Propagation algorithm.

The architecture of LSTM is presented in the Fig. 1. It has chains type structure consisting of sequence of modules (blocks).

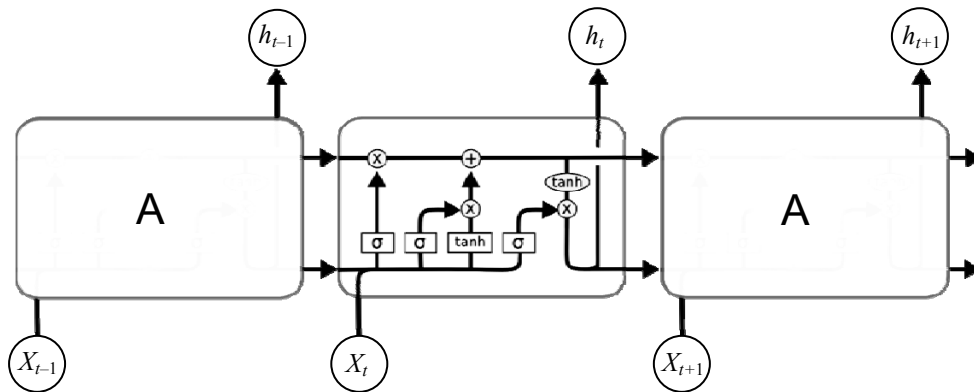
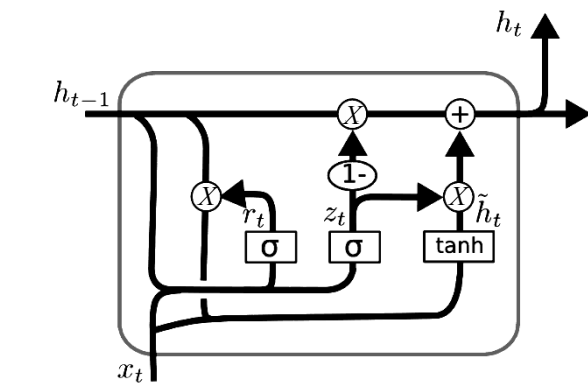


Fig. 1. The architecture of LSTM network

LSTM has capability to add or delete information which is regulated by special modules — gates (Fig 2). Gate consists of sigmoidal layer (σ) and operation of pointwise multiplication.

Another RNN Gated Recurrent Unit (GRU) somewhat differs from LSTM. It integrates input and forgetting gates in one “update gate”.

A model GRU is therefore is more simple than conventional LSTM (see Fig. 3) and it has won popularity and wide applications owing to this property:



$$z_t = \sigma(W_z, [h_{t-1}, x_t]);$$

$$r_t = \sigma(W_r, [h_{t-1}, x_t]);$$

$$\tilde{h}_t = \tanh(W, [r_t h_{t-1}, x_t]);$$

$$h_t = (1 - z_t)h_{t-1} + z_t \tilde{h}_t.$$

Fig. 3. Structure of GRU

Extended LSTM with forgetting gate. The extended LSTM is also two-layer recurrent network (Fig. 4.) Instead of hidden neuron a memory module is used which consists of one or more cells (Fig. 5). Forgetting gate is used to prevent uncontrolled increase of variable value in a memory cell.

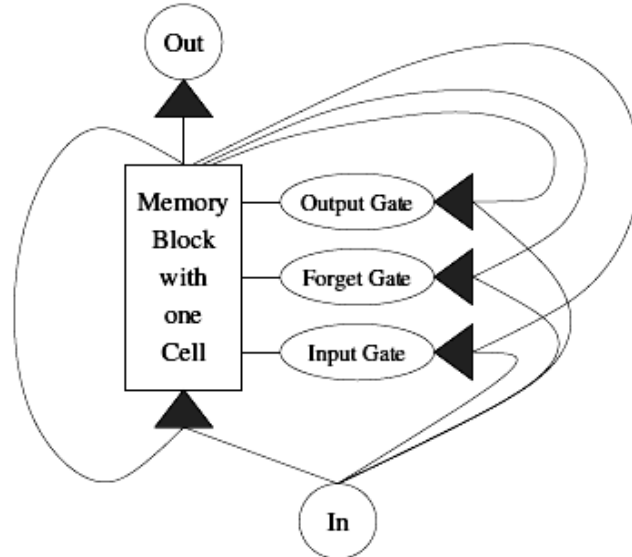


Fig. 4. LSTM with forgetting gate

Training of the extended LSTM with forgetting gate is performed by error correction method (supervised learning) in combination of Back Propagation algorithm (BPTT) and recurrent training in real time (RTRL).

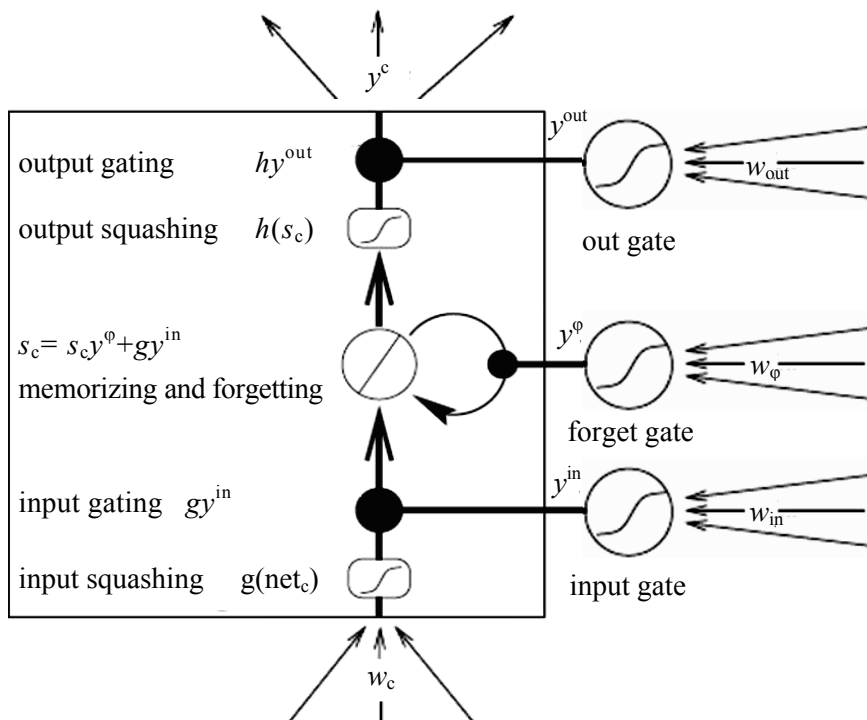


Fig. 5. Memory cell structure

Let's mark advantages of LSTM networks.

1. LSTM is universal approximator like BP networks. It may ensure global approximation of non-linear mapping of input signal into output.
2. It performs high quality generalization of input data.
3. Automatically is determined number of hidden layers (one).
4. Unlike static ANN, LSTM enables to perform adaptive filtration, forecasting, adaptive control, parametric models identification and classification of non-stationary signals.
5. Unlike simple RNN (ENN, JNN, NARNN i NARMANN) LSTM enable to work with long-term non-stationary sequences (time series).

But LSTM have also the following drawbacks.

1. Training process runs more slowly than in cases of MLP, RBFNN, PNN, Hamming RNN, Kohonen networks.
2. Automatic determination of number of neurons (memory blocks) in hidden layers and number of cells in each block is absent.
3. The model of training LSTM can't be transformed to the quadratic programming problem in convex region which has one optimal solution.

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS

The goal of investigations was to estimate accuracy of share prices forecasting by LSTM networks, find the best structure of recurrent networks LSTM, GRU and simple RNN and compare their efficiency with method of self-organization GMDH.

As input data share prices of CISCO at the stock exchange NYSE since 2006 till 2018 were taken. In the Table 1 daily data is presented including the fields: Open — value of open share price of current day; High — maximal daily price value; Low — minimal daily price; Close — close price value of current day; Volume — sell volume value. As forecasting data was taken the field "High".

Table 1. CISCO share prices dynamics (fragment of input sample)

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Name
2006-01-03	17,21	17,49	17,18	17,45	55432166	CSCO
2006-01-04	17,48	17,93	17,85	17,85	80409776	CSCO
2006-01-05	17,94	18,48	17,93	18,35	118588943	CSCO
2006-01-06	18,51	18,88	18,47	18,77	122450979	CSCO
2006-01-09	18,97	19,11	18,92	19,06	78604868	CSCO

As a training sample was taken data since 2006 till the end of 2016 year and a test sample the data since 2017 till 2018 year was taken. Total size of the sample was 3019 values. The flow chart of data (share prices) is presented in the Fig. 6, where training sample is shown in blue color while test sample — in red color.

The next step of the program run is data normalization. After that the training of neural networks is performed.

At the end of software work the flow charts of real and forecasted stock prices, error value and accuracy of the model were determined which are presented in Fig. 7–19. For LSTM were constructed and investigated 5 models. The forecasting results and criteria values MSE, MAE and R2 score for LSTM 1-5 are shown in the Fig. 7–11 correspondingly.

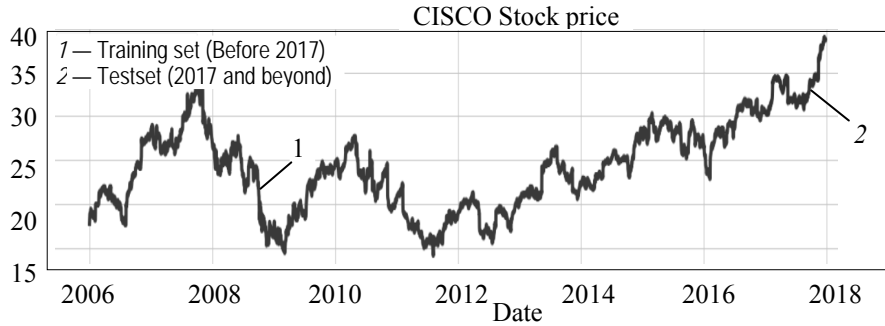


Fig. 6. Flow chart of share prices of the whole sample

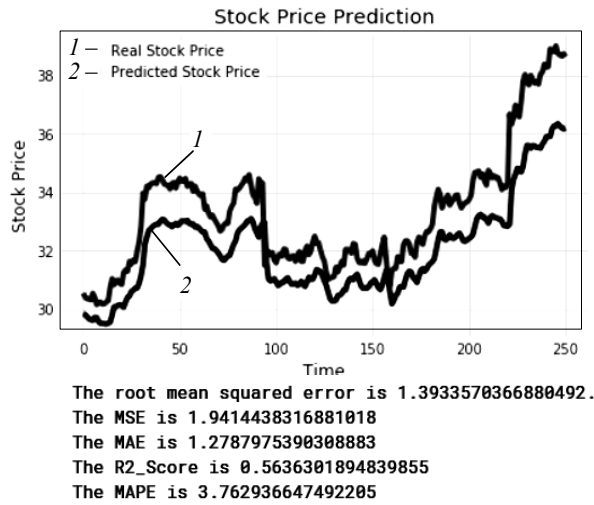


Fig. 7. LSTM-1

(LSTM-1 has 4 layers, each of which consists of 100 neurons, at each even n layer Dropout — 0,2; uneven Dropout — 0,3)

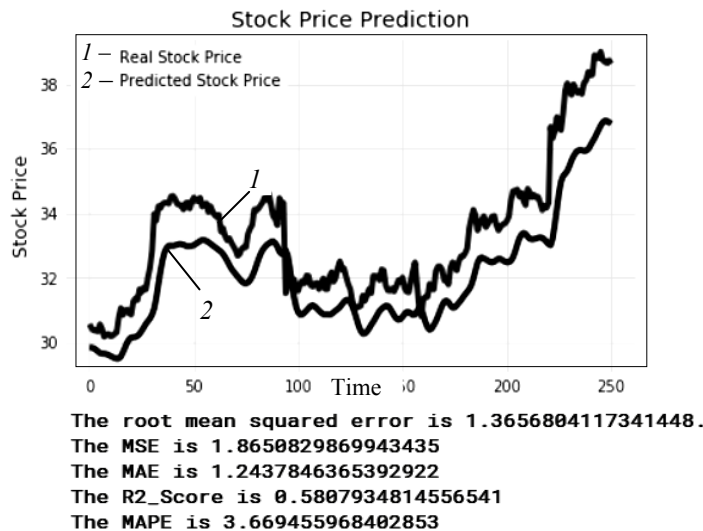
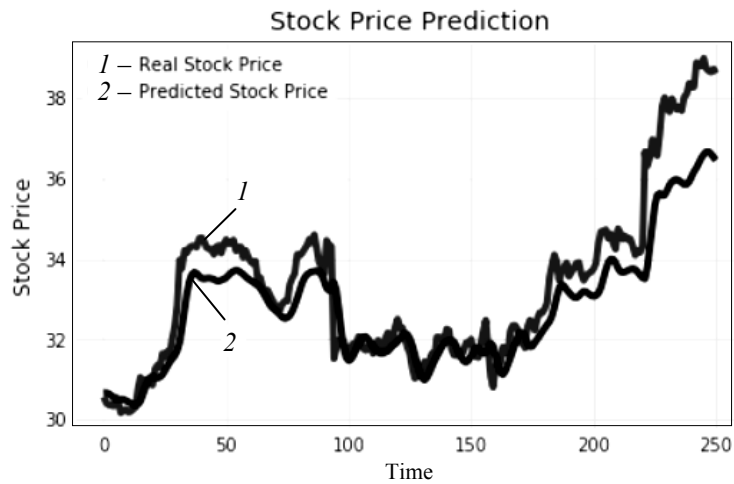


Fig. 8. LSTM-2

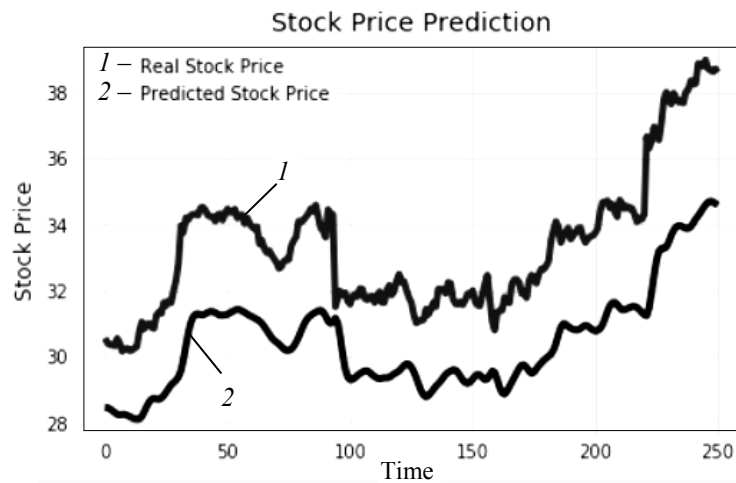
(LSTM-2 has 4 layers, each layer consists of 50 neurons and Dropout is 0,4 at all layers)



The root mean squared error is 0.9392288028778943.
The MSE is 0.8821507441554426
The MAE is 0.6915106432181433
The R2_Score is 0.8017228483303791
The MAPE is 1.9872419136689634

Fig. 9. LSTM-3

(LSTM-3 model has 4 layers, each of which has 30 neurons and Dropout — 0,1 at each layer)



The root mean squared error is 0.6851362567918017.
The MSE is 0.4694116903706816
The MAE is 0.5497780894853204
The R2_Score is 0.8944923942492073
The MAPE is 1.6779161468172838

Fig. 10. LSTM-4

(This model has 4 layers, each of which has 30 neurons and Dropout — 0,2 at each layer)

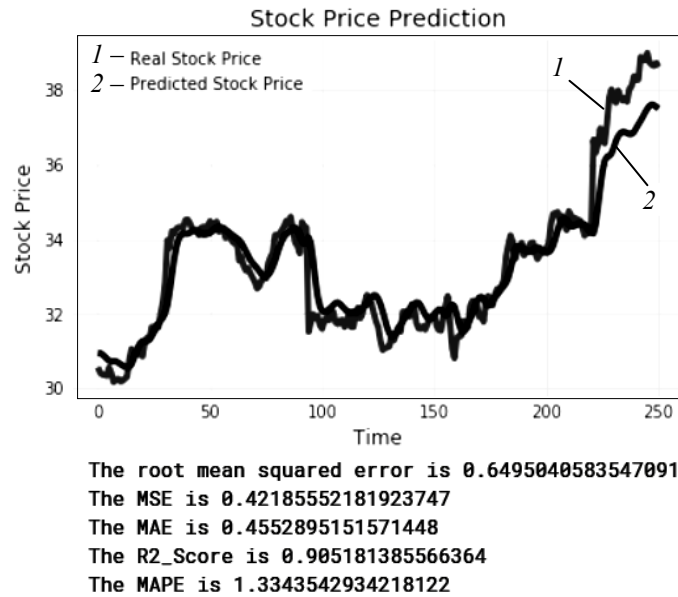


Fig. 11. LSTM-5 (the best one)

(This model has 5 layers, each of which has 50 neurons and Dropout — 0,4 at each layer)

As it follows from presented results the best one is model 5 LSTM which consists of 5 LSTM layers, each layer has 50 neurons and each layer uses Dropout — 0,4) and one output layer. Training time takes about 11 minutes.

At the second stage of investigations 5 different GRU models were constructed and investigated. The forecasting results are presented in the Fig. 12–16. The criteria values — MSE, MAE, MAPE, R2 are also presented.

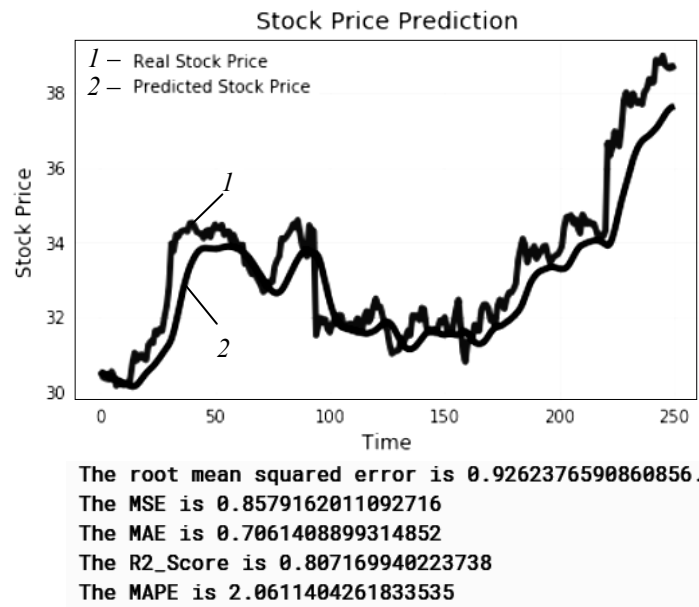


Fig. 12. GRU-1

(This model has 5 layers, each of which has 50 neurons and Dropout — 0,4 at each layer)

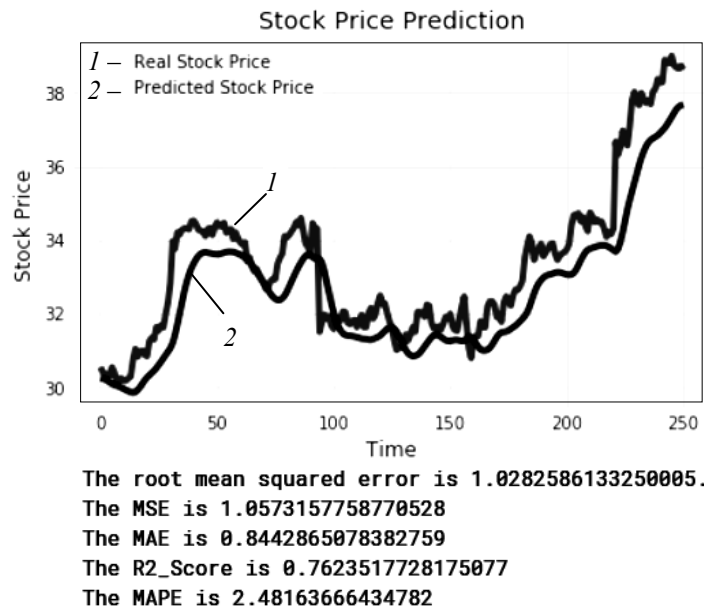


Fig. 13. GRU-2

(This model has 4 layers, each hash of which has 100 neurons and Dropout — 0,4 at each layer)

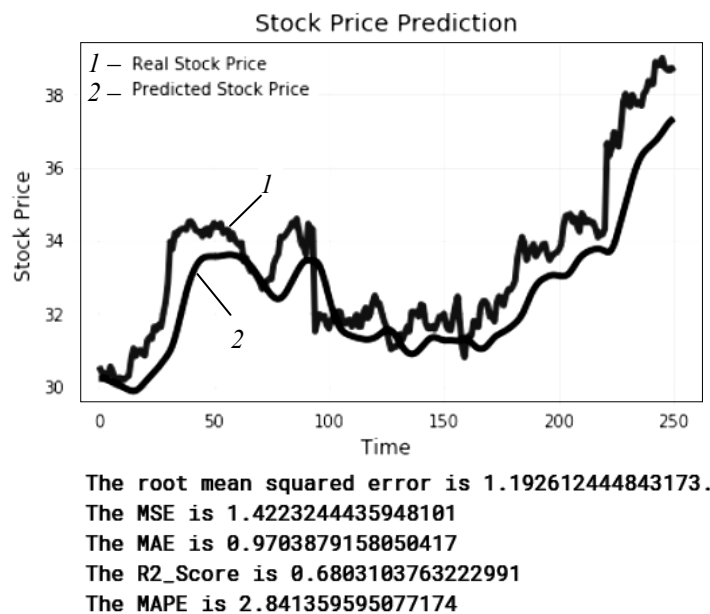


Fig. 14. GRU-3

(This model has 5 layers, each of which has 60 neurons and Dropout — 0,2 at each layer)

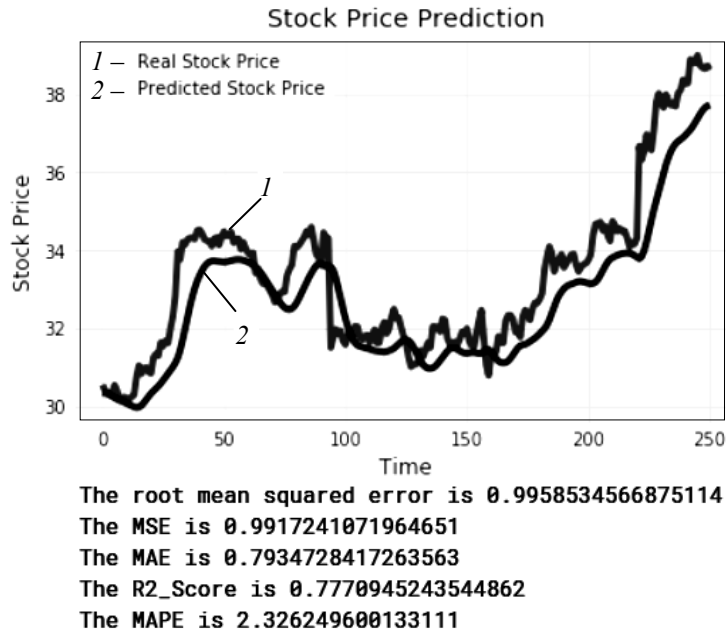


Fig. 15. GRU-4

(This model has 4 layers, each layer consists of 80 neurons and Dropout — 0,5 at each layer)

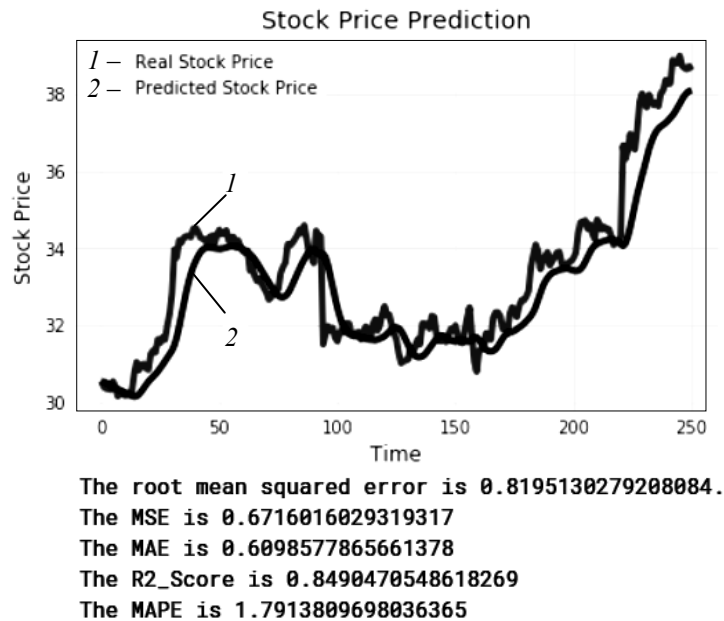


Fig. 16. GRU-5

(This model has 4 layers, each of which consists of 120 neurons with Dropout — 0,2 at each layer)

As it follows the best one is the 5-th network which consists of 4 GRU layers (each layer has 120 neurons with Dropout 0,2 at each layer) and one output layer. As training algorithm was used Stochastic Gradient Descent (SGD). Training time

was approximately 9 minutes. For conventional recurrent neural networks (RNN) three models were constructed, forecasting results and criteria values are presented below in the Fig. 17–19.

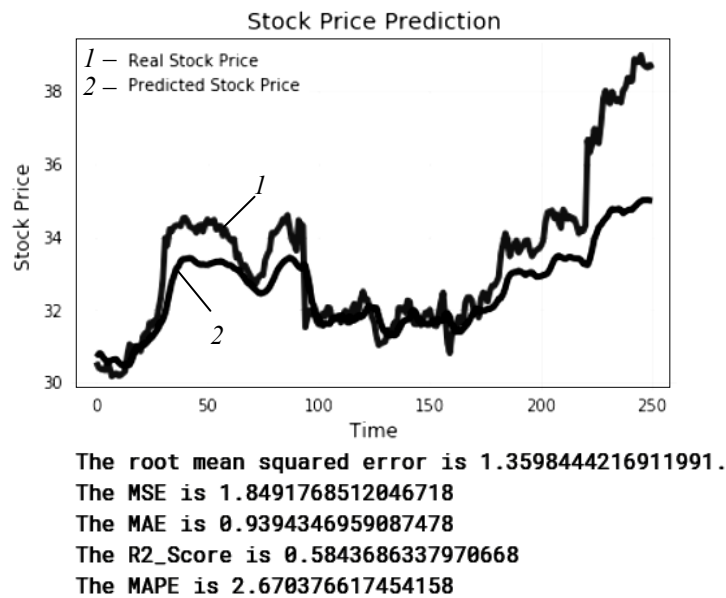


Fig. 17. Simple RNN-1

(This model has 4 layers, each layer has 50 neurons with Dropout — 0,15 at each layer)

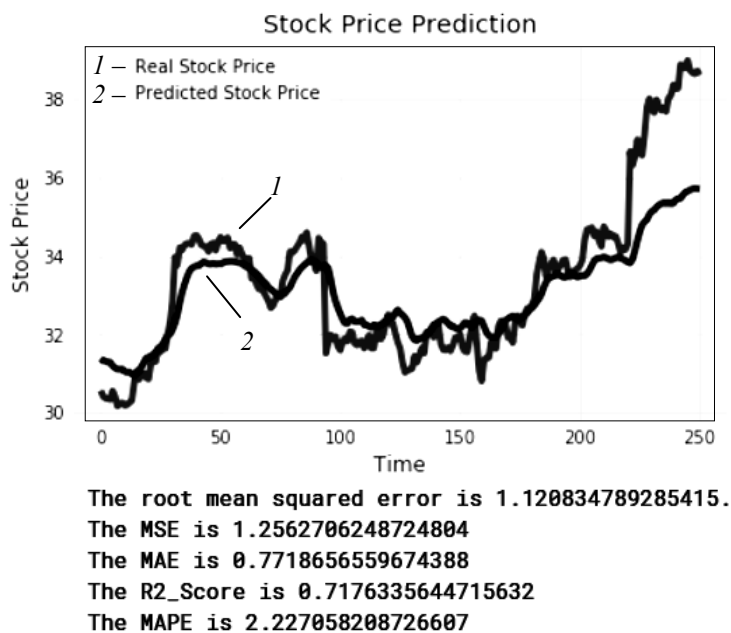


Fig. 18. Simple RNN-2

(This model has 4 layers, each layer has 100 neurons with Dropout — 0,3 at each layer)

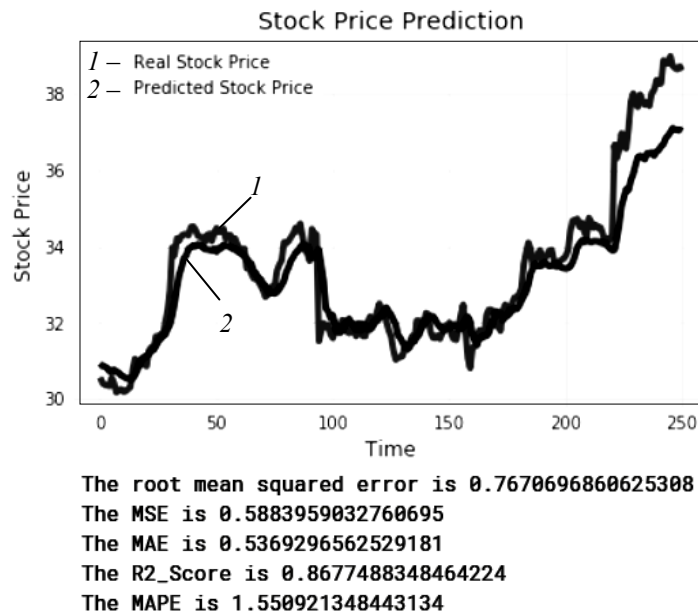


Fig. 19. Simple RNN-3

(This model has 4 layers, each layer has 60 neurons with Dropout — 0,2 at each layer)

The best RNN model appeared to be the last one which consists of 4 layers with 60 neurons and one output layer. Each layer uses Dropout — 0,2. As a training algorithm was used Adam. Training time is about 8 minutes.

At the next experiments algorithm GMDH was used. Two models were constructed, trained and investigated. The forecasting results and criteria values for models are presented in the Fig. 20, 21.

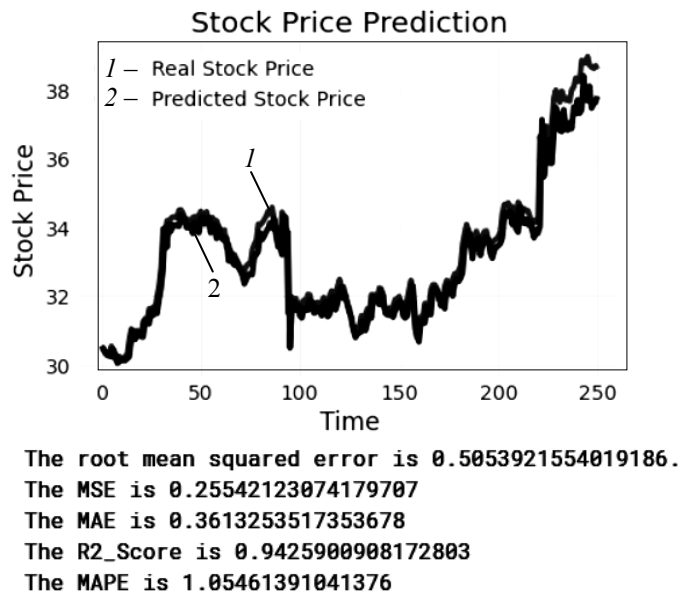


Fig. 20. GMDH-1

(This model differs from the other by the window size was of 60 points).

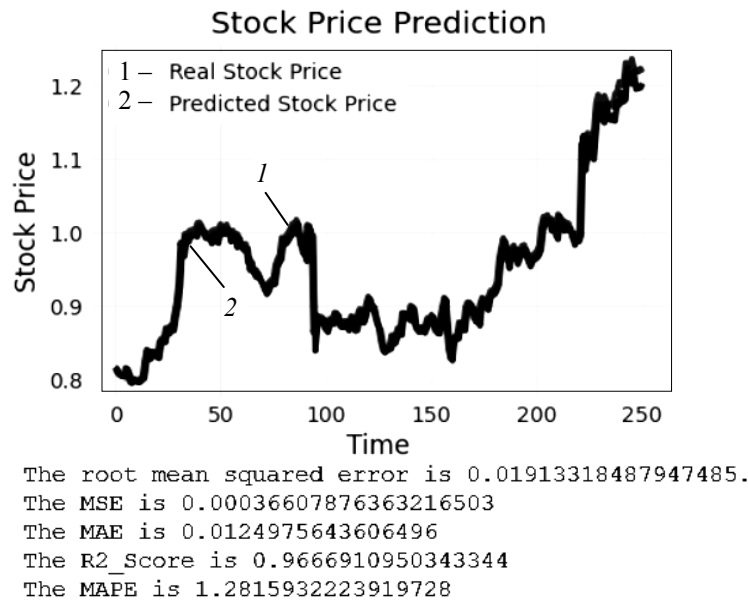


Fig. 21. GMDH-2

The second model GMDH turned out to be better than the first one, it has the higher accuracy and less error. The window size for this model was 30 points, freedom choice value is 7, regularization parameter L2 — 0,5. Training time was about 6 minutes.

In the next experiment the comparison of the best models of different classes was performed. Firstly the error change versus number of epochs was compared for different models. The results are presented in the Fig. 22, 23.

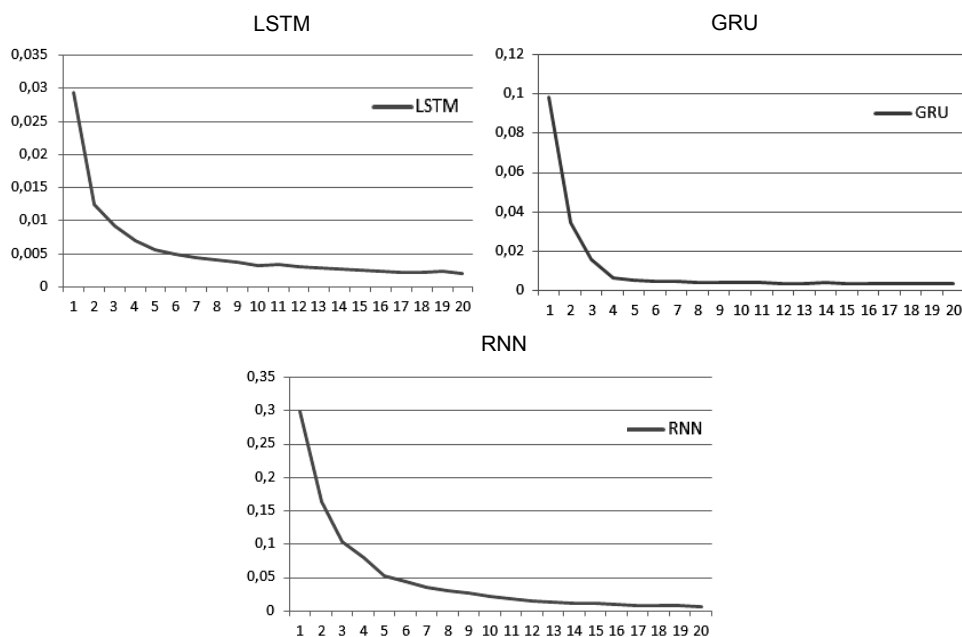


Fig. 22. MAPE value versus number of epochs for all models

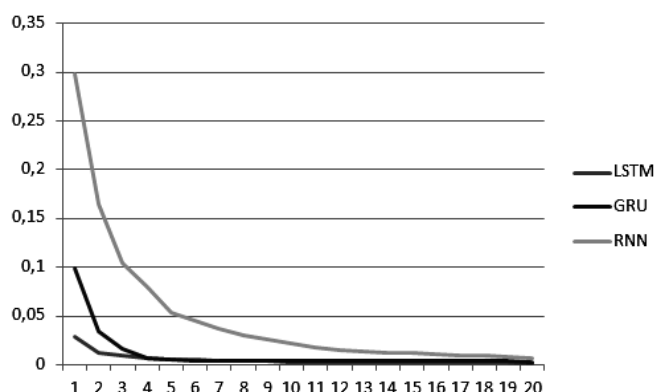


Fig. 23. Error values (MSE) dependence on epochs number for the best models

In the table 2 the results of training the best models are presented.

Table 2. Forecasting results for the best models at the test sample

Models	Methods					
	RMSE	MSE	MAE	R2_Score	MAPE	Training_Time
LSTM	0,649	0,421	0,455	90,5%	1,33	11 min
GRU	0,819	0,671	0,609	84,9%	1,79	9 min
Simple RNN	0,767	0,588	0,536	86,7%	1,55	8 min
GMDH	0,0191	0,0003	0,012	96,6%	1,28	6 min

As it follows from the presented results the best one is method GMDH by all criteria. Besides it takes the least time for training. The second one is LSTM network and the worst forecasting results were shown by GRU and simple RNN.

CONCLUSIONS

In this paper investigations of different types of recurrent networks LSTM, GRU, simple RNN and GMDH in the forecasting problem at stock exchange NYSE were carried out.

For each class of RNN several structures were investigated and the best structure was selected.

The forecasting efficiency and training time of different recurrent networks and GMDH were estimated and compared.

After experimental investigations it was determined that the best forecasting accuracy by different criteria has method GMDH, besides it took the least training time.

REFERENCE

1. S. Hochreiter and J. Schmidhuber, "LONG SHORT-TERM MEMORY", *Neural Computation*, no. 9, pp. 1735–1780, 1997.
2. Josef Hochreiter, *DIPLOMARBEIT IM FACH INFORMATIK. Untersuchungen zu dynamischen neuronalen Netzen*. Munchen, Germany: Technische Universi at Munchen, 1991, 74 p.
3. J.J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", *Proc. of the National Academy of Sciences USA*, vol. 79, pp. 2554–2558, 1982.

4. Y. Cheung, "A new recurrent radial basis function network", *Neural Information Proceeding, ICONIP'02*, vol. 2, pp. 1032–1036, 2002.
5. V. Baier, "Motion Perception with Recurrent Self-Organizing Maps Based Models", *Proc. of IJCNN'05, Montreal, Canada, 2005, July 31–Aug. 4*, pp. 1182–1186.
6. Y.-P. Chen and J.-S. Wang, "A Novel Neural Network with Minimal Representation for Dynamic System Identification", *Proceeding of IJCNN'04, Budapest, 2004*, pp. 849–854.
7. Y. Bengio, P. Siamard, and P. Frasconi, *Learning Long-Term Dependencies With Gradient Descent is Difficult*, 1994.
8. S. Preeti, R. Bala, and R. Singh, "Financial and Non-Stationary Time Series Forecasting using LSTM Recurrent Neural Network for Short and Long Horizon", *10th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT)*.
9. T. Fischer and C. Krauss, "Deep Learning with Long Short-Term Memory Networks for Financial Market Predictions", *European Journal of Operational Research*, no. 270, p. 654–669, 2018.
10. W. Wei and P. Li, "Multi-Channel LSTM with Different Time Scales for Foreign Exchange Rate Prediction", *Proceedings of the international conference on Advanced Information Science and System*, 2019.
11. Yu. P. Zaychenko, *Fundamentals of Intelligent systems design*, (in Ukrainian). Kiev: Publ. house "Slovo", 2004, 352 p.
12. M. Zgurovsky and Yu. Zaychenko, *Fundamentals of computational intelligence-System approach*. Springer, 2016, 275 p.
13. S. Nikolenko, A. Kadurin, and E. Arhangelskaya, *Deep learning. Involving into the world of neural networks*, (in Russian). Saint- Petersburg: "Peter", 2018, 480 p.
14. S. Heyken, *Neural networks, Full course*, (in Russian). Moscow: Publ. House "Williams", 2006, 1104 p.
15. S. Osovsky, *Neural networks for information processing*, (in Russian). Moscow: Finance and Statistics, 2002, 344 p.
16. *Recurrent neural networks*. [Online]. Available: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Рекуррентные_нейронные_сети
17. *Understanding LSTM Networks*. [Online]. Available: <https://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs/>
18. O.M. Riznyk, "Dynamic recurrent neural networks", (in Ukrainian), *Mathematical machines and systems*, no. 3, pp. 3–26, 2009.
19. F.M. Gafarov and A.F. Galimyanov, *Artificial neural networks and their applications*, (in Russian). Kazan: printed in Kazan University, 2018.
20. F. Gers and J. Schmidhuber, *Recurrent nets that time and count*, 2000.
21. K. Yao et al., *Depth-Gated Recurrent Neural Networks*, 2015, 5 p.
22. J. Koutník, K. Greff, F. Gomez, and F. Schmidhuber, *A Clockwork RNN*. Switzerland, 2014, 9 p.
23. R. Jozefowicz, W. Zaremba, and I. Sutskever, *An Empirical Exploration of Recurrent Network Architectures*, 2015, 9 p.

Received 21.04.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Yuriy P. Zaychenko, ORCID: 0000-0001-9662-3269, Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: zaychenkoyuri@ukr.net

Galib Hamidov, “Azershig”, Azerbaijan, e-mail: galib.hamidov@gmail.com

Aydin Gasanov, ORCID: 0000-0002-5821-0751, Dragomanov National Pedagogical University, Ukraine, e-mail: 0677937631@ukr.net

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ІНТЕЛЕКТУ У ПРОБЛЕМІ ПРОГНОЗУВАННЯ НА РИНКАХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ / Ю.П. Зайченко,

Г. Гамідов, А. Гасанов.

Анотація. Розглянуто проблему прогнозування курсів акцій на ринку цінних паперів NYSE. Для її вирішення запропоновано та досліджено альтернативні методи обчислювального інтелекту: мережі LSTM, графічні рекурентні модулі (GRU), прості рекурентні мережі і метод групового урахування аргументів (МГУА). Проведено експериментальні дослідження інтелектуальних методів в проблемі прогнозування цін акцій і порівняльну оцінку ефективності альтернативних методів прогнозування. З’ясовано, що метод МГУА забезпечує найвищу точність в розглянутій проблемі прогнозування цін акцій.

Ключові слова: прогнозування цін акцій, рекурентні мережі LSTM, GRU, RNN, МГУА.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ПРОБЛЕМЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА РЫНКАХ ЦЕННЫХ БУМАГ /

Ю.П. Зайченко, Г. Гамидов, А. Гасанов.

Аннотация. Рассмотрена проблема прогнозирования курсов акций на рынке ценных бумаг NYSE. Для ее решения предложены и исследованы альтернативные методы вычислительного интеллекта: сети LSTM, графические рекуррентные модули (GRU), простые рекуррентные сети и метод группового учета аргументов (МГУА). Проведены экспериментальные исследования интеллектуальных методов в проблеме прогнозирования цен акций и сравнительная оценка эффективности альтернативных методов прогнозирования. Установлено, что метод МГУА обеспечивает наиболее высокую точность в рассмотренной проблеме прогнозирования цен акций.

