

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ» НТУУ «КПІ»
МОН ТА НАН УКРАЇНИ

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 3

2012

ЗАСНОВАНИЙ У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, проф., д. т. н.

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, чл.-кор. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, проф., д. ф.-м. н.

В.Г. БОНДАРЕНКО, проф., д. ф.-м. н.

Ж. БОННІН, проф., Франція

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

Р. ВОРОНКА, проф., США

О.Д. ГВІШАНИ, проф., д. ф.-м. н.,
Росія

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.С. МАКАРЕНКО, проф., д. ф.-м. н.

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н.

Т.Л. СААТІ, проф., д. ф.-м. н.

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

пр. Перемоги, 37, корп. 35,

Навчально-науковий комплекс

«Інститут прикладного системного аналізу»

НТУУ «КПІ» МОН та НАН України

Тел.: 406-81-44; Факс: 406-81-44

E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

• **Методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності**

• **Нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL-SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
AT THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE «KPI»
OF MES AND NAS OF UKRAINE

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 3

2012

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Prof., Ukraine

Associate editors:

F.I. ANDON, Correspondent
member of NASU

A.V. ANISIMOV, Prof., Ukraine

V.G. BONDARENKO, Prof., Ukraine

Z. BONNIN, Prof., France

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Prof., Russia

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.S. MAKARENKO, Prof., Ukraine

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

T.L. SAATY, Prof., USA

L. SAKALAIUSKAS, Prof., Lithuania

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

R. VORONKA, Prof., USA

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Educational-Scientific Complex
«Institute for Applied System Analysis» at the
National Technical University of Ukraine «KPI»
of MES and NAS of Ukraine
Phone: 406-81-44; Fax: 406-81-44
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

• **Methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty**

• **New methods in system analysis, computer science and theory of decision making**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «КПІ», директор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**

Редактор **А.О. Млечко**

Молодший редактор **В.М. Литвин**

Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 25.09.2012. Формат 70x108/16.

Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

Видавництво та поліграфія ВПК «Політехніка»

ВПІ НТУУ «КПІ»

03056, Київ–56, пр. Перемоги, 37, корп. 15

Dear Readers!

The Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is Rector of the National Technical University of Ukraine «KPI», Director of the Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine, academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

3 • 2012

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ	
<i>Баженов Н.А., Соколов Б.Н.</i> Обеспечение качества формирования концептуальной модели требований к программному обеспечению	7
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Кондратенко Н.Р., Снігур О.О.</i> Використання інтервальних функцій належності в задачах кластеризації даних соціального характеру	20
<i>Иваненко В.И., Михалевиц В.М.</i> К неопределенности в параметрических схемах ситуаций задач принятия решения	30
<i>Демчишин М.В., Левченко С.Г.</i> Вплив вразливості об'єктів на розв'язок прямої та зворотної задач менеджменту інформаційної безпеки	43
<i>Соболева Е.В.</i> Модификации критериев обобщенной полезности в задачах идентификации многокритериального выбора	58
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	
<i>Ясіньський В.В., Болдак А.О.</i> Дослідження еволюції залишкових знань у великих навчальних системах	66
<i>Федин С.С., Зубрецкая Н.А., Гончаров А.С.</i> Прогнозирование конкурентоспособности продукции по совокупности показателей качества на основе нейросетевого моделирования	74
МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	
<i>Бідюк П.І., Коновалюк М.М.</i> Визначення величини ризику VaR на основі оцінок параметрів моделі стохастичної волатильності	85
<i>Желдак Т.А.</i> Застосування зворотних залежностей у математичних моделях складних об'єктів та систем	95
НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	
<i>Дидук Н.Н.</i> Меры внутренней и внешней информации (на примере вероятностных ситуаций неопределенности). Часть I	107
<i>Башияков О.М., Пічкур В.В., Хітько І.В.</i> Умови практичної стійкості дискретних систем і функції Ляпунова	125
<i>Чабаненко Д.М.</i> Дискретне Фур'є-продовження як алгоритм прогнозування фінансово-економічних часових рядів	134
Реферати	142
Відомості про авторів	148

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

3 • 2012

CONTENTS

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Bazhenov M.O., Sokolov B.M.</i> Ensuring the quality of formation of the requirements conceptual model for the software	7
DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECO- LOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS	
<i>Kondratenko N.R., Snihur O.O.</i> Interval membership functions application in social data clustering	20
<i>Ivanenko V.I., Mykhalevich V.M.</i> To the uncertainty in the parametric schemes of decision-making problems	30
<i>Demchyshyn M.V., Levchenko Y.H.</i> The influence of objects vulnerability on the decision of direct and inverse problems of the information safety	43
<i>Soboleva E.V.</i> Modification of generalized criteria in problems of identification of multi-criteria choice	58
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Yasinsky V.V., Boldak A.O.</i> Research of the evolution of residual knowledge in large education systems	66
<i>Fedin S.S., Zubretska N.A., Goncharov A.S.</i> The forecasting of production competitiveness according to the whole set of quality attributes based on neural network modeling	74
METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND CONTROL IN CONDITONS OF RISK AND UNCERTAINTY	
<i>Bidyuk P.I., Konovaliuk M.M.</i> Determining the risk measure VaR using parameters of stochastic volatility model	85
<i>Zheldak T.A.</i> Application of inverse dependencies in mathematical models of complex objects and systems	95
NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING	
<i>Diduk M.M.</i> The measures of internal and external information (on example of probabilistic situations of uncertainty). Part I	107
<i>Bashnyakov O.M., Pichkur V.V., Khitko I.V.</i> Conditions of practical stability of discrete systems and Lyapunov functions	125
<i>Chabanenko D.M.</i> Discrete Fourier-continuation as an algorithm of financial-economic time series forecasting	134
References	142
Information about the authors	148

УДК 681.03

ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЧЕСТВА ФОРМИРОВАНИЯ КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ТРЕБОВАНИЙ К ПРОГРАММНОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ

Н.А. БАЖЕНОВ, Б.Н. СОКОЛОВ

Рассмотрена проблема формирования концептуальной модели требований к программному обеспечению (ПО) на основании требований, полученных от заинтересованных лиц. Модель формируется на основании метода семантико-синтаксического представления текста. Описана процедура контроля качества, состоящая из анализа релевантности документа, PAS (Predicate Argument Structure) анализа и валидации модели заинтересованными лицами. Приведен пример заполнения глоссариев.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс программной инженерии принято разделять на последовательные функциональные стадии — процессы жизненного цикла программной системы [1]. На рис. 1 показаны 4 процесса (в соответствии с [2]), рассматриваемые в работах нашей научной группы. Два из них являются объектом данного исследования — это процессы сбора требований [3], анализа и обработки требований [4].