Ключевые слова: прогнозирование цен акций, рекуррентные сети LSTM, GRU, RNN, МГУА.

DEVELOPING AN ALGORITHM FOR RAPID ASSESSMENT OF LIVING STANDARDS AND QUALITY OF LIFE OF THE POPULATION IN THE REGION

M.A. LESNICHAYA, O.A. KOLCHINA, E.V. PAHOMOV

Abstract. The article presents the rapid assessment methodology that allows analysts to carry out qualitative monitoring of the living standards of the population using a wide range of methods for statistics processing (factor analysis, cluster analysis, discriminant analysis, method of combining indicators of different dimensions). This methodology is characterized by the high speed of mathematical calculations, availability to users with different skill levels and universal applicability to various study objects. The rapid assessment method is intended for screening the living standards of the population and activity quality of the territorial authorities, taking into account a different set of indicators. This article offers the author's indicator system for assessing the living standards and quality of life of the population. The methodology algorithm describes flowcharts of the index method for combining statistical observations of different dimensions, which make it possible to automate the process of territory ranking. The study covers 12 urban districts and 43 municipal districts of Rostov Oblast. The methodology described in the article will help eliminate a subjective factor while monitoring, rationally distribute financial resources allocated annually by the authorities to support programs for socio-economic development of the territory, increase the economic efficiency and implementation speed of innovative projects that have a direct impact on the living standards and quality of life of the population.

Keywords: living standards, variable reduction, clustering, discriminant analysis, ranking.

INTRODUCTION

According to the Strategy of Spatial Development of the Russian Federation for the period up to 2025 (approved by the Order of the Government of the Russian Federation dated February 13, 2019 No. 207-p), the priority development trend is to ensure the sustainable and balanced spatial development of the Russian Federation aimed at reducing interregional differences in the living standards and quality of life of the population, accelerating economic growth and technological development, and ensuring the national security of the country. In order to achieve this goal, the authorities need to direct their management measures at the solution of long-standing and most urgent problems connected with social inequality and high levels of poverty. A real decrease in these indicators is the main criterion for socio-economic progress of the Russian Federation and its subjects.

In this regard, it becomes necessary to develop and implement a scientifically grounded concept of improving the living standards and quality of life. This concept, first of all, should be based on an effective system of mathematical assessment methods, allowing to form an information and analytical platform for supporting the management decisions based on various data sources. This article tries to achieve the objective by developing a universal algorithm for rapid

assessment intended to screen the living standards of the population and quality of the territorial authorities' activities, taking into account a different set of indicators and system analysis methods. 12 urban districts and 43 municipal districts of Rostov Oblast were selected as a study object, because Rostov Oblast has implemented a successful practice of "Building a regional poverty profile" aimed at identifying poor citizens (the practice was supported by Lipetsk Oblast, the Republic of Sakha, Novgorod Oblast) [[https://smarteka.com/practices/vyavlenie-maloimushih-grazhdan-s-maksimal-nojdekompoziciej-harakteristik-maloimushih.](https://smarteka.com/practices/vyavlenie-maloimushih-grazhdan-s-maksimal-nojdekompoziciej-harakteristik-maloimushih)]. The proposed rapid assessment method will enhance this service prospects accumulating the data not only by category of poor citizens, but also on a number of key indicators (investments, level of consumption possibilities, level of digitalization, number of middle class representatives, etc.) influencing on increasing the living standards and quality of life of the population.

BLOCK DIAGRAM OF RAPID ASSESSMENT OF THE LIVING STANDARDS AND QUALITY OF LIFE OF THE POPULATION

Modern methods for assessing the living standards of the population refer to the complex systems which are difficult to be formalized. They are mainly based on an expert approach, inaccurate description and measurement errors. These all significantly distort the study results. The developed method for rapid assessment has a number of advantages, because it accumulates various system analysis methods complementing each other and allowing to avoid the data assessment subjectivity. In the context of global digitalization this method provides a decision-maker with an objective information base for the implementation of strategic decisions in a short period of time.

FORMATION OF INDICATOR SYSTEM

The first stage of rapid assessment deals with development of an indicator system based on collection, systematization, analysis of quantitative and qualitative information at the level of empirical indicators. The indicator system should be as complete as possible, taking into account all input and output elements to avoid distortion in the relationships between the model parameters. As data processing is carried out in the information system with a complex of system analysis methods, the number of data can be maximum, because the obtained results will be interpreted in an easier way and errors will be minimal. Due to the fact that many factors influence on the living standards and quality of life of the population, and depending on a time lag, some of them may have a random nature, it is more appropriate to consider this impact through stochastic processes, which will reveal a trend in the assessment indicators.

When forming an author's indicator system of the living standards and quality of life in the municipalities of Rostov Oblast, the work of N.V. Zubarevich (Faculty of Geography, Moscow State University) "Assessment of the quality of life index" was used, the analysis of the methodology of the British research center The Economist Intelligence Unit (analysis division of The Economist), The Legatum Prosperity Index (LPI) and the City Development Index (CDI) [N.V. Zubarevich 2019] were also taken into account. The analyzed methods and indices have their indisputable advantages. However, they have a major disadvantage,

namely, they have no indicators reflecting the development and implementation level of digital technologies, which have a significant impact on the living standards and quality of life of the population (Fig. 1). During the pandemic, these are digital technologies that made it possible for people to continue working, communicate with their loved ones and provide themselves with essential goods. The digital technologies allowed people who have temporarily lost their jobs to learn the skills of remote work and new professions, allowed small businesses to increase their profits by using online platforms with an unlimited number of consumers, etc. The proposed indicator system meets modern realities and new challenges. The author's indicator system is presented in Table 1.

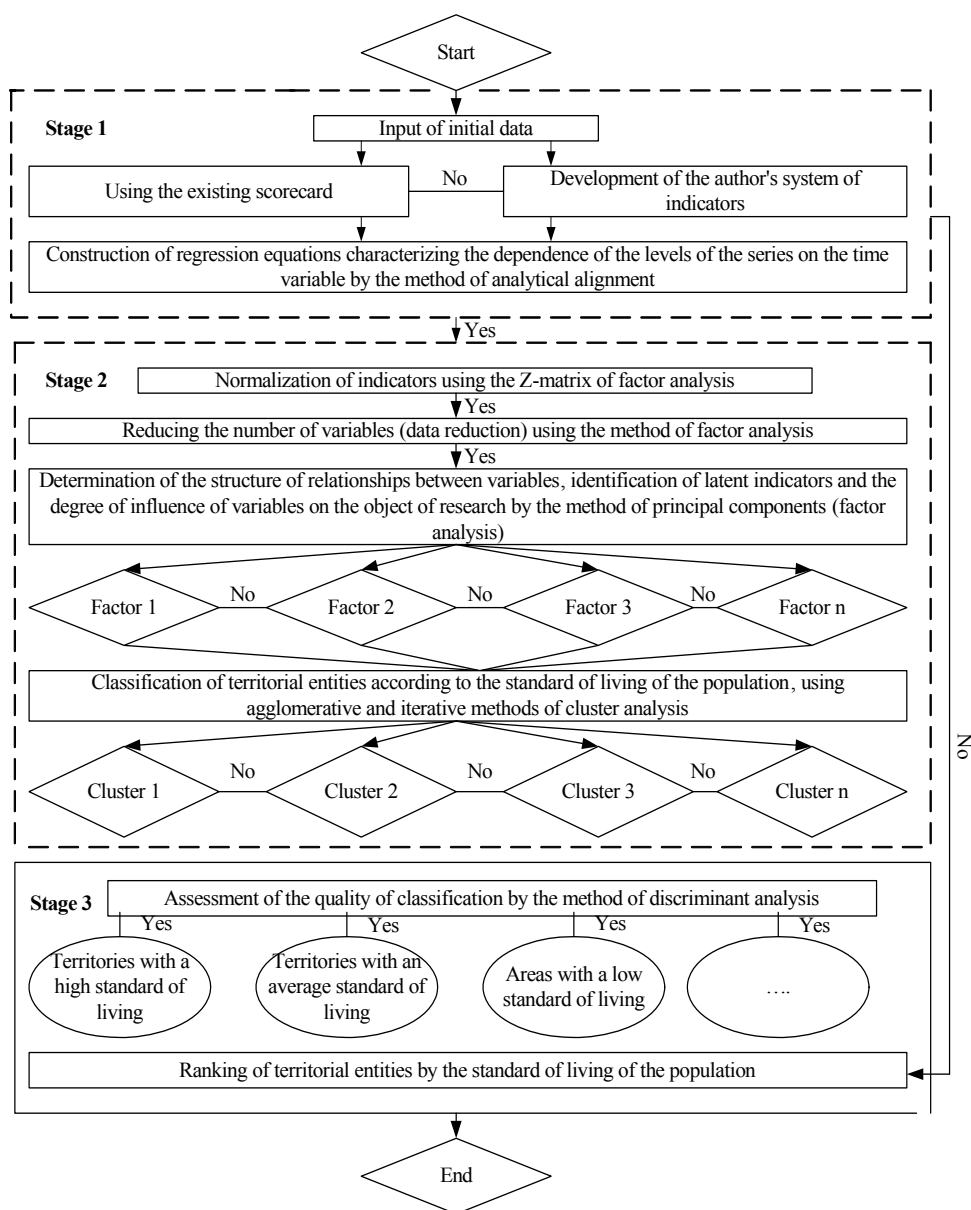


Fig. 1. Algorithm for the author's assessment of the living standards and quality of life of the population

Table 1. The author's indicator system for assessing the living standards and quality of life of the population

Income of the population	Human potential
Average monthly salary of one employee. Unequal degree in distribution of income of the population. Poverty level of the population. Consumption possibilities of the population. Savings rate	Number of the young adults. Education level. Life expectancy. Air pollutant emissions
Socio-economic indicators in the territory	Digitalization
Migration inflow (+), migration outflow (-). Local budget surplus (+), local budget deficit (-). Crime rate. Level of registered unemployment. Investment amount	Number of legal and other persons, who have a key of an enhanced qualified electronic signature. Rendering of public and municipal services through Multifunctional Public Services Centers (MPSCs). Proportion of the population using the Internet

For a deeper analysis of statistical data, the rapid assessment methods accumulate indicators over several years to build up time series using the analytic method of fitting constants, as the change in levels of time series is expressed by certain mathematical functions and the rules are set in such a way that the series value is predicted quite accurately. This improves the quality of the study results.

GROUPING OF VARIABLES AND CLASSIFICATION OF THE STUDY OBJECTS

Grouping the diverse data into homogeneous populations classified according to the certain rules, taking into account their characteristic features. The first stage of assessment involves the developing an indicator system and identifying dependencies between the indicators. As many elements, which give a complete picture of the study object, influence on the living standards and quality of life of the population, they must be aggregated into groups of indicators which will strongly correlate with each other. In order to achieve our objective, the second stage of assessment involves the factor analysis, which is a set of sequential actions aimed at accumulating indicators that form a set, called factors. The factor analysis is used to minimize the number of independent values, detect correlation signs and latent (hidden) indicators, and allows to normalize the data, that is necessary for further research. The factor analysis put variables into a linear set of F -factors with minimum errors for the best representation of X :

$$X_j = \sum_{k=1}^p a_{jk} F_k + U_j ,$$

where F_k , $k = 1, 2, \dots$ are latent indicators, p are common factors, a_{jk} values are called factor loadings, and U_j , $j = 1, 2, \dots, m$, are specific factors.

The object for transformation in factor analysis is a variance-covariance matrix, consisting of X data array. The result of these data compression is a reduced correlation matrix, i.e. the matrix is decreased in dimension, but not the data [Fulvio Castellacci 2018, J. Langford 2005]. The factor analysis conducted by the principal component method will result in the cumulative variance presented in Table 2 and in the rotated component matrix obtained by rotation method: Varimax rotation with Kaiser normalization shown in Table 3.

To implement the principal component analysis, it is necessary to normalize the indicators upon standard deviations. The Z matrix based on the initial data is defined as follows:

$$Z_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j}{S_j},$$

where S_j is a standard deviation, $j=1,2,\dots,m$; $i=1,2,\dots,n$, x_j is an average value of the j -th feature to normalize the indicators is necessary for the further research.

Table 2. Explained variance

Component	Initial eigenvalues			Extraction sums of squared loadings			Rotation sums of squared loadings		
	Total	Variance, %	Cumulative, %	Total	Variance, %	Cumulative, %	Total	Variance, %	Cumulative, %
1	4,241	41,375	47,124	4,241	41,375	47,124	3,658	40,642	40,642
2	1,975	15,579	69,066	1,975	15,579	69,066	2,146	23,849	64,492
3	1,559	12,357	86,393	1,559	12,357	86,393	1,971	21,901	86,393
4	1,452	11,464	75,856	1,379	11,464	75,856	1,379	19,257	75,856
5	0,852	9,464	55,856						
6

The values exceeding one indicate that highly correlated indicators are classified upon four factors (indicators of the total variance F1 “Population income” — 41,375%, F2 “Socio-economic indicators” — 15,579%, F3 “Human potential” — 12,357%, F4 “Digitalization” — 11,464%).

The factor analysis results (the rotated Z matrix generated by rotation method: Varimax rotation with Kaiser normalization) are shown in Table 2, which confirms that the indicators are classified upon four factors.

Table 3. Results of rotated matrix (generated by rotation method: Varimax rotation with Kaiser normalization)

Coefficient name	Factor			
	F1	F2	F3	F4
Poverty level of the population (VAR00003)	0,851	0,093	0,351	0,258
Unemployment rate (VAR00009)	0,063	0,728	0,289	0,059
Level of education (VAR00012)	-0,133	0,041	0,909	0,123
Proportion of the population using the Internet	0,231	0,089	0,153	0,658
...	

The Table shows that the poverty level of the population strongly correlates with the first factor, its factor loading is 0,851, the unemployment rate tends to the second factor with the factor loading of 0,728, the education level indicator has the factor loading of 0,909, which clearly indicates a correlation with the third group of factors, as the loading on other groups is very low, the proportion of the population using the Internet will be referred to the fourth factor with the loading of 0,658.

Another important feature of the factor analysis is that factor loadings indicate not only belonging to a particular group, but also reflect the impact of indicators as a whole on the system or factors. This is graphically represented in the following form (Fig. 2).

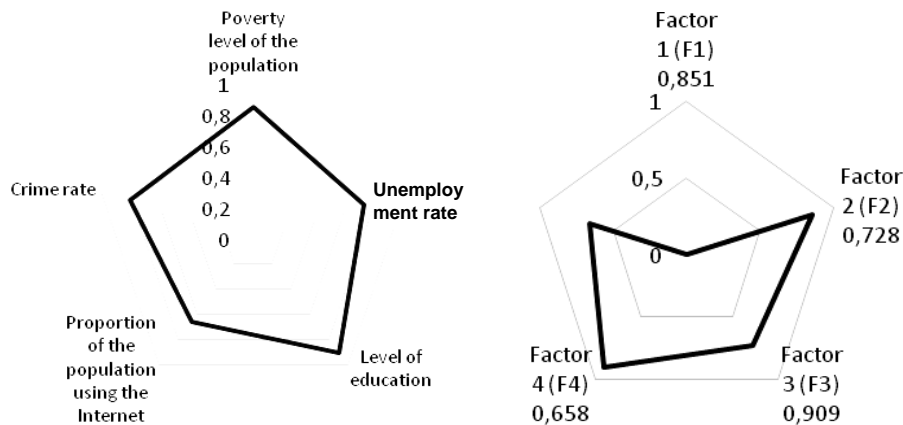


Fig. 2. Influence of variables or factors including factor loading

This advantage makes the factor analysis more attractive increasing the study objectivity, because there is no need to use an expert approach. This fact is also important when assessing the living standards and quality of life of the population.

The third stage of the algorithm involves the classification of municipalities according to the living standards of the population. Rostov Oblast is characterized by a high degree of differentiation in the development of its municipalities, therefore, the regional authorities need to solve a difficult task, i.e. to remove the existing differences not only in terms of socio-economic development, but also in the living standards of the population. For these purposes, first of all, they are to have a mathematical apparatus and verified system of indicators (the first and second stages of the rapid assessment), which make it possible to qualitatively classify the territory into groups close in the development indicators. In our opinion, the clustering methods, which are included in rapid assessment, namely, the iterative k-means method and seven hierarchical agglomerative methods deal well with this task.

The cluster analysis is a mechanism consisting of a set of methods and various similarity measures allowing to classify the variables X_1, X_2, \dots, X_m . The main task of cluster analysis is to aggregate the groups of similar indicators, called clusters (clumps, groups, bundles). Past research experience allows us to conclude that the iterative k-means method gives the qualitative classification results. Its disadvantage is that a decision-maker needs to set a number of clusters on his own, and the hierarchical agglomerative methods do not require this [I.D. Mandel 1988, S.A. Ayvazyan 1989, T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman 2009]. The cluster analysis results are visually presented either in scatter diagrams or in dendrograms, Fig. 3.

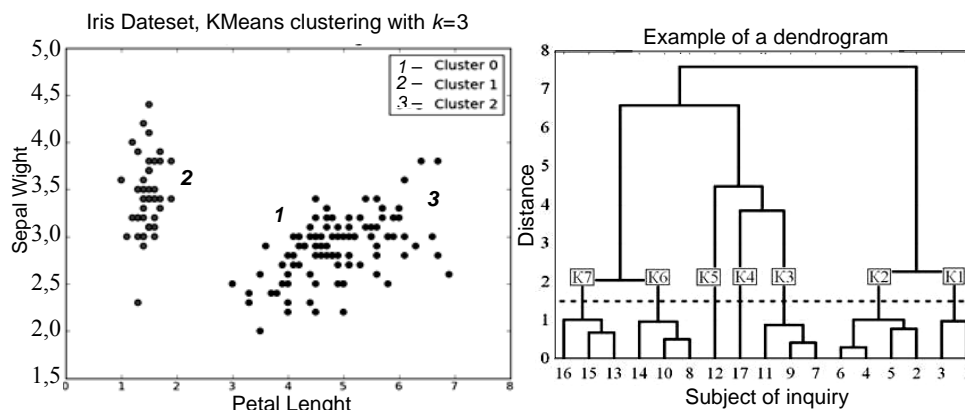


Fig. 3. Cluster analysis results presented in graphical form

Therefore, you may use all hierarchical agglomerative methods with all similarity measures to determine the number of clusters and their structural content, and then carry out the iterative *k*-means clustering, although the procedure is cumbersome, but with minimum errors.

As an example, the adjacency matrix with results of clustering of municipalities in Rostov Oblast is presented below. The calculations have shown that the most effective of the agglomerative metric classifiers are the “intragroup connections” and “Ward’s method”. The Table shows that classifying into five clusters is an optimal solution. The numbers indicate the administrative territorial units of Rostov Oblast [M.A. Lesnichaya, O.A. Kolchina, H.A. Kondzharyan 2019].

Table 4. Adjacency matrix of clustering results

Methods	Distance				
	Euclidean distance	Squared Euclidean distance	Block distance (Manhattan distance)	Minkowski distance	...
Connections among groups	Contagion effect	Contagion effect	1) 10, 48, 22, 35, 47, 18, 13, 40, 53, 29, 30, 7, 23, 31 2) 28, 39, 8, 25, 3, 2, 44, 46, 54, 38, 26, 51, 34, 45, 50, 52, 55 3) 1, 20 4) 15, 27, 49, 41, 14, 42, 21, 11,	1) 10, 48, 22, 35, 47, 18, 38, 54, 31, 13, 40, 24, 30, 7, 29, 13, 40, 53, 26, 34, 51, 55, 31 2) 8, 39, 25, 28, 3, 45, 50, 52, 2, 44, 46 3) 1, 20 4) 15, 27, 49, 41, 1	...
Intragroup connections	1) 10, 48, 22, 41, 35, 47, 18, 38, 54, 51, 55 2) 8, 39, 25, 28, 3, 45, 50, 52, 2, 44, 46 3) 17 4) 1, 20, 26, 34, 13, 40, 53, 7, 29, 30, 24, 31	1) 10, 48, 22, 41, 35, 47, 18, 38, 54, 31 2) 13, 40, 53, 7, 29, 30, 24 3) 26, 34, 51, 55, 1, 20 4) 8, 39, 25, 28, 3, 45, 50, 52, 2, 44, 46	1) 10, 48, 22, 41, 35, 47, 18, 38, 54, 31, 13, 40, 53, 7, 29, 30, 24, 26, 34, 51, 55 2) 1, 20, 8, 39, 25, 28, 3, 45, 50, 52, 2, 44, 46 3) 15, 27, 49, 12, 14, 42, 21, 11, 5, 23, 36 4) 5, 23, 36	1) 10, 48, 22, 35, 47, 18, 38, 54, 31 2) 13, 40, 29, 7, 30, 53, 2, 4, 26, 34, 51 3) 16, 43, 9, 19, 6, 4 4) 14, 42, 21, 32, 15, 49, 27, 41, 11, 33, 12, 37	...
...

The iterative *k*-means clustering results are presented in Table 5.

Table 5. K-means clustering results

Observation number	Cluster	Distance	Observation number	Cluster	Distance
1	1	12,615	29	4	4,632
2	2	6,305	30	5	4,995
3	1	4,486	31	4	9,098
4	3	8,575	32	3	5,365
5	2	4,515	33	3	4,798
...

The *k*-means method is convenient and very easy to interpret the results. The Table shows that each observation is assigned its own cluster number depending on the distance, then an expert should structurally fill the groups. Observations present a study object. In our case, these are the municipalities of Rostov Oblast. The invaluable advantage of *k*-means method is the classification quality [Roberta Comunian and Lauren England 2019]. However, even such a voluminous classification procedure, including all agglomerative and iterative methods, does not exclude measurement errors, therefore, at the next stage, it is necessary to assess the resulting typology.

CLASSIFICATION QUALITY ASSESSMENT

It is advisable to use the discriminant analysis with Mahalanobis distance and Wilks lambda while assessing the obtained clustering results. This method has revealed the municipalities that were gathered into a different cluster by mistake. If we consider the discriminant constructing algorithm, it will represent the identification of a variable that causes the greatest differences among the observations [I.D. Mandel 1988, S.A. Ayvazyan 1989, T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman 2009]. The results of discriminant analysis of the municipalities in Rostov Oblast are presented in Table. 6.

Table 6. Discriminant analysis results

Case number	Factor group	Senior group				
		Predicted group	$P(D>d G=g)$		$P(G=g D=d)$	Squared Mahalanobis distance to the centroid
			<i>p</i>	<i>df</i>		
1	1	1	0,873	3	0,825	1,378
2	1	1**	0,628	3	0,753	4,521
3	2	2	0,542	3	0,513	1,617
4	3	2	0,758	3	0,423	2,251
...

In the sample for each group of observations, the point position is determined in multidimensional space. This point is an average value for all variables,

i.e. centroid groups. Then, for each observation, the squared Mahalanobis distance from a group centroid is calculated. The closer the observation is to the set, the more minimum the Mahalanobis distance is to it (the observation is classified correctly). The “Predicted group” column (Table 6) has a mark “***”, indicating an incorrectly assigned variable to the set. The results of discriminant analysis can also be presented in a classification matrix containing the number of variables located on the matrix diagonal, i.e. correctly classified and those that do not belong to their classes. When conducting the research, assessing the quality of the resulting classification is necessary, because the observations represent the specific municipalities, groups of people, who, due to measurement errors, may receive less financial assistance, therefore any errors in this area are critical and unacceptable. The clustering results on the living standards of the population of Rostov Oblast with the use of discriminant analysis are presented in Table. 7.

Table 7. Results of clustering of municipalities in Rostov Oblast

Clusters	Municipalities of Rostov Oblast
Cluster 1	Cities: Rostov-on-Don (53), Volgodonsk (46), Taganrog (54), Gukovo (47), Zverevo (49)
Cluster 2	Cities: Azov (44), Bataysk (45), Shakhty (56), Donetsk (48), Novocherkassk (51), Kamensk-Shakhtinsky (50)
Cluster 3	Aksaysky (2), Ust-Donetsky (39) Districts, Kamensk-Shakhtinsky (50), Remontnensky (32), Proletarsky (31), Neklinovsky (26), Tatsinsky (38) Districts, Novoshakhtinsk (52), Morozovsky (24), Volgodonskoy (8), Bagayevsky (3), Oktyabrsky (28), Vesvolovsky (7), Krasnosulinsky Districts (18), Zimovnikovsky District (13)
Cluster 4	Belokalitvinsky (4), Verkhnedonskoy (6), Dubovsky (9), Zavetinsky (11), Kasharsky (16), Kuybyshevsky (19), Rodionovo-Nesvetaysky (33), Sholokhovskiy (43), Martynovskiy (20), Azovskiy (1) Yegorlykysky District (10), Zernogradskiy District (12), Kagalnitsky (14), Kamensky (15), Matveyevo-Kurgansky (21), Millerovskiy (22), Oblivskiy (27), Tsimlyansky (41), Chertkovskiy (42) Districts, Orlovskiy (29), Salsky (34) Districts, Peschanokopsky (30), Semikarakorsky (35), Myasnikovskiy (25), Tselinskyy Districts (40)
Cluster 5	Bokovskiy District (5), Milyutinskyy District (23), Sovetskyy District (36), Tarasovskyy District (37), Konstantinovskyy District (17)

The municipalities of Rostov Oblast were accumulated in 5 clusters with different living standards of the population from a higher (cluster I) to a lower one (cluster V), that makes it possible for the authorities to distribute financial resources more efficiently, support various categories of the population and develop programs for improving the living standards, taking into account the specifics of the territories included in different clusters.

RANKING OF TERRITORIAL ENTITIES

The final stage of rapid assessment is to determine a place of the studied territory in terms of the living standards of the population in the overall ranking of administrative-territorial entities using the index method of ranking statistical observations [M.A. Lyamina 2008]. This algorithm is presented in the flowchart (a program in the VBA language is developed) in Fig. 4.

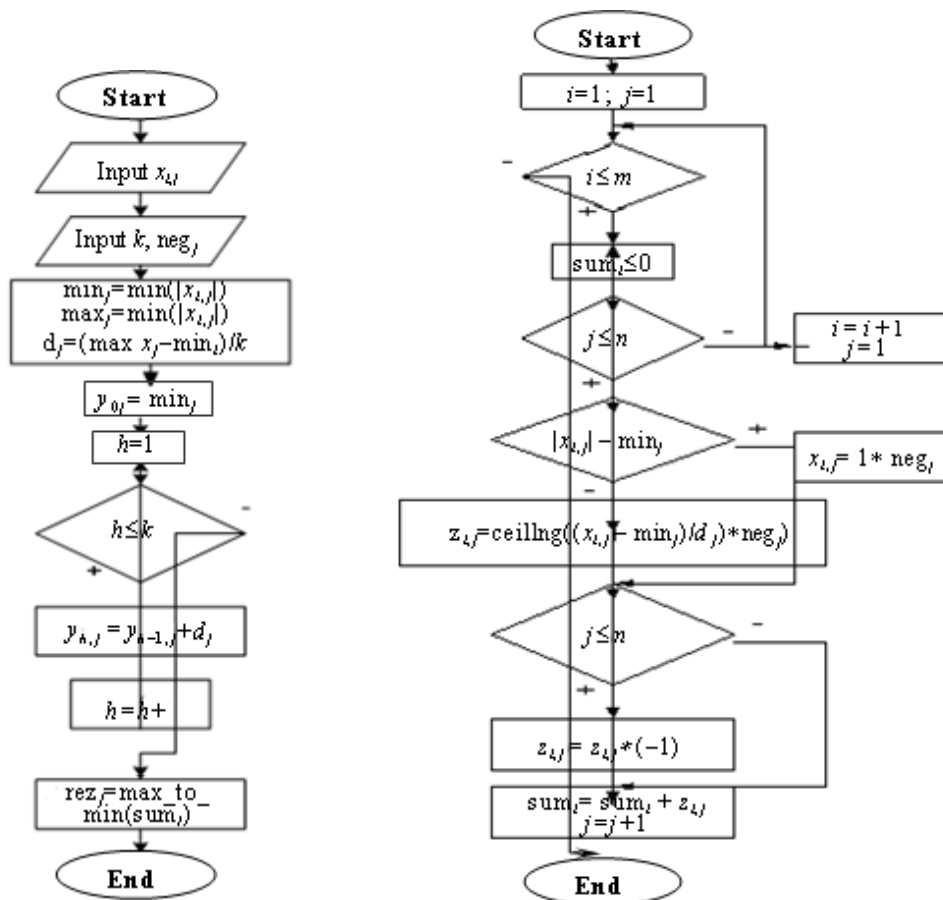


Fig. 4. Flowcharts of the index method algorithm for ranking statistical observations

The method essence is to form an equal range scale of real values of the investigated statistical observations from a minimum indicator to a maximum one. Each range is assigned a rank which corresponds to the interval number. By means of a graduation scale, the ranks are summed up, forming an integral indicator. This, on the one hand, will allow to include the maximum set of variables in the assessment system, and, on the other hand, based on the author's indicator system, to make a scientifically grounded rating of administrative-territorial entities.

Ranking is an important stage of monitoring, as it helps evaluate the effective activities of the authorities both in the field of improving the living standards of the population and in other areas, using a rather simple mechanism.

DISCUSSION

According to the UN and other public organizations, Russia lags significantly behind the leading countries of the world in various integral indicators of quality of life. Therefore, the problems of studying the characteristics of the living standards and quality of life of the population are significant in modern economic theory, and it becomes especially urgent to develop an effective tool for their comprehensive assessment.

A theoretical study of the quality of life was begun in the 1860s in economically developed countries. A significant contribution to defining the

“quality of life” category as a multifaceted concept of modern social progress was made by famous foreign scientists, such as A. Toynbee, D. Bell, J. Galbraith, R. Aron, H. Kahn, A. Viner, H. Marcuse, and E. Fromm.

The economic aspects of the living standards and quality of life of the population are considered in the works of M.V. Borschevsky, L.A. Velikhov, M.V. Glazyrin, B.S. Zhikharevich, I.A. Ilyin, A.E. Koguta, V.N. Leksin, N.V. Lvov, V.Ya. Lyubovny, V.F. Mayer, V.E. Rokhchin, V.M. Rutgeiser, A.E. Surinov and others. Social problems are studied in the works of N.A. Aitov, E.G. Ayayimitsy, A.V. Baranov, A.V. Dmitriev, E.N. Zaborova, M.N. Mezhevich, A.E. Polovinkin, I.I. Sigov and others.

In recent years the problems of economic and statistical assessment of the living standards and quality of life have been actively discussed by the domestic economists, such as S.A. Ayvazyan, A.M. Dubrov, V.M. Zherebin, V.S. Knyazevsky, V.S. Mkhitaryan, L.I. Nivorozhkina, V.D. Raitsin, N.M. Rimashvskaya, A.N. Romanov, I.I. Eliseeva, L.I. Troshin, G.N. Khubaev and others.

The issues of overcoming unevenness and stabilizing significant imbalances in the socio-economic development levels of the Russian regions and the problems of forming a single economic space are considered in the works of A.G. Granberg, E.B. Kibalov, V.I. Klistorin, V.V. Kuleshov, A.M. Lavrov, B.L. Lavrovsky, V.N. Leksin, V.Yu. Malov, V.D. Marshak, V.E. Seliverstov, V.I. Suslov, S.A. Suspitsyn, V.A. Shabashev and others.

Despite the high relevance of intraregional differentiation, Russia still neglects its removal. The authors study certain aspects of this phenomenon: the issues of socio-economic development of municipalities (E.G. Animitsa, R.V. Babun, G.Yu. Vetrov, A.G. Voronin, A.P. Gaponenko, B.S. Zhikharevich, V.V. Ivanov, E.A. Kartaeva, Yu.S. Kolesnikov, V.A. Lapin, V.N. Leksin, Z.Z. Mullagaleeva, P.A. Orekhovsky, A.N. Shvetsov and others) and local government (A.A. Vasiliev, A.N. Shirokov, S.N. Yurkova).

Much attention is paid to the study of sustainable development problems in the works of such domestic authors as I.Ya. Blekhtsin, S.N. Bobylev and V.I. Vernadsky, I.F. Gazizullin, A.A. Golub, V.I. Danilov-Danilyan, V.A. Koptuyug, N.N. Moiseev, O.S. Pchelintsev, A.D. Ursul and others. Among the foreign researchers of these problems are D. Bell, D. Meadows and J. Forrester.

MATERIALS AND METHODS

The statistical data published in monthly reports of the Rostov Regional State Statistics Committee, statistical yearbooks and reference books have formed the information and empirical base of the study.

The theoretical basis of the study consists of the fundamental concepts of the management theory of socio-economic systems, works of domestic and foreign scientists in the field of studying the living standards and quality of life of the population, uneven spatial economic development of the regions, digitalization of the regional and municipal economy, organization and management in the public and state sectors, service economy, institutional economics and the legislative regulatory documents of the government authorities and local government bodies of the Russian Federation.

The study methodology is based on:

– the system analysis methods and mathematical modelling used for designing a concept and modelling the sustainable development of the region in the conditions of inter-municipal differentiation;

- the factor analysis methods used for determining the dominant indicators of development of the regions and municipalities;
- the cluster analysis methods used for solving the problems of cluster convergence analysis of socio-economic development levels of the regions and differentiation of municipalities;
- the economic dynamics forecasting methods used for predicting the dynamics of regional development;
- the management theory methods used for creating management models for integrated sustainable development of municipalities;
- the discriminant analysis method used for assessing the quality of territory classification and identifying the factors contributed the most in intergroup differences (focusing on the values of Wilks Lambda and squared Mahalanobis distance) [W.R. Klecka 1989].

In their study the authors have used domestic and foreign experience of economic and mathematical tools for analyzing and predicting the living standards and quality of life of the population. The study was carried out using general software (Microsoft Excel) and special software (STATISTICA, SPSS).

CONCLUSIONS

The proposed rapid assessment algorithm will form the basis for an analytical program designed to support the management decisions made by the authorities to improve the living standards and quality of life in order to remove inter-municipal differences.

The management tasks that can be solved by the proposed assessment method are as follows:

- to simulate various scenarios for the situation development, which is an important criterion in the dynamically changing conditions of modern economy;
- by means of ranking, to assess the effective actions of the authorities;
- to implement the experience of more successful administrative-territorial entities in their own territory;
- to reveal the development differences of the territories, identify the indicators that have the greatest impact on stratification of the population in terms of the living standards, and to reveal the systemic problems decreasing the living standards of the specific territories;
- to allow the authorities rationally to distribute financial resources aimed at supporting the specific territories in order to improve the quality, speed and effectiveness of the proposed development programs.

The developed system for rapid assessment of the living standards and quality of life of the population is a basic screening tool for supporting management decisions. Due to a diverse set of methods for processing statistical data, the methodology demonstrates high quality and speed of calculations, the versatility of assessment allows users with different skill levels to conduct researches, changing a system of variables and object to meet their requirements, and rationally to allocate financial resources aimed at improving the living standards and quality of life population. The proposed methodology will improve the existing service in Rostov Oblast “Building a regional poverty profile”, which is currently aimed only at providing assistance to poor citizens [<https://smarteka.com/practices/vyavlenie-maloimusi-h-grazdan-s-maksimal-noj-dekompozicij-harakteristik-maloimusi-h>].

The proposed algorithm efficiency and effectiveness was proved by the state statistics data of the municipalities of Rostov Oblast.

Author contributions: Writing—review & editing, M.L., O.K. and E.P. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), the project “Developing a concept of improving the living standards and quality of life of the population in the region in the conditions of inter-municipal differentiation, taking into account the economy digitalization” No. 20-010-00815 A.

Conflicts of interest: The authors declare no conflict of interest.

REFERENCES

1. W.R. Klecka, *Factor, discriminant and cluster analysis*, (in Russian). Moscow: Finance and Statistics, 1989, 215 p.
2. I.D. Mandel, *Cluster analysis*, (in Russian). Moscow: Finance and Statistics, 1988, 176 p.
3. S.A. Ayvazyan, V.M. Buchstaber, I.S. Enyukov, and L.D. Meshalkin, *Applied statistics: classification and dimensionality reduction*, (in Russian). Moscow: Finance and Statistics, 1989.
4. T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning*, 2nd edition. Springer, 2009, 533 p.
5. J. Langford, *Tutorial on Practical Prediction Theory for Classification*, 2005, 28 p.
6. M. Zhambyu, *Hierarchical cluster analysis and correspondence*, (in Russian). Moscow: Finance and Statistics, 1988, 345 p.
7. N.V. Zubarevich, “Russian regions in January-July 2019: Mix of growth, stagnation and slump”, *Russian Economic Development*, vol. 26, no. 10.
8. Roberta Comunian and Lauren England, “Creative Clusters and the Evolution of Knowledge and Skills: From Industrial to Creative Glassmaking”, *Geoforum*, 99, pp. 238–247, 2019.
9. M.A. Lesnichaya, O.A. Kolchina, and H.A. Kondzharyan, “Elaboration of a conceptual scheme of municipal units classification according to the level of budgetary provision on the base of cluster analysis (2019)”, *Proceedings of the 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, EIConRus 2019*, article no. 8657216, pp. 1415–1420.
10. Marcelo Cano-Kollmann, John Cantwell, Thomas J. Hannigan, Ram Mudambi, and Jaeyong Song, “Knowledge Connectivity: An Agenda for Innovation Research in International Business”, *Journal of International Business Studies*, 47, pp. 255–262, 2016.
11. Fulvio Castellacci, “Co-Evolutionary Growth: A System Dynamics Model”, *Economic Modelling*, 70, pp. 272–287, 2018.
12. M.A. Lyamina, “An approach to design of intelligent system rapid assessment for the mortgage climate of the constituent entities of the Russian Federation” (in Russian), *Technical science*, no. 10 (87), pp. 23–28, 2008.
13. *Smarteka.com*. Available: <https://smarteka.com/practices/vyavlenie-maloimusi-grazdan-s-maksimal-nojdekompoziciej-harakteristik-maloimusi-h>.
14. *The Economist Intelligence Unit's quality-of-life index*. Available: <https://www.eiu.com/n/> (accessed on 26.06.20).
15. *United Nations Development Programme, Human Development Reports 2019*. Available: <http://hdr.undp.org/en/content/2019-human-development-index-ranking> (accessed on 26.06.20).

Received 18.04.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Marina A. Lesnichaya, ORCID: 0000-0001-8978-5104, Institute of Management in Economic, Environmental and Social Systems, Southern Federal University, Russia, e-mail: grezinam@yandex.ru

Oksana A. Kolchina, ORCID: 0000-0003-4161-9769, Institute of Management in Economic, Environmental and Social Systems, Southern Federal University, Russia, e-mail: kolchinaoksana@gmail.com

Evgenii V. Pahomov, ORCID: 0000-0002-3898-1444, Institute of Management in Economic, Environmental and Social Systems, Southern Federal University, Russia, e-mail: evpahomov@sfedu.ru

РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМУ МЕТОДИКИ ЕКСПРЕС-ОЦІНКИ РІВНЯ ТА ЯКОСТІ ЖИТТЯ НАСЕЛЕННЯ РЕГІОНУ / М.О. Лісничка, О.О. Колчина, Е.В. Пахомов

Анотація. Запропоновано методику експрес-оцінки, яка дозволить аналітикам проводити якісний моніторинг рівня життя населення, використовуючи широкий набір методів оброблення статистики (факторний аналіз, кластерний аналіз, дискримінантний аналіз, метод об'єднання різновимірних показників), що відрізняється високою швидкістю математичних обчислень, доступністю користувачам з різним рівнем кваліфікації, універсальністю застосування для різних об'єктів дослідження. Метод експрес-оцінки призначено для скринінгу рівня життя населення і якості діяльності органів влади територіальних утворень з урахуванням набору різних показників. Запропоновано авторську систему показників оцінювання рівня та якості життя населення. В алгоритмі методики описано блок-схеми індексного методу об'єднання різновимірних статистичних спостережень, що дозволяють автоматизувати процес ранжування територій. Як об'єкт дослідження обрано 12 міських і 43 муніципальних округів району Ростовської області. Застосування описаної методики дасть змогу: вилучити суб'єктивний фактор під час проведення моніторингу; раціонально розподіляти фінансові ресурси, які щорічно виділяються органами влади на підтримання програм соціально-економічного розвитку території; підвищити економічну ефективність і пришвидшити впровадження інноваційних проєктів, що безпосередньо впливають на рівень і якість життя населення.

Ключові слова: рівень життя населення, тренди динаміки, редукція змінних, кластеризація, оцінювання якості класифікації, ранжування.

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА МЕТОДИКИ ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ УРОВНЯ И КАЧЕСТВА ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ РЕГИОНА / М.А. Лесничая, О.А. Колчина, Е.В. Пахомов

Аннотация. Предложена методика экспресс-оценки, позволяющая аналитикам проводить качественный мониторинг уровня жизни населения, используя широкий набор методов обработки статистики (факторный анализ, кластерный анализ, дискриминантный анализ, метод объединения разномерных показателей), отличающаяся высокой скоростью математических вычислений, доступностью пользователям с разным уровнем квалификации, универсальностью применения для различных объектов исследования. Метод экспресс-оценки предназначен для скрининга уровня жизни населения и качества деятельности органов власти территориальных образований, учитывающий различный набор показателей. Предложена авторская система показателей оценки уровня и качества жизни населения. В алгоритме методики описаны блок-схемы индексного метода объединения разномерных статистических наблюдений, позволяющие автоматизировать процесс ранжирования территорий. В качестве объекта исследования были выбраны 12 городских округов и 43 муниципальных района Ростовской области. Применение описанной методики позволит: исключить субъективный фактор при проведении мониторинга; рационально распределять финансовые ресурсы, ежегодно выделяемые органами власти на поддержку программ социально-экономического развития территории; повысить экономическую эффективность и скорость внедрения инновационных проектов, которые оказывают непосредственное влияние на уровень и качество жизни населения.

Ключевые слова: уровень жизни населения, тренды динамики, редукция переменных, кластеризация, оценка качества классификации, ранжирование.

METHODS FOR RESEARCHING THE SUSTAINABILITY OF PRODUCTION PROCESSES WHEN IMPLEMENTING A CYBER-PHYSICAL SYSTEM

A. KUDRIAVTCEVA

Abstract. The article presents an analysis of the methods and criteria for assessing sustainability and the development of stabilization systems, proposed in the theory of automatic control, and studies of approaches to ensuring sustainability, proposed and applied in the practice of controlling production processes. It is proposed to develop models when introducing a cyber-physical system of a production enterprise, combining the ideas of stabilization systems developed in the theory of automatic control, and methods of the theory and practice of managing production processes, while controlling the sustainability based on the laws and methods of systems theory and system analysis.

Keywords: control, production process, sustainability, stabilization.

INTRODUCTION

The active development of innovative technologies has influenced the emergence of a new concept of the cyber-physical system (CPS), which implies the integration of computing resources into physical processes.

Systems of this class should be considered as open systems with active elements, since the properties of cyber-physical systems in the interaction of innovative technologies approach the properties of living systems, which is important to take into account when studying stability.