Этапы тестирования, поддержки, сопровождения, а также другие процессы организационной группы, касающиеся аспектов организации, управления и контроля разработкой в данном исследовании не рассматриваются, и на рис. 1 не представлены.

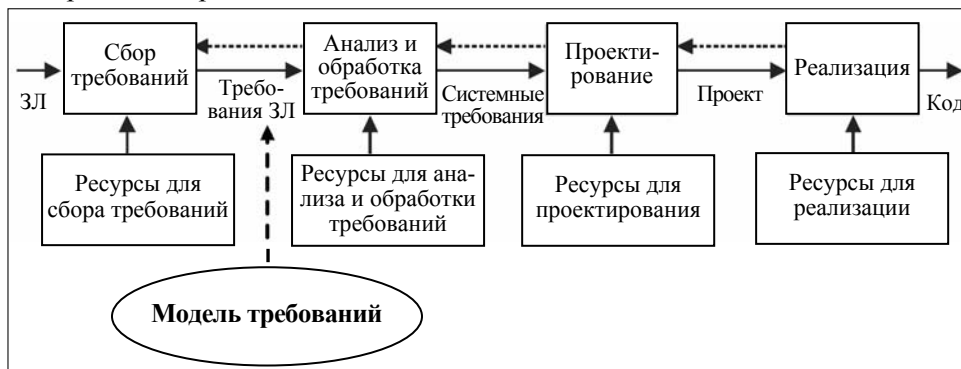


Рис. 1. Процессный подход к управлению качеством ПО

Качество программной системы зависит от качества проведения каждого процесса жизненного цикла, а значит и качества функциональных элементов, входных и выходных данных, ресурсов, необходимых для осуществления процесса. Таким образом, управление качеством процесса разработки проецируется на управление качеством отдельных процессов, а также на их элементы. В данной работе исследуется качество перехода от процесса сбора требований к процессу анализа и обработки, т.е. выходная информация одного процесса в тоже время является входной информацией последующего процесса.

Цель работы — разработка процедуры преобразования структурированных текстовых требований в концептуальную модель с обеспечением контроля качества данного преобразования на всех этапах данного процесса.

Для достижения необходимых результатов ставятся следующие задачи:

- разработка блока автоматизированной обработки текстов требований к ПО [5];
- создание концептуальной модели требований с дифференцированием функциональных и нефункциональных требований;
- разработка процедуры интерпретации структурированных требований и извлечения из них концептов модели требований;
- осуществление контроля качества на каждом шаге преобразования требований (в том числе для гибкого взаимодействия с другими процессами жизненного цикла).

Применению методов автоматизированной обработки естественного языка для обработки текстов посвящена работа [5]. Для решения задачи формирования модели требований в качестве базовых были использованы модели предложенные в [10–13]. В данной работе предлагается систематизировать результаты, получаемые на одних этапах, которые затем обрабатываются другими; разработать процедуру формирования модели требований; предложить подходы для контроля качества на всех внутренних блоках сбора, анализа и обработки требований. Научная новизна работы заключается в применении многошаговой стратегии, позволяющей повысить вероятность создания более качественной и жизнеспособной программной системы путем выявления ее узких мест на ранних стадиях разработки.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА

На рис. 2 изображена схема взаимодействия рассматриваемых этапов жизненного цикла.

Процедура сбора требований представляет собой множество мероприятий по сбору информации от заинтересованных лиц (ЗЛ) и преобразованию ее в текстовую форму. Методы сбора могут быть различными: анкетирование, опрос, интервью и т.д.

Требования на естественном языке, представленные в текстовом виде, далее обрабатываются и трансформируются в структурированный семантико-базированный вид. Данная процедура осуществляется с помощью техник автоматизированной обработки текста на естественном языке [5]. Из структурированного семантико-базированного вида требования преобразуются

в концептуальную модель требований. Модель должна пройти верификацию ЗЛ. В случае, когда модель слишком сложна для адекватного восприятия ЗЛ, осуществляется ее преобразование к адаптированной форме. Если верификация не прошла успешно, цикл «сбор требований — преобразование требований — верификация требований» выполняется снова, либо полностью, либо частично (в зависимости от результатов верификации).

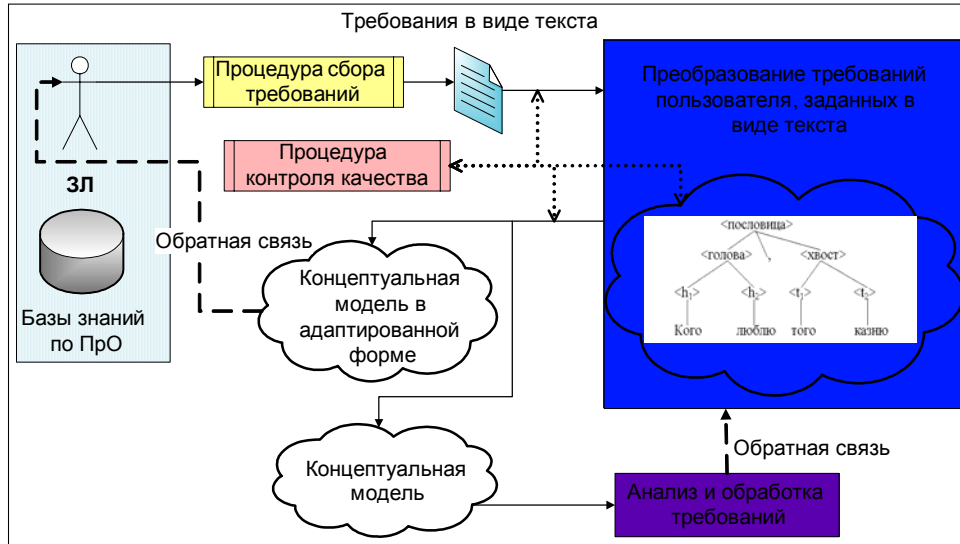


Рис. 2. Функциональная схема взаимодействия этапов

Концептуальная модель (без каких-либо адаптаций) поступает на вход процесса анализа и обработки требований, где с ней происходят дальнейшие преобразования. В начале данного процесса осуществляется анализ корректности требований, состоящий из проверки полноты и корректности требований, их тестируемости, осуществимости проектирования архитектуры системы, возможности использования и сопровождаемости системы [4]. Далее требования качества обрабатываются и анализируются, тем самым приводятся в форматы, которые было бы удобней использовать при проектировании и реализации системы. Так помимо различных спецификаций требования качества могут находить отражение в юнит-тестах, а также в метаинформации внедряемой непосредственно в код системы (например, в виде аннотаций языка java), которая, к примеру, может генерировать ошибки компиляции при нарушениях определенных требований (например, паттерн не был реализован) [6].

МОДЕЛЬ ТРЕБОВАНИЙ К ПО

Требования к ПО разделяются на два основных класса [7, 8] — требования к функциональным возможностям разрабатываемой системы и нефункциональные требования, т.н. требования качества (характеристики разрабатываемой системы необходимые для ее соответствующей работоспособности [9]). Таким образом, концептуальная модель требований представляется в виде модели функциональных требований и модели качества.

Модель функциональных требований. Используемая в данной работе модель функциональных требований базируется на подходе, разработанном в Клагенфуртском университете [10, 11]. В основе данного подхода лежит вовлечение ЗЛ на ранних этапах разработки ПО путем коммуникации и взаимодействия специалиста конкретной предметной области, не обладающего знаниями в области разработки ПО, со специальными интерфейсами, доступными этому специалисту. В качестве таких интерфейсов разработчиками подхода [10, 11] было предложено использование табличного представления концептуальных сущностей предметной области в виде глоссариев таких концептов. Метамоделю модели функциональных требований изображена на рис. 3.

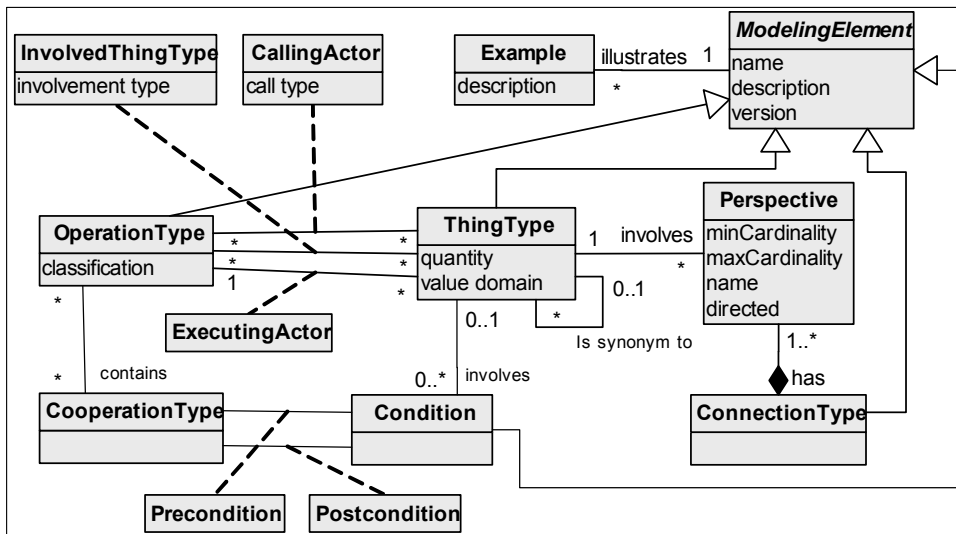


Рис. 3. Модель функциональных требований согласно [9]

Абстрактной сущностью модели, наследуемой всеми основными элементами модели, является концепт *ЭлементМодели* (*ModelingElement*). Каждый концепт, наследующий *ЭлементМодели*, может иметь множество *примеров* (*example*). Данная зависимость отображается на диаграмме с помощью связи «*illustrates*». Модель включает в себя статическую и динамическую части, содержащие процессно-инвариантную и процессно-зависимую информацию соответственно.

Тип-сущность (*thing-type*) и *тип-связь* (*connection-type*) составляют статическую подмодель. Тип-сущность обобщает понятие класса, атрибута, значения. Примерами таких концептов служат объекты, люди, ресурсы, параметры, характеристики объектов, абстрактные понятия и другие «сущности». В текстах требований типы-сущности представлены именными фразами, составными существительными и отдельными существительными. Может иметь атрибуты ожидаемой количественной величины (*quantity*) и значения допустимой области определения (*value domain*). Например, тип-сущность «*Order date*» может иметь количественную величину равную 365 и значение области определения «*Дата*». Если несколько типов-сущностей имеет синонимические значения с точки зрения предметной области, кото-

рую описывают данные требования, то между ними возникает зависимость синоним (*is synonym to*).

Типы-связи необходимы для отображения взаимосвязей между типами-сущностями. Два или более типа-сущности могут образовывать тип-связь. Для полного определения связи между сущностями необходимо описать ее с точки зрения всех сущностей, участвующих в данной связи. Из этого следует определение концепта *проекция* (*perspective*). Таким образом, каждый тип-сущность, состоящий в связи, имеет свою проекцию, которая может характеризоваться кардинальными числами (*minCardinality*, *maxCardinality*), именем и другими атрибутами. В свою очередь, из множества таких проекций образуется тип-связь.