The relevance of the study of the features and prospects for the development of cyber-physical systems is confirmed by the famous economist and ideologist of the fourth industrial revolution K. Schwab. In his research, the author claims that in terms of its scale, volume and complexity, “The fourth industrial revolution has no analogues in the previous experience of mankind. New technologies unite physical, informational and biological worlds and are capable of creating, on the one hand, huge opportunities, on the other, a potential threat” [1].

Due to the initiatives of active elements and innovations, problems arise of maintaining the stability of production processes, which, when innovative technologies interact, have the specific properties of open systems, which requires a revision of the methods and criteria for assessing their stability. Moreover, the sustainability management system should reflect changes in the activities of the enterprise, assess their dynamics and predict the future state of the system. The article provides a brief overview of methods for assessing stability in the theory of automatic control, as well as methods for ensuring stability in the control of production processes. A combination of the principles of stabilization, proposed in the theory of automatic control, and the experience of assessing stability, used in

the practice of enterprise management, is proposed. Such a combination is proposed to be made on the basis of an informational assessment of the degree of integrity, which allows providing emergent properties arising in a cyber-physical system as a result of the interaction of components.

Emergent properties in CPS arise due to the flexibility of the interaction of components, which allows rebuilding processes in CPS, eliminating emerging failures of production processes, rebuilding processes taking into account changes in customer requirements, etc. Such a state of the system approaches the behavior of living systems, which is called mobile equilibrium in the theory of open systems.

ASSESSMENT OF SUSTAINABILITY IN THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

For technical systems, a theory of sustainability was developed, the foundations of which were laid by A. Poincaré and A.M. Lyapunov. The basis of this theory is the mapping of situations by differential equations and methods for studying the stabilization of systems, i.e. the ability of systems to return to a state of equilibrium after it has been removed from this state under the influence of external (or in systems with active elements - internal) disturbing influences.

In this theory of automatic control, a fairly large number of methods and models for ensuring stability, criteria for determining stability, were formed: the Routh-Hurwitz, Nyquist, Mikhailov criteria.

Based on the analysis of these methods in relation to the problem under consideration, it is useful to investigate the possibility of using the following stabilization systems.

1. Locally optimal systems with minimization of the norm of the control vector and a given decrease in the function A.M. Lyapunov for linear objects [2].

The solution $x^*(t)$ of the system of differential equations $\dot{x} = Ax + Bu$ with the initial conditions $x(0) = x_0$ is Lyapunov stable if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, such that if

$$\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta, \text{ then } \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \text{ for all } t \geq 0.$$

The solution $x^*(t)$ of the system $\dot{x} = Ax + Bu$ is asymptotically stable if it is Lyapunov stable and the condition is satisfied:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ provided } \|x(0) - x^*(0)\| < \delta.$$

In this case, all solutions that are sufficiently close to $x^*(0)$ at the initial moment of time gradually converge to $x^*(t)$ as t increases.

If the solution $x^*(t)$ is asymptotically stable and, moreover, from the condition $\|x(0) - x^*(0)\| < \delta$ it follows that $\|x(t) - x^*(t)\| \leq \alpha \|x(0) - x^*(0)\| e^{-\beta t}$ for all $t \geq 0$, then the solution $x^*(t)$ is exponentially stable. In this case, all solutions close to $x^*(0)$ at the initial moment converge to $x^*(t)$ at a rate (greater or equal), which is determined by an exponential function with parameters α, β [3].

The Lyapunov stability condition for systems is formulated as follows: “in a stable system, the free component of the solution to the equation of dynamics, written in deviations, should tend to zero, that is, decay” [2]. This implies the stability condition for linear dynamical systems: the linear system will be stable if all real roots and all real parts of the complex roots of the characteristic equation corresponding to the original differential equation of free motion of the system are negative, which gives exponentially decaying solutions [4].

2. Locally and interval optimal systems with minimization of the norm of bounded coordinates and controls of nonlinear objects.

Let the equations of the object $x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, y_k = x_k, x_{k0} = x_0$ be stabilized by controls $u_k = \gamma u_k^* \gamma \Phi(Hx_k)$. The equation of a closed nonlinear locally optimal system has the form: $x_{k+1} = Hx_k + Fu_k^* \gamma \Phi(Hx_k), x_{k0} = x_0$. For the system to be stable, it is sufficient that the scalar parameter γ satisfies the following algebraic inequality [5]

$$\gamma(2L_{\Phi}F + \gamma L_{\Phi}^2 F^2)PH^2 < -\lambda(\tilde{Q}_2),$$

where $\lambda(\tilde{Q}_2)$ is the minimum eigenvalue of some symmetric and positive definite matrix $\tilde{Q}_2 : \lambda(\tilde{Q}_2) = \min_j \lambda_j(\tilde{Q}_2)$.

3. Locally or interval optimal systems with optimization of linear functionals on the trajectories of nonlinear systems with an additive right-hand side (in coordinates and controls) with bounded coordinates and controls.

4. Systems for optimal stabilization of programmed movements for objects specified in paragraphs 1–3.

Let the difference operator of a linear or linearized dynamic object have the form: $x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, x_{k0} = x^0$. As a result, the problem of calculating controls for discrete time “plunges” into a countable number of problems: calculate a family of numerical vectors that are solutions to optimization problems [6]:

$$u_k^* = T_u \begin{pmatrix} s_k^* \\ y_k^* \end{pmatrix} = \operatorname{argmin} \left\{ \varphi(z_k) = z_k - C_{z2}^2 = \left\| \begin{matrix} s_k - C_s \\ y_k \end{matrix} \right\|_2^2 \mid \bar{A}z_k = b_{zk}; \right.$$

$$\bar{A}z_k = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{1}{Q^2} & -E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xk} \\ \frac{1}{Q^2} d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hx_k \\ \frac{1}{Q^2} d_k \end{bmatrix} = b_{zk}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{1}{Q^2} & -E_n \end{bmatrix};$$

$$\left. A = [E \mid -F], \quad z_k = [s_k \mid u_k]^T, \quad s_k = [x_{k+1} \mid u_k]^T, \quad z_k = z_k^2 \leq r^2 \right\}.$$

5. Systems of optimal stabilization based on the R . Bellman equation with bounded controls (the problem of Corresponding Member of the USSR Academy of Sciences A. M. Letov).

For the equations of perturbed motion $\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x^0$ the quality functional [5]:

$$J = \int_t^{t_k} \omega(x, u, \tau) d\tau + \Phi(x(t_k), t_k).$$

And the Lyapunov–Bellman function for the moments of time t and $t + s$ will look like this:

$$V(x, t) = \min_u \left[\int_t^{t_k} \omega(x, u, \tau) d\tau + \Phi(x(t_k), t_k) \right];$$
$$V(x(t + s), t + s) = \min_u \left[\int_t^{t_k} \omega(x, u, \tau) d\tau + \Phi(x(t_k), t_k) \right].$$

Control u should deliver the minimum J for any value $s > 0$. Then the necessary optimality condition — the Bellman equation $\min_u [\dot{V}(x) + \omega(x, u, t)] = 0$ provides the minimum of the integral functional.

The above examples illustrate the development of stabilization systems in the theory of automatic control, which can be useful in developing models for managing production processes when introducing innovative technologies.

However, the concepts of balance, stabilization, stability in cyber-physical systems, despite the seeming analogy with technical ones, are much more complex concepts, and the methods of the automatic control theory are insufficient. Therefore, the next section examines foreign and domestic works containing methods for assessing the sustainability of production processes, developed in the theory of organizational management.

ANALYSIS OF SUSTAINABILITY IN MANAGEMENT AND THEORY OF ORGANIZATIONAL MANAGEMENT

Marc A. Rosen [7] considers engineering sustainability, namely sustainability, which is an essential component of overall sustainability for human activity and development. The author believes that options and ways to ensure engineering stability can be achieved taking into account the key factors:

1. Sustainable resources.
2. Sustainable processes.
3. Increased efficiency.
4. Reducing the impact on the environment.
5. Implementation of other aspects of sustainability.

The article also shows that the use of efficiency tools such as environmental tool analysis and life cycle analysis is essential to achieve engineering sustainability. The concept of zero energy smart buildings and communities illustrates well the author's ideas.

Evgenia Pavlovskaja [8] explores and analyzes the concepts of sustainability criteria for sustainable production. The article discusses important critical issues necessary for a deeper understanding of the sustainability criteria and their practical use. Sustainability Criteria Indicators refer to the instruments used to test and evaluate the fulfillment of the sustainability criteria and progress towards sustainability. Indicators can provide quantitative measurement and qualitative assessment of human activity and its impact on the outside world [9], and should also reflect the fulfillment of sustainability criteria.

The research results highlight that sustainability criteria are not a well-defined concept. Their content should be linked to an understanding of what is sustainable development and sustainability in each specific industry.

The objectives of the sustainability criteria need to be explained and refined so that they are easier to interpret and fulfill. A preliminary list of the main indicators of sustainable production, according to the author, may include the following parameters:

1. Use of energy and materials in the production process: energy and materials are saved, and the form of the applied energy and materials is most suitable to achieve the desired result.

2. Natural environment, including human health: waste and environmentally incompatible by-products are constantly being reduced, removed or recycled; chemicals, physical agents, technologies and methods of work that pose a danger to humans.

3. Economic performance: Management is committed to an open, participatory process of continuous assessment and improvement focused on long-term economic performance.

4. Products: products and packaging must be safe and environmentally friendly throughout their entire life cycle; services are designed to be safe and environmentally friendly [10].

The content of the list will differ depending on what is the subject of the definition of sustainability: environmental protection, industrial development, consumer interests.

In [11], the authors consider a holistic assessment of sustainability in production. The study on the assessment of the sustainability of production [12] presents a structure for building a comprehensive assessment matrix of the entire life cycle of a product, showing the following six elements of sustainability of production:

1. Impact on the environment.
2. Impact on society (safety, health, ethics, etc.).
3. Functionality.
4. Optimal use of resources.
5. Performance.
6. Possibility of recycling / product recovery.

Moreover, the authors emphasize that modern sustainable production systems must be planned and managed as holistic socio-technological-ecological systems in terms of the entire life cycle [13], which requires the ability to think and communicate systematically, or systems thinking becomes an important ability that must be developed to enhance the design and control of such systems [14].

The authors also argue that sustainable manufacturing starts with developing a new product that can use the right materials and manufacturing processes. This is because the manufacturing system requires new innovations and more sustainable approaches to manufacturing. As raw materials are depleted, advanced materials research requires clearer research and training for engineers and scientists [11].

Design and manufacturing methods, according to the authors of [15], currently have to undergo major changes to include problems that cover the entire

traditional product life cycle. New design methodologies, innovative manufacturing technologies, and effective tools must be developed concurrently and address common life cycle issues, including (Fig. 1):

- Reduced production costs.
- Reduced product development time.
- Reduced material use.
- Reduced energy consumption.
- Reduction of industrial waste.
- Repair, reuse, refurbishment and recycling of used ones.
- Products / materials.
- Environmental and social issues.

This paradigm shift in product design and manufacturing requires the development of optimization models that incorporate environmentally friendly, energy efficient, lean manufacturing methods that take into account disassembly, reuse, re-production and recycling. It promotes systems thinking when developing new products and processes and requires attention to the interests of all stakeholders. This requires the development of new design methodologies, manufacturing processes, post-use processes, and enterprise resource planning to simultaneously achieve multiple production efficiency goals.

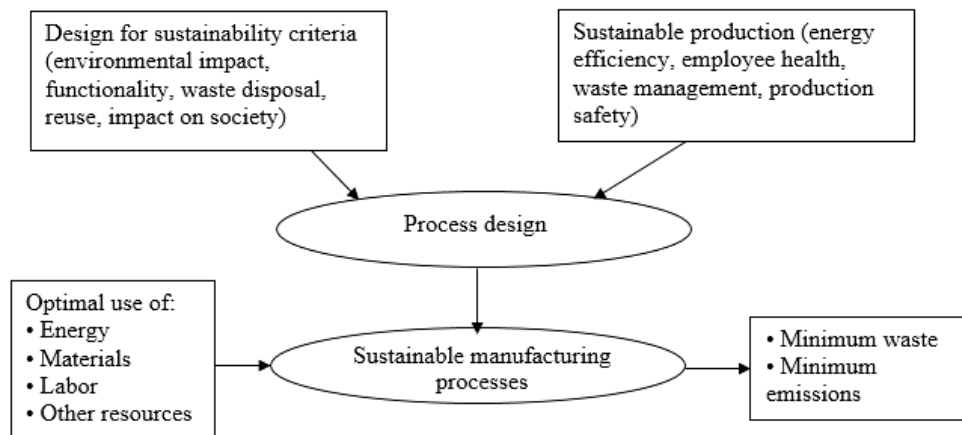


Fig. 1. Sustainable Manufacturing Process Diagram

Ljungberg L.Y. [16] reviews current practices for sustainable product development and identifies four major challenges inherent in sustainable production:

- Excessive consumption.
- Utilization of resources.
- Pollution.
- Excess population

The author also argues that excessive consumption of energy, packaging and transportation has serious consequences in the long term.

Shotylo D.M. [17] define the sustainability of the production system as the ability of the production system in the course of its activity under the influence of the environment to achieve the specified goals in the established time interval, without changing the elements, structure and processes included in it. At the same time, the essence of sustainability is manifested in the ability of the production system to preserve the integrity of the entire structure and its individual links, to

perform stable functions assigned to it and preserve its main functional parameters, to maintain a stable level of output characteristics in the presence of various kinds of external and internal deviating influences, to timely material and technical, transport and information services at a given level of quality of these processes (Table 1).

Table 1. The essence of sustainability in a production system

The essence of sustainability of the production system
The ability of the production system to maintain the integrity of the entire structure and its individual links
The ability of the production system to stably perform the assigned functions and maintain its basic functional parameters
The ability of a production system to maintain a stable level of output characteristics in the presence of various kinds of external and internal deflecting influences
The ability of the production system to provide timely and uninterrupted material, technical, transport and information services at a given level of quality of these processes
The ability of the production system to maintain established economic ties within the production chain (stable ties with suppliers, consumers, financial institutions)
The ability of the production system to maintain its competitive position in the market
The ability of a production system to restore its elements, processes and functions in the original state, or close, established within specified limits
The ability of a production system to withstand environmental influences

PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT OF METHODS FOR RESEARCHING THE SUSTAINABILITY OF CYBER-PHYSICAL SYSTEMS

With the development of cyber-physical systems, the components of production processes continuously exchange information with computing platforms, sensors, network structure, operators, i.e. emerging situations need to be displayed using an open system model with active elements.

With the interaction of CPS elements, the emergence effect may occur, the appearance of new properties that are absent in the elements. For example, it becomes possible to adjust the production process, eliminate failures. At the same time, negative effects are also possible, which can lead to instability of the production process.

To manage the sustainable development of a cyber-physical system, it is necessary to constantly monitor the state of maintaining its integrity. For this, models are being developed based on the application of the information approach of A.A. Denisov [18], who introduced comparative quantitative assessments of hierarchical structures in terms of the degree of integrity. Research has shown that any developing system is between the state of absolute integrity and absolute freedom of elements:

$$\alpha + \beta = 1,$$

where $\alpha = -C_m / C_i$ is the degree of integrity, and $\beta = C_s / C_i$ is the utilization rate of elements as a whole; C_s , C_i , C_m — systemic, intrinsic and mutual com-

plexities of the system; J — information of perception; H informational essence (potential); C assessment of the information complexity of the system $C = J$.

Studies of the processes of interaction between the part and the whole in the system have shown that with a tendency towards a decrease in the degree of integrity, the system can disintegrate into parts that will function stably. But at the same time, useful properties arising as a result of the emergence effect will be lost. A large increase in the degree of integrity should provide stability. However, this can suppress the properties of active elements that provide useful properties for which the CPS is created.

Thus, it can be assumed that there should be a certain range of the degree of integrity α in which the CPS will function stably and perform the functions for which it is created. Then the problem arises of finding ways to measure α . It seems promising to establish the relationship of this range with the criteria for assessing stability, developed in the theory of automatic control, and indicators proposed in the works discussed in section 2.

When managing the development of cyber-physical systems, the task of comparative analysis and selection of innovative technologies also arises, taking into account their characteristics, capabilities and usefulness. At present, some studies have already been carried out, published in articles [19–23].

Further development of the presented work presupposes the application of the methods of the laws of systems theory and the information approach of A.A. Denisov for the development of models of interaction of system elements.

CONCLUSION

The article presents an analysis of the methods and criteria for assessing stability and the development of stabilization systems, proposed in the theory of automatic control, and studies of approaches to ensuring stability, proposed in the practice of managing production processes.

It is proposed to develop models when introducing a cyber-physical system of a production enterprise, combining the ideas of stabilization systems developed in the theory of automatic control, and methods of controlling production processes, controlling stability based on assessing the degree of system integrity. Based on the study, it was concluded that the degree of integrity of such systems should be within certain limits, since: 1) an increase in the degree of integrity, determined by tighter control of the number and strength of interconnections between the CPS components, provides greater stability of the system's functioning, but at the same time less freedom of interaction of its components, which leads to a decrease in the possibility of manifestation of emergent properties; 2) a decrease in the degree of integrity (the degree of control of interactions between system components) leads to too independent behavior of the CPS components, a decrease in the stability of its functioning. The idea of using estimates of the degree of integrity and degree of freedom of elements was proposed in the information theory by A.A. Denisov [18], in which these assessments are used to study organizational systems and are obtained on the basis of assessing the structures of systems. For the study of processes in cyber-physical systems, such assessments are proposed to be applied for the first time.

With the continuation of the work, it is assumed 1) to develop models for assessing the degree of integrity in the context of complex graphs, displaying the interactions of components in cyber-physical systems, based on the fundamental

principles of control, taken into account in the theory of automatic control when assessing the stability of systems; 2) taking into account that the models for evaluating arbitrary graphs can turn out to be difficult for practical application, studies will be carried out on the possibility of comparing information assessments of the degree of integrity with the criteria for assessing the sustainability of production processes when introducing a cyber-physical system used in the practice of managing enterprises, and determining the range of assessments of the degree of within which it is possible to realize the emergent properties of CPS while maintaining sufficient stability.

REFERENCES

1. K. Shvab, *Chetvertaya promyshlennaya revolyutsiya* [The Fourth Industrial Revolution]. Moscow: «E» Publ., 2017, 208 p.
2. A.M. Lyapunov, *The general problem of motion stability*; Vol. 2. M.: Izd-vo AN SSSR Publ, 1956.
3. A.A. Voronov, *Fundamentals of the theory of automatic control*. M.: Energiya, 1980, 312 p.
4. *Theory of automatic regulation*; ed. V.V. Solodovnikova. M.: Mashinostroyeniye Publ., 1967.
5. V.N. Kozlov, V.E. Kupriyanov, and V.N. Shashikhin, *Management of energy systems*; part 1. Theory of automatic control. St. Petersburg: Publishing house of Polytechnic University, 2008.
6. A.A. Efremov, V.N. Kozlov, and V. Karakchieva, *Part 2: collection of scientific papers of the XXIV International Scientific and Educational-Practical Conference, October 13-14, 2020*; under total ed. V.N. Kozlova, A.N. Firsova. SPb.: POLYTECH-EXPRESS, 2020.
7. Marc A. Rosen, “Engineering Sustainability: A Technical Approach to Sustainability”, *Sustainability*, 2012.
8. Evgenia Pavlovskaya, “Sustainability criteria: their indicators, control, and monitoring (with examples from the biofuel sector)”, *Environmental Sciences Europe*, 26, 2014.
9. *National Research Council of the National Academies: Toward Sustainable Agricultural Systems in the 21st Century*. Washington, DC: The National Academies, 2010.
10. V. Veleva and M. Ellenbecker, “Indicators of sustainable production: framework and methodology”, *J. Cleaner Product*, 9(6), pp. 519–549, 2001.
11. Abdullahi Tijjani and Salem Abdullah Bagaber, “Sustainability Considerations in Manufacturing and Operation Management”, *International Journal of Scientific Engineering and Applied Science (IJSEAS)*, vol. 1, issue 4, July 2015.
12. F. Badurdeen, A. Jayal, and I. Jawahir, “Towards a System Approach for Developing Sustainable Products from Sustainable Manufacturing”, in *Bangalore Workshop*, Bangalore India, 2009.
13. C. Soderquist and S. Overaker, “Education for sustainable development: a systems thinking approach”, *Global Environmental Research*, 14, pp. 193–202, 2010.
14. F. Badurdeen et al., *Sustainable Value Creation in Manufacturing at Product and Process Levels: Metrics-Based Evaluation*, 2014.
15. I.S. Jawahir and Fazleena Badurdeen, “Innovation in sustainable manufacturing education”, *11th Global Conference on Sustainable Manufacturing*, 2013.
16. L.Y. Ljungberg, “Materials selection and design for development of sustainable products”, *Materials & Design*, 28(2), pp. 466–479, 2007.
17. D.M. Shotylo, “The essence and content of the sustainability of the production system. Organization of production”, *ECONOMINFO*, no. 6, 2006.
18. A.A. Denisov, *Sovremennye problemy sistemnogo analiza: uchebnik* [Modern problems of system analysis: a textbook]. SPb.: 3-e izd. Politekh. un-ta Publ, 2008, 304 p.

19. V.N. Volkova, A.V. Loginova, L.V. Chernenkaja, E.V. Romanova, Y.Y. Chernyy, and V.E. Lankin, "Problems of Sustainable Development of Socio-Economic Systems in the Implementation of Innovations", *Proceedings of the 3rd International Conference on Human Factors in Complex Technical Systems and Environments, Ergo-2018*, 3, pp. 53–56.
20. V.N. Volkova and Yu.Yu. Chernyi, "Application of Systems Theory Laws for Investigating Information Security Problems", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 8, pp. 1164–1170, 2018.
21. V.N. Volkova and V.Ye. Lankin, "Problema ustoychivosti sotsial'no-ekonomicheskoy sistemy v usloviyakh vnedreniya innovatsiy chetvertoy promyshlennoy revolyutsii [The problem of the sustainability of the socioeconomic system in the context of innovation of the fourth industrial revolution]", *Ekonomika i upravleniye: problemy i resheniya*, 77 (6), pp. 25–29. 2018.
22. V. Volkova, A. Loginova, and A. Kudriavtceva, "Management of enterprise cyber-physical systems sustainable development while undergoing a digital transformation", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 940(1), 2020.
23. V. Volkova, F. Tarasenko, V. Kozlov, and A. Kudriavtceva, "On further development of the control theory of automated complexes in the information-communication technologies implementation", *Proceedings of the XI International Scientific Conference "Communicative strategies of Information Society", 25–26 October 2019, Saint-Petersburg, Russia*.

Received 24.12.2020

INFORMATION ON THE ARTICLE

Arina S. Kudriavtceva, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia, e-mail: arinkin94@mail.ru

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ ПІД ЧАС УПРОВАДЖЕННЯ КІБЕРФІЗИЧНОЇ СИСТЕМИ / А.С. Кудрявцева

Анотація. Подано аналіз методів і критеріїв оцінювання стійкості і розроблення систем стабілізації, розроблених у теорії автоматичного керування, і досліджень підходів до забезпечення стійкості, пропонувані і застосовувані у практиці керування виробничими процесами. Запропоновано під час упровадження кіберфізичної системи виробничого підприємства розробляти моделі, об'єднуючи ідеї систем стабілізації, розроблені в теорії автоматичного керування, і методи теорії і практики керування виробничими процесами, контролюючи стійкість на основі закономірностей і методів теорії систем і системного аналізу.

Ключові слова: керування, виробничі процеси, стійкість, стабілізація.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВНЕДРЕНИИ КИБЕРФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ /А.С. Кудрявцева

Аннотация. Представлен анализ методов и критериев оценки устойчивости и разработки систем стабилизации, разработанных в теории автоматического управления, и исследований подходов к обеспечению устойчивости, предлагаемых и применяемых в практике управления производственными процессами. Предложено при внедрении киберфизической системы производственного предприятия разрабатывать модели, объединяя идеи систем стабилизации, разработанные в теории автоматического управления, и методы теории и практики управления производственными процессами, контролируя устойчивость на основе закономерностей и методов теории систем и системного анализа.

Ключевые слова: управление, производственные процессы, устойчивость, стабилизация.

**INFORMATION TECHNOLOGY OF VISUALIZATION FOR
TECHNOLOGICAL PROCESSES FOR RESEARCH MODES OF
FUNCTIONING OF COMPLEX TECHNOLOGICAL SYSTEMS**

A.V. DENISENKO, A.A. GURSKIY

Abstract. The development of a mathematical model of a technical system based on the means of discrete-continuous networks and taking into account the interaction with a multimedia platform is presented. The efficiency of the process for visualizing the functioning of the complex technical system is increased by implementing the interaction of the modeling environment with the Unity platform in the feedback mode. The experiments linked to the integration of the DC-Net simulation software environment with the Unity cross-platform development environment are implemented. An example of developing the model of a technical system in the DC-Net environment and an example of developing a process for visualizing the functioning of a corresponding technical system based on the Unity platform are presented. The fundamental suitability of using the integration of various information technologies linked with various software environments has been confirmed.

Keywords: hybrid systems, discrete-continuous networks, Unity, multimedia platform, Petri net.

INTRODUCTION

Information technology of visualization is going through the active stage of its development. This technology in technical and research applications enables the researcher to observe and correct the processes of functioning of a modulated object or system. At the same time, this possibility is based on mathematical and software support hidden from the researcher.

In the educational field, the technology of visualizing the process of mathematical modeling is especially valuable for the successful mastering of educational material in technical disciplines. Also, visualization technology is important for the acquisition of skills in practical work with complex technological systems (CTS) in which mechanical, thermal, chemical, electrical, hydraulic and other processes interact simultaneously [1–3].

Due to the increasing need for the use of interactive and distance learning such research is rather relevant.

Visualization of the technological process is essential when modeling a complex technical system. This complexity is caused by scientific and technical

progress, leading to the emergence of new, more and more complex technological processes and complexes for which a qualitative analysis and appropriate control methods are required. Naturally, methods and means of visualization must be improved and developed in accordance with growing requirements.

The visualization technology of modeling processes for complex technical systems is available in almost all known software modeling. However, not all software tools are specialized in hybrid systems modeling [4, 5]. The theory of discrete-continuous networks was proposed for modeling and research of such hybrid systems in 1990–1993 [3]. The corresponding program DC-Net was developed in the Windows environment based on this theory. This program allows for visualized editing of systems models represented by means of discrete-continuous networks.

In addition to the development of the theory of discrete-continuous networks and the DC-Net environment, the MATLAB / SIMULINK / SIKOSS software complex stands out. This complex also provides for the use of special methods for the synthesis of complex systems, but the MATLAB / SIMULINK / SIKOSS complex has its drawbacks [3].

Despite the lack of specialized tools of discrete-continuous networks the MATLAB / SIMULINK have great capabilities in the field of modeling complex technical systems. But in the field of technology for visualization of technological processes, the undisputed competitor is the tool package LabVIEW [6, 7]. However, the LabVIEW environment has its own process visualization format and its own methods for developing virtual instruments and models of control systems.

The undeniably high visualization capabilities of various processes and mathematical models is the Unity environment [8]. This environment is a cross-platform development environment for computer games.

It is obvious that the greatest efficiency can be obtained by combining the capabilities of various specialized software tools [9–11]. For example, a combination of the DC-Net program, which is specialized in modeling complex technical systems, and the Unity environment, which provides the ability to efficiently visualize the modeling processes. Accordingly, the work linked with the development of some visualization information technology based on a combination of various methods and tools of software is relevant.

The purpose of the scientific work is to increase the efficiency of the visualization process of the functioning for complex technological complexes by implementing the interaction of the modeling environment with the Unity platform in the feedback mode.

PROBLEM STATEMENT

In order to achieve this purpose we need to develop a mathematical model of a complex technical system based on the means of discrete-continuous networks, taking into account the use of feedback functions from a multimedia platform. Such multimedia platform provides visualization of the functioning of the complex technical system.

The development of such a model involves the formation of a structure and an algorithm for the operation of the complex of modeling, taking into account the feedback functions from the Unity platform to the mathematical model represented by DC-Net tools.

Ultimately, it is important to implement the developed schema using a real example. It is important to establish the fundamental suitability of the complex of modeling and it is also important to determine and confirm its advantages over the analogs developed by the authors earlier.

MATERIALS AND METHODS

A multimedia platform for visualizing the functioning of the CTS is linked with a virtual machine. This virtual machine is an integral part of the multimedia platform and at the same time it can represent a certain model of a complex system.

For example, a description of the dynamic process of the functioning of the CTS in ActionScript 3.0 allows further visualization of the corresponding processes, however, there is a high laboriousness of creating such a visualization system. It is obvious that the creation of a CTS model by means of the DC-Net environment is a less laborious process. But in this case, to integrate the multimedia platform and the DC-Net software environment, it is necessary to present some kind of information technology. The block diagram of the visualization system of the corresponding information technology is shown in Fig. 1. As an example, a not so complex system is considered in Fig. 1. The functioning of such a system can be represented by a corresponding Petri net and some animation fragment. This fragment represents the corresponding apparatus for the production of insulated copper wire.

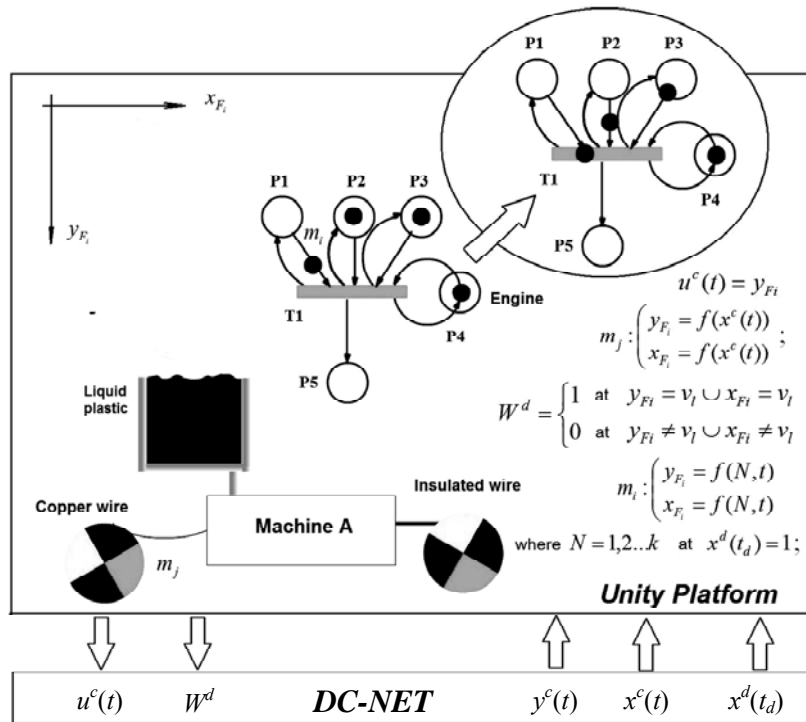


Fig. 1. Representation of CTS by means of discrete-continuous networks with feedback from a multimedia platform

In this direction, it is important to implement the movement of visualization objects m_i , defined in the Unity shell, which represents the corresponding multi-

media platform. At the same time, the movement of visualization objects m_i , in the field of coordinates y_{F_i}, x_{F_i} depends on the variables $y^c(t), x^c(t), x^d(t)$ according to the expressions presented in Fig. 1. The relationship between the visualization process and the operation of technological equipment is presented in Fig. 1. The functioning of the formed Petri net according to the variables $y^c(t), x^c(t), x^d(t)$ obtained from the DC-Net environment in Unity is also presented.

Thus, DC-Net simulates the necessary dynamic system and the multimedia platform dynamically displays the necessary information and visualizes the process of this system functioning.

In this example, the object of animation is a technological machine consisting of equipment of continuous and discrete nature. The machine produces insulated copper wire from bare wire and plastic. The constituent elements of the machine are discrete and continuous. Discrete elements are starting and stopping the machine. Continuous elements are the movement of a copper wire and changes in the level of liquid plastic in a container.

The functioning of the machine model is also represented by a Petri net, consisting of $P1, P2, P3, P4$ positions and $T1$ transition.

Marking of position $P1$ means the presence of liquid plastic in the tank, marking position $P2$ means the presence of a copper wire, marking position $P3$ means the presence of an insulated wire. If machine A fails or at least one mark is missing, then the production of the insulated wire is stopped. In this case, the transition $T1$ does not work and the engine cannot start.

The main load on the development of the CTS simulation model is assumed by the DC-Net graphic editor. In this case, the CTS model which is represented by means of discrete-continuous networks together with a decision-making device looks like shown in Fig. 2.

The continuous-event part of the system, represented by a discrete-continuous network, is described by the following equations of state and the output $\bar{x}^c(t) = \bar{u}^d(t_k) \lambda_i(x^c(t), u^c(t)), \bar{y}^c(t) = \bar{u}^d(t_k) \lambda_i(x^c(t))$ with a variable right-hand side for the formation of a continuous state $\bar{x}^c(t)$, where $\bar{u}^d(t_k) = f(y_n^d(t_n))$ is the vector function of controlling the operating modes, $u^c(t)$ is the continuous control vector.

The discrete-continuous part is represented by the following equations of state and output of the discrete subnet of the discrete-continuous network: $x_V^d(t_k) = \lambda(x_{V-1}^d(t_k), u_n^d(t_k)), y_n^d(t_k) = \Lambda x_V^d(t_k)$, where $u_n^d(t_k)$ is the input action for the logical part, $x_V^d(t_k)$ is the discrete vector of state (Λ is transition matrix). The generated state vector $x(t) = (x^c(t), x^d(t))^T$ is needed in the future to control the visualization process.

Thus, in the DC-Net software environment, a state vector $F_{In} = [\bar{x}_c(t), \bar{x}_d(t_k)]$ is formed, which enters in the transfer format of the vector of continuous $X_c(t)$ and $X_d(t_k)$ discrete variables from DC-net to the Unity program, where $\bar{u}_{dl}(t_k)$ is the vector of discrete-event states from the continuous-event part to the discrete-event part of the model in DC-Net.

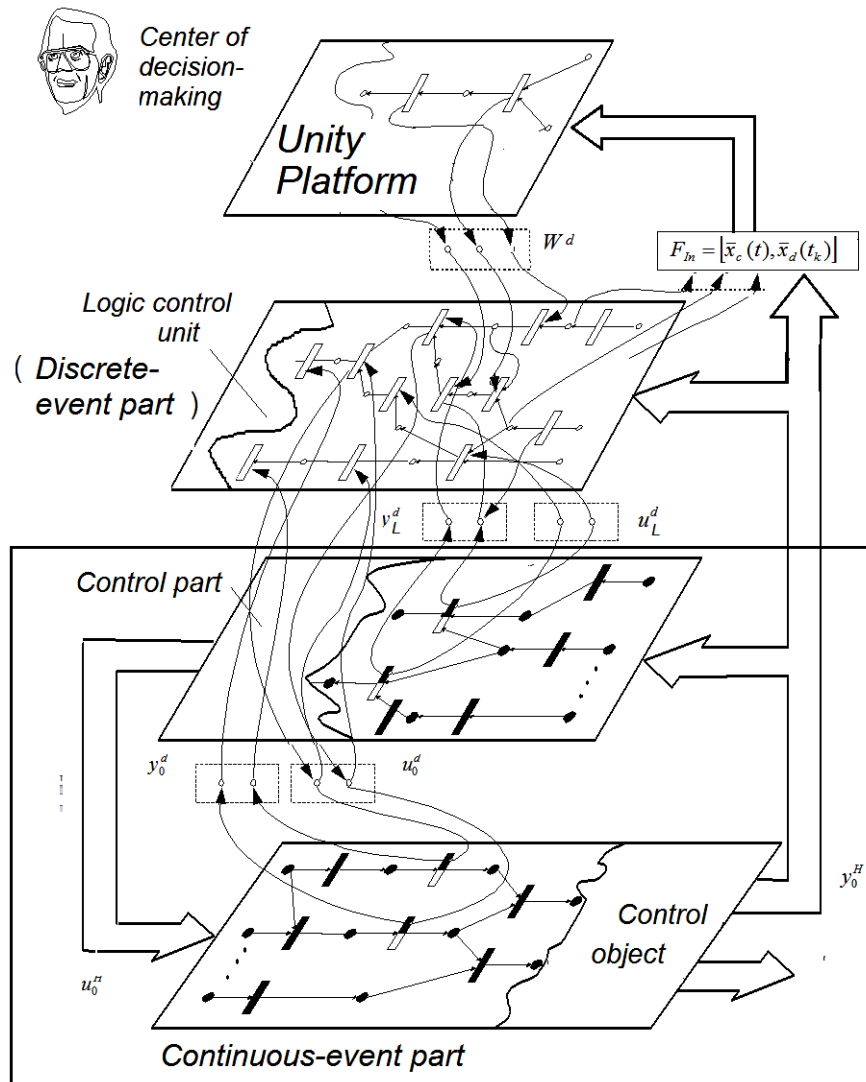


Fig. 2. Representation of CTS by means of discrete-continuous networks

In the same way, the reverse transmission vector from Unity to DC-net is formed $F_{out} = [\bar{u}_c(t), \bar{w}_d(t_k)]$, where $u^c(t) = y_{F_i}$, $\bar{w}_d(t_k) = [w_1^d \ w_2^d \ \dots \ w_n^d]^T$ is vector of discrete-event states from Flash to discrete-event part model in DC-Net, where in

$$w_i^d = \begin{cases} 1, & y_{F_i} = v_l \cup x_{F_i} = v_l; \\ 0, & y_{F_i} \neq v_l \cup x_{F_i} \neq v_l, \end{cases}$$

y_{F_i}, x_{F_i} is coordinates of the i -th object in the Unity — visualization window.

Accordingly, in the Unity-visualization window, the movement of objects m_i or m_j corresponds to the coordinates y_{F_i}, x_{F_i} according to the following expressions:

$$m_i : \begin{cases} y_{F_i} = f(N, t); \\ x_{F_i} = f(N, t), \end{cases} \quad N = 1, 2, \dots, k,$$

if $x^d(t_d) = 1$ then

$$m_j : \begin{cases} y_{F_i} = f(x^c(t)); \\ x_{F_i} = f(x^c(t)). \end{cases}$$

Closing the parts of the discrete-event part and continuous-event part is realized by means of the vector $\bar{u}_{do} = \Lambda \bar{x}_d(t_k)$.

The elements of this vector discretely change the coefficients of the equations representing the continuous-event part of the model, which is implemented by means of DC-Net.

Thus, DC-Net simulates the necessary dynamic system, and Unity platform dynamically visualizes the process of this system functioning.

For the correct interaction of two environments with different hierarchies and principles of operation, the format of data transfer between systems had to be standardized. The block diagram of the data exchange algorithm between DC-Net and Unity is shown in Fig. 3. This algorithm determines the required values of variables for animation of the process depending on the time interval of data exchange Δt .

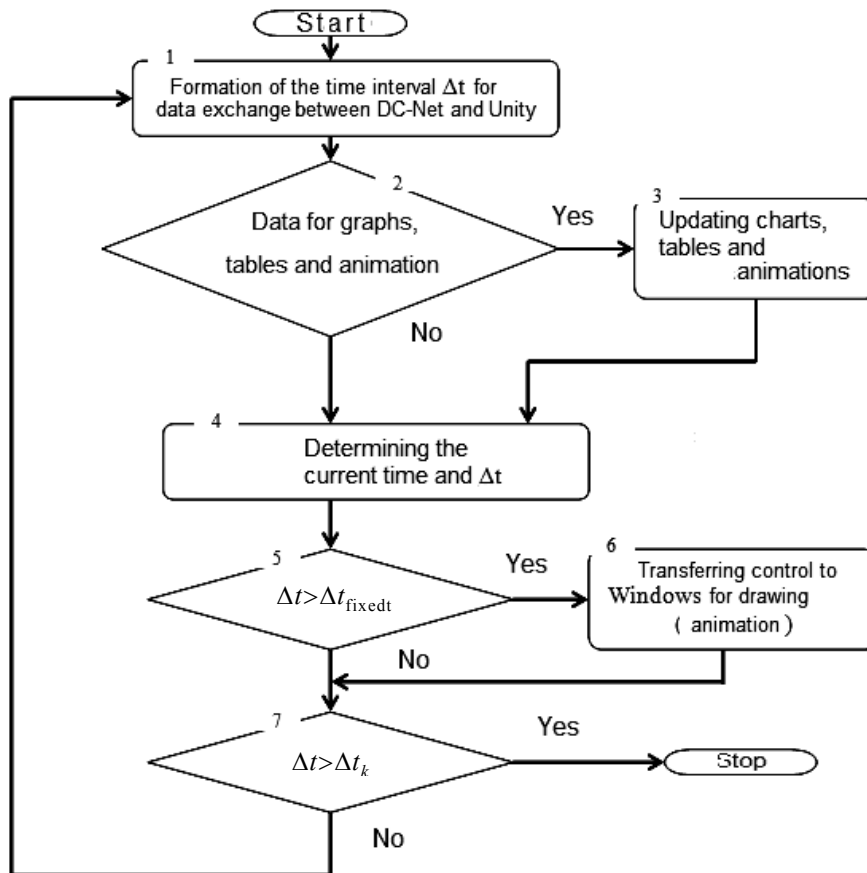


Fig. 3. Blok-diagram of the data exchange algorithm between Unity and DC-Net

A method for organizing the vector of transfer of continuous and discrete variables from DC-Net to Unity was also proposed to develop communication between systems. These systems are combined into a single information technology in which the DC-Net modeling system generates a parametric data transfer file.

EXPERIMENTS

In the software integrated environment DC-Net – Unity all necessary experiments were carried out. To carry out an experiment, it is initially necessary to realize a model of the investigated object in the software environment.

The continuous-event part of the mathematical model of the apparatus for the production of an insulated wire is represented by the following equation in matrix-differential form:

$$\bar{X}_L(t|t_k) = B_0 \Xi(u_{od}(t_k)) \bar{u}_c(t),$$

where

$$\bar{X}_L(t|t_k) = \left| \frac{d}{dt} X_L(t|t_k) \quad \frac{d}{dt} X_m(t|t_k) \right|^T,$$

$$\bar{X}_L(t|t_k) = \left| \frac{d}{dt} X_L(t|t_k) \quad \frac{d}{dt} X_m(t|t_k) \right|^T,$$

$$B_0 = |B_{01} \quad B_{02} \quad B_{03} \quad B_{04}|,$$

$$B_{01} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}, B_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}, B_{03} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{04} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

are constant matrices of the corresponding dimension ($n \times m$),

$\Xi(u_{od}(t_k)) = |\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4|$ is vector of modes control;

$$\xi_1 = \begin{cases} 1 & \text{at } u_{od}(t_k) = |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |0 \quad 0|, \\ 0 & \text{at } u_{od}(t_k) \neq |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |0 \quad 0|; \end{cases}$$

$$\xi_2 = \begin{cases} 1 & \text{at } u_{od}(t_k) = |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |1 \quad 0|, \\ 0 & \text{at } u_{od}(t_k) \neq |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |1 \quad 0|; \end{cases}$$

$$\xi_3 = \begin{cases} 1 & \text{at } u_{od}(t_k) = |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |0 \quad 1|, \\ 0 & \text{at } u_{od}(t_k) \neq |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |0 \quad 1|; \end{cases}$$

$$\xi_4 = \begin{cases} 1 & \text{at } u_{od}(t_k) = |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |1 \quad 1|, \\ 0 & \text{at } u_{od}(t_k) \neq |\mu(p_1) \quad \mu(p_2)| = |1 \quad 1|; \end{cases}$$

$\bar{u}_c(t) = |u_1(t) \quad u_2(t)|^T$ is input vector.