Рассмотрим приведенное выше словосочетание «Order date». Из него можно извлечь следующую информацию: тип-сущность заказ (order) имеет атрибут дату заказа (order date), из этого следует, что между ними образуется тип-связь «Владение атрибутом» (attribute possessing), при этом типы-сущности участвуют в проекциях «имеет атрибут» (has an attribute) и «является атрибутом» (is an attribute of).

Тип-операция (*operation-type*) и *тип-кооперация* (*cooperation-type*) образуют динамическую подмодель. Тип-операция используется для определения разрешенных операций, их действующих лиц, объектов и параметров (*ExecutingActor*, *CallingActor*, *InvolvedThingType*). Данные динамические элементы могут иметь атрибут *классификация* (*classification*), показывающий к какой категории в данном домене относится тип-операция. Субъекты, объекты и параметры типов-операций представлены типами-сущностями.

Для моделирования бизнес-процессов и сервис-процессов используется элемент тип-кооперация. Он представляет собой триаду множеств $\langle Prc, \{A,O\}, Pos \rangle$, где *Prc* — множество *предусловий* (*Precondition*), *Pos* — множество *постусловий* (*Postcondition*), $\{A,O\}$ — множество пар, состоящих из типа-операции и субъекта, осуществляющего данную операцию. Каждое *условие* (*Condition*) может быть пред- и/или постусловием одного или более типов-кооперации. Условия могут быть выражены свойствами/состояниями объекта, событиям, завершенностью какой-либо деятельности, обстоятельством/временными ограничениями, т.е. определяют начальное и конечное состояние объекта. Данное свойство условий влечет за собой наличие связи с объектами типов-сущностей, что отображено на диаграмме с помощью зависимости «участвует» (*involves*). Типы-кооперации могут быть сгруппированы сравнением их пред- и постусловий. Таким образом, образуется сеть, показывающая потоки процессов, условия их выполнения, а также результирующие условия. Множества типов-коопераций могут представляться как в табличном варианте, так и в визуальном представлении в виде графа, что улучшает понимание и взаимодействие с ЗЛ на каждой итерации разработки.

Приведем примеры динамических элементов модели. Следующие предложения иллюстрируют некоторый бизнес-процесс поступления заказа: «*The order comes in... If the order comes in, the bookkeeping department checks the payment for possible authorization. If the payment is authorized and all ordered items are on stock, then the order department confirms the order. If the*

payment is not authorized, then the order department must reject the order...» [9]. Типом-операцией является оплата проверка оплаты «check payment» с выполняющим субъектом бухгалтерия «bookkeeping department» и вовлеченным параметром оплата «payment», которые являются типами-сущностями. Предусловием для проверки оплаты является поступление заказа «order comes in» с вовлеченным типом-сущностью заказ «order». Первым постусловием является проведенная оплата «payment is authorized», а альтернативным отклоненная оплата «payment is not authorized». В обоих случаях вовлеченным типом-сущностью является оплата «payment». Полученные постусловия, в свою очередь, является предусловиями для следующих типов-коопераций в иерархии, и так далее до окончательного формирования сети бизнес-процесса. Более детальное описание данного подхода дано в [9].

Модель требований качества. Представленная модель требований качества основывается на модели *QAPM-S* [12, 13] и расширяет, используемую в данной работе, модель *KCPM* [10, 11]. Метамоделю модели концептов, отвечающих за характеристики качества, изображена на рис. 4. Связь с метамоделью функциональных требований осуществляется посредством общего мета-концепта *ЭлементМодели* (*ModelingElement*), а также типа-операции и типа-кооперации, задающих контекст использования.

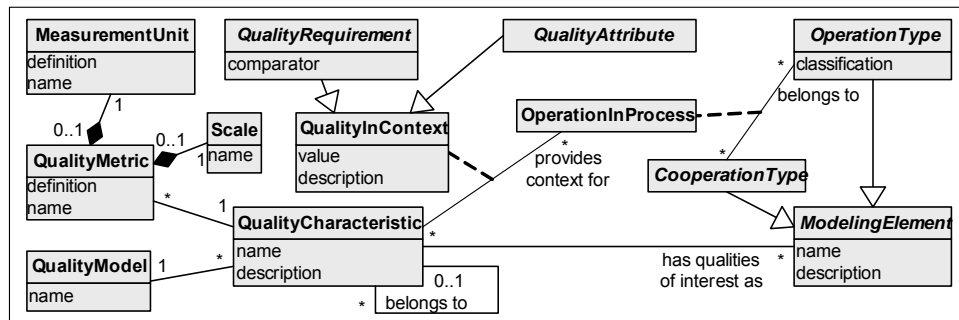


Рис. 4. Модель требований качества

Данный подход базируется на понятиях «категория качества», «характеристика качества», «метрика качества» и др., определенных в стандартах ISO [7, 8].

Требования качества находятся в зависимости от динамического контекста использования. Соответственно, контекст в каждом случае может быть определен, как пара $\langle E, O^E \rangle$ (*OperationInProgress* в метамоделю), где E — экземпляр *типа-кооперации* (*CooperationType*), а O^E — экземпляр *типа-операции* (*OperationType*), принадлежащего данному типу-кооперации. *Качество-в-контексте* (*QualityInContext*) имеет две специализации: *ТребованияКачества* (*QualityRequirements*) и *АтрибутыКачества* (*QualityAttribute*).

Например, у интернет-магазина могут существовать различные группы клиентов, но при этом мы можем получать различные контексты. Таким образом, в контексте «обычный клиент» *характеристика качества* (*QualityCharacteristic*) «доступность сервиса добавления заказа», соответствующая *метрике качества* (*QualityMetric*) «доступность» (*Availability*) может быть положена 95 %. В то же время для «VIP-клиента» она может быть равна 99,9 %.

ПРЕДЛОЖЕННАЯ МОДЕЛЬ NLP-ОБРАБОТКИ ТЕКСТОВ ТРЕБОВАНИЙ

Структурированное семантико-синтаксическое представление текста спецификаций требований

Согласно [3] спецификации требований к ПО после определенных процедур первичной обработки поступают на вход блока автоматизированного лингвистического анализа. Результатом работы данного блока является структурированный текст древовидного формата, с корневой вершиной, промежуточными узлами, характеризующими предложения и различные фразы, и с листьями, представленными отдельными лексемами с наборами определенных атрибутов. В данном исследовании для лингвистического анализа используется подход, основанный на теории контекстно-свободных грамматик с использованием статистического морфологического анализатора и основанного на правилах синтаксического парсера [14, 15]. Ограничением данного подхода является наличие практической применимости только для доменов с требованиями на английском языке, хотя возможность его практической адаптации к какому-либо природному языку присутствует. Общую схему структурированного предложения упрощенно можно показать на рис. 5. На данной схеме приведены следующие обозначения для фраз и частей речи: n0, n2, n3 — имя существительное и именные фразы; v0 — глагол и глагольные фразы; v0(aux) — вспомогательный глагол; pron0 — местоимение; a0, a2 — имя прилагательное и прилагательная (атрибутивная) фраза; adv0, adv2 — наречие и фраза обстоятельства; q0, q2 — имя числительное и фраза числительного; p0, p2 — предлог и предложная фраза; pt0 — частица; det0 — артикль, определитель; rel0 — относительное местоимение; sentence (inf) — инфинитивная группа; sentence (relative) — определительное придаточное предложение; sentence (subord) — придаточное предложение.

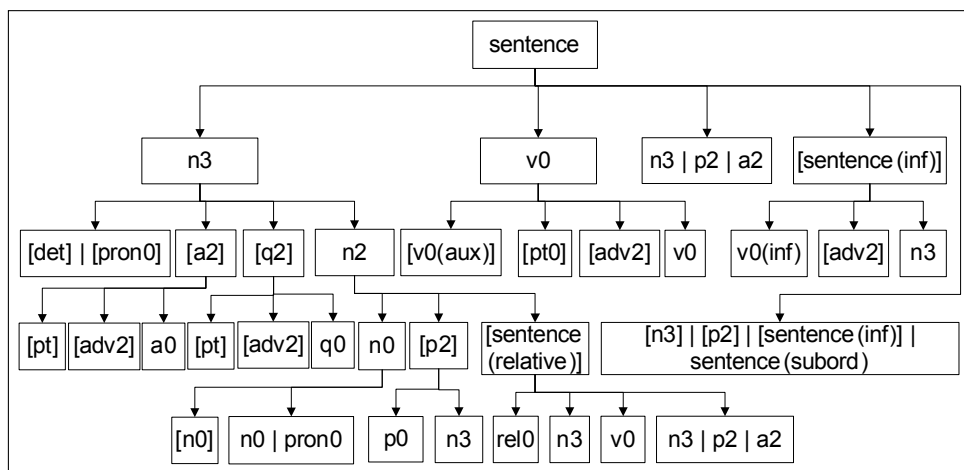


Рис. 5. Обобщенная структура предложения, получаемого в результате обработки

С помощью разработанных эвристических правил, описанных в работах [5, 15], осуществляется построение дерева текста требований с узлами в виде предложений, морфосинтаксических групп, фраз, словосочетаний и листьев, представленных отдельными лексемами.

Пример обработки предложения-требования «The order department for each ordered item checks its availability on stock» NLP-блоком приведен на рис. 6.

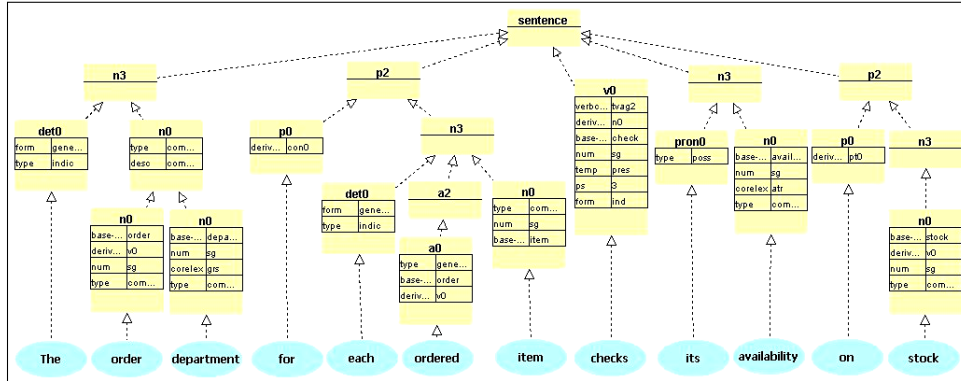


Рис. 6. Древоидное представление предложения

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР ТРЕБОВАНИЙ И ЗАПОЛНЕНИЕ ГЛОССАРИЕВ МОДЕЛИ ТРЕБОВАНИЙ

Формат структурированных данных требований далее используется для формирования концептуальной модели требований. Для выделения концептов и заполнения ими глоссариев модели необходимо использовать правила интерпретации. В данном исследовании предлагается взять в качестве базовой характеристики каждого предложения его предикатно-аргументную структуру (PAS — predicate argument structure), основанную на транзитивности и др. глагольных категориях [5]. Определяющие лексемы именных групп и части составных существительных формируют множество типов-сущностей. Отношения «включения» и «атрибутивности» образуют множество типов-связей. Семантико-синтаксическая роль глаголов в предложении определяет трансформацию динамической части модели. Если глагол имеет субъект-агент, то он указывает о наличии типа-операции, при этом существительные, вовлеченные в его управление, в зависимости от семантической роли (агент, субъект, цель) указывают на вовлеченные в процесс типы-сущности (*InvolvedThingType*), которые также попадают в глоссарий типов-операций. Если глагол не имеет субъекта-агента, то он становится кандидатом в пред- или постусловия для типов-коопераций.

Таким образом, сформируем базовый набор правил трансформации лингвистических элементов в элементы модели требований, используя [16–18]. В табл. 1 представлены правила интерпретации, необходимые для заполнения модели функциональных требований, а в табл. 2 — для модели требований качества.