The discrete event part of the model is described by the following equation:

$$\bar{x}_d(t_k) = \bar{x}_d(t_{k-1}) + |W|V + W_d(t_k) + u_{dt}(t_k),$$

where $\bar{u}_{dt}(t_k) = |f_{c/d}(X_L) \quad f_{c/d}(X_m) \quad 0 \quad \dots \quad 0|^T$ is vector of discrete-event states from the continuous-event part to the discrete-event part of the DC-Net model;

$|W|$ is an $n \times m$ matrix, the incidence matrix of Petri net;

$\bar{w}_d(t_k) = |w_1^d \ w_2^d \ \dots \ w_n^d|^T$ is vector of discrete-event states from Unity to discrete-event part of the model in DC-Net.

The discrete-continuous network editor window of the DC-Net program is shown in Fig. 4. This editor realized a diagram of a model of an insulated wire production apparatus.

The $X_L(t)$, $X_m(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ variables and t_{13} , t_{23} , t_{33} structure-controlled transitions of a discrete-continuous network are denoted in Figure 4. The structure-controlled transitions provide a change in the coefficients of the matrix B_{0i} , $i = 1, \dots, 4$.

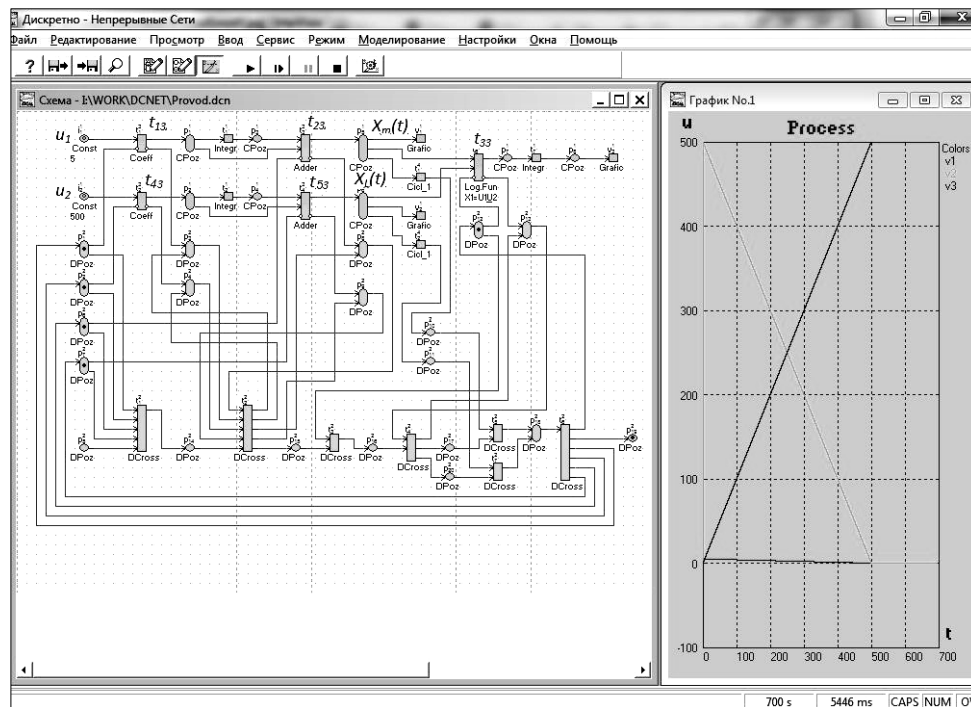


Fig. 4. A fragment of the model diagram implemented by means of the DC-Net environment

RESULTS

As a result of the work performed, a demonstration animation of the process in functioning of the apparatus for the production of insulated wires was realized. Also, visualization of the Petri net functioning was presented in parallel on the same animation screen. This Petri net shows the work of the corresponding apparatus. Thus, it is possible to obtain graphical information about changes in the parameters of a modeled object and its world linked with visualization (steam extraction, color change, etc.) [12].

Ultimately, the requirements for the developed visualization system for the modeling process were met.

DISCUSSION

The research results confirmed the assumptions that the introduction of feedback from the visualization system to the model significantly expands the capabilities

of the developed information technology of visualization. It is obvious that such information technology is necessary for distance learning and it is also possible to find new applications of such technology.

Considering the above mathematical apparatus, one should focus on the W_i^d vector of discrete-event states of the model. Such vector is linked with specific operations of creating feedback for DC-Net. This makes it possible to implement the construction of new models. At the same time, additional structured transitions are introduced into DC-Net for the further formation of a hierarchical system together with the Unity platform. Feedback from this platform is shown in Fig. 1.

CONCLUSIONS

The scientific novelty of the results. The problem linked to with the development of the mathematical model of a technical system based on the means of discrete-continuous networks, taking into account the use of feedback functions from the Unity platform was solved in the present work.

Thus the method of organizing the structure and formate of transferring the vector of variables of the CTS model from the simulation software to the multimedia platform and vice versa has got the further development.

The practical significance of the results. The developed methods for the synthesis of CTS models based on an integrated multimedia platform and means of discrete-continuous networks make it possible to implement a practical problem. This practical problem is linked with the implementation of virtual simulators of distance learning systems.

The prospects for further research. Further development of the scientific direction must be directly related to the formation of mathematical models for the automated formation of algorithms or Petri nets within the framework of modern intelligent technologies.

REFERENCES

1. O.M. Gaitan, N.A. Fursova, and M.I. Gavrilina, "Vizualizaciya rezul'tativ modelyuvannya virobnichih sistem", *Bulletin of Kremenchug National University named after Mykhailo Ostrogradsky*, no. 5, pp. 78–82, 2013.
2. J.L. Peterson, *Petri net theory and the modeling of systems*. Prentice Hall PTR, 1981, 290 p.
3. M.Z. Zgorovky and V.A. Denisenko, *Diskretno nepreryvnye sistemy s upravlyaemoj strukturoj [Discrete-continuous system with controlled structure]*. Kiev, Naukova dumka, 1998, 350 p.
4. Z. Yang and M. Blanke, "A unified approach to controllability analysis for hybrid control systems", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 1, iss. 2, pp. 212–222, 2007. doi: 10.1016/j.nahs.2006.08.002
5. M.A. Drighiciu, "Hybrid Petri nets: A framework for hybrid systems modeling", *2017 International Conference on Electromechanical and Power Systems (SIELMEN) – IEEE, 2017*, pp. 020–025. doi: 10.1109/SIELMEN.2017.8123285
6. I. Farkas et al., "Wireless sensor network protocol developed for microcontroller based Wireless Sensor units, and data processing with visualization by LabVIEW", *2014 IEEE 12th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMI), IEEE, 2014*, pp. 95–98. doi: 10.1109/SAMI.2014.6822383
7. S. Sumathi and P. Surekha, *LabVIEW based advanced instrumentation systems*. Berlin: Springer, 2007. T. 728.
8. S. Boeykens, *Unity for architectural visualization*. Packt Publishing Ltd, 2013, 125 p.

9. A.V. Denisenko and A.A. Gurskiy, "Development of principles of dcnnet and flash environments interaction", *Automation of technological and business-processes*, vol. 8, iss. 2, pp. 22–26, 2016. doi: 10.15673/atbp.v8i2.164
10. A.V. Denisenko, "Informacionnaya tekhnologiya animacii slozhnykh tekhnicheskikh kompleksov na osnove diskretno-nepreryvnykh setej, Flash-tekhnologii i instrumental'nykh sredstv DCNET", *Data registration, storage & processing*, vol. 16, iss. 3, pp. 54–60, 2014.
11. A.V. Denisenko, "Strukturno-analiticheskoe modelirovanie i animaciya tekhnologicheskikh processov v inzhenerno-tekhnicheskikh kompleksah", *Data registration, storage & processing*, vol. 18, iss. 2, pp. 67–74, 2016.
12. O. Drozd, V. Kharchenko, A. Rucinski, T. Kochanski, R. Garbos, and D. Maevsky, "Development of models in resilient computing", *2019 10th International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies (DESSERT). IEEE, 2019*, pp. 1–6. doi: 10.1109/DESSERT.2019.8770035.

Received 15.10.2020

INFORMATION ON THE ARTICLE

Andrei V. Denisenko, ORCID: 0000-0002-8610-0082, Odessa National Polytechnic University, Odessa, Ukraine, e-mail: denisenko_1965@gmail.com

Alexander A. Gurskiy, ORCID: 0000-0001-5158-2125, Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine, e-mail: gurskiya2017@gmail.com

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ / А.В. Денисенко, О.О. Гурський

Анотація. Подано розвиток математичної моделі технологічної системи на основі засобів дискретно-неперервних мереж і з урахуванням взаємодії з мультимедійною платформою. Забезпечено підвищення ефективності процесу візуалізації функціонування складної технологічної системи за рахунок реалізації взаємодії середовища моделювання з платформою Unity в режимі зворотного зв'язку. Реалізовано експерименти, що пов'язані з інтеграцією програмного середовища моделювання DC-Net з інструментом для розроблення багатомірних додатків Unity. Наведено приклад розроблення моделі технічної системи в середовищі DC-Net і приклад розроблення процесу візуалізації функціонування відповідної технічної системи на основі платформи Unity. Підтверджено принципову придатність використання інтеграції різних інформаційних технологій пов'язаних з різними програмними середовищами.

Ключові слова: складні технологічні системи, дискретно-неперервні мережі, Unity, мультимедійна платформа, мережі Петрі.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЖИМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ / А.В. Денисенко, А.А. Гурский

Аннотация. Представлено развитие математической модели технологической системы на основе средств дискретно-непрерывных сетей и с учетом взаимодействия с мультимедийной платформой. Обеспечено повышение эффективности процесса визуализации функционирования сложной технологической системы за счет реализации взаимодействия среды моделирования с платформой Unity в режиме обратной связи. Реализованы эксперименты, связанные с интеграцией программной среды моделирования DC-Net с инструментом для разработки многомерных приложений Unity. Приведен пример разработки модели технической системы в среде DC-Net и пример разработки процесса визуализации функционирования соответствующей технической системы на основе платформы Unity. Подтверждена принципиальная пригодность применения интеграции различных информационных технологий, связанных с различными программными средами.

Ключевые слова: сложные технологические системы, дискретно-непрерывные сети, Unity, мультимедийная платформа, сети Петри.

НАДІЙНІСТЬ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СТРУКТУР ІНТЕГРОВАНОЇ МОДУЛЬНОЇ АВІОНІКИ ДЛЯ КОНФІГУРАЦІЙ АПАРАТНИХ ЗАСОБІВ

І.О. КОЗЛЮК, Ю.Б. КОВАЛЕНКО

Анотація. Розглянуто задачу проектування перспективних обчислювальних систем у класі структур інтегрованої модульної авіоніки (ІМА). Запропоновано уніфіковану топологію внутрішньої мережі обчислювача на базі каналів обміну SpaceWire і варіанти її виконання для різних бортових додатків. Уведено еквівалентні схеми надійності кожної із частинних структур і проаналізовано ймовірність безвідмовної роботи кожної структури. Наведено сім'ї графічних залежностей. Подано аналіз існуючих принципів та алгоритмів організації тестування мультипроцесорних багатомодульних бортових цифрових обчислювальних систем, запропоновано новий алгоритм тестування мультипроцесора, що відповідає стандартам проектування програмного забезпечення для виробів ІМА. Розглянуто структуру уніфікованого автоматизованого робочого місця (АРМ) для перевірки функціональних модулів ІМА. Виявлено специфічні вимоги, властиві робочим місцям з перевірки інтегрованої авіоніки: підвищений рівень контролю апаратної складової виробів; можливість імітації стану відмови окремих компонентів авіоніки для перевірки режиму реконфігурування обчислювальної системи; модульну побудову програмного забезпечення з поділом тестів перевірки на компоненти, що виконуються на рівні кожного конструктивно-функціонального модуля і обчислювача в цілому в однозадачному і багатозадачному режимах; відкритість архітектури робочого місця, що забезпечує можливість зміни рівня складності керування виробом і налаштування одного класу складності; внутріпроектну уніфікацію як апаратних засобів, так і програмного забезпечення АРМ перевірки.

Ключові слова: інтегрована модульна авіоніка, обчислювальні системи, оцінювання показників надійності, ймовірність безвідмовної роботи.

ВСТУП

Авіаційні обчислювачі класу ІМА (інтегрована модельна авіоніка) являють собою мультипроцесорні багатомодульні обчислювальні системи [5; 13], до складу яких входять такі уніфіковані функціональні модулі (ФМ): модуль обчислювальний (МО), модуль графічний (МГ), модуль введення–виведення (МВВ), модуль масової пам'яті (ММП). Напряга живлення на ФМ забезпечує модуль напружень. На базі ФМ проєктуються: бортова цифрова обчислювальна система (БЦОС), бортова графічна станція, бортова інтерфейсна станція, бортова система картографічної інформації і ряд інших виробів авіаційної промисловості, що реалізують на борту літального апарата обчислювальні функції [9, 10].

Отже, суттєвими для оцінювання надійності обчислювачів класу ІМА є внутрішня структура обчислювача [15–19]; як така розглядається схема зв'язку ФМ у виробі і λ -характеристики надійності елементної бази ФМ, що входить у виріб. Надійність виробу оцінюється шляхом аналітичного виве-

дення виразу для ймовірності $P(t)$ безвідмовної роботи виробу і побудови сім'ї графіків залежності цієї ймовірності на заданому часовому інтервалі. Часовий інтервал характеризує очікуваний час безперервної роботи виробу в експлуатації.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ І ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

На сучасному етапі розвитку авіаційного обладнання ускладнення завдань, які виконуються БЦОС, уведення нових структурних і схемотехнічних рішень зумовили появу різних підходів до організації тестування БЦОС. У разі ускладнення процедур тестового контролю дотепер використовують схеми перевірки БЦОС, що не задовольняють принципи побудови перспективних БЦОС [1– 3, 6, 11, 13, 14]:

- реалізація в обчислювачі послідовної схеми перевірки виявляється ресурсомісткою і недопустимою для пристроїв, що працюють у реальному масштабі часу за критерієм мінімізації директивного часу виконання бортового завдання;

- реалізація в обчислювачі паралельної схеми перевірки здійснюється одночасно для всіх конструктивно-функціональних модулів, однак внутрішні вузли модуля перевіряються, як і раніше, за послідовною схемою.

Згідно з концепцією ІМА [5, 7, 9, 12], кожен конструктивно-функціональний модуль у складі БЦОС містить обчислювальний вузол підтримання модуля (ВПМ), однією з функцій якого є управління і контроль стану справності модуля. ВПМ забезпечує управління вбудованими засобами перевірки, щоб стан справності, формування та збереження контексту параметрів діагностики, системне управління коштами резервування для парировання виявляються несправностей.

Наукова новизна дослідження полягає у розробленні математичної моделі оцінювання ймовірності безвідмовної роботи обчислювальної системи, що входить у програму забезпечення надійності повітряних суден, створюваних на етапі виготовлення і випробувань дослідних зразків виробів обчислювальної техніки авіаційного застосування. Тобто математична модель оцінювання ймовірності безвідмовної роботи повітряного судна ІМА, що враховує різні актуальні для авіаційної промисловості способи резервування функціональних елементів (модулів) повітряного судна: резервування на рівні підсистем, резервування на рівні однотипних функціональних модулів і ковзне резервування на рівні ідентичних функціональних модулів. А також запропоновано алгоритми і комплекс програм для контролю функціональних елементів повітряного судна ІМА, що застосовуються у складі уніфікованого АРМ на заводі-виробнику, що відрізняються від відомих модульним принципом побудови структури тестів з поділом модулів тестів за функціональною належністю кожного тестованого компонента.

Мета роботи: подання результатів оцінювання надійності обчислювальних структур ІМА для різних конфігурацій апаратних засобів.

Постановка проблеми: проектування виробів обчислювальної техніки у класі структур інтегрованої модульної авіоніки, призначених для експлуатації в авіаційній промисловості, пов'язане з необхідністю розробляти спеціалізовані алгоритми та програмні засоби контролю технічного стану апаратури. Алгоритми контролю гарантують задану повноту і достовірність перевірки під час проведення етапів тестування мультипроцесорів та їх компонентів на заводі-виробнику і в експлуатації.

Методи: контроль стану апаратури здійснюваний у складі АРМ (на заводі-виробнику) та автономно (в експлуатації). Алгоритми контролю передбачають перевірку фізичної справності компонентів авіоніки і перевірку логічних зв'язків компонентів (протоколів обміну), задіяних в обчислювальних процесах.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Варіанти внутрішньої структури обчислювачів ІМА. Універсальну функціональну схему бортового обчислювача класу ІМА зображено на рис. 1. Схема об'єднує набір ФМ типу МО, МГ, МВВ та ФМ типу ММП. Топологію внутрішньої мережі зв'язку ФМ побудовано за принципом «кожен з кожним». Фізичним середовищем поширення інформації є провідні лінії передавання даних відповідно до специфікації стандарту SpaceWire. Обчислювач побудований за двоконтурним принципом і складається з двох ідентичних підсистем [8].

На основі універсальної функціональної схеми обчислювача класу ІМА на практиці розробляються різні варіанти внутрішніх структур виробів авіоніки, що реалізуються на логічному рівні [3, 4]. Варто відзначити, що фізичне середовище поширення інформації у виробі відповідає схемі зв'язку (рис. 1), а логічне середовище поширення інформації організовується програмними засобами. Таким чином, не кожна фізична лінія передавання інформації виявляється задіяною в логічному протоколі обміну.

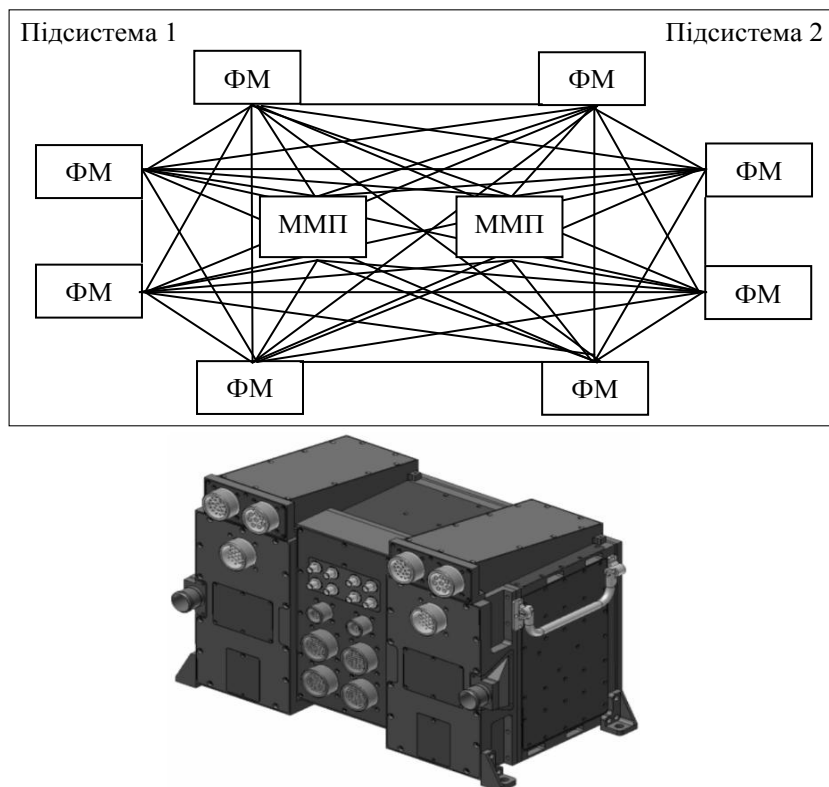


Рис. 1. Універсальна функціональна схема обчислювача класу ІМА (а) і зовнішній вигляд БЦОС (б)

Найбільш поширені варіанти виконання бортової апаратури показано на рис. 2, зокрема на рис. 2, *а* зображено схему внутрішнього зв'язку ФМ в обчислювальній системі, розділеній на дві ідентичні підсистеми, у кожній з яких задіяно по чотири ФМ і по одному ММП. У складі об'єкта (літального апарата) підсистеми резервують одна одну. У разі відмови одного із ФМ у підсистемі вся підсистема вважається несправною, функції обчислювача виконує резервна підсистема. На рис. 2, *б* зображено схему внутрішнього зв'язку ФМ у БЦОС, що складається із чотирьох ФМ різного типу. Кожен ФМ резервується ідентичним ФМ такого ж типу. Загальна кількість функціональних модулів в обчислювальній системі відповідає варіанту рис. 2, *а*. Модулі ММП резервують один одного. Завдання між підсистемами не розподіляються; кожен модуль підсистеми резервує ідентичний модуль іншої підсистеми. На рис. 2, *в* зображено схему внутрішнього зв'язку ФМ в обчислювальній системі, що складається з двох ММП і восьми ідентичних ФМ, наприклад, МО. Обчислювальна система використовується в разі, коли для виконання заданих функцій авіоніки потрібен обчислювальний ресурс тільки чотирьох ФМ і одного ММП; друга група модулів в тому ж складі перебуває в резерві. Усі ФМ, що перебувають у резерві, можуть замінити будь-який із ФМ, що відмовили в польоті, тобто резервування в обчислювачі ІМА реалізовано не на рівні підсистем, а на рівні ФМ. На рис. 3 зображено еквівалентні схеми для кожної зі схем, зображених на рис. 2.

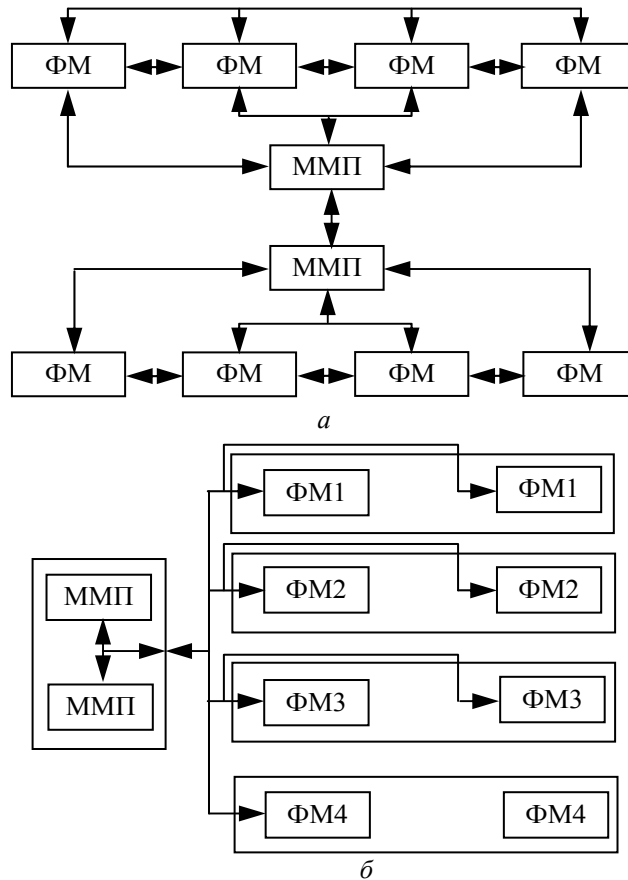


Рис. 2. Варіанти виконання бортових обчислювальних систем класу ІМА
а — резервування на рівні підсистем; *б* — резервування на рівні однотипних ФМ

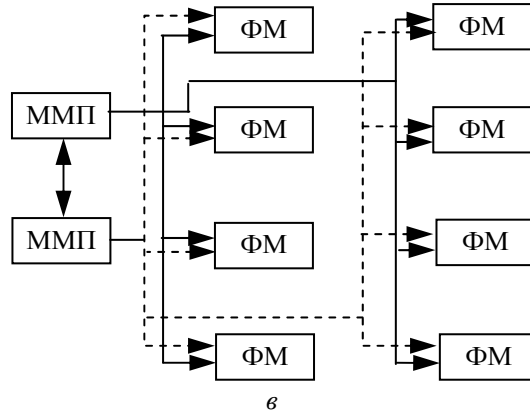


Рис. 2. Закінчення. (Див.також с.87)

Оцінювання ймовірності безвідмовної роботи обчислювачів ІМА.
 Нехай ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ одного ФМ знаходиться за формулою

$$P_{\text{ФМ}}(t) = e^{-\lambda t},$$

де λ — інтенсивність відмов елементної бази модуля; t — час польоту літального апарата.

У варіанті еквівалентної схеми надійності (рис. 3, а) ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ обчислювача ІМА буде визначатися за формулою

$$P_1(t) = 1 - (1 - (P_{\text{ММП}}(t) P_{\text{ФМ}}^4(t))^2), \quad (1)$$

де $P_{\text{ММП}}(t)$ — ймовірність безвідмовної роботи ММП; $P_{\text{ФМ}}(t)$ — ймовірність безвідмовної роботи ФМ.

У варіанті еквівалентної схеми надійності (рис. 3, б) ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ обчислювача ІМА становитиме

$$P_2(t) = [1 - (1 - P_{\text{ММП}}(t))^2] [(1 - (1 - P_{\text{ФМ1}}(t)))(1 - (1 - P_{\text{ФМ2}}(t))) \times (1 - (1 - P_{\text{ФМ3}}(t)))(1 - (1 - P_{\text{ФМ4}}(t)))] , \quad (2)$$

де $P_{\text{ФМ}_i}(t)$ — ймовірність безвідмовної роботи для i -го ФМ.

У варіанті еквівалентної схеми надійності (рис. 3, в) ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ обчислювача ІМА буде визначатися як

$$P_3(t) = [1 - (1 - P_{\text{ММП}}(t))^2] \left[\sum_{i=4}^8 [C_i^8 P_{\text{ФМ}}^i(t) (1 - P_{\text{ФМ}}(t))^{8-i}] \right]. \quad (3)$$

Якщо вважати ймовірність безвідмовної роботи всіх ФМ приблизно однакою, тобто до складу кожного ФМ входить приблизно одна й та сама кількість радіоелементів з порівнянними показниками λ -характеристик, вирази (1)–(3) набудуть вигляду відповідно:

$$P_1(t) = 1 - (1 - P^5(t))^2; \quad (4)$$

$$P_2(t) = [1 - (1 - P(t))^2] \prod_{i=1}^4 [1 - (1 - P(t))^2]; \quad (5)$$

$$P_3(t) = [1 - (1 - P(t))^2]^2 \left[\sum_{i=4}^8 [C_i^8 P^i(t) \cdot (1 - P(t))^{8-i}] \right]. \quad (6)$$

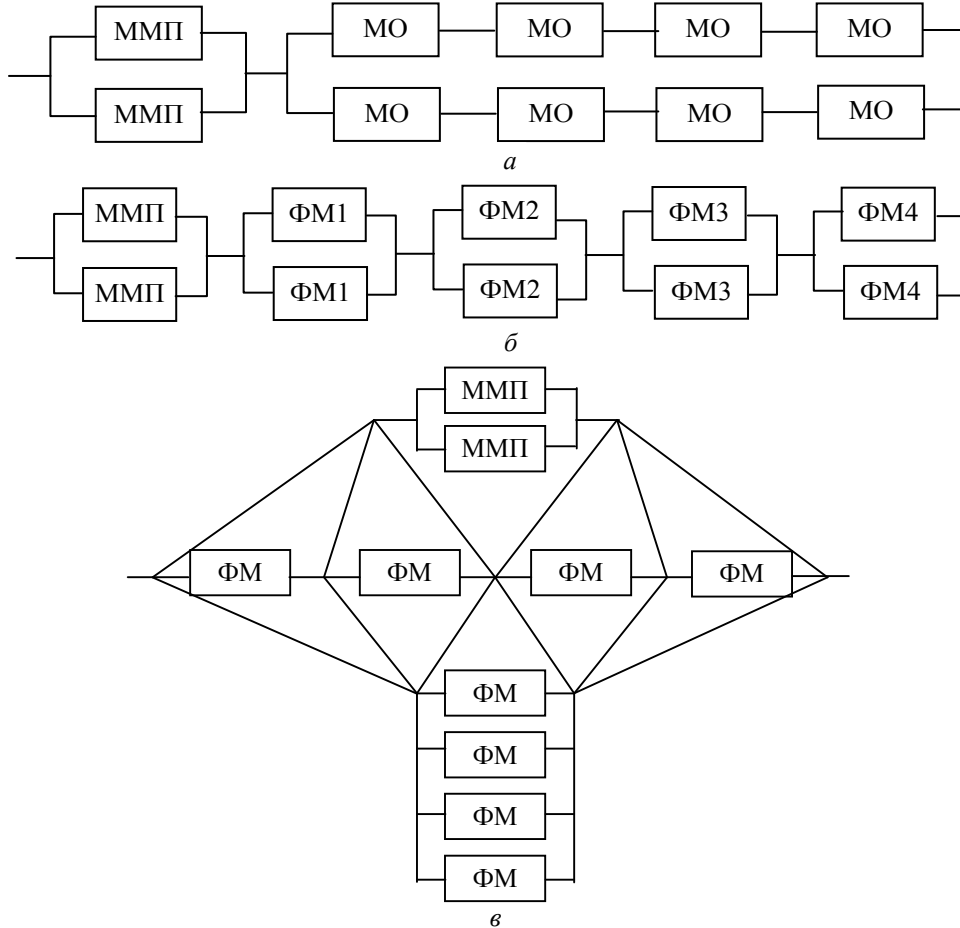


Рис. 3. Еквівалентні схеми надійності: *a* — резервування на рівні підсистем; *б* — резервування на рівні однотипних ФМ; *в* — ковзне резервування на рівні ідентичних ФМ

Сім'ї залежностей для різних варіантів застосування схем резервування в обчислювачах ІМА показано на рис. 4; зокрема на рис. 4, *a* — залежність ймовірності безвідмовної роботи для варіанта виконання обчислювальної системи на цивільному літаку. Для виконання розрахунків взято час польоту літального апарата — 25 год.

Суцільною лінією на рис. 4 показано криву, що відповідає ймовірності безвідмовної роботи для еквівалентної схеми надійності, зображеної на рис. 3, *a*, штрих-пунктирною — криву, що відповідає ймовірності безвідмовної роботи для еквівалентної схеми надійності рис. 3, *б*, пунктирною — криву, що відповідає ймовірності безвідмовної роботи для еквівалентної схеми надійності рис. 3, *в*.

Для побудови графіків для визначеності взято λ -характеристику надійності ФМ, що становить $50 \cdot 10^{-6}$ 1/год.

Залежність ймовірності безвідмовної роботи обчислювача ІМА для варіанта виконання апаратури на морському судні показано на рис. 4, *б*. Час плавання — 4 дні (96 год). Залежність ймовірності безвідмовної роботи для

варіанта виконання обчислювальної системи на космічному апараті показано на рис. 4, в. Час польоту — 5000 год.

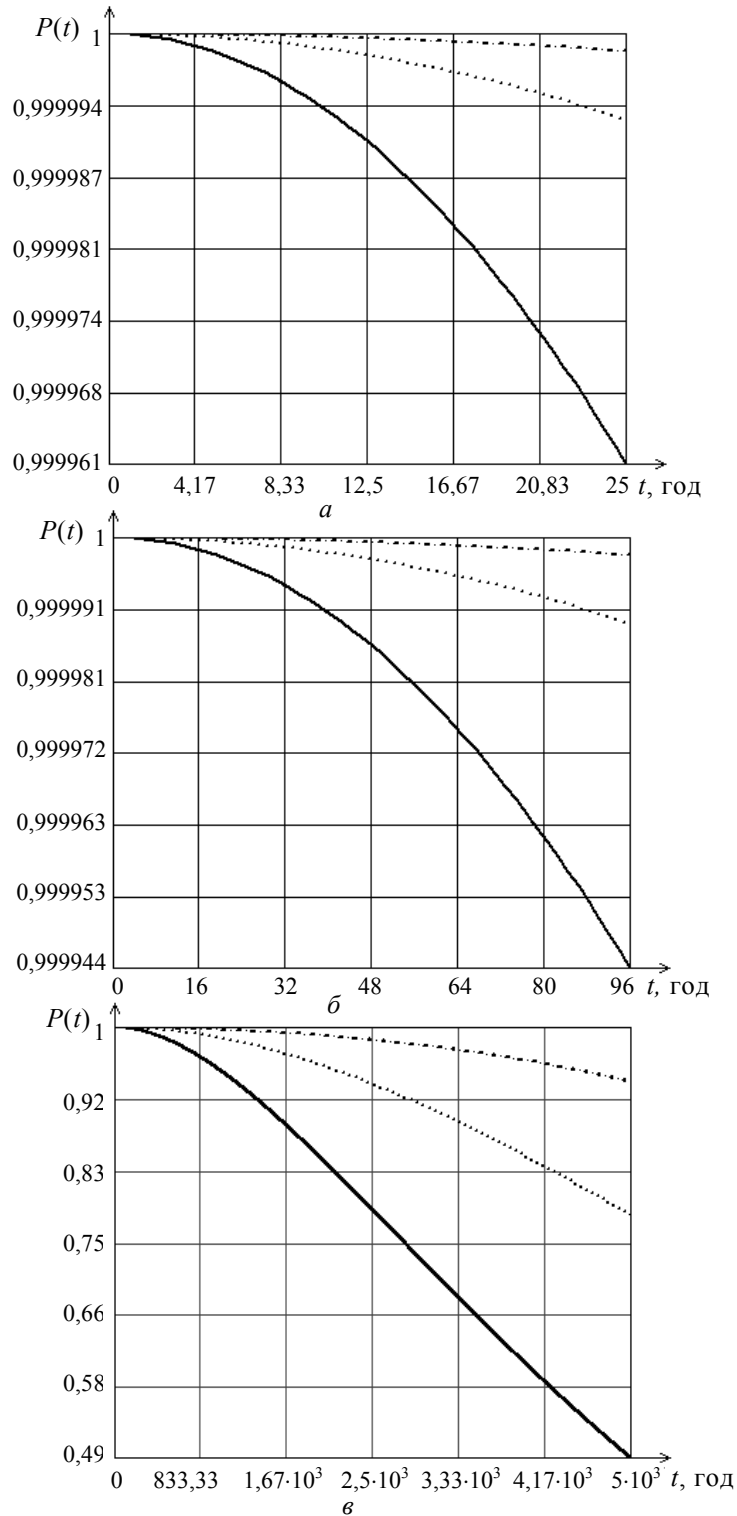


Рис. 4. Сім'ї залежностей ймовірностей безвідмовної роботи: а — для літака (25 год); б — для морського судна (96 год); в — для космічного апарата (5000 год)

Середнє напрацювання на відмову обчислювальних систем для розглянутих випадків буде розраховуватися за формулою

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (7)$$

Результати розрахунків, отримані за формулами (4)–(7), такі: $T_{P_1(t)} = 6000$ год, $T_{P_2(t)} = 10127$ год, $T_{P_3(t)} = 14444$ год.

ВИСНОВКИ

У результаті дослідження розглянуто різні варіанти реалізацій внутрішньої структури БЦОС класу ІМА. У варіанті виконання, коли система розділена на дві підсистеми, кожна з якої складається з ММП і 4 ФМ, для справного стану обчислювача необхідно, щоб усі модулі однієї підсистеми були працездатні. У разі відмови хоча б одного ФМ уся підсистема вважається несправною. Для такої системи середнє напрацювання на відмову становитиме 6000 год за λ -характеристики ФМ на рівні $50 \cdot 10^{-6}$ 1/год.

У варіанті виконання, коли в системі наявні 4 різновиди ФМ, кожен з яких резервується одним модулем такого ж типу, і 2 модулі ММП, один з яких перебуває в резерві, для виходу з ладу системи необхідно, щоб відмовили або одночасно 2 ММП, або два ФМ одного типу. Середнє напрацювання на відмову для такого випадку за λ -характеристики ФМ на рівні $50 \cdot 10^{-6}$ 1/год становитиме 10127 год.

У варіанті виконання, коли в системі наявні 8 ФМ і 2 ММП, і для роботи обчислювача досить 4 ФМ і 1 ММП, а в резерві є один ММП і 4 ФМ, середнє напрацювання на відмову за λ -характеристиці ФМ на рівні $50 \cdot 10^{-6}$ 1/год становитиме 14444 год.

Таким чином, розрахунки показали, що найбільш надійним з розглянутих варіантів є варіант виконання внутрішньої структури апаратури ІМА за схемою, зображеною на рис. 2, в.

Установлено, що для обчислювальних систем четвертого покоління використовувався послідовний принцип побудови алгоритму контролю. Показано, що для перспективних повітряних суден доцільно використовувати паралельний принцип контролю.

Запропоновано алгоритм контролю повітряного судна ІМА під час польоту. З'ясовано, що для перспективних повітряних суден слід використовувати режим «зовнішнього» ініціювання контролю з упровадженням принципу мажорювання результатів контролю функціональних елементів. Оцінено ймовірність безвідмовної роботи для трьох способів організації внутрішньої структури повітряного судна ІМА, актуальних для авіаційної промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. V. Bogatyrev, "On the distribution of functional resources in fault-tolerant multi-machine computing systems", *Pribory i Sistemy. Management, control, diagnostics*, no. 12, pp. 1–5, 2001.
2. O. Kucher and P. Vlasenko, "Comparative Analysis of Reliability and Efficiency Indicators in Foreign and National Aviation", *Knowledge-based Technology*, iss. 2, pp. 11–19, 2009.

3. B. Vidin, I. Zharinov, and O. Zharinov, "Decomposition methods in the problems of distribution of computing resources of multi-machine complexes of on-board avionics", *Information and Control Systems*, no. 1, pp. 2–5, 2010.
4. Yu. Gatchin and I. Zharinov, *Fundamentals of designing computing systems for integrated modular avionics*. Moscow, 2010.
5. Yu. Gatchin, "Models and design methods for integrated modular avionics", *Bulletin of computer and information technologies*, no. 1, pp. 12–20, 2010.
6. O. Zharinov, B. Vidin, and R. Sheklovsepyants, "Principles of constructing a crate for an onboard multiprocessor computing system for fifth generation avionics", *Scientific and Technical Bulletin of Information Technologies, Mechanics and Optics*, no. 4, pp. 21–27, 2010.
7. Yu. Gatchin, I. Zharinov, and O. Zharinov, "Architecture of software for an automated workplace for a developer of onboard aircraft equipment", *Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics*, no. 2, pp. 140–141, 2012.
8. O. Zakharova, "Algorithms and software for testing onboard digital computing systems of integrated modular avionics", *Information and Control Systems*, no. 3, pp. 19–29, 2014.
9. E. Kniga, "Principles of organizing the architecture of advanced onboard digital computing systems in avionics", *Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics*, no. 2, pp. 163–165, 2013.
10. N. Koporskiy, B. Vidin, and I. Zharinov, "Organization of a computing process in a multi-machine on-board computer complex", *Izvestiya vuzov. Instrument making*, vol. 49, no. 6, pp. 41–50, 2006.
11. O. Kuznetsova, "Evaluation of the reliability of structurally redundant avionics complexes taking into account the average time between failures", *Izvestiya vuzov. Instrument making*, vol. 55, no. 3, pp. 65–69, 2012.
12. P. Paramonov, "Principles of building a sectoral system of computer-aided design in aviation instrumentation", *Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics*, no. 6, pp. 111–117, 2012.
13. P. Paramonov and I. Zharinov, "Integrated onboard computing systems: a review of the current state and analysis of development prospects in aviation instrumentation", *Scientific and Technical Bulletin of Information Technologies, Mechanics and Optics*, no. 2, pp. 1–17, 2013.
14. Yu. Sabo and I. Zharinov, "Criterion of similarity of design solutions to the requirements of technical specifications in avionics", *Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics*, no. 3, pp. 57–63, 2010.
15. V. Bogatyrev, "Reliability and efficiency of redundancy of computer networks", *Information technologies*, no. 9, pp. 25–30, 2006.
16. V. Bogatyrev, "Optimal redundancy of the system of heterogeneous servers", *Devices and systems. Management, control, diagnostics*, no. 12, pp. 30–36, 2007.
17. V. Bogatyrev and S. Bogatyrev, "Combining redundant servers into clusters of a highly reliable computer system", *Information Technologies*, no. 6, pp. 41–47, 2009.
18. I. Kozlyuk and Y. Kovalenko, "Functional bases of the software development and operation in avionics", *Problems of Informatization and Management*, no. 63, pp. 49–63, 2020.
19. Y. Kovalenko and I. Kozlyuk, "Implementation of the integrated modular avionics application development complex according to the ARINC653 standard", *The Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 2, 2020.

Надійшла 05.02.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Iryna O. Kozlyuk, ORCID: 0000-0001-8239-8937, National Aviation University, Ukraine, e-mail: avia_ira@ukr.net

Yuliia B. Kovalenko, ORCID: 0000-0002-6714-4258, National Aviation University, Ukraine, e-mail: yleejulee22@gmail.com

НАДЕЖНОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР ИНТЕГРИРОВАННОЙ МОДУЛЬНОЙ АВИОНИКИ ДЛЯ КОНФИГУРАЦИЙ АППАРАТНЫХ СРЕДСТВ / И.А. Козлюк, Ю.Б. Коваленко

Аннотация. Рассмотрена проблема создания перспективных вычислительных систем в классе структур интегрированной модульной авионики (ИМА). Предложена унифицированная топология внутренней сети компьютера на основе каналов обмена SpaceWire и варианты ее исполнения для различных бортовых приложений. Введены схемы эквивалентной надежности каждой из частных структур и проанализированы возможности безаварийной работы каждой структуры. Приведены семейства графических зависимостей. Дан анализ существующих принципов и алгоритмов организации тестирования многопроцессорных мультимодульных бортовых цифровых вычислительных систем, предложен новый алгоритм тестирования многопроцессорных систем, соответствующий стандартам проектирования программного обеспечения для изделий ИМА. Рассмотрена структура унифицированного автоматизированного рабочего места (АРМ) проверки функциональных модулей ИМА. Выявлены специфические требования к рабочим местам для тестирования интегрированной авионики: повышенный уровень контроля аппаратной составляющей продукции; возможность моделирования отказов отдельных компонентов авионики для проверки режима реконфигурации компьютерной системы; модульное построение программного обеспечения с делением проверочных тестов на компоненты, выполняемые на уровне каждого конструктивно-функционального модуля и компьютера в целом в однозадачном и многозадачном режимах; открытость архитектуры рабочего места (АРМ), что обеспечивает возможность изменения уровня сложности управления продуктом и настройки одного класса сложности; внутрипроектная унификация как аппаратного, так и программного обеспечения АРМ проверки.