Используя приведенные правила, механизм формирования модели требований заполняет глоссарий концептами модели. На рис. 7 схематически показан механизм заполнения глоссария типа-сущностей: в первом случае типами-сущностями становятся как части сложного существительного «order», «services», так и все сложное существительное в целом «order processing services»; во втором случае ведущая лексема («stock clerk») именной группы «(the/det0 (stock/n0 clerk/n0)/n0comp)/n3» становится типом-сущностью. При этом атрибут существительного «corelex=hum» помогает

определить классификационный признак типа-сущности «person». Процесс интерпретации не является автоматическим, а допускает изменение пользователем настроек правил по умолчанию. После выполнения обработки с помощью стандартного набора правил, если пользователь не удовлетворен результатами интерпретации, то он может или изменить правила и повторить процесс обработки, или управлять контентом моделей непосредственно через глоссарии концептов.

Таблица 1. Некоторые правила интерпретации для модели функциональных требований

№	Правило	Примечание	Тип элемента	Пример
1	n0 → thing type	n0.corelex → thing type.classification	Thing type	Order
2	n0(desc=compound), n0.child _j → thing type	Составное существительное	Thing type	Order processing services
3	v0.verbclass={locV, possV, copV} → property of thing type	Свойство типа-сущности	Thing type	Accessibility is highest possible
4	n3, n2.child=p2, p0='of' → perspective "attribute"	2 типа-связи	Connection type	Default qualities of interest
5	n0(desc=compound) → perspective "containment"	2 типа-связи	Connection type	Order item
6	v0.verbclass≠{aux, eV, iv} → connection type	По умолчанию	Connection type	
7	v0.verbclass=tv3 → operation type, n3 _{subject} → executing, n3 _{object} → calling, n3 _{goal} p2 sentence → parameter	Битранзитивный глагол	Operation type	Order processing services should allow the stock clerk to replenish the items in stock
8	v0.verbclass=tvag2 → operation type, n3 _{subject} → executing, n3 _{object} → parameters	Глагол с субъектом-агентом	Operation time	The order department for each ordered item checks its availability on stock
9	v0.verbclass=tv2 → condition, n3 → involvedTypes	Пред./пост. условие для типа-кооперации	Cooperation type	Payment is authorized
10	con0 n3 v0 [n3 p2 sentence], adv2 n3 v0 [n3 p2 sentence]	Конструкция «если, то»	Cooperation type	If each ordered item is on stock, then order department relates that item to the order

Таблица 2. Некоторые правила интерпретации для модели нефункциональных требований

№	Правило	Примечание	Тип элемента	Пример
1	n3 _{subject} v0.verbclass=copV n3 _{object} , n3 _{object} .child=q2 → n3 _{subject} -QualityMetric, QualityInContext.value=q2	Значение показателя	Quality Metric	The response time to the stock items replenishment is below 2 seconds.
2	n3 _{subject} v0.verbclass=copV a2 → n3 _{subject} -QualityMetric, QualityInContext.description=a2	Характеристика показателя	Quality Metric	Accessibility is highest possible

ПРОЦЕДУРА КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА

Процесс управления качеством формирования модели требований состоит из нескольких этапов. На первоначальном этапе до NLP-обработки осуществляется анализ релевантности документа/текста требований. Чтобы предотвратить использование текстов непригодных для онтологии доменных потребностей, тексты требований проходят процедуру фильтрации, при которой осуществляется поиск ключевых фраз и слов, отвечающей данной предметной области (ПрО). Используя разные стратегии фильтрации, на первом шаге в тексте идентифицируются ключевые слова, которые считаются важными для данной ПрО. После этого предложения содержащие данные ключевые элементы проходят дальше в обработку. Обязательным условием является тот факт, чтобы данные предложения представляли собой связанный смысловой блок. Более детально данный процесс описан в работе [19].

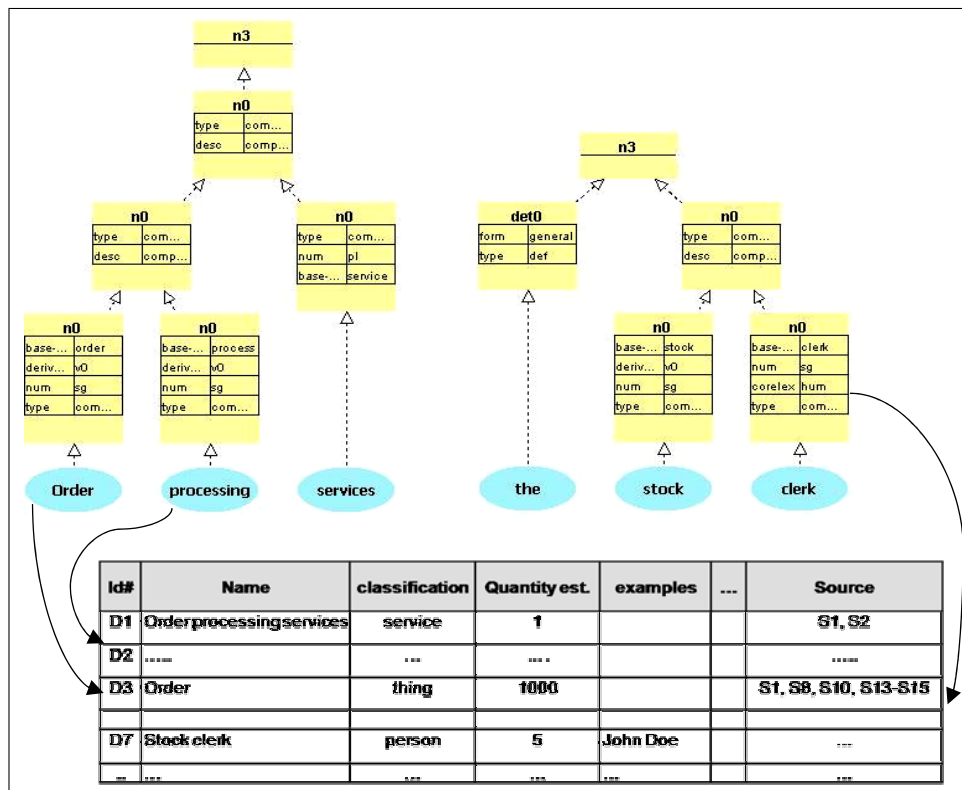


Рис. 7. Заполнение глоссариев модели требований

Второй этап контроля качества предусмотрен перед этапом конвертации древовидных структур текста в концепты модели требований с помощью правил интерпретации. Семантическая информация в предложении несет информацию об его предикатно-аргументной структуре. Если глагол идентифицирован как битранзитивный, т.е. «tv3», то у него должны быть субъект-агент, объект-тема и объект-цель или объект-причина. Если какой-либо из атрибутов отсутствует, то либо формирование фразовых структур предложения произведено неверно, либо глаголу присвоена ошибочная метка транзитивности.