Ключевые слова: интегрированная модульная авионика, вычислительные системы, оценка показателей надежности, вероятность безотказной работы.

RELIABILITY OF COMPUTER STRUCTURES OF INTEGRATED MODULAR AVIONICS FOR HARDWARE CONFIGURATIONS / I.O. Kozlyuk, Y.B. Kovalenko

Abstract. The problem of designing advanced computing systems in the class of structures of integrated modular avionics is considered. The unified topology of the internal network of the computer on the basis of Space Wire exchange channels and variants of its execution for various onboard applications is offered. Equivalent reliability schemes of each of the specific structures are introduced and the probabilities of trouble-free operation of each structure are analyzed. Families of graphic dependencies are given. The analysis of the existing principles and algorithms for testing multiprocessor multimodal onboard digital computer systems is given; the new testing algorithm for the multiprocessor systems which follows the software design standards for products of integrated modular avionics is offered. The structure of the unified automated workplace for checking the functional modules of integrated modular avionics is considered. Specific requirements inherent in the workplaces for testing integrated avionics are identified: an increased level of control of the hardware component of products; the ability to simulate the failure state of individual components of avionics to check the mode of reconfiguration of the computer system; modular construction of software with the division of verification tests into components performed at the level of each CPM and the computer as a whole in single-task and multitasking modes; openness of architecture of a workplace, which provides an ability to change the level of control complexity of a product and control of one class of complexity; intra-project unification of both hardware and software of the workstation of the inspection.

Keywords: integrated modular avionics, computer systems, evaluation of reliability indicators, probability of trouble-free operation.

ОПЕРАЦИЯ РАЗНОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ СЕТЕЙ ПЕТРИ В ЗАДАЧЕ О ПРОИЗВОДИТЕЛЕ И ПОТРЕБИТЕЛЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ БУФЕРОМ

В.М. СТАТКЕВИЧ

Аннотация. Рассмотрены сеть Петри в задаче о производителе и потребителе (одной из классических задач синхронизации) с ограниченным буфером размера n и регулярные формальные языки L_n , которые она порождает. Согласно цели работы — получение регулярного выражения для разности языков $L_n \setminus L_m$, $n > m$ — построен конечный автомат, допускающий разницу указанных языков, далее методом исключения вершин получено регулярное выражение в рекурсивном виде. Основной результат проиллюстрирован на примерах. В качестве дополнения рассмотрено задачу с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1. Построен граф достижимости и предложено конструкцию для получения регулярного выражения. В случае задачи с двумя производителями и одним потребителем, а также задачи с одним производителем и двумя потребителями указаны явные формулы.

Ключевые слова: сеть Петри, задача о производителе и потребителе, язык сети Петри, формальный язык, регулярный язык, конечный автомат, регулярное выражение.

*Посвящается памяти
замечательного человека и математика,
доктора физико-математических наук
Николая Варфоломеевича Андреева
(20.03.1941–07.06.2021)*

ВВЕДЕНИЕ

Сети Петри являются удобным инструментом для моделирования процессов, систем и сетей [1–3]. Сеть Петри может порождать язык; в работе [1] определены 12 классов языков и указана их взаимосвязь с формальными языками, определяемыми иерархией Хомского (теория формальных языков изложена, например, в работах [4–6]).

Задача о производителе и потребителе была предложена Э. Дейкстрой [1] как одна из задач синхронизации. Существуют несколько различных вариантов этой задачи: с неограниченным буфером, с ограниченным буфером, с несколькими производителями и несколькими потребителями и др.

В работе [7] рассматривалась сеть Петри в задаче о производителе и потребителе с ограниченным буфером размера n и регулярные формальные языки L_n (L -типа), которые она порождает. Для рассмотренных языков были, в частности, найдены регулярные выражения в рекурсивном виде, для разности языков $L_n \setminus L_1$ построен допускающий конечный автомат и найдены

регулярные выражения в рекурсивном виде, а для разности языков $L_2 \setminus L_1$ — в виде явной формулы.

Цель работы, продолжающей работу [7], — получение регулярного выражения для разности языков $L_n \setminus L_m$, $n > m$. В качестве дополнения рассмотрена задача с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1; предложена конструкция для получения регулярного выражения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В задаче о производителе и потребителе процесс-производитель A производит объекты (фишки) и помещает их в буфер (позицию p_5), а процесс-потребитель B удаляет объект из буфера и использует его. Буфер имеет ограниченный размер n , следовательно введена дополнительная позиция p'_5 , имеющая n фишек (рис. 1).

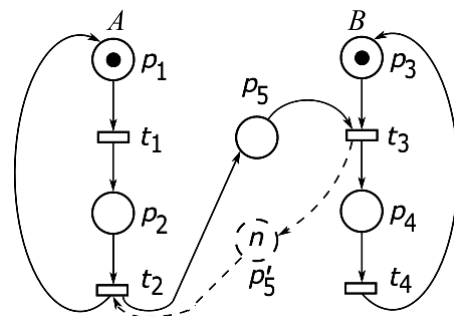


Рис. 1. Задача о производителе и потребителе

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ — алфавит, A^* — множество слов, т.е. конечных цепочек из A^* . Каждому переходу сети t_1, t_2, t_3 и t_4 сопоставим символ

алфавита a_1, a_2, a_3 и a_4 соответственно; последовательности запусков переходов — слово в алфавите A . Языком сети Петри L -типа называют множество всех таких слов, что после выполнения соответствующей последовательности запусков переходов маркировка сети является заключительной [1]; в данной задаче полагаем, что заключительная маркировка совпадает с начальной маркировкой μ_0 . Порождаемый сетью язык L -типа обозначим через L_n .

Множество регулярных выражений над алфавитом A определяется стандартным образом [4–6]: 1) 0, 1 и произвольный символ $a \in A$ являются регулярными выражениями; 2) если r и s являются регулярными выражениями, то $(r + s)$, $(r \cdot s)$ и r^* также являются регулярными выражениями; 3) иных регулярных выражений нет. Каждое регулярное выражение r задает язык $L[r] \subset A^*$, определяемый рекурсивно:

- 1) $L[0] = \emptyset$, $L[1] = \{\varepsilon\}$, $L[a] = \{a\}$ для произвольного символа $a \in A$;
- 2) $L[r + s] = L[r] \cup L[s]$, $L[r \cdot s] = L[r]L[s]$, $L[r^*] = (L[r])^*$.

Оператор параллельной композиции « \parallel » определяется следующим образом:

$$a \parallel \varepsilon = \varepsilon \parallel a = a, (ax_1 \parallel bx_2) = a(x_1 \parallel bx_2) + b(ax_1 \parallel x_2)$$

для произвольных $a, b \in A$, $x_1, x_2 \in A^*$ [1, с. 165].

Для всех достижимых маркировок $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$ выполнены равенства $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = 1$, $\mu_5 + \mu'_5 = n$; одна фишка в позициях p_1 либо

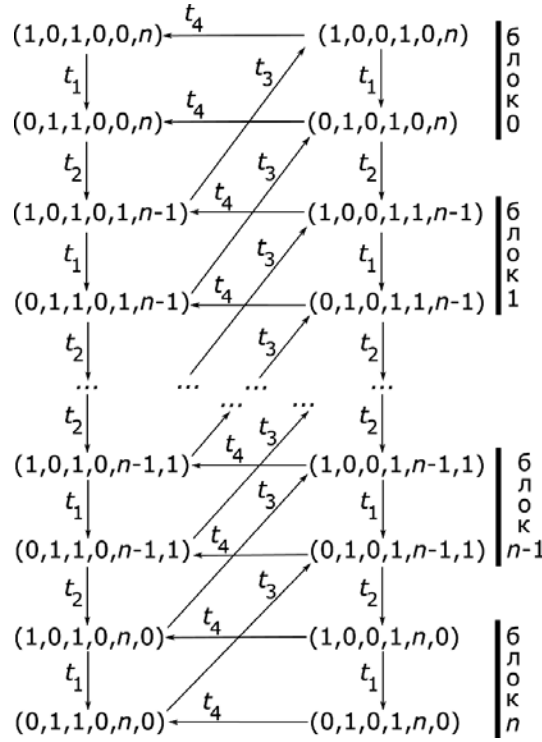


Рис. 2. Граф достижимости сети Петри

p_2 может размещаться двумя способами, одна фишка в позициях p_3 либо p_4 — также двумя способами; n фишек в позициях p_5 и p'_5 — $n+1$ способами. Потому граф достижимости, построенный в работе [7], имеет $2 \cdot 2 \cdot (n+1) = 4(n+1)$ маркировок и допускает представление в виде блочной структуры (рис. 2). По графу достижимости построен конечный автомат, допускающий язык L_n : маркировке $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$ сопоставлено состояние $q_{\mu_2+2\mu_4+4\mu_5}$, переходу сети t_i — переход автомата по символу a_i , начальной и заключительной маркировке $\mu_0 = (1,0,1,0,0,n)$ — начальное и допускающее состояние q_0 ($q_0 \in I, q_0 \in F$). Автомат имеет вид [7]

$$M(L_n) = \langle \{q_0, \dots, q_{4n+3}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta(L_n), \{q_0\}, \{q_0\} \rangle, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta(L_n) = & \{(q_i, a_1, q_{i+1}) : i:2, 0 \leq i \leq 4n+2\} \cup \{(q_i, a_2, q_{i+3}) : i:2, 1 \leq i \leq 4n-1\} \cup \\ & \cup \{(q_i, a_3, q_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4n+1\} \cup \\ & \cup \{(q_i, a_4, q_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4n+3\} \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь и далее $\bmod 4$ означает остаток от деления на 4). Следовательно, L_n — автоматный язык, потому регулярный. Регулярное выражение, задающее язык L_n , представлено, в частности, в следующем виде при помощи метода исключения вершин [7, теорема 1]:

$$L_n = L[1 + a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1} l_{n-1})^* a_3 a_4], \quad (3)$$

где регулярные выражения s_{n-1} , l_{n-1} , t_{n-1} и r_{n-1} определены рекурсивно:

$$s_0 = 0, \quad l_0 = a_2 \parallel a_4, \quad t_0 = a_2 a_1 a_4 a_3, \quad r_0 = a_1 \parallel a_3, \quad (4)$$

$$s_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* a_3 a_4 + a_1 a_2 s_k^* r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* l_k s_k^* a_3 a_4, \quad (5)$$

$$t_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* a_4 a_3, \quad (6)$$

$$l_{k+1} = (a_2 \parallel a_4) + a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* l_k s_k^* a_3 a_4, \quad (7)$$

$$r_{k+1} = (a_1 \parallel a_3) + a_1 a_2 s_k^* r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* a_4 a_3 \quad (8)$$

($k = 0, \dots, n-2$). Здесь $a_1 \parallel a_3 = a_1 a_3 + a_3 a_1$, $a_2 \parallel a_4 = a_2 a_4 + a_4 a_2$ — регулярные выражения, каждое выражение в формулах (4)–(8) также является регулярным.

РАЗНОСТЬ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ L_n И L_m

Рассмотрим разность языков L_n и L_m , $n > m$. Регулярность $L_n \setminus L_m$ следует из свойств замкнутости регулярных языков (свойства замкнутости регулярных языков, см., например, [4–6]). Построим конечный автомат $M_{n \setminus m}$, допускающий язык $L_n \setminus L_m$, согласно следующему принципу. Буфер (позиция p_5) имеет ограниченный размер n и буфер хотя бы в один момент времени содержит $m+1$ фишек. Пусть t_0 — момент времени, когда впервые выполнилось условие $\mu(p_5) = m+1$. До такта, соответствующего моменту t_0 , $M_{n \setminus m}$ функционирует согласно формулам (1), (2) как автомат $M(L_m)$, допускающий язык L_m ; начиная с указанного такта — как автомат $M(L_n)$, допускающий язык L_n :

$$\begin{aligned} M_{n \setminus m} &= \langle \{q_0^1, \dots, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, \dots, q_{4n+3}^2\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \\ \Delta_{n \setminus m}^1 &\cup \{(q_{4m+1}^1, a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^1, a_2, q_{4m+6}^2)\} \cup \Delta_{n \setminus m}^2, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle, \\ \Delta_{n \setminus m}^1 &= \{(q_i^1, a_1, q_{i+1}^1) : i \not\equiv 2, 0 \leq i \leq 4m+2\} \cup \\ &\cup \{(q_i^1, a_2, q_{i+3}^1) : i \not\equiv 2, 1 \leq i \leq 4m-1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^1, a_3, q_{i-2}^1) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4m+1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^1, a_4, q_{i-2}^1) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4m+3\}, \\ \Delta_{n \setminus m}^2 &= \{(q_i^2, a_1, q_{i+1}^2) : i \not\equiv 2, 0 \leq i \leq 4n+2\} \cup \\ &\cup \{(q_i^2, a_2, q_{i+3}^2) : i \not\equiv 2, 1 \leq i \leq 4n-1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^2, a_3, q_{i-2}^2) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4n+1\} \cup \\ &\cup \{(q_i^2, a_4, q_{i-2}^2) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4n+3\}. \end{aligned}$$

Автомат $M_{n \setminus m}$ имеет вид, показанный на рис. 3. В построенном автомате состояния q_0^1, \dots, q_{4m+3}^1 и переходы множества $\Delta_{n \setminus m}^1$ соответствуют автомату $M(L_m)$, состояния q_0^2, \dots, q_{4n+3}^2 и переходы множества $\Delta_{n \setminus m}^2$ — автомату $M(L_n)$, переходы $(q_{4m+1}^1, a_2, q_{4m+4}^2)$ и $(q_{4m+3}^1, a_2, q_{4m+6}^2)$ «связывают»

две различные части. Построенный автомат является детерминированным. Отметим, что конструкция и принцип построения конечного автомата, допускающего язык $L_n \setminus L_1$, была предложена в работе [7].

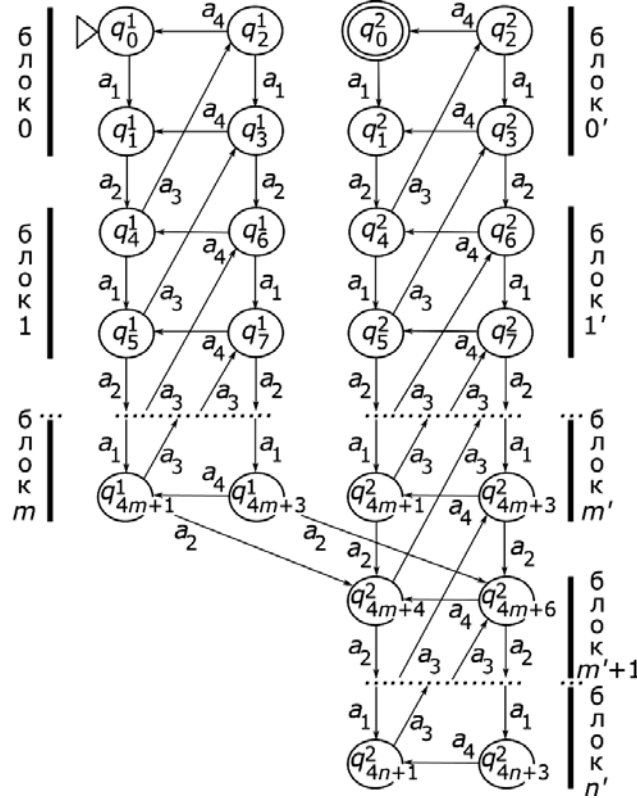


Рис. 3. Автомат, допускающий язык $L_n \setminus L_m$

Построенный автомат $M_{n \setminus m}$ используем для получения регулярного выражения для разности языков $L_n \setminus L_m$ при помощи метода удаления вершин.

Регулярное выражение для $L_n \setminus L_m$ имеет следующий рекурсивный вид.

Теорема 1. Язык $L_n \setminus L_m$, $n > m$ имеет вид $L_n \setminus L_m = L[r_{n \setminus m}]$, где

$$r_{n \setminus m} = a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{m-1} + r_{m-1} t_{m-1}^* l_{m-1}]^* [I_{m-1} + r_{m-1} t_{m-1}^* H_{m-1} + (R_{m-1} + r_{m-1} t_{m-1}^* G_{m-1})^* t_{n-1} l_{n-1}] [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1}^* l_{n-1}]^* a_3 a_4,$$

а регулярные выражения R_{m-1} , I_{m-1} , G_{m-1} и H_{m-1} определены рекурсивно:

$$R_0 = a_1 a_2 s_{n-m-1}^* r_{n-m-1} (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* a_4 a_3, \quad (9)$$

$$I_0 = s_{n-m}, \quad (10)$$

$$G_0 = a_2 a_1 (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^+ a_4 a_3, \quad (11)$$

$$H_0 = a_2 a_1 (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* a_3 a_4, \quad (12)$$

$$R_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k}))) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* a_4 a_3, \quad (13)$$

$$I_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* (r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (H_k + l_k s_k^* I_k) + I_k + (r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k}))) + R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k}) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* a_3 a_4, \quad (14)$$

$$G_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* a_4 a_3, \quad (15)$$

$$H_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* (H_k + l_k s_k^* I_k + (G_k + H_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k} + l_k s_k^* (R_k + I_k s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})) (t_{n-m+k} + l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* r_{n-m+k})^* l_{n-m+k} s_{n-m+k}^* a_3 a_4) \quad (16)$$

(здесь $k = 0, \dots, m-2$, а в формуле (11) использована запись $e^+ = e^* e$, см. например, [4, 5]).

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим автомат $M_{n/m}$. Удаляя в каждом из $m+n+2$ блоков ($m+1$ блоков в левом столбце рис. 3 и $n+1$ блоков в правом) левое нижнее и правое верхнее состояния, т.е. состояния q_i^1 , $i \bmod 4 \in \{1, 2\}$, $1 \leq i \leq 4m+2$ и q_j^2 , $j \bmod 4 \in \{1, 2\}$, $1 \leq j \leq 4n+2$, и используя оператор параллельной композиции « \parallel », получаем обобщенный автомат

$$M_1 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4n}^2, q_{4n+3}^2\}, \\ \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2)\}, \\ (q_{4m+3}^1, a_2 a_1, q_{4m+7}^2), (q_{4m+3}^1, a_2 \parallel a_4, q_{4m+4}^2)\} \cup \Delta_n^2, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_N^p = \{(q_i^p, a_1 a_2, q_{i+4}^p) : i = 0, 4, \dots, 4N-4\} \cup \\ \cup \{(q_{i+4}^p, a_3 a_4, q_i^p) : i = 0, 4, \dots, 4N-4\} \cup \\ \cup \{(q_i^p, a_2 a_1, q_{i+4}^p) : i = 3, 7, \dots, 4N-1\} \cup \{(q_{i+4}^p, a_4 a_3, q_i^p) : i = 3, 7, \dots, 4N-1\} \cup \\ \cup \{(q_i^p, a_1 \parallel a_3, q_{i-1}^p) : i = 4, 8, \dots, 4N\} \cup \\ \cup \{(q_{i-1}^p, a_2 \parallel a_4, q_i^p) : i = 4, 8, \dots, 4N\}, \quad p = 1, 2.$$

Введенное обозначение Δ_N^p ($p = 1, 2$) для различных $N \geq 0$ будет использовано далее при доказательстве теоремы (в случае $N = 0$ полагаем $\Delta_0^p = \emptyset$). Подробно метод исключения состояний изложен, например, в работах [4–6].

Шаг 2. Сначала рассмотрим случай $n \geq t + 3$.

2а. Удаляем состояние q_{4n+3}^2 , тем самым добавляя петлю $(q_{4n-1}^2, a_2 a_1 a_4 a_3, q_{4n-1}^2)$, добавляем петлю $(q_{4n}^2, 0, q_{4n}^2)$ и вводим обозначения (4).

2б. Множеству переходов полученного автомата принадлежат, в том числе, переходы

$$(q_{4n-4}^2, a_1 a_2, q_{4n}^2), (q_{4n}^2, a_3 a_4, q_{4n-4}^2), (q_{4n}^2, s_0, q_{4n}^2),$$

$$(q_{4n}^2, r_0, q_{4n-1}^2), (q_{4n-1}^2, l_0, q_{4n}^2), \quad (17)$$

$$(q_{4n-5}^2, a_2 a_1, q_{4n-1}^2), (q_{4n-1}^2, a_4 a_3, q_{4n-5}^2), (q_{4n-1}^2, t_0, q_{4n-1}^2). \quad (18)$$

Удаляем состояние q_{4n}^2 . Тогда из множества переходов удаляются переходы (17), а добавляются переходы

$$(q_{4n-4}^2, a_1 a_2 s_0^* a_3 a_4, q_{4n-4}^2), (q_{4n-4}^2, a_1 a_2 s_0^* r_0, q_{4n-1}^2),$$

$$(q_{4n-1}^2, l_0 s_0^* a_3 a_4, q_{4n-4}^2), (q_{4n-1}^2, l_0 s_0^* r_0, q_{4n-1}^2); \quad (19)$$

объединение двух параллельных петель — третьего перехода из формулы (18) и четвертого перехода из формулы (19) — дает петлю $(q_{4n-1}^2, t_0 + l_0 s_0^* r_0, q_{4n-1}^2)$. Аналогичными рассуждениями удаление состояния q_{4n-1}^2 , объединение параллельных переходов и введение регулярных выражений s_1, t_1, l_1 и r_1 согласно формулам (5)–(8) приводит к добавлению переходов

$$(q_{4n-4}^2, s_1, q_{4n-4}^2), (q_{4n-5}^2, t_1, q_{4n-5}^2), (q_{4n-4}^2, r_1, q_{4n-5}^2), (q_{4n-5}^2, l_1, q_{4n-4}^2).$$

Предложенную процедуру удаления состояний q_{4n}^2 и q_{4n-1}^2 обозначим через $\text{DEL}(q_{4n}^2, q_{4n-1}^2)$.

2в. Выполняя аналогичную пункту 2б процедуру $n - t - 2$ раз, т.е. удаляя состояния в порядке $q_{4n}^2, q_{4n-1}^2, \dots, q_{4m+1}^2$ и используя рекурсивные формулы (5)–(8), получаем автомат

$$M_2 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m+7}^2, q_{4m+8}^2\},$$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_2, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_2 = \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^1, a_2 a_1, q_{4m+7}^2), (q_{4m+3}^1, a_2 \parallel a_4, q_{4m+4}^2)\} \cup$$

$$\cup \Delta_{m+1}^2 \cup \{(q_{4m+4}^2, a_1 a_2, q_{4m+8}^2), (q_{4m+8}^2, a_3 a_4, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^2, a_2 a_1, q_{4m+7}^2),$$

$$(q_{4m+7}^2, a_4 a_3, q_{4m+3}^2), (q_{4m+8}^2, s_{n-m-2}, q_{4m+8}^2), (q_{4m+7}^2, t_{n-m-2}, q_{4m+7}^2),$$

$$(q_{4m+8}^2, r_{n-m-2}, q_{4m+7}^2), (q_{4m+7}^2, l_{n-m-2}, q_{4m+8}^2)\}.$$

Теперь рассмотрим случай $n = t + 2$ и автомат M_1 , полученный на шаге 1. Выполняя предложенные в пункте 2а действия и не выполняя анало-

гичную пункту 2б процедуру ни одного раза, получаем автомат, совпадающий с автоматом M_2 .

Заметим, что рассуждения пунктов 2а, 2б и 2в были предложены в работе [7] при доказательстве теоремы 1 [7].

Шаг 3. Сначала рассмотрим случай $n \geq t + 2$ и автомат M_2 , полученный на шаге 2. Последовательно удаляем состояния q_{4m+8}^2 и q_{4m+7}^2 . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре $\text{DEL}(q_{4m+8}^2, q_{4m+7}^2)$: при удалении состояния q_{4m+7}^2 дополнительно удаляется переход $(q_{4m+3}^1, a_2 a_1, q_{4m+7}^2)$, а также дополнительно добавляются два перехода

$$(q_{4m+3}^1, a_2 a_1 (t_{n-m-2} + l_{n-m-2} s_{n-m-2}^* r_{n-m-2})^* l_{n-m-2} s_{n-m-2}^* a_3 a_4, q_{4m+4}^2),$$

$$(q_{4m+3}^1, a_2 a_1 (t_{n-m-2} + l_{n-m-2} s_{n-m-2}^* r_{n-m-2})^* a_4 a_3 = t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2),$$

первый из которых объединяем с существующим параллельным $(q_{4m+3}^1, a_2 \parallel a_4, q_{4m+4}^2)$ и используем формулу (7). Таким образом, получаем автомат

$$M_3 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m+3}^2, q_{4m+4}^2\},$$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_3 = \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+3}^1, t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2), (q_{4m+3}^1, l_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)\} \cup$$

$$\cup \Delta_m^2 \cup \{(q_{4m}^2, a_1 a_2, q_{4m+4}^2), (q_{4m+4}^2, a_3 a_4, q_{4m}^2), (q_{4m+4}^2, s_{n-m-1}, q_{4m+4}^2),$$

$$(q_{4m+3}^2, t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2), (q_{4m+4}^2, r_{n-m-1}, q_{4m+3}^2), (q_{4m+3}^2, l_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)\}.$$

Теперь рассмотрим случай $n = t + 1$ и автомат M_1 , полученный на шаге 1.

Удаляем состояние q_{4m+7}^2 , тем самым добавляя переход $(q_{4m+3}^1, a_2 a_1 a_4 a_3 = t_0 = t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2)$ и петлю $(q_{4m+3}^2, a_2 a_1 a_4 a_3 = t_0 = t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2)$, добавляем петлю $(q_{4m+4}^2, 0 = s_0 = s_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)$ и получаем автомат, совпадающий с автоматом M_3 .

Шаг 4. Рассмотрим автомат M_3 , полученный на шаге 3. Последовательно удаляем состояния q_{4m+4}^2 и q_{4m+3}^2 . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре $\text{DEL}(q_{4m+4}^2, q_{4m+3}^2)$. При удалении состояния q_{4m+4}^2 дополнительно удаляются два перехода $(q_{4m}^1, a_1 a_2, q_{4m+4}^2)$ и $(q_{4m+3}^1, l_{n-m-1}, q_{4m+4}^2)$, а также дополнительно добавляются переходы

$$(q_{4m}^1, a_1 a_2 s_{n-m-1}^* a_3 a_4, q_{4m}^2), (q_{4m}^1, a_1 a_2 s_{n-m-1}^* r_{n-m-1}, q_{4m+3}^2),$$

$$(q_{4m+3}^1, l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* a_3 a_4, q_{4m}^2), (q_{4m+3}^1, l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1}, q_{4m+3}^2),$$

последний из которых объединяем с существующим параллельным $(q_{4m+3}^1, t_{n-m-1}, q_{4m+3}^2)$. Аналогичными рассуждениями удаление состояния q_{4m+3}^2 , объединение параллельных переходов и учет формул (5), (7), (8) приводит к автомату

$$M_4 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m}^1, q_{4m+3}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m-1}^2, q_{4m}^2\}, \\ \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_4, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle, \\ \Delta_4 = \Delta_m^1 \cup \{(q_{4m}^1, a_1 a_2 s_{n-m-1}^* r_{n-m-1} (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* a_4 a_3 \neq \\ \neq r_{n-m}, q_{4m-1}^2), \\ (q_{4m}^1, s_{n-m}, q_{4m}^2), (q_{4m+3}^1, (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^* l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* a_3 a_4 \neq \\ \neq l_{n-m}, q_{4m}^2), \\ (q_{4m+3}^1, (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^+ a_4 a_3, q_{4m-1}^2)\} \cup \Delta_{m-1}^2 \cup \{(q_{4m-4}^2, a_1 a_2, q_{4m}^2), \\ (q_{4m}^2, a_3 a_4, q_{4m-4}^2), (q_{4m}^2, s_{n-m}, q_{4m}^2), (q_{4m-1}^2, t_{n-m}, q_{4m-1}^2), \\ (q_{4m}^2, r_{n-m}, q_{4m-1}^2), (q_{4m-1}^2, l_{n-m}, q_{4m}^2)\}.$$

Заметим, что в переходе $(q_{4m+3}^1, (t_{n-m-1} + l_{n-m-1} s_{n-m-1}^* r_{n-m-1})^+ \cdot a_4 a_3, q_{4m-1}^2)$ использована запись $e^+ = e^* e$, см. например, [4, 5]; в случае $m=1$ множество $\Delta_{m-1}^2 = \emptyset$ согласно шагу 1.

Теперь удаляем состояние q_{4m+3}^1 , тем самым добавляя три перехода, среди которых петля $(q_{4m-1}^1, a_2 a_1 a_4 a_3, q_{4m-1}^1)$, добавляем петлю $(q_{4m}^1, 0, q_{4m}^1)$ и вводим обозначения (4). Также вводим обозначения R_0, I_0, G_0 и H_0 согласно формулам (9)–(12), получая автомат

$$M_5 = \langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_7^1, \dots, q_{4m-1}^1, q_{4m}^1\} \cup \{q_0^2, q_3^2, q_4^2, q_7^2, \dots, q_{4m-1}^2, q_{4m}^2\}, \\ \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_5, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle, \\ \Delta_5 = \Delta_{m-1}^1 \cup \{(q_{4m-4}^1, a_1 a_2, q_{4m}^1), (q_{4m}^1, a_3 a_4, q_{4m-4}^1), (q_{4m}^1, s_0, q_{4m}^1), \\ (q_{4m-1}^1, t_0, q_{4m-1}^1), (q_{4m}^1, r_0, q_{4m-1}^1), (q_{4m-1}^1, l_0, q_{4m}^1)\} \cup \\ \cup \{(q_{4m}^1, R_0, q_{4m-1}^2), (q_{4m}^1, I_0, q_{4m}^2), (q_{4m-1}^1, G_0, q_{4m-1}^2), (q_{4m-1}^1, H_0, q_{4m}^2)\} \cup \\ \cup \Delta_{m-1}^2 \cup \{(q_{4m-4}^2, a_1 a_2, q_{4m}^2), (q_{4m}^2, a_3 a_4, q_{4m-4}^2), (q_{4m}^2, s_{n-m}, q_{4m}^2), \\ (q_{4m-1}^2, t_{n-m}, q_{4m-1}^2), (q_{4m}^2, r_{n-m}, q_{4m-1}^2), (q_{4m-1}^2, l_{n-m}, q_{4m}^2)\}.$$

Заметим, что в случае $m=1$ множества $\Delta_{m-1}^1 = \Delta_{m-1}^2 = \emptyset$ согласно шагу 1. Укажем связь построенного автомата с рис. 3: левый и правый столбцы выровнены по высоте, а четыре перехода, «связывающие» левый и правый столбцы, названы по первым четырем буквам слова «tight», так как ведут слева направо.

Шаг 5. Рассмотрим автомат M_5 , полученный на шаге 4.

5а. Сначала рассмотрим случай $m > 1$. Последовательно удаляем состояния q_{4m}^2 и q_{4m-1}^2 . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре $\text{DEL}(q_{4m}^2, q_{4m-1}^2)$: дополнительно удаляются четыре перехода $(q_{4m}^1, R_0, q_{4m-1}^2)$, $(q_{4m}^1, I_0, q_{4m}^2)$, $(q_{4m-1}^1, G_0, q_{4m-1}^2)$ и $(q_{4m-1}^1, H_0, q_{4m}^2)$, а также дополнительно добавляются четыре перехода

$$(q_{4m}^1, (R_0 + I_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* a_4 a_3, q_{4m-5}^2), \quad (20)$$

$$(q_{4m}^1, (I_0 + (R_0 + I_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* l_{n-m}) s_{n-m}^* a_3 a_4, q_{4m-4}^2), \quad (21)$$

$$(q_{4m-1}^1, (G_0 + H_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* a_4 a_3, q_{4m-5}^2), \quad (22)$$

$$(q_{4m-1}^1, (H_0 + (G_0 + H_0 s_{n-m}^* r_{n-m})(t_{n-m} + l_{n-m} s_{n-m}^* r_{n-m})^* l_{n-m}) s_{n-m}^* a_3 a_4, q_{4m-4}^2). \quad (23)$$

Теперь последовательно удаляем состояния q_{4m}^1 и q_{4m-1}^1 . Укажем дополнения к аналогичной пункту 2б процедуре $\text{DEL}(q_{4m}^1, q_{4m-1}^1)$: дополнительно удаляются переходы (20)–(23), объединение параллельных переходов и введение регулярных выражений R_1 , I_1 , G_1 и H_1 согласно формулам (13)–(16) приводит к добавлению переходов $(q_{4m-4}^1, R_1, q_{4m-5}^2)$, $(q_{4m-4}^1, I_1, q_{4m-4}^2)$, $(q_{4m-5}^1, G_1, q_{4m-5}^2)$ и $(q_{4m-5}^1, H_1, q_{4m-4}^2)$.

5б. Выполняя аналогичную пункту 5а процедуру $m-1$ раз, т.е. удаляя состояния в порядке $q_{4m}^2, q_{4m-1}^2, q_{4m}^1, q_{4m-1}^1, \dots, q_8^2, q_7^2, q_8^1, q_7^1$ и используя рекурсивные формулы (20)–(23), получаем автомат

$$M_6 = \left\langle \{q_0^1, q_3^1, q_4^1, q_0^2, q_3^2, q_4^2\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_6, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \right\rangle,$$

$$\Delta_6 = \{(q_0^1, a_1 a_2, q_4^1), (q_4^1, a_3 a_4, q_0^1), (q_4^1, s_{m-1}, q_4^1), (q_3^1, t_{m-1}, q_3^1), (q_4^1, r_{m-1}, q_3^1),$$

$$(q_3^1, l_{m-1}, q_3^1)\} \cup \{(q_4^1, R_{m-1}, q_3^2), (q_4^1, I_{m-1}, q_4^2), (q_3^1, G_{m-1}, q_3^2), (q_3^1, H_{m-1}, q_4^2)\} \cup$$

$$\cup \{(q_0^2, a_1 a_2, q_4^2), (q_4^2, a_3 a_4, q_0^2), (q_4^2, s_{n-1}, q_4^2), (q_3^2, t_{n-1}, q_3^2),$$

$$(q_4^2, r_{n-1}, q_3^2), (q_3^2, l_{n-1}, q_3^2)\}.$$

Теперь заметим, что в случае $m=1$ автомат M_5 , полученный на шаге 4, совпадает с автоматом M_6 и выполнение аналогичной пункту 5а процедуры не требуется.

Шаг 6. Заменяем автомат M_6 на эквивалентный, удаляя переходы (q_4^1, a_3a_4, q_0^1) , (q_4^2, a_1a_2, q_4^2) и добавляя петли $(q_4^1, a_3a_4a_1a_2, q_4^1)$, $(q_4^2, a_3a_4a_1a_2, q_4^2)$. Последовательно удаляем состояния q_3^1 , q_3^2 и получаем автомат

$$M_7 = \langle \{q_0^1, q_4^1, q_0^2, q_4^2\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_7, \{q_0^1\}, \{q_0^2\} \rangle,$$

$$\Delta_7 = \{(q_0^1, a_1a_2, q_4^1), (q_4^1, a_3a_4a_1a_2 + s_{m-1} + r_{m-1}t_{m-1}^*l_{m-1}, q_4^1),$$

$$(q_4^1, I_{m-1} + r_{m-1}t_{m-1}^*H_{m-1} + (R_{m-1} + r_{m-1}t_{m-1}^*G_{m-1})t_{n-1}^*l_{n-1}, q_4^2),$$

$$(q_4^2, a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1}, q_4^2), (q_4^2, a_3a_4, q_0^2)\}.$$

Последовательным удалением состояний q_4^1 и q_4^2 получаем искомое регулярное выражение $r_{n \setminus m}$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Сравнение полученного регулярного выражения $r_{n \setminus m}$ с формулой (3) в контексте рис. 3 выявляет общее регулярное выражение $r'_n = (a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1})^*$, порожденное «сворачиванием одного столбца высоты $2n + 2$ ». Формула (3) использует r'_n один раз, а $r_{n \setminus m}$ — два экземпляра r'_m и r'_n для сворачивания левого столбца высоты $2m + 2$ и правого столбца высоты $2n + 2$ соответственно. Два экземпляра r'_m и r'_n разделены регулярным выражением, отвечающим за «связывание» левого и правого столбцов.

Для языка $L_2 \setminus L_1$ регулярное выражение найдено в работе [7] (пример 4).

Пример 1. Рассмотрим $m = 1$ и язык $L_n \setminus L_1$. Из теоремы 1 и формулы (4) следует

$$R_0 = a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2}(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3, \quad I_0 = s_{n-1},$$

$$G_0 = a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^+a_4a_3,$$

$$H_0 = a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4,$$

$$r_{n \setminus 1} = a_1a_2[a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*(a_2 \parallel a_4)]^* \cdot$$

$$\cdot [s_{n-1} + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4 +$$

$$+ (a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2}(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3 +$$

$$+ (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*a_2a_1(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^+a_4a_3)t_{n-1}^*l_{n-1}] \cdot$$

$$\cdot [a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1}]^*a_3a_4 =$$

$$= a_1a_2[a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*(a_2 \parallel a_4)]^* \cdot$$

$$\cdot [s_{n-1} + (a_1 \parallel a_3)a_2a_1(a_4a_3a_2a_1)^*(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4 +$$

$$+ (a_1 a_2 s_{n-2}^* r_{n-2} + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2})) \cdot \\ \cdot (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2})^* a_4 a_3 t_{n-1}^* l_{n-1} [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1}^* l_{n-1}]^* a_3 a_4.$$

Данное регулярное выражение совпадает с регулярным выражением $r'_{n \setminus 1}$, полученным в работе [7] (следствие 3).

Пример 2. Рассмотрим случай $n = 3$, $m = 2$ и язык $L_3 \setminus L_2$. Искомое регулярное выражение имеет вид

$$r_{3 \setminus 2} = a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_1 + r_1 t_1^* l_1]^* [I_1 + r_1 t_1^* H_1 + \\ + (R_1 + r_1 t_1^* G_1)^* t_2 l_2] [a_3 a_4 a_1 a_2 + s_2 + r_2 t_2^* l_2]^* a_3 a_4.$$

Проиллюстрируем нахождение регулярных выражений R_1 , I_1 , G_1 и H_1 согласно рекурсивным формулам (9)–(16). Из формул (4)–(8) следует

$$s_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4,$$

$$t_1 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* a_4 a_3,$$

$$l_1 = (a_2 \parallel a_4) + a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4,$$

$$r_1 = (a_1 \parallel a_3) + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* a_4 a_3.$$

Из теоремы 1 получаем

$$R_0 = a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* a_4 a_3 \neq r_1,$$

$$I_0 = s_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4,$$

$$G_0 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^+ a_4 a_3,$$

$$H_0 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4 \neq l_1,$$

$$R_1 = a_1 a_2 (R_0 + s_1^+ r_1 + (a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* \cdot$$

$$\cdot (G_0 + H_0 s_1^* r_1 + (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1))) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* a_4 a_3,$$

$$I_1 = a_1 a_2 ((a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (H_0 + (a_2 \parallel a_4) s_1) + s_1 +$$

$$+ ((a_1 \parallel a_3) (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (G_0 + H_0 s_1^* r_1 + (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1)) +$$

$$+ R_0 + s_1^+ r_1) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* l_1) s_1^* a_3 a_4,$$

$$G_1 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (G_0 + H_0 s_1^* r_1 +$$

$$+ (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1)) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* a_4 a_3,$$

$$H_1 = a_2 a_1 (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3))^* (H_0 + (a_2 \parallel a_4) s_1 +$$

$$+ (G_0 + H_0 s_1^* r_1 + (a_2 \parallel a_4) (R_0 + s_1^+ r_1)) (t_1 + l_1 s_1^* r_1)^* l_1) s_1^* a_3 a_4.$$

Замечание 2. Напомним, что высотой итерации или звездной высотой $\text{sh } r$ регулярного выражения r называется наибольшая глубина вложения операции замыкания Клини, а высотой итерации регулярного языка $\text{sh } L$ — наименьшая из высот итераций регулярных выражений, задающих язык L [5, 8]. В работе [7] получены равенства $\text{sh } L_1 = \text{sh } L_2 = 2$ и оценка $\text{sh } L_n \leq 2n - 3$ ($n \geq 3$), а также равенство $\text{sh}(L_n \setminus L_m) = \text{sh } L_n$. Потому получаем оценку $\text{sh}(L_n \setminus L_m) \leq 2n - 3$ ($n \geq 3$).

Замечание 3. Граф автомата $M(L_n)$ имеет $4n + 4$ вершин и $8n + 4$ ребер, что следует из формул (1), (2), граф автомата $M_{n \setminus m}$ — $4m + 4n + 8$ вершин и $8m + 8n + 10$ ребер. Потому данные графы являются разреженными (каждая вершина имеет не более двух смежных ей вершин с учетом ориентации ребер) и для хранения их в памяти компьютера удобно использовать списки смежности [9]. Для представления ориентированного графа $G = \langle V, E \rangle$ с $|V|$ вершинами и $|E|$ ребрами в виде списков смежности требуемый объем памяти $O(|V| + |E|)$ [9], потому с учетом $n > m$ получаем, что для представления автоматов $M(L_n)$ и $M_{n \setminus m}$ в виде списков смежности требуемый объем памяти компьютера $O(n)$, т.е. линейно зависит от размера буфера сети Петри. Временная сложность построения автомата также $O(n)$.

ДОПОЛНЕНИЕ: ЗАДАЧА С ДВУМЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯМИ И ДВУМЯ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ БУФЕРОМ РАЗМЕРА 1

Рассмотрим задачу с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1, когда в позициях p_1 и p_3 (см. рис. 1) в начальной маркировке μ_0 имеются по две фишки. Для всех достижимых маркировок $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$ выполняются равенства $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = 2$, $\mu_5 + \mu'_5 = 1$; две фишки в позициях p_1 и p_2 могут размещаться тремя способами, две фишки в позициях p_3 и p_4 — также тремя способами, одна фишка в позициях p_5 либо p'_5 — двумя способами. Потому граф достижимости имеет $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ маркировок и допускает представление в виде блочной структуры. Поставим вопрос нахождения регулярного выражения для языка L -типа, который порождает данная сеть (заключительная маркировка, как и ранее, совпадает с μ_0). По графу достижимости строим конечный автомат, изображенный на рис. 4: маркировке $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu'_5)$ сопоставляем состояние $q_{\mu_2 \mu_4}^{\mu_5}$, переходу сети t_i — переход автомата по символу a_i , начальной маркировке $\mu_0 = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$ — начальное состояние q_{00}^0 автомата. Автомат имеет вид

$$M_1 = \left\langle \{q_{ij}^k : i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2; k = 0, 1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_1, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta_1 = \{(q_{ij}^k, a_1, q_{i+1, j}^k) : i = 0, 1; j = 0, 1, 2; k = 0, 1\} \cup$$

$$\cup \{(q_{ij}^0, a_2, q_{i-1, j}^1) : i = 1, 2; j = 0, 1, 2\} \cup \{(q_{ij}^1, a_3, q_{i, j+1}^0) : i = 0, 1, 2; j = 0, 1\} \cup$$

$$\cup \{(q_{ij}^k, a_4, q_{i,j-1}^k) : i = 0,1,2; j = 1,2; k = 0,1\}.$$

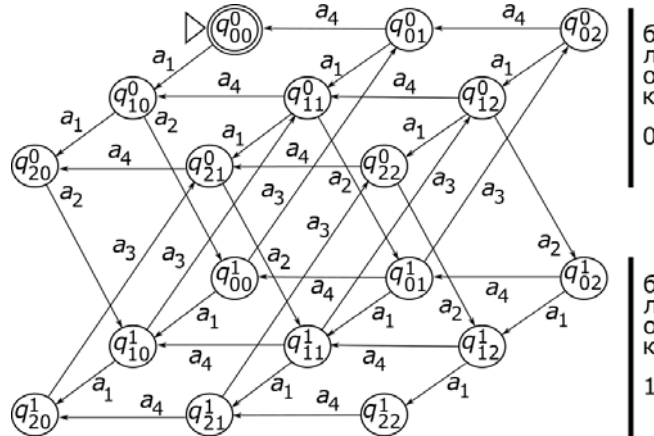


Рис. 4. Задача с двумя производителями и двумя потребителями

Здесь состоянию автомата q_{ij}^k отвечает маркировка сети $(2-i, i, 2-j, j, k, 1-k)$, множество переходов Δ_1 содержит 36 переходов. Заметим, что состояния q_{ij}^k в случае $i, j, k \in \{0,1\}$ отвечают задаче с одним производителем и одним потребителем, в случае $i \in \{0,1,2\}, j, k \in \{0,1\}$ — задаче с двумя производителями и одним потребителем, в случае $i, k \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2\}$ — задаче с одним производителем и двумя потребителями, а состояния q_{22}^0 и q_{12}^1 образованы «интерференцией» двух производителей и двух потребителей. Рис. 4 имеет форму куба, где верхняя плоскость отвечает блоку 0 ($k = 0$), а нижняя — блоку 1 ($k = 1$).

Удаляем состояния $q_{ij}^k, i + j \geq 2$, т.е. состояния $q_{01}^0, q_{10}^0, q_{21}^0, q_{12}^0, q_{01}^1, q_{10}^1, q_{21}^1$ и q_{12}^1 , объединяем параллельные переходы и используем записи

$$a_1 \parallel a_3 = a_1 a_3 + a_3 a_1, \quad a_1 \parallel a_4 = a_1 a_4 + a_4 a_1,$$

$$a_2 \parallel a_4 = a_2 a_4 + a_4 a_2, \quad a_3 \parallel a_4 = a_3 a_4 + a_4 a_3 :$$

$$M_2 = \langle \{q_{00}^k, q_{02}^k, q_{11}^k, q_{20}^k, q_{22}^k : k = 0,1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_2 \cup \Delta''_2, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^1\} \rangle,$$

$$\Delta'_2 = \{(q_{00}^0, a_1^2, q_{20}^0), (q_{02}^0, a_1^2, q_{22}^0), (q_{00}^1, a_1^2, q_{20}^1), (q_{02}^1, a_1^2, q_{22}^1),$$

$$(q_{02}^0, a_4^2, q_{00}^0), (q_{22}^0, a_4^2, q_{00}^0), (q_{02}^1, a_4^2, q_{00}^1), (q_{22}^1, a_4^2, q_{00}^1),$$

$$(q_{20}^0, a_2 a_3, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_2 a_3, q_{02}^0), (q_{20}^1, a_3 a_2, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_3 a_2, q_{02}^1),$$

$$(q_{02}^0, a_1 \parallel a_4, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_1 \parallel a_4, q_{20}^0), (q_{02}^1, a_1 \parallel a_4, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_1 \parallel a_4, q_{20}^1)\},$$

$$\Delta''_2 = \{(q_{00}^0, a_1 a_2, q_{10}^0), (q_{02}^0, a_1 a_2, q_{10}^0), (q_{20}^0, a_2 a_1, q_{12}^0), (q_{22}^0, a_2 a_1, q_{12}^0),$$

$$(q_{00}^1, a_3 a_4, q_{00}^0), (q_{20}^1, a_3 a_4, q_{20}^0), (q_{02}^1, a_4 a_3, q_{02}^0), (q_{22}^1, a_4 a_3, q_{22}^0)\},$$

$$(q_{11}^0, a_2 \parallel a_4, q_{00}^1), (q_{22}^0, a_2 \parallel a_4, q_{11}^1), (q_{00}^1, a_1 \parallel a_3, q_{11}^0), (q_{11}^1, a_1 \parallel a_3, q_{22}^0), \\ (q_{11}^0, a_1 \parallel a_2, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_3 \parallel a_4, q_{11}^0)\}.$$

Множество Δ'_2 содержит 16 переходов внутри одного блока 0 и внутри одного блока 1, а множество Δ''_2 — 14 переходов между двумя блоками.

Для дальнейших рассуждений используем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $x, y, z, t \in A$. Тогда выполняются равенства:

- а) $x \parallel yz = xyz + yxz + yzx$;
- б) $x \parallel (y \parallel zt) = xyzt + yxzt + yzxt + yztx + xzyt + zxyt + zyxt + \\ + zytx + xzty + zxt y + ztxy + ztyx$;
- в) $x \parallel (y \parallel zx) = xyzx + yxzx + yzx^2 + xzyx + zxyx + zyx^2 + xzxy + zx^2y$;
- г) $x \parallel (x \parallel yz) = x^2yz + xyxz + xzyx + yx^2z + yxzx + yzx^2$;
- д) $x \parallel (y \parallel xz) = xyxz + yx^2z + yxzx + x^2yz + xzyx + x^2zy + xzxy + xzyx$;
- е) $(x \parallel y) \parallel (x \parallel y) = xyx y + x^2y^2 + yx^2y + yx yx + xy^2x + y^2x^2$.

Доказательство каждого пункта леммы основано на определении оператора параллельной композиции « \parallel » и не вызывает затруднений. Заметим, что приоритет оператора параллельной композиции ниже, чем оператора конкатенации. Также заметим, что правая часть каждого равенства является регулярным выражением, задающим конечный язык, потому и регулярный язык.

В автомате M_2 удаляем состояния $q_{20}^0, q_{02}^0, q_{00}^1, q_{11}^1, q_{22}^1$ и объединяем параллельные переходы с использованием леммы 1, получая автомат

$$M_3 = \left\langle \{q_{00}^0, q_{11}^0, q_{22}^0, q_{20}^1, q_{02}^1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta_3 = \{(q_{00}^0, a_1 a_2 a_3 a_4 = e_1, q_{00}^0), (q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3) = e_2, q_{11}^0),$$

$$(q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2) a_1 = e_3, q_{20}^1), (q_{11}^0, (a_4 \parallel a_2 a_3) a_4 = e_4, q_{00}^0),$$

$$(q_{11}^0, a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_3) = e_5, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_2 a_3 a_1^2 + (a_1 \parallel a_2)(a_1 \parallel a_3) = e_6, q_{22}^0),$$

$$(q_{11}^0, a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_7, q_{20}^1), (q_{11}^0, (a_1 \parallel a_2 a_3) a_2 = e_8, q_{02}^1),$$

$$(q_{22}^0, a_4^2 a_2 a_3 + (a_2 \parallel a_4)(a_3 \parallel a_4) = e_9, q_{11}^0),$$

$$(q_{22}^0, a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) = e_{10}, q_{22}^0),$$

$$(q_{22}^0, a_4 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_{11}, q_{20}^1), (q_{22}^0, (a_2 \parallel a_4) a_3 a_2 = e_{12}, q_{02}^1),$$

$$(q_{20}^1, a_3 (a_4 \parallel a_2 a_3) = e_{13}, q_{11}^0), (q_{20}^1, a_3 a_2 (a_1 \parallel a_3) = e_{14}, q_{22}^0),$$

$$(q_{20}^1, a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_{15}, q_{20}^1), (q_{20}^1, (a_3 a_2)^2 = e_{16}, q_{02}^1),$$

$$(q_{02}^1, a_4 (a_3 \parallel a_4) a_4 = e_{17}, q_{00}^0), (q_{02}^1, a_4 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3) = e_{18}, q_{11}^0),$$

$$(q_{02}^1, a_1 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3) = e_{19}, q_{22}^0), (q_{02}^1, (a_1 \parallel a_4) \parallel (a_1 \parallel a_4) = e_{20}, q_{20}^1),$$

$$(q_{02}^1, (a_1 \parallel a_4 a_3) a_2 = e_{21}, q_{02}^1).$$

Множество переходов Δ_3 содержит 21 переход. Отметим, что пункт а) леммы был использован для получения регулярных выражений $e_2, e_4, e_8, e_{13}, e_{15}$ и e_{21} , например,

$$e_2 = a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) = a_1 (a_1 a_2 a_3 + a_2 a_1 a_3 + a_2 a_3 a_1) = a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3);$$

пункты б), в), д) и е) — для получения выражений

$$e_5 = a_2 a_3 (a_1 \parallel a_4) + (a_1 \parallel a_4) a_2 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3) +$$

$$+ (a_1 \parallel a_2) (a_3 \parallel a_4) = a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_3),$$

$$e_7 = (a_1 \parallel a_4) a_2 a_1 + (a_2 \parallel a_4) a_1^2 + (a_1 \parallel a_2) (a_1 \parallel a_4) = a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1),$$

$$e_{18} = a_4^2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_4) (a_3 \parallel a_4) + a_4 a_3 (a_1 \parallel a_4) = a_4 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3),$$

$$e_{20} = a_1^2 a_4^2 + a_4^2 a_1^2 + (a_1 \parallel a_4)^2 = (a_1 \parallel a_4) \parallel (a_1 \parallel a_4)$$

соответственно; пункт г) — для получения выражений e_{11} и e_{19} , например,

$$e_{11} = a_4^2 a_2 a_1 + a_2 a_1 a_4^2 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_4) = a_4 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1).$$

Дальнейшим последовательным удалением состояний в порядке $q_{20}^1, q_{02}^1, q_{22}^0$ и q_{11}^0 можно получить регулярное выражение. Предложенный порядок удаления обусловлен такими рассуждениями: автомат M_3 не содержит состояний q_{ij}^k с пустыми петлями $(q_{ij}^k, 0, q_{ij}^k)$; выражения e_{15}, e_{21}, e_{10} и e_5 , отвечающие петлям $(q_{20}^1, e_{15}, q_{20}^1), (q_{02}^1, e_{21}, q_{02}^1), (q_{22}^0, e_{10}, q_{22}^0)$ и $(q_{11}^0, e_5, q_{11}^0)$, имеют 3, 3, 5 и 12 слагаемых соответственно. Также отметим, что автомат M_3 имеет лишь 4 пустых перехода $(q_{00}^0, 0, q_{22}^0), (q_{00}^0, 0, q_{02}^1), (q_{22}^0, 0, q_{00}^0)$ и $(q_{20}^1, 0, q_{00}^0)$, а после удаления состояний q_{20}^1 и q_{02}^1 получаемый автомат на трех состояниях $\{q_{00}^0, q_{11}^0, q_{22}^0\}$ является полным.

Рассмотрим предложенную конструкцию на двух примерах.

Пример 3 (задача с двумя производителями и одним потребителем с ограниченным буфером размера 1). Граф достижимости имеет $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ маркировок, а автомат M_1 , как отмечалось выше, модифицируется с учетом условия $j \in \{0, 1\}$. Удалением состояний $q_{ij}^k, i + j \neq 2$, т.е. состояний $q_{01}^0, q_{10}^0, q_{21}^0, q_{01}^1, q_{10}^1$ и q_{21}^1 получаем автомат

$$M_2 = \left\langle \{q_{00}^k, q_{11}^k, q_{20}^k : k = 0, 1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_2 \cup \Delta''_2, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle,$$

$$\Delta'_2 = \{(q_{00}^0, a_1^2, q_{20}^0), (q_{00}^1, a_1^2, q_{20}^1), (q_{20}^0, a_2 a_3, q_{11}^0),$$

$$\begin{aligned} & (q_{20}^1, a_3 a_2, q_{11}^1), (q_{11}^0, a_1 \parallel a_4, q_{20}^0), (q_{11}^1, a_1 \parallel a_4, q_{20}^1) \}, \\ \Delta_2'' = & \{ (q_{00}^0, a_1 a_2, q_{00}^1), (q_{20}^0, a_2 a_1, q_{20}^1), (q_{00}^1, a_3 a_4, q_{00}^0), (q_{20}^1, a_3 a_4, q_{20}^0), \\ & (q_{11}^0, a_2 \parallel a_4, q_{00}^1), (q_{00}^1, a_1 \parallel a_3, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_1 \parallel a_2, q_{11}^1), (q_{11}^1, a_4 a_3, q_{11}^0) \}. \end{aligned}$$

Удалением состояний q_{20}^0 , q_{00}^1 , q_{11}^1 и объединением параллельных переходов с использованием леммы 1 получаем автомат

$$\begin{aligned} M_3 = & \left\langle \{q_{00}^0, q_{11}^0, q_{20}^1\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_{00}^0\}, \{q_{00}^0\} \right\rangle, \\ \Delta_3 = & \{ (q_{00}^0, a_1 a_2 a_3 a_4 = e_1, q_{00}^0), (q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3) = e_2, q_{11}^0), \\ & (q_{00}^0, a_1 (a_1 \parallel a_2) a_1 = e_3, q_{20}^1), (q_{11}^0, (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4 = e_4, q_{00}^0), \\ & (q_{11}^0, (a_1 \parallel (a_2 \parallel a_4)) a_3 + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1 = e_5, q_{11}^0), (q_{11}^0, a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_6, q_{20}^1), \\ & (q_{20}^1, a_3 (a_2 \parallel a_4) a_3 = e_7, q_{11}^0), (q_{20}^1, a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1) = e_8, q_{20}^1) \}. \end{aligned}$$

Отметим, что пункт а) леммы был использован для получения регулярных выражений e_2 и e_8 , пункт в) — для получения выражения e_6 , а выражение e_5 получено следующим образом:

$$\begin{aligned} e_5 = & (a_1 \parallel a_4) a_2 a_3 + (a_2 \parallel a_4) (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_2) a_4 a_3 = \\ = & (a_1 a_4 a_2 + a_4 a_1 a_2 + a_2 a_4 a_1 + a_4 a_2 a_1 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_1 a_4) a_3 + \\ & + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1 = (a_1 \parallel (a_2 \parallel a_4)) a_3 + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1. \end{aligned}$$

Последовательно удаляя состояния q_{20}^1 и q_{11}^0 , получаем искомое регулярное выражение

$$\begin{aligned} & [a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1 (a_1 \parallel a_2 a_3) + a_1 (a_1 \parallel a_2) a_1 [a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1)]^* a_3 (a_2 \parallel a_4) a_3) \cdot \\ & \cdot [(a_1 \parallel (a_2 \parallel a_4)) a_3 + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_1 + (a_1 \parallel (a_4 \parallel a_2 a_1))] \cdot \\ & \cdot [a_3 (a_4 \parallel a_2 a_1)]^* a_3 (a_2 \parallel a_4) a_3]^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4]^* \end{aligned}$$

высотой итерации 3, откуда следует, что высота итерации соответствующего языка не превышает 3.

Пример 4 (задача с одним производителем и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1). Граф достижимости также имеет $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ маркировок, автомат M_1 модифицируется с учетом условия $i \in \{0,1\}$. Удаляем состояния q_{ij}^k , $i + j \geq 2$, т.е. состояния q_{01}^0 , q_{10}^0 , q_{12}^0 , q_{01}^1 , q_{10}^1 и q_{21}^1 , затем последовательно — состояния q_{02}^0 , q_{00}^1 , q_{11}^1 , q_{02}^1 и q_{11}^0 (рассуждения аналогичны примеру 3). Искомое регулярное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} & [a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) [a_2 (a_1 \parallel (a_3 \parallel a_4)) + a_4 a_2 (a_1 \parallel a_3) + \\ & + a_2 (a_1 \parallel a_3) a_2 [(a_1 \parallel a_4 a_3) a_2]^* (a_4 \parallel (a_1 \parallel a_4 a_3))]^* \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot ((a_4 \parallel a_2 a_3) a_4 + a_2 (a_1 \parallel a_3) a_2 [(a_1 \parallel a_4 a_3) a_2]^* a_4 (a_3 \parallel a_4) a_4)^*$$

его высота итерации также равна 3, потому высота итерации соответствующего языка не превышает 3.

ВЫВОДЫ

Получено регулярное выражение для разности формальных языков $L_n \setminus L_m$, $n > m$, где L_n — регулярный формальный язык, порождаемый сетью Петри в задаче о производителе и потребителе с ограниченным буфером размера n . В качестве дополнения предложена конструкция для получения регулярного выражения для формального языка, порождаемого сетью Петри в задаче с двумя производителями и двумя потребителями с ограниченным буфером размера 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Питерсон, *Теория сетей Петри и моделирование систем*. М.: Мир, 1984, 264 с.
2. В.Е. Котов, *Сети Петри*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1984, 160 с.
3. Т. Мурата, “Сети Петри: Свойства, анализ, приложения”, *ТИИЭР*, т. 77, № 4, с. 41–85, 1989.
4. А.Е. Пентус и М.Р. Пентус, *Теория формальных языков*. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004, 80 с.
5. А.Е. Пентус и М.Р. Пентус, *Математическая теория формальных языков*. М.: “Бином”, 2006, 247 с.
6. Дж.Э. Хопкрофт, Р. Мотвани, и Дж.Д. Ульман, *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*. М.: “Вильямс”, 2002, 528 с.
7. В.М. Статкевич, “Регулярные выражения для некоторых языков сетей Петри в задаче о производителе и потребителе”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 3, с. 105–123, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.08
8. А. Саломая, *Жемчужины теории формальных языков*. М.: Мир, 1986, 159 с.
9. Ф.А. Новиков, *Дискретная математика для программистов*. СПб: Питер, 2000, 304 с.

Поступила 25.02.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Vitalii M. Statkevych, ORCID: 0000-0001-5210-9890, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: mstatkevich@yahoo.com

ОПЕРАЦІЯ РІЗНИЦІ ДЛЯ РЕГУЛЯРНИХ МОВ МЕРЕЖ ПЕТРІ В ЗАДАЧІ ПРО ПОСТАЧАЛЬНИКА ТА СПОЖИВАЧА З ОБМЕЖЕНИМ БУФЕРОМ / В.М. Статкевич

Анотація. Розглянуто мережу Петрі в задачі про постачальника та споживача (одній з класичних задач синхронізації) з обмеженим буфером розміру n і регулярні формальні мови L_n , які вона породжує. Згідно з метою роботи —

отримання регулярного виразу для різниці мов $L_n \setminus L_m$, $n > m$ — побудовано скінченний автомат, який допускає різницю вказаних мов, методом вилучення вершин отримано регулярний вираз в рекурсивній формі. Основний результат проілюстровано на прикладах. Як доповнення розглянуто задачу з двома постачальниками та двома споживачами з обмеженим буфером розміру 1. Побудовано граф досяжності та запропоновано конструкцію для отримання регулярного виразу. У випадку задачі з двома постачальниками та одним споживачем, а також задачі з одним постачальником та двома споживачами вказано явні формули.

Ключові слова: мережа Петрі, задача про постачальника та споживача, мова мережі Петрі, формальна мова, регулярна мова, скінченний автомат, регулярний вираз.

SET DIFFERENCE OPERATION FOR REGULAR PETRI NET LANGUAGES FOR THE PRODUCER/CONSUMER PROBLEM WITH THE BOUNDED BUFFER / V.M. Statkevych

Abstract. We consider a Petri net for the producer/consumer problem (one of the classical synchronization problems) with the bounded buffer of size n and the regular formal languages L_n , generated by the net. The objective of this paper is to obtain a regular expression for the set difference of languages $L_n \setminus L_m$, $n > m$. For this purpose, we give the finite automaton which accepts the set difference of mentioned languages, and then we use the state elimination method to obtain the regular expression in the recursive form. The main result is illustrated by the examples. In an appendix, we consider the problem with two producers and two consumers with the bounded buffer of size 1. We give a reachability graph and propose the method for obtaining the regular expression. The explicit formulas are given for the problem with two producers and one consumer and also for the problem with one producer and two consumers.

Keywords: Petri net, producer/consumer problem, Petri net language, formal language, regular language, finite automaton, regular expression.

REFERENCES

1. J. Peterson, *Petri net theory and modeling of systems*. Moscow: Mir, 1984.
2. V.E. Kotov, *Petri nets*. Moscow: Nauka, 1984.
3. T. Murata, “Petri nets: Properties, analysis and applications”, *Trudy Instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike*, vol. 77, no. 4, pp. 41–85, 1989.
4. A.E. Pentus and M.R. Pentus, *Formal language theory*. Moscow: Mekhaniko-matematicheskii fakul'tet Moskovskogo Gosudarstvenogo Universiteta, 2004.
5. A.E. Pentus and M.R. Pentus, *The mathematical theory of formal languages*. Moscow: Binom, 2006.
6. J.E. Hopcroft, R. Motwani and J.D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Moscow: Williams Publishing House, 2002.
7. V.M. Statkevych, “Regular expressions for some Petri net languages for the producer/consumer problem”, *System Research & Information Technologies*, no. 3, pp. 105–123, 2020. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2020.3.08
8. A. Salomaa, *Jewels of formal language theory*. Moscow: Mir, 1986.
9. F.A. Novikov, *Discrete mathematics for programmers*. St. Petersburg: Piter, 2000.

ТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАУКОВЦІВ НА ОСНОВІ ЇХ ІНТЕРЕСІВ У GOOGLE SCHOLAR

С.Д. ШТОВБА, М.В. ПЕТРИЧКО

Анотація. Запропоновано алгоритм тематичного моделювання науковців за науковими спеціальностями на основі їх інтересів у профілях у Google Scholar. Алгоритм використовує перелік наукових спеціальностей із системи класифікації наук ANZSRC. Інформаційним ресурсом для тематичного моделювання є база категоризованих наукових публікацій із системи Dimensions. Інтереси з профілів науковців використовуються як пошукові запити для Dimensions, сервіси якої видають розподіли релевантних документів за спеціальностями. Для зменшення інформаційного шуму ці розподіли проходять декілька етапів оброблення. Порівнюються результати тематичного моделювання на основі профільних інтересів у Google Scholar і категоризованого списку авторських публікацій у Dimensions за метрикою Чекановського з урахуванням спорідненості спеціальностей. Для тестових науковців виявлено високу узгодженість результатів тематичного моделювання за різної початкової інформації.

Ключові слова: тематичне моделювання, категоризація, Google Scholar, Dimensions, ANZSRC, профіль науковця, наукові інтереси, метрика Чекановського, індекс Жакара.

ВСТУП

Сьогодні професійні спільноти людей взаємодіють у різноманітних онлайн-мережах. Не винятком є і спільнота науковців. Найбільшою онлайн-мережею науковців є Google Scholar. Зокрема, у цій мережі у відкритому доступі понад 50 тисяч профілів українських науковців. Такий величезний ресурс виглядає привабливим для розроблення технологій аналітичного опрацювання нагромадженої в ньому інформації з метою ідентифікації лідерів — статей, науковців, університетів та журналів; виявлення тенденцій наукових досліджень; кластеризації науковців; підбору партнерів для спільних проєктів, опонентів дисертацій, рецензентів рукописів тощо.

Найчастіше із профілів науковців у Google Scholar використовують дані про цитованість. Її, наприклад, використовують як початкові дані для рейтингування університетів у Webometrics. Створено також кілька інформаційних систем на базі Google Scholar, найбільш відомими серед яких є Publish or Perish і Scholarometer [1]. Багато досліджень, зокрема [2, 3], стосуються перевірки достовірності цитованості в Google Scholar порівняно з наукометричними системами Scopus, Web of Science, Dimensions та іншими, які наповнюються виключно за метаданими з видавництва.

Окрім списку публікацій та їх цитування у профілі науковця міститься і інша інформація. Зокрема, науковець у профілі вказує свої інтереси, і робить він це на власний розсуд, обираючи слова у довільний спосіб. Google Scholar дозволяє виконувати пошук науковців за тим чи іншим інтересом. Але видачі формуються за буквальним збігом. Тому видачі для *fuzzy set* і *fuzzy sets*

будуть різними, не говорячи вже про синонімічні інтереси типу *fuzzy evidence* і *fuzzy inference*. Google Scholar не враховує і сукупність інтересів користувача, тобто пошук за кожним інтересом виконується незалежно та ізольовано. Відповідно, в одну видачу потраплять науковці, що поміж своїх інтересів вказали *безпеку* в сенсі як *security*, так і *safety*. Таким чином, пошукові та аналітичні сервіси за велетенським масивом профілів науковців у Google Scholar досить примітивні.

Мета роботи — тематичне моделювання науковців на основі їх інтересів у Google Scholar. Методи опрацювання інтересів із профілів науковців у Google Scholar є мало дослідженими. Нами виявлено лише дві релевантні публікації. Перша з них [4] стосується рекомендаційної системи для підбору наукового керівника, яка поміж інших джерел інформації використовує і інтереси кандидатів з їх профілів у Google Scholar. Друга публікація [5] описує інформаційну технологію синтезу наукового профілю інституту чи дослідницької лабораторії. Ця технологія, поміж іншої інформації, використовує і інтереси науковців з їх профілів у Google Scholar. Праці [4, 5] базуються на використанні попарного порівняння за косинусової метрики близькості — відстані між науковцем та набором ключових слів з деякої тематики. Такою тематикою в [4] обрано статтю у Вікіпедії. На відміну від цих праць, будемо намагатися категоризувати науковців у межах деякої класифікації наук, тобто розподілити їх за науковими спеціальностями.

Автоматична категоризація науковців виконується зазвичай в результаті узагальнення тематик їх публікацій. Для цього у праці [6] запропоновано статистичну модель «автор – тема» на основі тематичного моделювання з використанням прихованого розподілу Діріхле (LDA) [7]. Модель подає науковця як розподіл над деякими абстрактними темами. Теми є кластерами схожих слів. Її недоліком є погана інтерпретація тем, оскільки вони формуються за частотою слів у одному документі. Для покращення інтерпретації у [8] запропоновано модель «автор – дисципліна – тема». У ній для опису науковця додатково використовують наукову спеціальність, яка визначається за журналом чи збірником статей, у якому опубліковано аналізовану працю. На виході науковець подається сукупністю належностей до наукових спеціальностей. У праці [9] для підбору рецензентів запропоновано модель «автор – персона – тема». У ній враховано те, що автори часто пишуть про декілька різних комбінацій тем з однієї предметної галузі. Дуже рідко особа є експертом в усіх аспектах якоїсь предметної галузі. За результатами моделювання науковця зіставляють з декількома персонами (personas). Кожна персона є кластером статей науковця зі своїм тематичним розподілом. У праці [10] розвинуто методи [8, 9] моделлю «автор – інтерес – тема», яка містить документи зі схожими темами як один клас документів, подібно до того, як тематичні моделі подають спільну появу (co-occurrence) слів як одну тематичну змінну.

Окрім методів на основі тематичного моделювання також використовуються моделі на основі ембедингу слів (word embedding) [11–14]. Однією з найпопулярніших моделей ембедингу слів є модель word2vec [15]. На відміну від прихованого розподілу Діріхле [7], прихованого семантичного аналізу (pLSA) [16] та інших статистичних моделей, які породжують імовірнісний розподіл на основі спільної появи слів та документів, word2vec

фокусується на контекстуальній (семантичній та синтаксичній) інформації слів. Згадані методи показують непогану ефективність для таких завдань, як рекомендація рецензентів, пошук експертів тощо. Результати моделювання подаються у вигляді векторів, які складно інтерпретувати.

Проаналізовані методи передбачають наявність достатньої кількості статей науковця з виділеними ключовими словами. При цьому не враховується, що співавторами статті можуть бути кілька науковців, на кожного з яких припадає деяка підмножина з усього списку ключових слів. Причому з десятка ключових слів статті внесок співавтора може відображати лише одне ключове слово. Крім того, науковець, особливо молодий, може і не мати достатньої кількості статей для достовірної категоризації. Утім він може самостійно задати у профілі набір ключових слів, який описує його дослідження. Із часом науковець може змінити напрям своєї діяльності, наприклад, працювати в іншій лабораторії чи над іншим проектом. Але його продовжуватимуть категоризувати за давніми публікаціями. У зв'язку з цим виникла зацікавленість у тематичному моделюванні на основі інтересів, які науковець власноруч сформулював на поточний момент, тобто на основі актуальної та узагальненої початкової інформації, що позбавлена наведених вище недоліків.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Вважатимемо відомими:

$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ — список ключових слів, якими науковець у своєму профілі в Google Scholar на власний розсуд описав свої інтереси;

$T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ — перелік можливих тем у формі списку наукових спеціальностей за деякою класифікацією наук;

D_1, D_2, \dots, D_m — тематичні колекції розмічених текстів, кожна з яких містить лише публікації з тем t_1, t_2, \dots, t_m відповідно;

$B = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$ — загальна колекція розмічених текстів, тобто множина публікацій, кожна з яких стосується однієї або декількох тем з множини T ;

$R(D, T) \subset D \times T$ — відношення, яке описує належність публікацій до тематичних колекцій.

Задача полягає у знаходженні тем з T , яким відповідає сукупність інтересів W . Будемо вказувати не лише сам факт належності, але і ступінь належності. Таким чином, на виході отримуємо нечітку множину \tilde{W} на універсальній множині тем T :

$$\tilde{W} = \left(\frac{\mu_W(t_1)}{t_1}, \frac{\mu_W(t_2)}{t_2}, \dots, \frac{\mu_W(t_m)}{t_m} \right),$$

де $\mu_W(t_p) \in [0, 1]$ — ступінь належності сукупності інтересів W до спеціальності t_p , $p = \overline{1, m}$.

На \tilde{W} накладемо такі обмеження:

1) потужність носія нечіткої множини \tilde{W} має бути невеликою $1 \leq |\text{support}(\tilde{W})| \leq T_{\max}$, наприклад, за $T_{\max} \in \{2, 3, 4\}$ науковець відповідати-ме лише кільком спеціальностям;

2) $\sum_{p=1, m} \mu_W(t_p) = 1$, що ототожнюється з умовою регуляризації тематичного моделювання.

ДОБУВАННЯ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

Для отримання списку ключових слів науковця скористаємося його профілем у Google Scholar. Для прикладу на рис. 1 наведено профіль науковця з двома ключовими словами $w_1 = \text{"neural networks"}$ та $w_2 = \text{"artificial intelligence"}$. Послідовність ключових слів у множині W неважлива, що відповідає врахуванню інформації за схемою мішка слів (bag of words). Часто інтереси у профілі доповнюють один одного, тим самим фокусуючи тематику досліджень. Щоб це врахувати синтезуємо додаткові ключові слова у вигляді пар початкових інтересів. Інтереси в парах поєднаємо логічною операцією TA . Для науковця з рис. 1 додаткове ключове слово запишемо як $w_3 = \text{"neural networks" AND "artificial intelligence"}$. Якщо у профілі науковця вказано три інтереси, буде синтезовано три додаткові ключові слова, якщо у профілі чотири інтереси, тоді синтезується шість додаткових ключових слів, якщо п'ять інтересів, тоді десять додаткових ключових слів тощо. Синтез додаткових парних ключових слів є своєрідним аналогом дистантного поєднання слів (word co-occurrence), яке дозволяє зменшити вербальний шум.



Artem Chernodub

Applied Research Scientist at Grammarly

Підтверджено адресу електронної пошти в домені grammarly.com

neural networks artificial intelligence

Рис. 1. Приклад профілю науковця з двома інтересами

Для тематичного моделювання науковців необхідно обрати систему класифікації наукових спеціальностей. Їх багато, але під час вибору системи класифікації врахуємо не лише її змістовні переваги і недоліки, але і наявність відповідної інформаційної системи з доступними пошуковими сервісами. При цьому база даних системи має індексувати велику кількість категоризованих публікацій, які охоплюють усі наукові галузі. Інформаційною системою, яка задовольняє перераховані вимоги, є Dimensions.

Натепер Dimensions індексує понад 110 млн публікацій. Усі публікації в Dimensions категоризовано за дворівневим варіантом Австралійсько-новозеландського стандарту ANZSRC (Australian and New Zealand Standard Research Classification). У ньому науку поділено на 22 галузі (Divisions) із 154 спеціальностями (Research Groups). Цей дворівневий варіант ANZSRC, який і будемо надалі використовувати, подано в табл. 1.

Таблиця 1. Система класифікації наук ANZSRC, що використовується у Dimensions

Галузь	Спеціальність
Mathematical Sciences	A1 – Pure Mathematics; A2 – Applied Mathematics; A3 – Numerical and Computational Mathematics; A4 – Statistics; A5 – Mathematical Physics
Physical Sciences	B1 – Astronomical and Space Sciences; B2 – Atomic, Molecular, Nuclear, Particle and Plasma Physics; B3 – Classical Physics; B4 – Condensed Matter Physics; B5 – Optical Physics; B6 – Quantum Physics; B7 – Other Physical Sciences
Chemical Sciences	C1 – Analytical Chemistry; C2 – Inorganic Chemistry; C3 – Macromolecular and Materials Chemistry; C4 – Medicinal and Biomolecular Chemistry; C5 – Organic Chemistry; C6 – Physical Chemistry (incl. Structural); C7 – Theoretical and Computational Chemistry; C8 – Other Chemical Sciences
Earth Sciences	D1 – Atmospheric Sciences; D2 – Geochemistry; D3 – Geology; D4 – Geophysics; D5 – Oceanography; D6 – Physical Geography and Environmental Geoscience; D7 – Other Earth Sciences
Environmental Sciences	E1 – Ecological Applications; E2 – Environmental Science and Management; E3 – Soil Sciences; E4 – Other Environmental Sciences
Biological Sciences	F1 – Biochemistry and Cell Biology; F2 – Ecology; F3 – Evolutionary Biology; F4 – Genetics; F5 – Microbiology; F6 – Physiology; F7 – Plant Biology; F8 – Zoology; F9 – Other Biological Sciences
Agricultural and Veterinary Sciences	G1 – Agriculture, Land and Farm Management; G2 – Animal Production; G3 – Crop and Pasture Production; G4 – Fisheries Sciences; G5 – Forestry Sciences; G6 – Horticultural Production; G7 – Veterinary Sciences; G8 – Other Agricultural and Veterinary Sciences
Information and Computing Sciences	H1 – Artificial Intelligence and Image Processing; H2 – Computation Theory and Mathematics; H3 – Computer Software; H4 – Data Format; H5 – Distributed Computing; H6 – Information Systems; H7 – Library and Information Studies; H8 – Other Information and Computing Sciences
Engineering	I1 – Aerospace Engineering; I2 – Automotive Engineering; I3 – Biomedical Engineering; I4 – Chemical Engineering; I5 – Civil Engineering; I6 – Electrical and Electronic Engineering; I7 – Environmental Engineering; I8 – Food Sciences; I9 – Geomatic Engineering; I10 – Manufacturing Engineering; I11 – Maritime Engineering; I12 – Materials Engineering; I13 – Mechanical Engineering; I14 – Resources Engineering and Extractive Metallurgy; I15 – Interdisciplinary Engineering; I16 – Other Engineering
Technology	J1 – Agricultural Biotechnology; J2 – Environmental Biotechnology; J3 – Industrial Biotechnology; J4 – Medical Biotechnology; J5 – Communications Technologies; J6 – Computer Hardware; J7 – Nanotechnology; J8 – Other Technology
Medical and Health Sciences	K1 – Medical Biochemistry and Metabolomics; K2 – Cardiorespiratory Medicine and Haematology; K3 – Clinical Sciences; K4 – Complementary and Alternative Medicine; K5 – Dentistry; K6 – Human Movement and Sports Science; K7 – Immunology; K8 – Medical Microbiology; K9 – Neurosciences; K10 – Nursing; K11 – Nutrition and Dietetics; K12 – Oncology and Carcinogenesis; K13 – Ophthalmology and Optometry; K14 – Paediatrics and Reproductive Medicine; K15 – Pharmacology and Pharmaceutical Sciences; K16 – Medical Physiology; K17 – Public Health and Health Services; K18 – Other Medical and Health Sciences
Built Environment and Design	L1 – Architecture; L2 – Building; L3 – Design Practice and Management; L4 – Engineering Design; L5 – Urban and Regional Planning; L6 – Other Built Environment and Design
Education	M1 – Education Systems; M2 – Curriculum and Pedagogy; M3 – Specialist Studies In Education; M4 – Other Education
Economics	N1 – Economic Theory; N2 – Applied Economics; N3 – Econometrics; N4 – Other Economics
Commerce, Management, Tourism and Services	O1 – Accounting, Auditing and Accountability; O2 – Banking, Finance and Investment; O3 – Business and Management; O4 – Commercial Services; O5 – Marketing; O6 – Tourism; O7 – Transportation and Freight Services

Продовження табл. 1

Галузь	Спеціальність
Studies in Human Society	P1 – Anthropology; P2 – Criminology; P3 – Demography; P4 – Human Geography; P5 – Policy and Administration; P6 – Political Science; P7 – Social Work; P8 – Sociology; P9 – Other Studies In Human Society
Psychology and Cognitive Sciences	Q1 – Psychology; Q2 – Cognitive Sciences; Q3 – Other Psychology and Cognitive Sciences
Law and Legal Studies	R1 – Law; R2 – Other Law and Legal Studies
Studies in Creative Arts and Writing	S1 – Art Theory and Criticism; S2 – Film, Television and Digital Media; S3 – Journalism and Professional Writing; S4 – Performing Arts and Creative Writing; S5 – Visual Arts and Crafts; S6 – Other Studies In Creative Arts and Writing
Language, Communication and Culture	T1 – Communication and Media Studies; T2 – Cultural Studies; T3 – Language Studies; T4 – Linguistics; T5 – Literary Studies; T6 – Other Language, Communication and Culture
History and Archaeology	U1 – Archaeology; U2 – Curatorial and Related Studies; U3 – Historical Studies; U4 – Other History and Archaeology
Philosophy and Religious Studies	V1 – Applied Ethics; V2 – History and Philosophy of Specific Fields; V3 – Philosophy; V4 – Religion and Religious Studies; V5 – Other Philosophy and Religious Studies

Запит до інформаційної системи Dimensions формуємо окремо за кожним елементом множини W . Якщо цей елемент є словосполученням, тоді подамо його у лапках. Пошук виконуємо за назвою та рефератом публікацій 2016–2020 рр. Приклад видачі за пошуковим запитом “*neural networks*” подано у вигляді рис. 2. За кожною спеціальністю та за кожною галуззю виводиться кількість публікацій, у назві або в рефераті яких фігурує пошуковий вираз. Видачу відсортовано за спаданням кількості публікацій. Також можна отримати загальну кількість публікацій за кожною спеціальністю, тобто обсяги тематичних колекцій.

The screenshot shows the Dimensions search results for the query "neural networks". The search criteria are "2020 OR 2019 OR 2018 OR 2017 OR 2016" (Publication Year) and "neural networks" (Free text in title and abstracts). The results are displayed in a table under the "ANALYTICAL VIEWS" tab, showing "Research Categories" related to the search. The categories are sorted by the number of publications in descending order.

Name	Public...
Information and Computing Sciences 08	166,393
Artificial Intelligence and Image Processi... 0801	160,334
Engineering 09	36,948
Medical and Health Sciences 11	19,443

Рис. 2. Видача Dimensions за пошуковим запитом “*neural networks*”

Dimensions індексує переважно англomовні публікації, тому всі інтереси з профілю науковця в Google Scholar необхідно попередньо перекласти англійською мовою. Інколи науковці вказують у своєму профілі один і той самий інтерес кількома мовами, наприклад, *neural networks* та *нейронні мережі*. У такому випадку ці два інтереси об'єднаємо в один англomовний — *neural networks*.

АЛГОРИТМ ТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Тематичне моделювання науковців виконаємо на базі таких принципів:

- *статистичного підтримання* — чим більша частка публікацій з певної спеціальності містить аналізоване ключове слово, тим більша належність ключового слова до цієї спеціальності;
- *багаторяжковості* — ключове слово може належати до кількох спеціальностей;
- *фільтрації шумів* — ігноруються спеціальності, до яких ключове слово належить з незначним ступенем;
- *ігнорування стоп-слів* — ігнорується ключове слово, яке трапляється у дуже багатьох категоризованих публікаціях;
- *солідарності* — чим більше ключових слів за окремими запитамі належить до однієї і тієї ж спеціальності, тим більша можливість належності науковця до цієї спеціальності;
- *фокусування* — якщо в тематичній колекції багато публікацій, які містять кілька ключових слів науковця одночасно, тоді збільшуються шанси належності науковця до відповідної спеціальності.
- *компактності* — один науковець може належати лише до невеликої кількості спеціальностей;
- *взаємодії спеціальностей* — під час відсікання хвоста розподілу тем, внесок мінорних спеціальностей перерозподіляється на лідерів з урахуванням їх схожості.

Наведені принципи пропонується реалізувати алгоритмом, який містить три ділянки. На першій ділянці формується множина запитів на основі ключових слів та їх поєднання. Використовуємо лише пари ключових слів, тому що видачі за трійками часто виявляються порожніми, але при цьому суттєво збільшується тривалість пошуку.

На другій ділянці алгоритму (рис. 3) виконується тематичне моделювання за кожним запитом окремо. Спеціальності обираємо за частотою входження запиту в тематичну колекцію. Частота розраховується як відношення кількості документів, що містять пошуковий вираз, до загальної кількості документів зі спеціальності. При цьому стоп-слова та шуми фільтруються за кількістю входжень в усю колекцію документів із застосуванням порогових значень. Вилучаються і мінорні спеціальності. Спочатку вилучаємо за пороговим значенням кількості знайдених документів, які належать до відповідної спеціальності, а потім — за кумулятивним принципом, відсікаючи хвіст розподілу за пороговим значенням.

На третій ділянці алгоритму (рис. 4) усереднюємо належності за всіма запитами та відсікаємо хвіст сукупного розподілу за пороговим значенням. Далі вилучаємо спеціальності з низьким рівнем належності таким чином, щоб результат став компактним і представницьким, коли науковець відповідає не більше ніж чотирьом спеціальностям, причому до кожної з них належність є значущою.