Заинтересованные лица могут иметь различные мнения по одним и тем же вопросам, допускать неточности при ответах на вопросы во время сбора требований и т.д. Также требования могут быть ошибочно интерпретированы во время процедур сбора требований. Для того, чтобы минимизировать возможные несогласованности и неточности проводится валидация модели ЗЛ: модель (либо модель в адаптированной форме, если полная модель слишком сложна для восприятия) демонстрируют всем ЗЛ и определяют их степень удовлетворенности. В случае, если все ЗЛ удовлетворены моделью, ее можно передавать для использования в дальнейших этапах. Если какие-то из ЗЛ остались неудовлетворенными, проблемный участок анализируется и в зависимости от допусков по неточностям, временных и финансовых ограничений может быть принято решение о частичном или полном пересмотре модели. В случае есть противоречивые требования, полученные от разных ЗЛ, можно либо осуществлять процедуру координации конфликтных позиций до достижения некоторого равновесного состояния, либо организовать непосредственное общение между ЗЛ, при котором они сами должны будут прийти к компромиссу. Примером применения подобного подхода может служить [20].

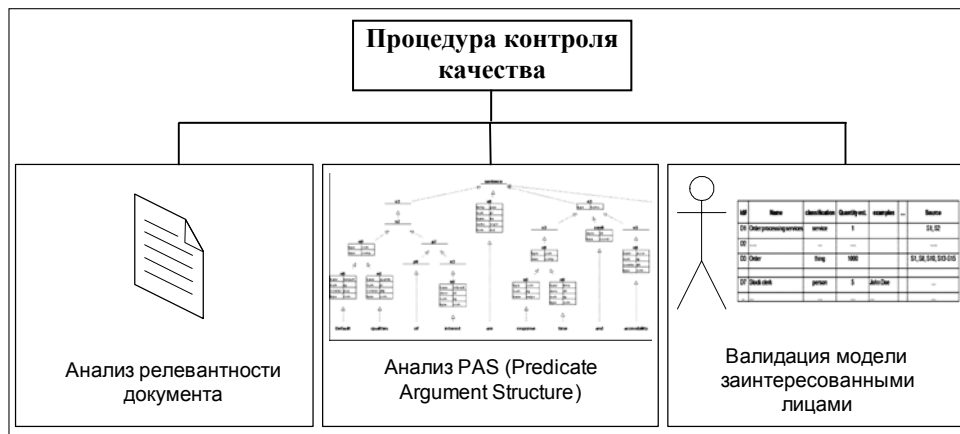


Рис. 8. Процедура контроля качества

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен процесс формирования модели требований к ПО. Рассмотренная двухкомпонентная модель требований является переходным звеном между процессом сбора, процессом анализа и обработки требований к ПО. Поэтому обеспечение качества формирования этой модели позволяет сделать весомый вклад в интегральный показатель качества всего процесса разработки. Поскольку табличное представление данной модели, прежде всего, направлено на активное вовлечение ЗЛ и/или будущих пользователей системы, то осуществляется коррекция требований к разрабатываемому ПО «на лету».

Из недостатков следует отметить языковую зависимость блока автоматизированной обработки текста требований. На данном этапе он адаптирован к текстам на английском языке. Для обработки требований на других

языках требуется подключение соответствующих лингвистических ресурсов. В дальнейшем планируется внедрение более гибких методов и техник, использующих собственную внутреннюю семантико-синтаксическую структуру. Таким образом, адаптировав блок интерпретации под такую структуру, можно будет обрабатывать тексты требований на различных языках одной Про, имея при этом одну общую базу концептов моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андон Ф.И., Коваль Г.И., Коротун Т.М., Лаврищева Е.М., Сулов В.Ю. Основы инженерии качества программных систем. — К.: Академперіодика. — 2007. — 680 с.
2. ISO/IEC 12207:2008 System and software engineering — Software life cycle processes. — International Organization for Standardization, 2008. — 123 p.
3. Баженов Н.А. Модели управления качеством сбора требований к программному обеспечению на основе текстов спецификаций // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2010. — № 9. — С. 35–42.
4. Соколов Б.Н. Модели управления качеством обработки требований к программному обеспечению // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2010. — № 9. — С. 43–50.
5. Bazhenov N.A. Combining probabilistic tagging with rule-based multilevel chunking for requirements elicitation // Искусственный интеллект. — 2010. — № 2. — С. 6–14.
6. Соколов Б.Н. Подходы к учету требований качества при концептуальном проектировании и реализации программного обеспечения // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2008. — № 5. — С. 133–138.
7. ISO/IEC 9126-1:2001 Software engineering — Product quality. — Part 1: Quality model. — International Organization for Standardization, 2001. — 25 p.
8. ISO/IEC 25030:2007 Software engineering — Software product Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE). — Quality requirements. — International Organization for Standardization, 2007. — 42 p.
9. Shekhovtsov V., Kaschek R., Kop C., Mayr H.C. Relational service quality modeling // Developing effective service oriented architectures: concepts and applications in service level agreements, quality of service and reliability. — NY: IGI Global. — 2010. — P. 172–193.
10. Mayr H.C., Kop C. Conceptual predesign — Bridging the gap between requirements and conceptual design // Proc. ICRE. — 1998. — P. 90–100.
11. Kop C., Mayr H.C. Mapping functional requirements: from natural language to conceptual schemata // Proc. SEA. — 2002. — P. 82–87.
12. Shekhovtsov V., Kop C., Mayr H.C. Towards quality-aware predesign model // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2008. — № 5. — P. 17–31.
13. Shekhovtsov V., Kop C., Mayr H.C. Capturing the semantics of quality requirements into an intermediate predesign model // Proc. SIGSAND-EUROPE Symposium, Lecture Notes in Informatics (LNI) P-129. — Bonn: GI-Edition. — 2008. — P. 25–37.
14. Vöhringer J., Gälle D., Fliedl G., Kop C., Bazhenov M. Using linguistic knowledge for fine-tuning ontologies in the context of requirements engineering // International Journal of Computational Linguistics and Applications. — Bahri Publications. — 2010. — 1. — P. 249–267.
15. Fliedl G., Kop C., Mayr H.C., Winkler C., Weber G., Salbrechter A. Semantic tagging and chunk-parsing in dynamic modeling // Proceedings of the 9-th Interna-