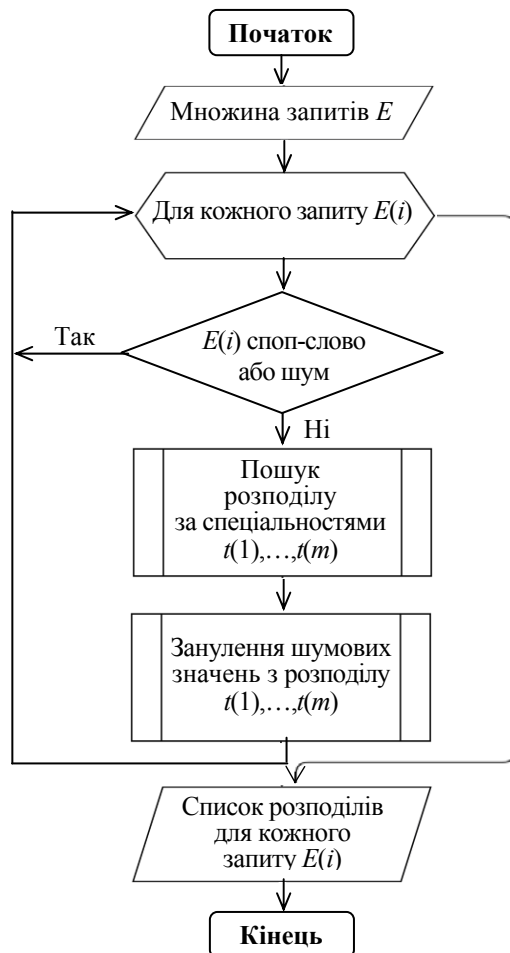


Рис. 3. Блок-схема другої ділянки алгоритму тематичного моделювання

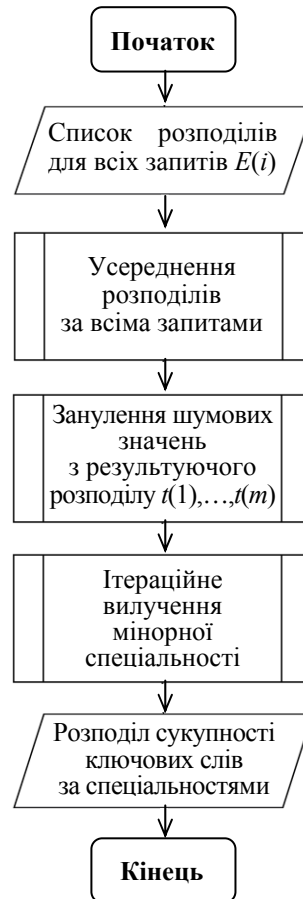


Рис. 4. Блок-схема третьої ділянки алгоритму тематичного моделювання

На третій ділянці роботи алгоритму під час ітераційного вилучення мінорної спеціальності її внесок перерозподіляється на інші спеціальності з урахуванням коефіцієнтів схожості із праці [17]. Наприклад, нехай на проміжному етапі науковця віднесено до наукових спеціальностей таким чином:

$$\tilde{W} = \left(\frac{0,5}{\text{H6}}, \frac{0,2}{\text{O5}}, \frac{0,2}{\text{O6}}, \frac{0,1}{\text{O4}} \right).$$

Вилучимо мінорну спеціальність О4. Для цього спочатку за методом [17] знайдемо коефіцієнти Жакара між О4 та іншими спеціальностями. Вони за даними 2016–2020 рр. такі: $J(\text{O4}, \text{H6}) = 0$, $J(\text{O4}, \text{O5}) = 0,13$, $J(\text{O4}, \text{O6}) = 0,22$. З урахуванням схожості внесок мінорної спеціальності О4 перерозподіляється таким чином:

$\tilde{W} = \left(\frac{0,5 + 0 \cdot 0,1}{H6}, \frac{0,2 + 0,13 \cdot 0,1}{O5}, \frac{0,2 + 0,22 \cdot 0,1}{O6} \right)$. Підрахувавши, отримуємо

$\tilde{W} = \left(\frac{0,5}{H6}, \frac{0,213}{O5}, \frac{0,222}{O6} \right)$. Після нормування на 1 маємо результат:

$\tilde{W} = \left(\frac{0,535}{H6}, \frac{0,228}{O5}, \frac{0,237}{O6} \right)$.

ПОКРОКОВИЙ КОНТРОЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Проілюструємо роботу алгоритму на прикладі тематичного моделювання науковця з рис. 1. За двома інтересами науковця сформовано три пошукові запити. Частоту входжень трьох ключових слів у тематичні колекції показано на рис. 5, а результати після першого відсікання хвостів розподілів — на рис. 6. Далі усереднюємо за усіма запитами (рис. 7) і відсікаємо хвіст розподілу (рис. 8). Проміжний розподіл став перенаповненим через зашироке формулювання науковцем своїх інтересів. Для фокусування результатів тематичного моделювання на заключному етапі алгоритму розподіл обрізаємо до двох спеціальностей (рис. 9). У результаті науковець з інтересами в галузі штучного інтелекту та нейронних мереж найбільше відповідає спеціальностям *H1 – Artificial Intelligence and Image Processing* зі ступенем належності 0,767 та *Q2 – Cognitive Sciences* зі ступенем належності 0,233. Така категоризація науковця не суперечить поглядам авторів цієї статті. Із прикладу видно, що навіть за двома початковими ключовими словами запропонований алгоритм достатньо точно знаходить відповідність науковця спеціальностям.

ПОРІВНЯННЯ З КАТЕГОРИЗАЦІЄЮ ЗА СТАТТЯМИ

Перевіримо узгодженість результатів тематичного моделювання науковців на основі ключових слів з їх профілів у Google Scholar та на основі категоризованих статей у Dimensions. Для цього відберемо трьох науковців: А. Чернодуба (див. рис 1), Є. Бодянського (рис. 10) та Н. Куссуль (рис. 11). Ці науковці мають у Dimensions велику кількість публікацій за п'ять останніх років, що дозволяє отримати статистично значущі результати.

За аналізований період А. Чернодуб опублікував 22 праці, які категоризовано за п'ятьма спеціальностями. Найбільше публікацій — 11 потрапило до спеціальності *H1*. Є. Бодянський опублікував 88 робіт. Вони категоризовані за 12 спеціальностями. Найбільше публікацій — 59 потрапило до спеціальності *H1*. Н. Куссуль опублікувала 47 робіт, які категоризовано за 14 спеціальностями. Найбільше публікацій — 21 потрапило до спеціальності *I9*.

За розподілами публікацій за спеціальностями з використанням третьої ділянки алгоритму тематичного моделювання отримаємо належності науковців до спеціальностей (табл. 2). Там же вказано результати тематичного моделювання на основі інтересів науковців у Google Scholar.

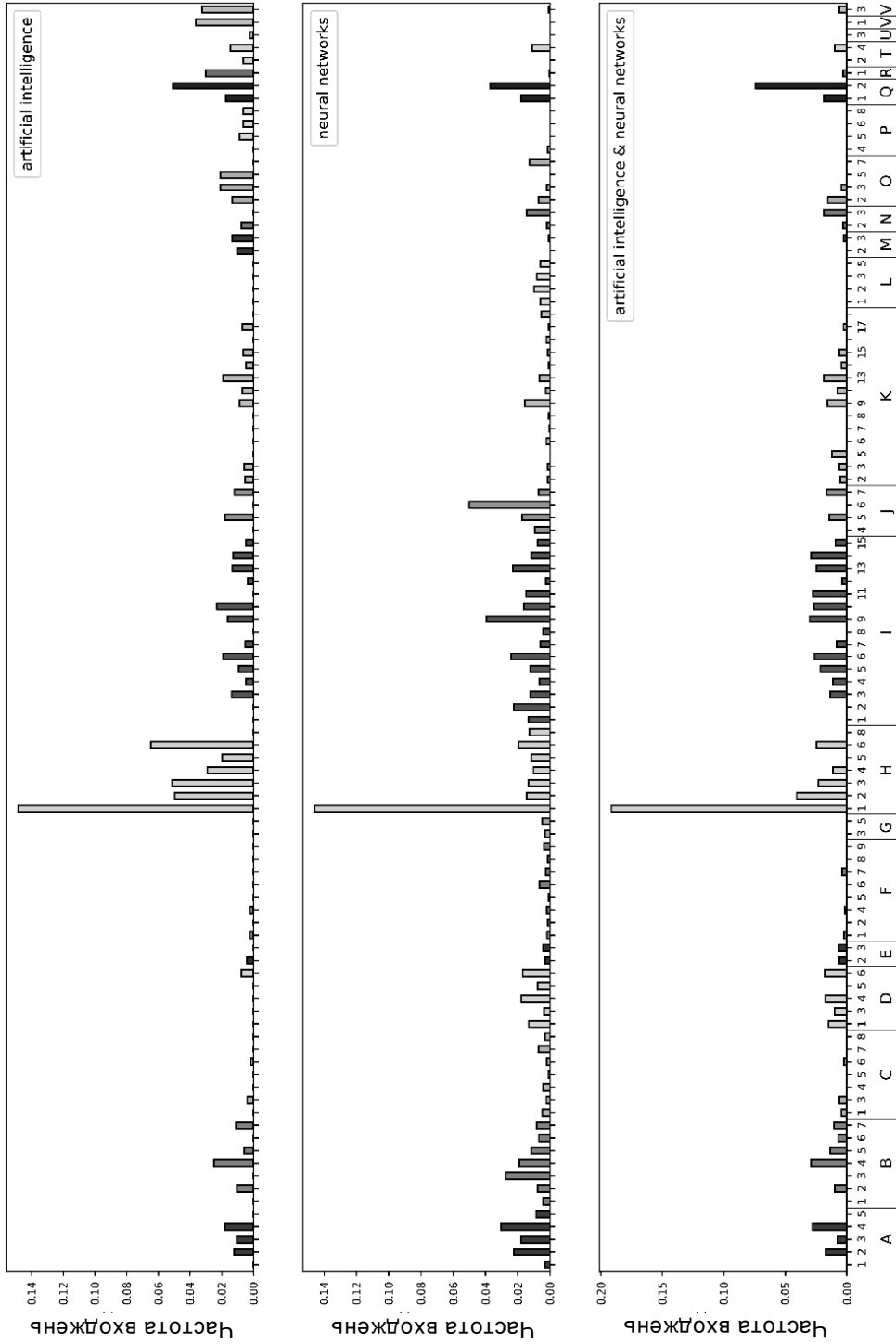


Рис. 5. Початковий розподіл належності кожного інтересу до спеціальностей

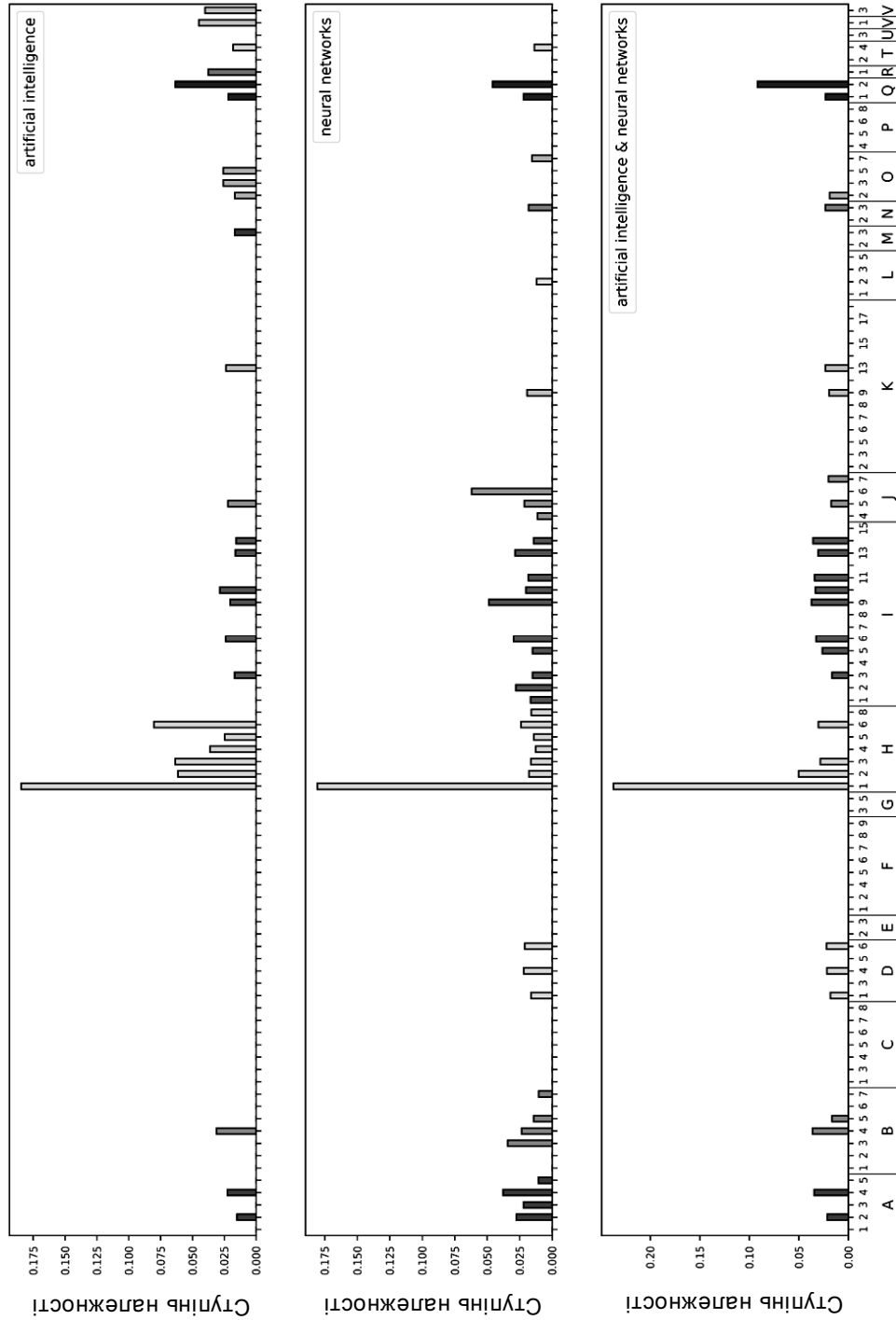


Рис. 6. Проріджені розподіли після першої фільтрації

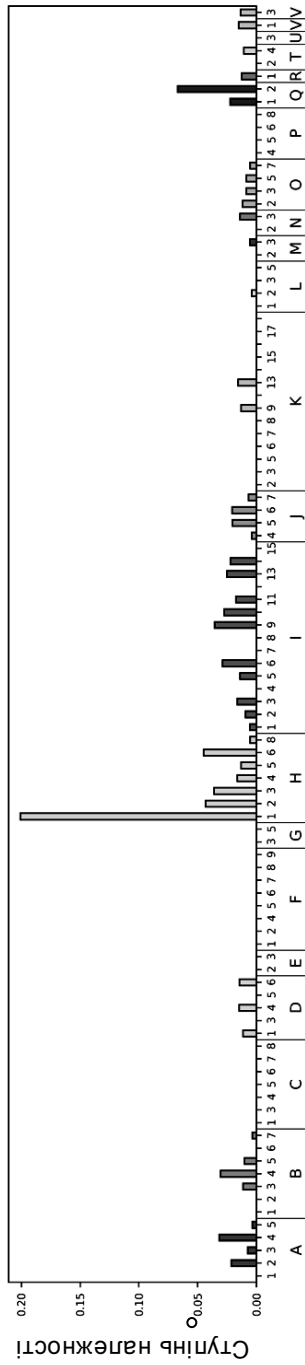


Рис. 7. Результат усереднення за прорідженими розподілами

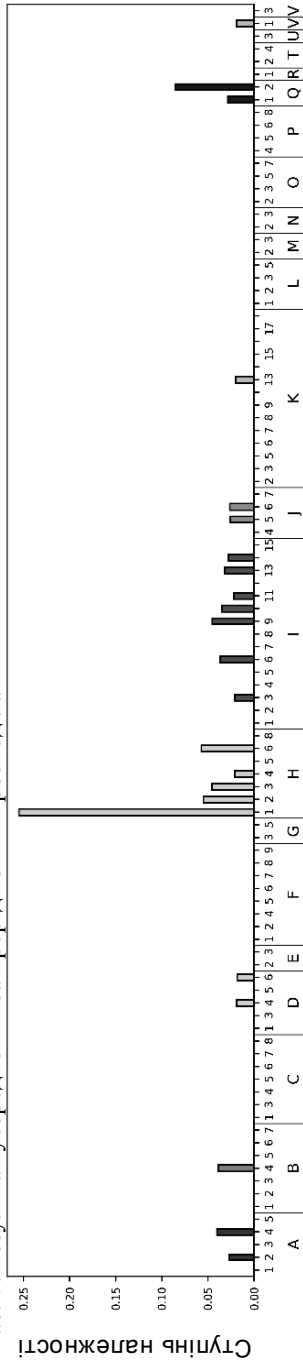


Рис. 8. Розподіл після другої фільтрації

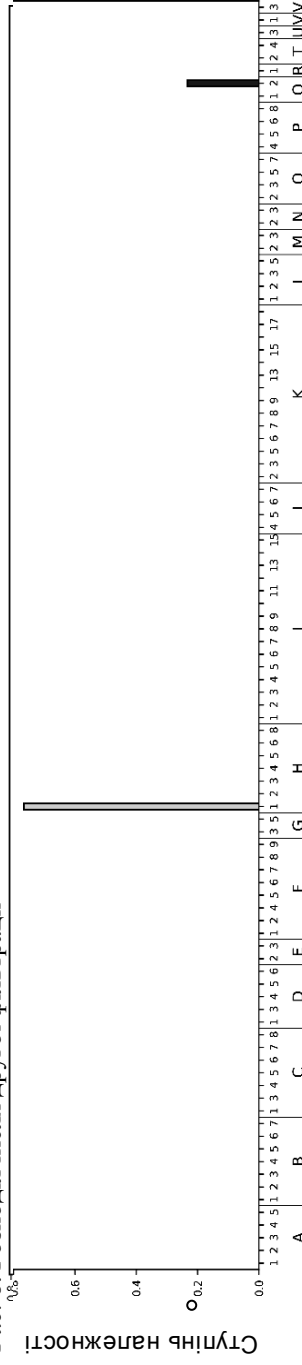


Рис. 9. Результат тематичного моделювання науковця з рис. 1



Yevgeniy Bodyanskiy

Kharkiv National University of Radio Electronics, Artificial Intelligence Department, Control

Підтверджено адресу електронної пошти в домені ikd.kiev.ua

Computational Intelligence Data Mining Data Stream Mining Big Data

Рис. 10. Профіль другого науковця



Nataliia Kussul (Наталія Куссуль)

Space research institute, National academy of science of Ukraine, Kiev

Підтверджено адресу електронної пошти в домені ikd.kiev.ua

Machine learning remote sensing data science
disaster management agricultural monitoring

Рис. 11. Профіль третього науковця

Порівнюючи результати, бачимо що за інтересами у Google Scholar, тобто за суб'єктивною інформацією дуже обмеженого обсягу, запропонований алгоритм достатньо добре категоризує науковців. Для кількісної оцінки узгодженості результатів скористаємося метрикою Чекановського. Для розглядуваного випадку — за умови нормованості суми належностей на 1, метрика Чекановського між двома науковцями W_1 і W_2 розраховується таким чином:

$$Fit(W_1, W_2) = \sum_{p=1, M} \min(\mu_{t_p}(W_1), \mu_{t_p}(W_2)). \quad (1)$$

Таблиця 2. Результати тематичного моделювання науковців

Спеціальність	Chernodub		Kussul		Bodyanskiy	
	Dimensions	Google Scholar	Dimensions	Google Scholar	Dimensions	Google Scholar
D6				0,283		
I9			0,675	0,447		
H1	0,8	0,767	0,172	0,346	0,797	0,295
H2						0,199
H6			0,153		0,203	0,506
K9	0,2					
Q2		0,233				

Метрику (1) можна інтерпретувати як суму ступенів належності перетину нечітких множин \tilde{W}_1 і \tilde{W}_2 , які являють собою результати тематичного моделювання науковця за двома джерелами початкової інформації — за інтересами в Google Scholar та за категоризованими публікаціями в Dimensions.

За даними з табл. 2 отримуємо такі значення метрики (1):

$$Fit(\text{Chernodub}) = 0,767;$$

$$Fit(\text{Bodyanskiy}) = 0,498;$$

$$Fit(\text{Kussul}) = 0,619.$$

За метрикою (1) збіг враховується ізольовано — лише в межах кожної окремої спеціальності. Для врахування внеску споріднених спеціальностей пропонується до значення метрики (1) додати такий доданок:

$$\Delta Fit(W_1, W_2) = \sum_{v=1, M} \sum_{p=1, M} J(t_v, t_p) \cdot \min(\varepsilon_{t_v}(W_1), \varepsilon_{t_p}(W_2)), \quad (2)$$

де $J(t_v, t_p)$ — індекс Жакара між спеціальностями t_v і t_p ; $\varepsilon_{t_v}(W_1) = \max(0, \mu_{t_v}(W_1) - \mu_{t_v}(W_2))$ — залишок ступеня належності науковця до спеціальності t_v у \tilde{W}_1 після врахування у формулі (1) збігу $\mu_{t_v}(W_1)$ і $\mu_{t_v}(W_2)$; $\varepsilon_{t_p}(W_2) = \max(0, \mu_{t_p}(W_2) - \mu_{t_p}(W_1))$ — залишок ступеня належності науковця до спеціальності t_p у \tilde{W}_2 після врахування у формулі (1) збігу $\mu_{t_p}(W_1)$ і $\mu_{t_p}(W_2)$.

Для фільтрації інформаційного шуму формулу (2) застосуємо лише для пар спеціальностей з високою подібністю — з індексом Жакара понад 0,02. Для наведених в табл. 2 спеціальностей таких пар виявилось 3. Індекси Жакара для них є такими:

$$J(D6, I9) = 0,083 ;$$

$$J(H1, H6) = 0,071 ;$$

$$J(K9, Q2) = 0,041 .$$

Підставляючи числові дані у формулу (2), отримуємо:

$$\Delta Fit(\text{Chernodub}) = 0,008 ;$$

$$\Delta Fit(\text{Bodyanskiy}) = 0,022 ;$$

$$\Delta Fit(\text{Kussul}) = 0,03 .$$

З урахуванням спорідненості спеціальностей збіг результатів тематичного моделювання трохи підвищився і становить:

$$Fit_{sim}(\text{Chernodub}) = 0,767 + 0,008 = 0,775 ;$$

$$Fit_{sim}(\text{Bodyanskiy}) = 0,498 + 0,022 = 0,52 ;$$

$$Fit_{sim}(\text{Kussul}) = 0,619 + 0,03 = 0,649 .$$

ВИСНОВКИ

Запропоновано тематичне моделювання науковців на основі їх інтересів у профілях Google Scholar. Інтереси у профілях науковці вказують на власний розсуд без використання будь-якого словника ключових слів. Запропоновано підхід до категоризації таких науковців у межах системи класифікації наук ANZSRC. Відображення «науковець – спеціальності» здійснюється з використанням ресурсів інформаційної системи Dimensions, яка містить понад 110 млн наукових публікацій, що категоризовані за ANZSRC.

Алгоритм тематичного моделювання науковців містить три ділянки. На першій ділянці формується множина запитів на основі ключових слів та їх поєднань, на другій — відбувається тематичне моделювання за кожним запитом окремо з фільтрацією стоп-слів та маловживаних слів, а на третій — усереднюються належності за всіма запитами та обрізається розподіл до кількох спеціальностей. Під час вилучення мінорних спеціальностей враховується їх вплив на споріднені спеціальності. На виході алгоритму отри-

муємо ступені належності науковця до кількох спеціальностей, яким найбільше відповідає сукупність його інтересів. Таке відображення інтересів можна розглядати як аналог процедури word2vec.

Проведено порівняння тематичного моделювання на основі обмеженої інформації з профілів науковців з Google Scholar та за кількома десятками авторських статей, які категоризовано системою Dimensions. У результаті перевірки встановлено узгодженість результатів тематичного моделювання на основі різного обсягу початкової інформації. Це дозволяє використовувати запропонований алгоритм як основу технології інформаційної розвідки наукових кадрів, зокрема, для первинного підбору кандидатів у опоненти дисертацій, у рецензенти наукових проєктів для формування команди для виконання спільних наукових проєктів.

ЛІТЕРАТУРА

1. E. Delgado López-Cózar, E. Orduña-Malea, A. Martín-Martín, and J.M. Ayllón, “Google Scholar: the big data bibliographic tool”, in *Research analytics: boosting university productivity and competitiveness through scientometrics*. CRC Press (Taylor & Francis), pp. 59–80, 2017. doi: 10.1201/9781315155890-4.
2. A. Martín-Martín, M. Thelwall, E. Orduña-Malea, and E.D. López-Cózar, “Google Scholar, Microsoft Academic, Scopus, Dimensions, Web of Science, and OpenCitations’ COCI: a multidisciplinary comparison of coverage via citations”, *Scientometrics*, 126, pp. 871–906, 2021. doi: 10.1007/s11192-020-03690-4.
3. A.-W. Harzing and S. Alakangas, “Google Scholar, Scopus and the Web of Science: A longitudinal and cross-disciplinary comparison”, *Scientometrics*, 106(2), pp. 787–804, 2016. doi: 10.1007/s11192-015-1798-9.
4. B. Rahdari et al., “Grapevine: A profile-based exploratory search and recommendation system for finding research advisors”, *Proceedings of the Association for Information Science and Technology*, 57(1), e271, 2020. doi: 10.1002/pr2.271.
5. J. Saad-Falcon, O. Shaikh, Z.J. Wang, A.P. Wright, S. Richardson, and D.H. Chau, “PeopleMap: Visualization Tool for Mapping Out Researchers using Natural Language Processing”, *arXiv preprint*, arXiv:2006.06105 (2020).
6. M. Rosen-Zvi, T. Griffiths, M. Steyvers, and P. Smith, “The author-topic model for authors and documents”, in *Proceedings of the 20th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, AUAI Press, pp. 487–494, 2004.
7. D. Blei, A. Ng., and M. Jordan, “Latent Dirichlet allocation”, *Journal of Machine Learning Research*, 3, pp. 993–1022, 2003.
8. J. Jian, G. Qian, M. Haikun, and C. Chong, “Author–Subject–Topic model for Reviewer Recommendation”, *JIS-Journal of Information Science*, SAGE, pp. 1–16, 2018. doi: 10.1177/0165551518806116.
9. D. Mimno and A. McCallum, “Expertise modeling for matching papers with reviewers”, in *KDD’07 proceedings of the 13th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining*, New York: ACM, pp. 500–509, 2007. doi: 10.1145/1281192.1281247.
10. N. Kawamae, “Author interest topic model”, in *SIGIR’10 proceeding of the 33rd international ACM SIGIR conference on research and development in information retrieval*, New York: ACM, pp. 887–888, 2010. doi: 10.1145/1835449.1835666.
11. C. Sun, T.J. King, P. Henville, and R. Marchant, “Hierarchical Word Mover Distance for Collaboration Recommender System”, *Australasian Conference on Data Mining. Communications in Computer and Information Science*, Springer 996, pp. 289–302, 2018. doi: 10.1007/978-981-13-6661-1_23.

12. K. Xiangjie, J. Huizhen, Y. Zhuo, Y. Zhuo, Y. Zhuo, and A. Tolba, “Exploiting Publication Contents and Collaboration Networks for Collaborator Recommendation”, *PlosOne*, 11(2), e0148492, 2016. doi: 10.1371/journal.pone.0148492
13. Y. Zhao, J. Tang, and Z. Du, “EFCNN: A Restricted Convolutional Neural Network for Expert Finding”, in *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining. PAKDD 2019. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 11440, Springer, Cham, 2019. doi: 10.1007/978-3-030-16145-3_8.
14. A. Omer, G. Hongyu, B. Suma, H. Wen-Mei, and X. JinJun, “PaRe: A Paper Reviewer Matching Approach Using a Common Topic Space”, in *Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP/IJCNLP)*, pp. 518–528, 2019. doi: 10.18653/v1/D19-1049.
15. T. Mikolov, I. Sutskever, K. Chen, G. Corrado, and J. Dean, “Distributed representations of words and phrases and their compositionality”, in *Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems 2*, pp. 3111–3119, 2013.
16. T. Hofmann, “Probabilistic latent semantic indexing”, in *Proc. 22nd annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, pp. 50–57, 1999. doi: 10.1145/312624.312649.
17. S. Shtovba and M. Petrychko, “Jaccard Index-Based Assessing the Similarity of Research Fields in Dimensions”, *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 2533 “Proc. of the First International Workshop on Digital Content & Smart Multimedia”, pp. 117–128, 2019.

Надійшла 17.03.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Serhiy D. Shtovba, ORCID: 0000-0003-1302-4899, Vasyl Stus’ Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine, e-mail: s.shtovba@donnu.edu.ua

Mykola V. Petrychko, ORCID: 0000-0001-6836-7843, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine, e-mail: mpetrychko@vntu.edu.ua

ТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УЧЕНЫХ НА ОСНОВЕ ИХ ИНТЕРЕСОВ В GOOGLE SCHOLAR / С.Д. Штовба, Н.В. Петричко

Аннотация. Предложен алгоритм тематического моделирования ученых по научным специальностям на основе их интересов в профилях в Google Scholar. Алгоритм использует перечень научных специальностей из системы классификации наук ANZSRC. Информационным ресурсом для тематического моделирования является база категоризированных научных публикаций из системы Dimensions. Интересы из профилей ученых используются как поисковые запросы для Dimensions, сервисы которой выдают распределения релевантных документов по специальностям. Для уменьшения информационного шума эти распределения проходят несколько этапов обработки. Сравниваются результаты тематического моделирования на основе профильных интересов в Google Scholar и категоризированного списка авторских публикаций в Dimensions по метрике Чекановского с учетом схожести специальностей. Для тестовых ученых выявлена высокая согласованность результатов тематического моделирования при различной исходной информации.

Ключевые слова: тематическое моделирование, категоризация, Google Scholar, Dimensions, ANZSRC, профиль ученого, научные интересы, метрика Чекановского, индекс Жакарра.

TOPIC MODELING OF RESEARCHERS BASED ON THEIR INTERESTS FROM GOOGLE SCHOLAR / S.D. Shtovba, M.V. Petrychko

Abstract. The article proposes an algorithm for topic modeling of researchers based on their interests from Google Scholar profiles. The algorithm uses the set of fields of research from research classification system ANZSRC. An information resource for topic modeling is a corpus of categorized publications from Dimensions. Interests from researchers' profiles are used as search queries to Dimensions that outputs distributions of documents over categories. To reduce information noise these distributions are taken through a few stages of processing. The article also compares the results of topic modeling based on interests from Google Scholar profiles and based on a categorized list of publications from Dimensions. The comparison is done using modified Czekanowski metric that takes into account the similarity between categories. The results of comparing the topic modeling outputs based on different information sources show a good match.

Keywords: topic modeling, categorization, Google Scholar, Dimensions, ANZSRC, researcher's profile, research interests, Czekanowski metric, Jaccard index.

MODELING OF A TEMPERATURE FIELD FOR EXTRUDER BODY

O. TROFIMCHUK, K. ZELENSKY, Ie. NASTENKO

Abstract. The paper considers the process of induction heating of the extruder body, the temperature of which determines the degree of heating of the polymer mixture in the zone of loading the dry mixture. A mathematical model of this process is formulated taking into account radiant heat transfer in the gap between the inductor and the case. An iterative numerical-analytical method is proposed for solving the corresponding nonlinear boundary value problem of housing heating, at the first iteration of which a linear boundary value problem is solved (without taking into account radiant heat transfer). At the subsequent stages, a nonlinear boundary value problem is solved. The iterative method is based on the application of integral transformations of the linear part of the problem, followed by an iterative scheme for finding a nonlinear problem. This scheme is based on the algorithms for the equivalent simplification of the expressions obtained by solving the problem. The results of mathematical modeling of the corresponding algorithms are presented.

Keywords: equivalent simplification, extruder, induction heating, integral transformations, polymer, Bessel functions.

INTRODUCTION

The processes available in the extruders in the manufacture of products from polyethylene dry mixes are characterized by the versatility of the tasks to be solved. As is known, [1–4], heat and mass transfer processes in extruders are divided into several zones: the loading zone of the dry mixture at the inlet to the extruder, which heats the mixture to a temperature close to the melting point of the polymer, the delay zone in which the formation of wall polymer melt films, melting zone where the mixture is melted, dosing zone in which the polymer melt is cooled, product forming zones.

Analysis of the literature on these processes in the areas of loading, melting, dosing and cooling of the polymer mixture and polymer melts in the manufacture of cable insulation at ultra-high voltages, showed that the process of heating the screw housing in the extruder is not considered. In our opinion, this process significantly affects the temperature of the mixture in the loading zone along with the heating of the mixture due to the dry friction of the mixture.

FORMULATION OF THE PROBLEM

Consider the process of induction heating of the extruder body to a given temperature. We set the heat transfer conditions by convection and radiation at the upper limit.

The density of internal heat sources is the electromagnetic energy released per unit time per unit volume. Due to the surface effect, the distribution of internal heat sources is significantly heterogeneous and depends on the electrophysical properties of the load, which change during heating.

The whole heating process is divided into intervals, in each of which the loading properties are assumed to be constant:

$$L_i(m) = \{0,9;1,45;2,05;2,65\}.$$

Fig. 1 [5] shows a graph of the distribution of specific volume over the length of the cylinder.

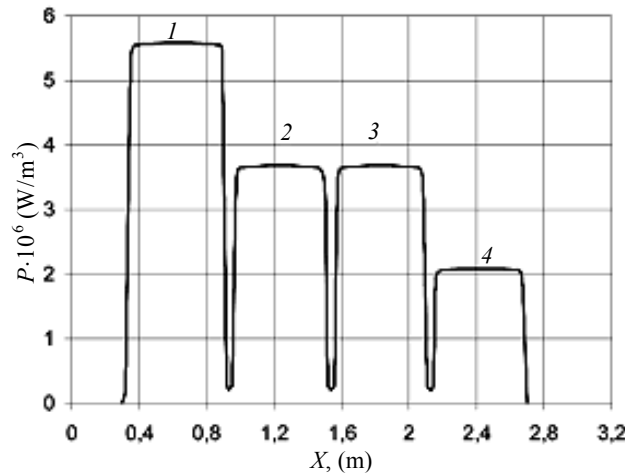


Fig. 1. Distribution of specific volumetric power by the length of sections 1–4

The graph shows that the first section of the extruder (first inductor) releases maximum power, because in this section it is necessary to heat the polymer from the initial temperature to the melting point, and in the other zones is heated and maintained at a given temperature.

The distribution of the temperature field of the body T_k is described by the equation of thermal conductivity, which in the cylindrical coordinate system has the form

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = a_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \right) + \frac{a_k}{\lambda} w, \tag{1}$$

where $a_k = \lambda_k / (c_k \rho_k)$ is the coefficient of thermal conductivity; λ_k, c_k, ρ_k — thermal conductivity, W / (m C), specific heat and density of the housing material, respectively, $g(r, z)$ — the function of the distribution of the density of internal energy sources in the material, W / m³. Given that the depth of penetration of electromagnetic energy from the inductor is small, $\Delta \ll 1$, assume that it acts on the outer surface of the housing $r = r_4$.

Taking into account the above, the specific power on the outer surface of the housing is equal to [5]

$$w_0 = p_0 e^{(b/2-\Delta)/\Delta} = \frac{10^{-4}}{4\pi} \sqrt{10^{-1} f_k \rho' H_{me}^2} e^{(x-b/2)/\Delta}.$$

If the density of the heat source on the surface of the ingot is given, use the first part of formula (2), if you know the magnetic field strength on the surface of the ingot, use the second part of this formula.

The initial and boundary conditions are:

$$T_k|_{t=0} = T_0; \quad T_k|_{r=r_4} = T_{0k}; \quad \left. \frac{\partial T_k}{\partial r} \right|_{r=r_3} = -\frac{q^k}{h_1}; \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial T_k}{\partial z} + h_1 T_k \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial T_k}{\partial z} + h_1 T_k \right] \Big|_{z=L} = 0, \quad (2)$$

where $h_1 = \alpha_k / \lambda_k$, α_k — heat transfer coefficient of the case into the environment. For the contact surface of the steel pipe with air $\alpha_k = 9 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ c})$; T_0 — temperature of surrounded space; T_{0k} — temperature on the bound of inductor.

Boundary condition on the side surface of a cylindrical workpiece:

$$\left[\lambda_1(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial r} + \alpha_1(T_k) T_k(r, z, t) \right] \Big|_{r=r_4} = L_G + N_G(T_k); \quad (3)$$

$$L_G = \alpha(T_k) T_0 + \varepsilon_1 \left(\frac{T_0}{100} \right)^4; \quad N_G = \varepsilon_1 \left(\frac{T_k(r_4, z, t)}{100} \right)^4; \quad \varepsilon_1 = 0,65. \quad (4)$$

The function $g(r_4, z)$ in this case is the temperature at which the inductor heats the surface of the housing, ie. $g(r_4, z) = T^{\text{ind}}$.

Values of thermophysical parameters for the case (steel) at temperature $T = 300 \text{ K}$ are equal: $\rho = 7845 \text{ kg} / \text{m}^3$, $c_V = 0,461 \text{ Kt}/(\text{kg} \cdot \text{c} \cdot \text{K})$, $\lambda = 58$, $\alpha = 10,5 \text{ 1/K}$.

SOLUTION METHOD

Since the boundary value problem (1)–(5) is nonlinear, we will perform mathematical modeling according to the iterative scheme [6]. First, we obtain the solution of the problem in a linear approximation. We apply to equation (1) the integral transformation over the variable z :

$$\frac{d^2 Z(\delta_k)}{dz^2} + \delta_k^2 Z(\delta_k) = 0.$$

Custom conversion functions:

$$Z(\delta_k z) = \frac{1}{\|Z_k\|^2} \left[\sin \delta_k z - \frac{\delta_k}{h_1} \cos \delta_k z \right].$$

The integral of the product of eigenfunctions is equal to:

$$\int_{k=1}^M \int_{j=1}^M Z_k Z_j dz = \sum_{\pm} \frac{\delta_j}{2p_{kj}} \left[\left(\frac{\delta_k \delta_j}{h_1^2} \mp 1 \right) (1 - \cos p_{kj}L) + \frac{p_{kj}}{h_1} \sin p_{kj}L \right], \quad p_{kj} = \delta_k \pm \delta_j;$$

$$\int_{k=1}^M \int_{j=1}^M Z_k(\delta_k z) \frac{dZ_j(\delta_j z)}{dz} dz = \sum_{\pm} \frac{\delta_j}{2p_{kj}} \left[\left(1 \mp \frac{\delta_k \delta_j}{h_1^2} \right) (1 - \cos p_{kj}L) - \frac{p_{kj}}{h_1} \sin p_{kj}L \right].$$

The application of the integral transformation of the variable to equation (1) gives:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) - \delta_k^2 \bar{T}_k(r, \delta_k, t) + \frac{a_k}{\lambda} z_k(\delta_k) w + Qz_k; \quad (5)$$

$$Qz_k = \left[h_1 \left(\sin \delta_k L - \frac{\delta_k}{h_1} \cos \delta_k L \right) + (1 - h_1) \frac{\delta_k}{h_1} \right] T_{0k}. \quad (6)$$

Boundary conditions (3) take the form

$$\bar{T}|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial r} \right|_{r=r_3} = -z1_k \frac{q_k}{\lambda_k} = \bar{q}_k; \quad (7)$$

$$\left[\lambda_1(T_k) \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial r} + \alpha_1(T_k)_1 \bar{T}_k \right] \Big|_{r=r_4} = z1_k L_G + \bar{L}_G, \quad z1_k = \int_0^L Z_k(\delta_k z) dz; \quad (8)$$

$$\bar{T}_k(r, t, \delta_k) = \int_0^L Z(\delta_k z) T(r, t, z) dz, \quad \bar{L}_G = \int_0^L Z_k(\delta_k z) N_G(T_k) dz. \quad (9)$$

Regarding the variable r , we have the Bessel equation within $r \in [r_3, r_4]$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}_k(r, \delta_k, t)}{\partial r} \right) + \delta_k^2 \bar{T}_k(r, \delta_k, t) = 0 \quad (10)$$

with homogeneous boundary conditions

$$\left. \frac{d\bar{T}_k(r, \delta_k, t)}{dr} \right|_{r=r_3} = 0; \quad \left[\lambda_1(T_k) \frac{d\bar{T}_k(r, \delta_k, t)}{dr} + \alpha_1(T_k) \bar{T}_k(r, \delta_k, t) \right] \Big|_{r=r_4} = 0.$$

Own functions for the variable take the form:

$$R_n(\beta r) = \frac{1}{\|R_n(\beta_n r)\|^2} [I_0(\beta r) - D_n(\beta r_3) J_0(\beta r)]. \quad (11)$$

Substitution in (5) for $r = r_4$ in the second boundary condition (9) taking into account the expression for leads to a characteristic equation for finding eigenvalues β_n :

$$h_1 [J_1(\beta r_3) I_0(\beta r_4) - I_1(\beta r_3) J_0(\beta r_4)] - \beta [J_1(\beta r_3) I_1(\beta r_4) - I_1(\beta r_3) J_1(\beta r_4)] = 0.$$

Denote by $\gamma = \beta r_4$, $c = r_3/r_4$ and

$$B_m^l(\gamma) = J_m(\gamma c)I_l(\gamma) - I_m(\gamma c)J_l(\gamma); \quad l, m = 1, 2.$$

Then to calculate the eigenvalues β_n we will have the following functions

$$q(\gamma) = \frac{\gamma}{r_4} B_1^1(\gamma) - h_1 B_1^0(\gamma) = 0;$$

$$w(\gamma) = \frac{c}{b} \gamma B_0^1(\gamma) - \left(\frac{1}{r_4} + h_1 \right) B_1^1(\gamma) - \left(\frac{1}{r_4} \gamma + \frac{h_1}{\gamma} \right) B_1^0(\gamma) + h_1 c B_0^0(\gamma).$$

Coefficients are defined as the norm of eigenfunctions $R_n(\beta_n r)$, $D_n = \frac{I_1(\beta_n r_3)}{J_1(\beta_n r_3)}$:

$$B_n = \|R(\beta_n r)\|^2 = \int_{r_3}^{r_4} r R_n^2(\beta_n r) dr = \int_{r_3}^{r_4} [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)]^2 r dr. \quad (14)$$

Integral transformation of the variable to equation (1) and boundary conditions (3), (4):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \eta_{nk} \bar{T} = \bar{L}_G - R_n(r_4) \bar{N}_G; \quad (15)$$

$$\bar{L}_G = \overline{Z_k(0)T_0} + (R_n(r_4) \bar{L}_G + R_n(r_3) Z_R); \quad Z_R = z_k q_k / \lambda_1.$$

In the space of Laplace images we have

$$\bar{T}_k(\eta_{nk}, p) = \frac{\bar{L}_G}{p(p + \eta_{nk})} - R_n(\beta_n r_4) \frac{1}{p + \eta_{nk}} \mathcal{L}\{\bar{N}_G[T_k^{(0)}(\beta_n, \delta_k, t)]\}. \quad (16)$$

Since the right-hand side of this expression contains a nonlinear function from T_k (Stefan–Boltzmann condition), $N_G = [T_k(r_4, z, t)/100]^4$ we will look for the solution of equation (16) by an iterative scheme. In the first iteration we obtain the solution of the equation without taking into account the nonlinear function N_G .

$$T_k^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M R_n(\beta_n r) Z_k(\delta_k z) C_{nk} (1 - e^{-\eta_{nk} t}), \quad (17)$$

where $C_{nk} = \frac{\bar{L}_G}{\eta_{nk}}$, $\eta_{nk} = \frac{\lambda_k}{c_v \rho} (\beta_n^2 + \delta_k^2)$.

Substitute the solution (17) taking into account the integral transformations of the variable

$$\bar{N}_G[T_k^{(0)}(\beta_n, \delta_k, t)] = \prod_{m=1}^4 \sum_{n_m} \sum_{k_m} D_{n_m, k_m} \left(1 - e^{-\eta_{n_m, k_m} t} \right); \quad (18)$$

$$D_{n_j, k_j} r^{n_j} z^{k_j} C_{n_j, k_j}; \quad m = [n, k; n_1, k_1; n_2, k_2; n_3, k_3; n_4, k_4]$$

$$rn_{n_j} = R_n(\beta_n r_4)R_{n_1}(\beta_{n_1} r_4)R_{n_2}(\beta_{n_2} r_4)R_{n_3}(\beta_{n_3} r_4)R_{n_4}(\beta_{n_4} r_4);$$

$$zk_{k_j} = \frac{1}{\|\overline{Z}_k(\delta_k z)\|_{k=1}} \int_0^N Z_k(\beta_k z)Z_{k_1}(\beta_{k_1} z)Z_{k_2}(\beta_{k_2} z)Z_{k_3}(\beta_{k_3} z)Z_{k_4}(\beta_{k_4} z)dz.$$

Since in this expression the temperature $T_k^{(0)}(r, z, t)$ is in the 4th degree, we will not write this product (the calculation of the corresponding transformations is implemented using the appropriate program in the language C [6]). Write the product for one component, for example, for, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$. Let's mark it as $\overline{N}_{1,1,G}$. Then

$$\overline{N}_{1,1,G} = \frac{1}{100^4} [D_{11}^4 (1 - e^{-\eta_{11}t})]^4 = \sum_{l=0}^4 d_l e^{-\sigma_l t}, \quad (19)$$

where $d_l = (-1)^l (D_{1,1}/100)^4$; $\sigma_1 = \eta_{1,1}, \sigma_2 = 2\eta_{1,1}, \sigma_3 = 3\eta_{1,1}, \sigma_4 = 4\eta_{1,1}$.

The other components of expression will have a similar form with the change of indices to. We emphasize that the dependence of the nonlinear component of the equation is reflected in the coefficient and remains unchanged in subsequent transformations.

We now apply to (19) an algorithm of equivalent simplification [7], which converts the expressions of the form (19) into a second-order chain in Laplace image space. Then we will obtain

$$\overline{T}_k(\eta_{nk}, p) = \frac{a_2^{n,k}}{p} + \frac{a_0^{n,k} + a_1^{n,k}}{a_3^{n,k} + a_4^{n,k} p + a_5^{n,k} p^2}. \quad (20)$$

In the space of the originals, the expression for temperature will look like

$$T_k(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N R_n(\beta_k r) Z_k(\delta_k z) \left[a_2^{n,k} + e^{-\alpha^{n,k} t} [\overline{b}_0^{n,k} f_1(\omega^{n,k} t) + \overline{b}_1^{n,k} f_2(\omega^{n,k} t)] \right]. \quad (21)$$

Here

$$f_1(\omega^{n,k} t) = \begin{cases} \sin(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} > 0, \\ \text{sh}(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} < 0; \end{cases} \quad f_2(\omega^{n,k} t) = \begin{cases} \cos(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} > 0, \\ \text{ch}(\omega^{n,k} t) & \omega^{n,k} < 0. \end{cases}$$

In the next stages of the iterative procedure we will have the product (for example, for $n_j, j = \overline{1,4}, k_l, l = \overline{1,4}$) of functions

$$\overline{N}_G = \prod_{l=1}^4 \overline{T}_k^{n_j, k_l}(\eta_{n_j, k_l}, t) = \frac{e_2^{n_j, k_l}}{p} + \frac{e_0^{n_j, k_l} + e_1^{n_j, k_l} p}{e_3^{n_j, k_l} + e_4^{n_j, k_l} p + e_5^{n_j, k_l} p^2}.$$

The summation in (21) for n_j with the corresponding transformations gives the expression of the body temperature taking into account the nonlinear component of the solution.

The application of the iterative procedure for calculating the expressions of the form (20) leads to a change in the values of the coefficients $a_j^{n,k}$, $j = \overline{0,5}$, but the structure of this expression remains unchanged.

After the implementation of the iterative procedure for achieving the requirements of accuracy (number of iterations) we obtain the solution of the problem:

$$T_k(r, z, t) = \sum_{n=1}^M R_n(\beta_n r) \sum_{k=1}^N Z_k(\beta_k z) \left[\bar{b}_2^{n,k} + e^{-\alpha^{n,k} t} (\bar{b}_0^{n,k} f_1(\omega^{n,k} t) + \bar{b}_1^{n,k} f_2(\omega^{n,k} t)) \right]. \quad (22)$$

Thus, due to the use of algorithms of equivalent simplification of nonlinear expressions in equations, we obtain the solution of a nonlinear boundary value problem in the class of linear functions.

The main purpose of mathematical modeling of heat transfer in the extruder body is to determine the temperature field on the inner surface of the body on the border with the auger, which determines the heating conditions of the polymer mixture in the loading zone. Based on this, expression (22) takes the form

$$T_k(r_3, z, t) = \sum_{n=1}^M R_n(\beta_n r_3) \sum_{k=1}^N Z_k(\beta_k z) \left[\bar{b}_2^{n,k} + e^{-\alpha^{n,k} t} [\bar{b}_0^{n,k} f_1(\omega^{n,k} t) + \bar{b}_1^{n,k} f_2(\omega^{n,k} t)] \right]. \quad (23)$$

Summation in (23) by eigenfunctions in Laplace image space) on the inner surface of the cylinder gives

$$\tilde{T}_k(r_3, z, p) = \sum_{k=1}^N Z_k(\beta_k z) \left[\frac{c_2^k}{p} + \frac{c_0^k + c_1^k p}{c_3^k + c_4^k p + c_5^k p^2} \right]. \quad (24)$$

The original of this expression is

$$\tilde{T}_k(r_3, z, t) = \sum_{k=1}^N Z_k(\beta_k z) \left[\bar{c}_2^k + e^{-\xi^k t} [\bar{c}_0^k f_1(\chi^k t) + \bar{c}_1^k f_2(\chi^k t)] \right], \quad (25)$$

Expression (25) serves as a boundary condition on the outer surface of the auger in the boundary value problem of heat transfer in the polymer mixture in the zone of its loading.

SIMULATION RESULTS

In fig. 2, *a, b* shows the results of modeling the temperature field of the auger body.

In fig. 3, *a, b* show the temperature fields on the inner surface of the extruder body in the linear case (first iteration) and taking into account the radiation (third iteration).

Finally, we need to determine the temperature field at the boundary between the inside of the housing and the loaded polymer mixture, i.e. $T_k(r_3, z, t)$ In fig. 3, *a, b* the graphs of temperature distribution on length of a loading zone is resulted.

With the help of the proposed algorithm for solving the nonlinear boundary value problem, it is possible to develop an algorithm for controlling the temperature field of the housing in order to optimize the process of heating the mixture in the loading zone and melting and crystallization zones of the polymer melt.

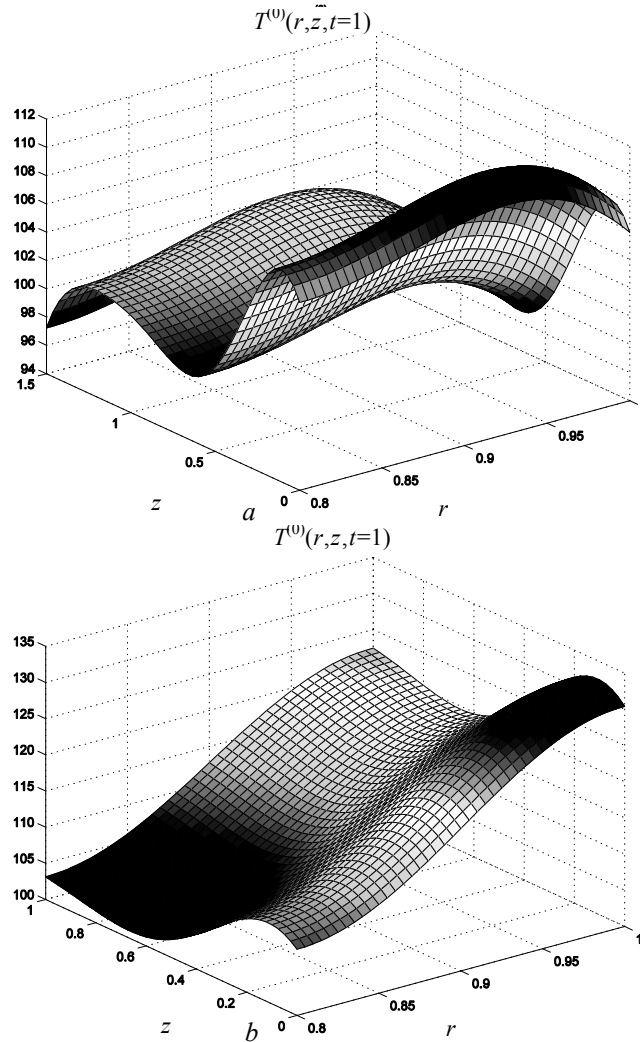


Fig. 2. Temperature field of the auger body time is fixed

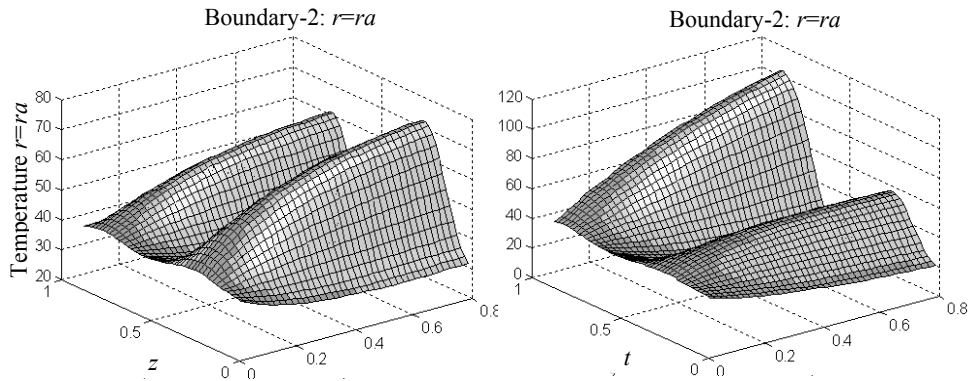


Fig. 3. Temperature field of the inner surface on the 1-st and 3-d iterations

CONCLUSIONS

A mathematical model of induction heating of the extruder body in the manufacture of polymer products, in particular, insulating coating of cables for ultrahigh voltages, which takes into account the convective and radiant heat exchange in the gap inductor-body.

Mathematical modeling of the temperature field of the extruder body during induction heating of the outer surface of the body is performed. The obtained expression for the temperature field on the inner surface of the extruder housing is used as a boundary condition on the outer surface of the auger in the study of heat transfer in the loading zone of the polymer mixture.

REFERENCES

1. A. Zhuchenko, A. Kubrak, and A. Dankevych, "Mathematical description of the thermal regime of the extruder", *Bulletin of NTUU "KPI", Chemical Engineering, Ecology and Resource Conservation*, pp. 11–22, 2016.
2. V. Pervadchuk, *Processes of movement, heat exchange and phase transformations of non-Newtonian materials in screw devices: Dis. ... Dr. Tech. Sciences in special*. Perm, 1984, 377 p.
3. E. Subbotin and R. Zinnatullin, "Experimental determination of rheological characteristics of polymer melt in numerical modeling of the extrusion process", *Nauch.-tehn. Bulletin of the Volga region*, pp. 28–30, 2015.
4. N. Trufanova, A. Shcherbinin, and V. Yankov, *Melting of polymers in extruders*. Moscow-Izhevsk: Regular and chaotic dynamics, 2009, 336 p.
5. N. Trufanova, *Polymer processing*. Perm: Publishing House of Perm. State Tech. University, 2009, 158 p.
6. V. Mitroshin, "Structural modeling of the temperature field of the polymer melt in the dosing zone of a single-worm extruder", *Vestnik Samar. state tech. un-ta, ser.: Technical sciences*, no. 41, pp.191–194, 2006.
7. K. Zelensky, V. Ignatenko, and O. Kots, *Computer methods of applied mathematics*. Kyiv: Akadempriodika, 2003, 480 p.
8. N. Zelenskaya and K. Zelensky, "Approximation of cylindrical functions by fractional-rational expressions", *Bulletin of the University "Ukraine", series: Informatics, Computer Science and Cybernetics*, no. 1, pp. 78–83, 2016.

Received 15.02.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Olexandr N. Trofymchuk, ORCID: 0000-0003-3782-4209, Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine, e-mail: Trofymchuk@nas.gov.ua

Kiril Kh. Zelensky, ORCID: 0000-0003-1501-8214, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: zelensky126@ukr.net

Ievgen A. Nastenko, ORCID: 0000-0002-1076-0137, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: nastenko.e@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КОРПУСУ ЕКСТРУДЕРА /
О.М. Трофимчук, К.Х. Зеленський, Є.А. Настенко

Анотація. Розглянуто процес індукційного нагрівання корпусу екструдера, температура якого визначає ступінь нагрівання полімерної суміші в зоні заван-

таження сухої суміші. Сформульовано математичну модель цього процесу з урахуванням променистого теплообміну в зазорі між індуктором і корпусом. Запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод розв'язання відповідної крайової задачі про нагрівання корпусу, на першій ітерації якого розв'язується лінійна крайова задача (без урахування променистого теплообміну). На наступних ітераціях розв'язується нелінійна крайова задача. Ітераційний метод ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень лінійної частини задачі з наступною ітераційною схемою пошуку нелінійної задачі. В основу цієї схеми покладено алгоритми еквівалентного спрощення виразів, отриманих під час розв'язання задачі. Наведено результати математичного моделювання відповідних алгоритмів.

Ключові слова: еквівалентне спрощення, екструдер, індукційне нагрівання, інтегральні перетворення, полімер, функції Бесселя.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КОРПУСА ЭКСТРУДЕРА /
А.Н. Трофимчук, К.Х. Зеленский, Е.А. Настенко

Аннотация. Рассмотрен процесс индукционного нагрева корпуса экструдера, температура которого определяет степень нагрева полимерной смеси в зоне загрузки сухой смеси. Сформулирована математическая модель этого процесса с учетом лучистого теплообмена в зазоре между индуктором и корпусом. Предложен итерационный численно-аналитический метод решения соответствующей нелинейной краевой задачи о нагреве корпуса, на первой итерации которого решается линейная краевая задача (без учета лучистого теплообмена). На последующих этапах решается нелинейная краевая задача. Итерационный метод основывается на применении интегральных преобразованиях линейной части задачи с последующей итерационной схемой отыскания нелинейной задачи. В основу этой схемы положены алгоритмы эквивалентного упрощения выражений, полученных при решении задачи. Приведены результаты математического моделирования соответствующих алгоритмов.

Ключевые слова: эквивалентное упрощение, экструдер, индукционный нагрев, интегральное преобразование, полимер, функции Бесселя.

ПРИТЯГУВАЛЬНІ МНОЖИНИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ АСИМПТОТИЧНО КОМПАКТНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

О.В. КАПУСТЯН, Н.В. ГОРБАНЬ

Анотація. Розглянуто імпульсні динамічні системи, породжені еволюційними процесами, траєкторії яких зазнають імпульсного збурення із досягненням енергетичним функціоналом деякого фіксованого порогового значення. Узагальнено класичну теорію глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем на випадок систем з імпульсною дією. Установлено, що для дисипативної імпульсної динамічної системи, породженої асимптотично компактною підгрупою, існує рівномірний атрактор — компактна рівномірно притягувальна множина, мінімальна серед усіх таких множин у фазовому просторі системи. Отриманий результат застосовано до слабонелінійного хвильового рівняння з дисипацією, траєкторії якого зазнають імпульсних збурень із досягненням певної фіксованої підмножини фазового простору задачі — імпульсної множини.

Ключові слова: динамічна система, атрактор, імпульсне збурення, хвильове рівняння.

ВСТУП

У теорії імпульсних еволюційних систем важливе місце займають розривні динамічні системи [1–4], породжені автономними рівняннями, траєкторії яких зазнають миттєвих (імпульсних) впливів з досягненням ними деякої підмножини фазового простору. Поряд зі скінченновимірним якісним аналізом [5–7] в останні роки з’явилися результати узагальнення теорії атракторів [8–18]: на випадок нескінченновимірних імпульсних систем [19–23] та еволюційних систем без єдиності [24–26]. Зокрема встановлено умови існування та стійкості рівномірних атракторів для імпульсних процесів, породжених компактними та експоненційно затухаючими підгрупами. У роботі вперше розглянуто імпульсні системи, породжені асимптотично компактними підгрупами. Доведено теорему про існування рівномірного атрактора та розглянуто її застосування до імпульсно збуреного слабонелінійного хвильового рівняння.

РІВНОМІРНІ АТРАКТОРИ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Імпульсна динамічна система у нормованому фазовому просторі E будуватиметься за допомогою неперервної підгрупи $V: \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$, імпульсної множини $M \subset E$, та імпульсного відображення $I: M \rightarrow E$. Рух уздовж імпульсної траєкторії, яку вважатимемо неперервною справа, відбувається по траєкторіях V до моменту часу τ , коли фазова точка $z(t)$ досягає множини M . У цей момент вона миттєво переводиться в нове положення $Iz(\tau)$. Для коректності побудови такої системи припускатимемо, що:

$$M \text{ — замкнена множина та } M \cap IM = \emptyset ; \quad (1)$$

$$\forall z \in M \exists \tau = \tau(z) > 0 : \forall t \in (0, \tau) V(t, z) \notin M . \quad (2)$$

$$\text{Кожну імпульсну траєкторію визначено на } [0, +\infty) . \quad (3)$$

Згідно з умовами (1)–(3) розглянемо лише імпульсні системи, що «не залипають» на імпульсній множині і не мають «ефекту биття» [1]. Уведемо позначення:

$$z^+ = Iz, \quad M^+(z) = \left(\bigcup_{t>0} V(t, z) \right) \cap M .$$

Якщо $M^+(z) \neq \emptyset$, то з неперервності V та умов (1)–(3) отримуємо, що існує такий момент часу $s = s(z)$, що

$$\forall t \in (0, s) V(t, z) \notin M, \quad V(s, z) \in M . \quad (4)$$

У випадку, коли $M^+(z) = \emptyset$, вважатимемо, що $s(z) = \infty$.

Імпульсна півгрупа задається формулою

$$G(t, z) = \begin{cases} V(t - T_n, z_n^+), & t \in [T_n, T_{n+1}), \\ z_{n+1}^+, & t = T_{n+1}, \end{cases} \quad (5)$$

де $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^n s_k$, $z_{n+1}^+ = IV(s_n, z_n^+)$; $z_0^+ = z$, $s_k = s(z_k^+)$ — моменти імпульсного збурення зі співвідношення (4). Вважатимемо, що $T_{n+1} = +\infty$, якщо $M^+(z_n^+) = \emptyset$.

Відомо [20, 22], що за виконання умов (1)–(3) формула (5) визначає півгрупу $G: \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$, яку називатимемо імпульсною динамічною системою.

Означення. Компактну множину $\Theta \subset E$ назвемо рівномірним аттрактором імпульсної динамічної системи G , якщо:

1) Θ — рівномірно притягувальна множина, тобто для довільної обмеженої множини $B \subset E$ справедливо, що $\text{dist}(G(t, B), \Theta) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$;

2) Θ — мінімальна з усіх замкнених множин, що задовольняють умову 1 означення.

Лема [15]. Нехай імпульсна динамічна система G є дисипативною, тобто існує така обмежена підмножина $B_0 \subset E$, що для будь-якої обмеженої підмножини $B \subset E$ існує таке значення $T = T(B)$, що

$$\forall t \geq T(B) : G(t, B) \subset B_0 . \quad (6)$$

Тоді для імпульсної динамічної системи G існує рівномірний аттрактор тоді і лише тоді, коли G асимптотично компактна, тобто для будь-якої обмеженої послідовності $\{z_n\} \subset E$ та $\forall \{t_n\} \nearrow \infty$ справедливо, що послідовність $\{G(t_n, z_n)\}$ передкомпактна в E .

При цьому для рівномірного аттрактора Θ справедлива формула

$$\Theta = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} G(t, B_0)} .$$

Теорема. Нехай виконуються умови (1)–(3), імпульсна система (5) є дисипативною. Нехай існує компактно вкладений простір $E_1 \subseteq E$ такий, що півгрупа V допускає подання у вигляді $V(t, z) = V_1(t, z) + V_2(t, z)$, де відображення V_1 і V_2 задовольняють умови:

$$\forall r > 0 \exists c_1(r) > 0 : \forall \|z_E\| \leq r, \forall t \geq 0;$$

$$\|V_1(t, z)\|_{E_1} \leq c_1(r); \tag{7}$$

$$V_2(t, z) = V_2(t)z, \quad V_2(t) \in L(E, E), \quad \|V_2(t)\|_{L(E)} \leq c_2 e^{-\delta t}. \tag{8}$$

Крім того, нехай імпульсне відображення $I: M \rightarrow E$ та імпульсна множина $M \subset E$ задовольняють умови:

$$\exists \bar{z} \in E \quad \forall r > 0 \exists c_3(r) > 0 \quad \forall z \in M, \|z\|_E \leq r;$$

$$\|Iz - \bar{z}\|_{E_1} \leq c_3(r); \tag{9}$$

$$\exists \bar{s} > 0 \quad \forall z \in IM \quad s(z) \geq \bar{s}, \tag{10}$$

де функція $s(z)$ визначена у співвідношенні (4). Тоді імпульсна система (5) має рівномірний аттрактор.

Зауваження. Умови (7), (8) означають, що півгрупа V є асимптотично компактною [8].

Доведення теореми. Нехай $G: \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$ — імпульсна динамічна система, задана формулою (5). З умови дисипативності (6) отримуємо:

$$\exists R_0 > 0 \quad \forall r > 0 \exists T(r) \quad \forall \|z\|_E \leq r \quad \forall t \geq T(r) \quad \|G(t, z)\|_E \leq R_0. \tag{11}$$

Розглянемо послідовність $\{\xi_n = G(t_n, z_n)\}$, $t_n \nearrow \infty$, $\|z_n\|_E \leq r$. Доведемо передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}$ в E . Нехай $s(z_n)$ — момент імпульсного збурення зі співвідношення (4). Розглянемо випадки:

1. Якщо $t_n < s(z_n) \leq \infty$, то

$$\xi_n = G(t_n, z_n) = V(t_n, z_n) = V_1(t_n, z_n) + V_2(t_n)z_n.$$

Унаслідок умови (7) виконується, що з точністю до підпослідовності справедлива збіжність

$$V_1(t_n, z_n) \rightarrow \xi^1 \text{ в } E \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Крім того, з умови (8) випливає, що

$$\|V_2(t_n)z_n\|_E \leq c_2 r e^{-\delta t_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, з точністю до підпослідовності отримуємо, що $\xi_n \rightarrow \xi^1$ в E при $n \rightarrow \infty$.

2. Якщо $t_n = s(z_n)$, то

$$\xi_n = IV(t_n, z_n).$$

У цьому випадку $\|V(t_n, z_n)\|_E \leq \|\xi^1\|_E + 1$ при досить великих $n \geq 1$. Таким чином, передкомпактність послідовності ξ_n випливає з оцінки (9).

3. Якщо $t_n > s(z_n)$, то

$$\xi_n = G(t_n - s(z_n), G(s(z_n), z_n)) = G(t_n - s(z_n), IV(s(z_n), z_n)).$$

Оскільки $\|z\|_E \leq \alpha \|z\|_{E_1}$, то з умов (7) і (8) виводимо оцінку:

$$\|V(s(z_n), z_n)\| \leq \alpha c_1(r) + c_2 r.$$

Тоді з точністю до підпослідовності справедлива збіжність

$$\eta_n = IV(s(z_n), z_n) \rightarrow \eta \text{ в } E \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Якщо $\tau_n := t_n - s(z_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то внаслідок (10)

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \rightarrow \eta \text{ в } E \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Інакше $\tau_n \in [T_{i(n)}^{(n)}, T_{i(n)+1}^{(n)})$ $\xi_n = V(\tau_n - T_{i(n)}^{(n)}, \eta_{i(n)}^{(n)+})$. Унаслідок умови (10) на проміжку $[0, T(r)]$ імпульсна траєкторія, що стартує із z_n , зазнає не більше, ніж $\left\lceil \frac{T(r)}{\bar{s}} \right\rceil$ імпульсних збурень. Тоді, ураховуючи умову (11), маємо

$$\exists c_4 = c_4(r) : \forall t \geq 0 \quad \|G(t, z_n)\|_E \leq c_4(r).$$

Тоді з умови (9) виводимо оцінку

$$\|\eta_{i(n)}^{(n)+} - \bar{z}\|_{E_1} \leq c_3(c_4(r)),$$

яка означає збіжність з точністю до підпослідовності

$$\eta_{i(n)}^{(n)+} \rightarrow \eta^+ \text{ в } E \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, якщо $\tau_n - T_{i(n)}^{(n)} \rightarrow \tau \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$, то передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}$ є наслідком неперервності V . Якщо ж $\tau_n - T_{i(n)}^{(n)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}$ установлюється аналогічно випадку 1. Теорему доведено.

ЗАСТОСУВАННЯ ДО ІМПУЛЬСНО ЗБУРЕНОГО СЛАБОНЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t - \Delta u + \varepsilon f(u) = 0; \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Тут $\beta > 0$ — коефіцієнт дисипації; $\varepsilon \in (0, 1)$ — малий параметр;

$$\sup \{|f(u)| + |f'(u)| \mid u \in \mathbb{R}\} \leq c.$$

Ці умови гарантують [8] однозначну глобальну розв'язність задачі (12) у фазовому просторі $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ в такому сенсі: для будь-яких початкових даних $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in E$ існує єдиний розв'язок задачі (12) $z = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0, +\infty); E)$, а відповідна півгрупа $V: \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$, $V(t, z_0) = z(t)$ є неперервною, задовольняє для деяких сталих $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $\delta_1 > 0$ оцінку

$$\forall t \geq 0 \quad \|z(t)\|_E^2 \leq K_1 \|z(0)\|_E^2 e^{-\delta_1 t} + K_2 \varepsilon, \quad (13)$$

і допускає декомпозицію вигляду (7), (8) з простором $E_1 = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

$$l_p(z) = \left(\sum_{i=1}^p \{ \lambda_i(u, \psi_i)^2 + (v, \psi_i)^2 \} \right)^{1/2}; \quad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E,$$

де $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty \subset (0, +\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ — власні числа та власні вектори оператора $-\Delta$ у просторі $H_0^1(\Omega)$.

На траєкторіях задачі (12) розглянемо таку імпульсну задачу: фазова точка $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix}$ з досягненням імпульсної множини

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E : l_p(z) = a, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \gamma \right\}, \quad \gamma < a. \quad (14)$$

переводиться в нове положення $z^+ = Iz$, що належить множині

$$M' = \{ z \in E : l_p(z) = a(1 + \mu) \}, \quad (15)$$

де імпульсне відображення $I: M \rightarrow M'$ має вигляд для

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M : Iz = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c'_i \\ d'_i \end{pmatrix} \psi_i + \bar{z}, \quad (16)$$

де $\left(\sum_{i=1}^p \{ \lambda_i(c'_i)^2 + (d'_i)^2 \} \right)^{1/2} = a(1 + \mu)$, $z \in E$ — фіксоване;

$$\bar{z} = \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{c}_i \\ \bar{d}_i \end{pmatrix} \psi_i.$$

Тобто імпульсне відображення I змінює перші p координат, збільшуючи в $1 + \mu$ разів цільовий функціонал, і фіксує всі інші координати, починаючи з $p + 1$.

Теорема. Імпульсно-збурена система (12), (14)–(16) за достатньо малих $\varepsilon > 0$ породжує імпульсну динамічну систему $G: \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$, для якої існує рівномірний атрактор Θ .

Доведення. Перевіримо виконання умов (1)–(3). Умова (1) очевидно виконується. Доведемо справедливість умови (2). Для $u_i(t) = (u(t), \psi_i)$, де $u(\cdot)$ — розв’язок (12), маємо:

$$\forall i \geq 1: \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\lambda_i u_i^2(t) + (u'_i(t))^2) + \beta (u'_i(t))^2 = -\varepsilon (f(u), \psi_i) u'_i(t). \quad (17)$$

Зокрема

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} l_p^2(z(t)) + \beta \sum_{i=1}^p (u'_i(t))^2 &\leq \varepsilon c_1 \left(\sum_{i=1}^p (u'_i(t))^2 \right)^{1/2}; \\ \forall t \geq 0: l_p^2(z(t)) + \beta \int_0^t \sum_{i=1}^p (u'_i(s))^2 ds &\leq l_p^2(z(0)) + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta} t. \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо $z(0) \in M$, то

$$\sum_{i=1}^p (u'_i(0))^2 = a^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i^2(0) \geq a^2 - \gamma^2.$$

Тоді з неперервності $u'_i(t)$ випливає, що для деякого $\tau > 0$ справедливо, що $\forall t \in [0, \tau]$

$$\sum_{i=1}^p (u'_i(t))^2 \geq \frac{a^2 - \gamma^2}{2}.$$

Тоді з нерівності (18) для довільного $t \in [0, \tau]$ маємо

$$l_p^2(z(t)) + \frac{\beta}{2} (a^2 - \gamma^2) t \leq a^2 + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta} t.$$

Таким чином, для достатньо малих $\varepsilon > 0$ для всіх $t \in (0, \tau): l_p(z(t)) < a$, отже, отримуємо умову (2).

Для перевірки умови (3) доведемо умову (10). Відомо [8], що $u_i(t)$ задовольняє оцінку типу (13):

$$\forall t \geq 0 \quad (u'_i(t))^2 + \lambda_i u_i^2(t) \leq K_1 ((u'_i(0))^2 + \lambda_i u_i^2(0)) e^{-\delta_1 t} + K_2 \varepsilon. \quad (19)$$

Тепер нехай $z_0 \in IM$ і $s(z_0)$ — момент першого потрапляння траєкторії (12) на M . Тоді з нерівності

$$\forall t \geq 0 \quad l_p^2(z(t)) \leq K_1 l_p^2(z(0)) e^{-\delta_1 t} + K_2 p \varepsilon$$

дістаємо
$$\forall t \geq 0 \quad \sum_{i=1}^p (u'_i(t))^2 \leq K_1 a^2 (1 + \mu)^2 + K_2 p \varepsilon.$$

Використаємо рівність (17) для $s = s(z_0)$. Маємо:

$$\begin{aligned} a^2 (1 + \mu)^2 - a^2 &= 2\beta \int_0^s \sum_{i=1}^p (u'_i(t))^2 dt + \\ &+ 2\varepsilon \int_0^s \sum_{i=1}^p (f(u(t), \psi_i) u'_i(t)) dt \leq 2\beta (K_1 a^2 (1 + \mu)^2 + K_2 p \varepsilon) s + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta} s + \beta(K_1 a^2 (1 + \mu)^2 + K_2 p \varepsilon) s, \\
 \text{тобто} \quad s \geq & \frac{a^2 (1 + \mu)^2 - a^2}{3\beta(K_1 a^2 (1 + \mu)^2 + K_2 p \varepsilon) + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta}} =: \bar{s}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Нерівність (20) означає, що виконується умова (3), тобто система (12), (14)–(16) породжує імпульсну динамічну систему $G: \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$, для якої виконуються умови (1)–(3) та (7)–(10). Залишилось довести дисипативність імпульсної динамічної системи G . За відсутності імпульсних збурень з оцінки (13) виводимо, що для $z(0)_E \leq r$ існує таке значення $T_1 = T_1(r)$, що для всіх $t \geq T_1$ $\|z(t)\|_E \leq \sqrt{2}$. Якщо $z(s) \in M$, то з оцінки (19)

$$a^2 \leq K_1 r^2 e^{-\delta_1 s} + K_2 \varepsilon p,$$

звідки

$$s \leq T_2 = T_2(r) = \frac{1}{\delta_1} \ln \frac{2K_1 r^2}{a^2}.$$

Тоді $\forall t \in [0, T_2]$ $\|z(t)\|_E^2 \leq K_1 r^2 + K_2$, і оскільки

$$\|Iz\|_E^2 \leq a^2 (1 + \mu)^2 + \|\bar{z}\|_E^2 =: R_0^2,$$

то для всіх $t \geq T_2$

$$\|G(t, z_0)\|_E^2 \leq \max\{R_0^2, K_1 R_0^2 + K_2\},$$

що і доводить дисипативність G . Теорему доведено.

Дослідження виконані за підтримки НФДУ.

ВИСНОВКИ

Для одного класу нескінченновимірних імпульсних динамічних систем, що породжуються асимптотично-компактними еволюційними підгрупами, установлено умови існування рівномірного атрактора. На основі отриманих абстрактних результатів доведено існування рівномірного атрактора для слабонелінійного хвильового рівняння з дисипацією, розв'язки якого зазнають імпульсних збурень із досягненням ними деякої фіксованої підмножини фазового простору.

ЛІТЕРАТУРА

1. A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*. Kyiv: Vysch. shkola, 1987, 287 p.
2. V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, and P.S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1989, 288 p. Available: <https://doi.org/10.1142/0906>
3. A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific, 1995, 462 p.
4. M. Akhmet, *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. New York: Springer, 2010, 176 p. doi: 10.1007/978-1-4419-6581-3.
5. S.K. Kaul, "Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems", *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, vol. 7, no. 4, pp. 509–523, 1994. Available: <https://doi.org/10.1155/S1048953394000390>

6. K. Ciesielski, “On Stability in Impulsive Dynamical Systems”, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, vol. 84, no. 1, pp. 81–91, 2004. doi: 10.4064/ba52-1-9.
7. E.M. Bonotto, “Flows of characteristic $0+$ in impulsive semidynamical systems”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 332, pp. 81–96, 2007. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.09.076.
8. R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, 1988, 500 p. Available: https://doi.org/10.11540/bjsiam.1.4_350
9. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, “Pullback attractors for a class of extremal solutions of the 3D Navier-Stokes equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 373, iss. 2, pp. 535–547, 2011. doi: 10.1016/j.jmaa.2010.07.040.
10. M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, and N.V. Zadoianchuk, “Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 25, iss. 10, pp. 1569–1574, 2012. doi: 10.1016/j.aml.2012.01.016.
11. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, “Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 34, no. 10, pp. 4155–4182, 2014. doi: 10.3934/dcds.2014.34.4155.
12. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, “Regular Solutions and Global Attractors for Reaction-Diffusion Systems without Uniqueness”, *Communications on Pure and Applied Analysis*, vol. 13, no. 5, pp. 1891–1906, 2014. doi: 10.3934/cpaa.2014.13.1891.
13. O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, and J. Valero, “Structure of the Global Attractor for Weak Solutions of a Reaction-Diffusion Equation”, *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 9, no. 5, pp. 2257–2264, 2015. Available: <http://dx.doi.org/10.12785/amis/090506>.
14. N. Gorban and L. Paliichuk, “Uniform Global Attractor for Nonautonomous Reaction–Diffusion Equations with Carathéodory’s Nonlinearity”, *Advances in Dynamical Systems and Control. Springer Series: Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 69, pp. 265–272, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-40673-2_13.
15. M. Zgurovsky, M. Gluzman, N. Gorban, P. Kasyanov, L. Paliichuk, and O. Khomenko, “Uniform global attractors for non-autonomous dissipative dynamical systems”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B*, vol. 22, iss. 5, pp. 2053–2065, 2017. doi: 10.3934/dcdsb.2017120.
16. M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, N.V. Gorban, and L.S. Paliichuk, “Qualitative and quantitative analysis of weak solutions of energy-balance climate models”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 55, no. 4, pp. 552–560. Available: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00164-1>
17. N.V. Gorban, O.V. Khomenko, L.S. Paliichuk, and A.M. Tkachuk, “Long-time behavior of state functions for climate energy balance model”, *Discrete & Continuous Dynamical Systems. Ser. B*, vol. 22, iss. 5, pp. 1887–1897, 2017. doi: 10.3934/dcdsb.2017112.
18. N.V. Gorban et. al., “Uniform attractors for vanishing viscosity approximations of non-autonomous complex flows”, *JOEDA*, vol. 26, iss. 2, pp. 1–12, 2018. doi: 10.15421/141807.
19. E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, A.N. Carvalho, and R. Czaja, “Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach”, *Journal of Differential Equations*, vol. 259, iss. 7, pp. 2602–2625, 2015. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.033>
20. O.V. Kapustyan and M.O. Perestyuk, “Global Attractors in Impulsive Infinite-Dimensional Systems”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 68, pp. 583–597, 2016. Available: <https://doi.org/10.1007/s11253-016-1243-0>
21. E.M. Bonotto, M.C. Bortolan, R. Collegari, and R. Czaja, “Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems”, *Journal of Differential Equations*, vol. 261, iss. 8, pp. 4338–4367, 2016. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.06.024>
22. S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan, and I. Romaniuk, “Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 458, iss. 1, pp. 193–218, 2018. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.09.001>

23. O.V. Kapustyan, M.O. Perestyuk, and I.V. Romanyuk, “Stability of Global Attractors of Impulsive Infinite-Dimensional Systems”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 70, pp. 30–41, 2018.
24. O. Kapustyan and D. Shkundin, “Global attractor of one nonlinear parabolic equation”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 4, pp. 446–455, 2003.
25. A.V. Kapustyan, “Global attractors of a nonautonomous reaction-diffusion equation”, *Differential Equations*, vol. 38, no. 10, pp. 1467–1471, 2002. doi: 10.1023/A:1022378831393.
26. N. Gorban and P. Kasyanov, “On regularity of all weak solutions and their attractors for reaction-diffusion inclusion in unbounded domain”, *Solid Mechanics and its Applications*, vol. 211, pp. 205–220. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_15.

Надійшла 25.03.2021

INFORMATION ON THE ARTICLE

Nataliia V. Gorban, Educational and Scientific Complex “Institute for Applied System Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine, e-mail: nataliia.v.gorban@gmail.com

Oleksiy V. Kapustyan, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, e-mail: kapustyanav@gmail.com

ATTRACTING SETS FOR ONE CLASS OF ASYMPTOTICALLY COMPACT SYSTEMS WITH PULSED PERTURBATION / O.V. Kapustyan, N.V. Gorban

Abstract. The authors consider the pulsed dynamical systems generated by evolutionary processes. The trajectories of these processes undergo the pulsed perturbation when the energy functional reaches some fixed limit value. The generalization of the classical theory of global attractors of infinite dimensional dynamical systems in case of systems with impulse actions is carried out. It is established that for the dissipative pulsed dynamical system generated by the asymptotically compact semigroup, there exists a uniform attractor, i.e., a compact uniformly attracting set, minimal among all such sets in the phase space of the system. The result is applied to the weakly nonlinear wave equation with dissipation, the trajectories of which are subjected to impulsive perturbations upon attainment of a certain fixed subset in the phase space, so called the impulse set.

Keywords: dynamical system, attractor, impulse perturbation, wave equation.

ПРИТЯГИВАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АСИМПТОТИЧЕСКИ КОМПАКТНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ / А.В. Капустян, Н.В. Горбань

Аннотация. Рассмотрены импульсные динамические системы, порожденные эволюционными процессами, траектории которых испытывают импульсные возмущения при достижении энергетическим функционалом некоторого фиксированного порогового значения. Обобщена классическая теория глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем на случай систем с импульсным воздействием. Установлено, что для диссипативной импульсной динамической системы, порожденной асимптотически компактной полугруппой, существует равномерный аттрактор — компактное равномерно притягивающее множество, минимальное среди всех таких множеств в фазовом пространстве системы. Полученный результат применен к слабо нелинейному волновому уравнению с диссипацией, траектории которого испытывают импульсные возмущения при достижении определенного фиксированного подмножества фазового пространства задачи — импульсного множества.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор, импульсное возмущение, волновое уравнение.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Гамідов Галіб,

доктор філософії, керівник департаменту інформаційних технологій «Азершиг»,
Азербайджан, Баку

Гасанов Айдин Сардар огли,

доцент, доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії та освітніх вимірювань Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова,
Україна, Київ

Голінко Ігор Михайлович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів теплоенергетичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Горбань Наталія Володимирівна,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Гурський Олександр Олександрович,

кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації технологічних процесів і робототехнічних систем Одеської національної академії харчових технологій,
Україна, Одеса

Денисенко Андрій Володимирович,

старший викладач кафедри інформаційних систем Одеського національного політехнічного університету, Україна, Одеса

Зайченко Юрій Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зак Юрій Олександрович,

доктор технічних наук, науковий експерт і консультант, Німеччина, Аахен

Зеленський Кирило Харитонович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри біомедичної кібернетики факультету біомедичної інженерії КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Капустян Олексій Володимирович,

професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Коваленко Юлія Борисівна,

доцент, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри безпеки інформаційних технологій Національного авіаційного університету, Україна, Київ

Козлюк Ірина Олексіївна,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри телекомунікаційних систем Національного авіаційного університету, Україна, Київ

Колчина Оксана Олександрівна,

доцент, кандидат економічних наук, доцент кафедри державного і муніципального управління Південного федерального університету, Росія, Таганрог

Кудрявцева Аріна Сергіївна,

аспірантка Санкт-Петербурзького політехнічного університету Петра Великого, Росія, Санкт-Петербург

Лісничка Марина Олександрівна,

кандидат економічних наук, доцент кафедри державного і муніципального управління Південного федерального університету, Росія, Таганрог

Настенко Євген Арнольдович,

старший науковий співробітник, доктор біологічних наук, завідувач кафедри біомедичної кібернетики факультету біомедичної інженерії КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Панкратова Наталія Дмитрівна,

член-кореспондент НАН України, професор, доктор технічних наук, заступник директора ПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Пахомов Євген В'ячеславович,

доцент, кандидат економічних наук, доцент Інституту управління в економічних, екологічних і соціальних системах Південного федерального університету, Росія, Таганрог

Петричко Микола Володимирович,

аспірант кафедри комп'ютерних систем управління Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Статкевич Віталій Михайлович,

кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник відділу прикладного нелінійного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Трофимчук Олександр Миколайович,

член-кореспондент НАН України, професор, доктор технічних наук, директор Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

Штовба Сергій Дмитрович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса, Україна, Вінниця