- tional conference on applications of natural language processing and information systems (NLDB'2004). — Salford UK, Springer LNCS 3316. — 2004. — P. 421–426.
16. *Fliedl G., Kop C., Mayr H.C., Hölbling M., Horn T., Weber G., Winkler C.* Extended tagging and interpretation tools for mapping requirements texts to conceptual (pre-design) models // Proc. Of 10-th Int. Conf. on Applications of Natural Language to Information Systems (NLDB'2005). Lecture notes in computer science. — Springer, Heidelberg. — 2005. — **3515**. — P. 173–180.
 17. *Fliedl G., Kop C., Mayerthaler W., Mayr H.C., Winkler C.* Guidelines for NL-Based requirements specifications in NIBA // Proc. 5-th Int. Conf. on Applications of Natural Language to Information Systems (NLDB'2000). Lecture notes in computer science (LNCS'1959). — Springer Verlag. — 2000. — P. 251–264.
 18. *Perkonigg M.* Linguistische aspekte des attempted controlled english (ACE). Masterarbeit. — Klagenfurt: Alpen-Adria-Universität Klagenfurt. — 2009. — 215 p.
 19. *Turban B., Kucera M., Tsakpinis A., Wolff C.* Bridging the requirements to design traceability gap // Intelligent Technical Systems. — Springer Netherlands. — 2009. — **38**. — P. 275–288.

Поступила 07.06.2010

УДК 004.8

**ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ
В ЗАДАЧАХ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ДАНИХ СОЦІАЛЬНОГО
ХАРАКТЕРУ**

Н.Р. КОНДРАТЕНКО, О.О. СНИГУР

Розглянуто вплив рівня нечіткості на результати нечіткого кластерного аналізу. Запропоновано підхід до розв'язання задачі кластеризації на основі інтервальних нечітких множин типу 2 із застосуванням індексу вірогідності Квона. Роботу методу продемонстровано на прикладі кластеризації країн світу за рівнем розвитку.

ВСТУП

Зараз у сучасній Україні та в усьому світі посилюється значення наукового аналізу проблем соціального характеру, зокрема співвідношення рівня життя різних верств населення, питання гендерної нерівності, диференціації країн та регіонів на основі технічного, соціально-економічного, інтелектуального, природного факторів тощо.

Багатомірність явищ, які розглядаються, ставить особливі вимоги до математичних методів розв'язання цих задач. Передумовою побудови достовірних математико-статистичних моделей у таких умовах є виявлення в даних компактних однорідних сукупностей, існування яких можна приписати об'єктивно існуючим суспільним закономірностям. Одним із методів, що дозволяють виявляти такі сукупності, використовуючи широке коло показників, є кластерний аналіз. Він є найпотужнішим інструментом для проведення багатомірних досліджень. Його застосування в таких задачах є цілком виправданим, оскільки вперше кластерний аналіз застосували саме в соціології [1]. Для здійснення процедури кластеризації не потрібно апріорних знань про розподіл генеральної сукупності. Велика її перевага полягає в тому, що вона дозволяє робити розбиття об'єктів не за одним параметром, а за цілим набором ознак. Крім того, кластерний аналіз, на відміну від більшості математико-статистичних методів, не накладає жодних обмежень на вид об'єктів, що розглядаються, і дозволяє оперувати множиною вихідних даних практично довільної природи [2]. Це дає змогу говорити про можливість створення методів кластеризації, придатних для розв'язання практично будь-яких соціально-економічних задач, а не лише задач певного класу.

Про актуальність розв'язання задач кластеризації, орієнтованих на соціальні дані, свідчить велика кількість праць із цієї тематики. Зокрема, у ро-

ботах [1, 3] здійснено спроби розв'язання задач регіонального районування та соціально-економічного прогнозування. Проте математичні методи, що лежать в основі цих досліджень, суттєво обмежені припущенням, що вхідні дані є абсолютно точними, правдивими та незашумленими. Метод, який запропоновано в роботі [4], попри високі оптимізаційні властивості, ставить аналогічну вимогу. Відомо, що на практиці такі умови трапляються вкрай рідко, особливо в галузі соціології, усі показники якої ґрунтуються на результатах соціологічних опитувань та офіційних даних, що надані різного роду урядовими організаціями. Стовідсоткової достовірності таких даних гарантувати ніхто не може, тому ця задача вимагає методів кластерного аналізу, стійких до викидів та шуму. Один із таких методів — метод РСМ (Possibilistic C-Means — можливісних C-середніх) — запропоновано в роботі [5]. Він надзвичайно стійкий до шумів у вхідних показниках, але ґрунтується на нечітких множинах типу 1. Це не дає змогу дати повністю адекватну оцінку досліджуваній множині даних, оскільки крім точок, що вносять шум, у характеристиках кожної точки закладено певну невизначеність, яка не може не перенестись на результат кластеризації. При цьому характеризувати ступінь належності точки до кластеру одним числом недостатньо. Унаслідок дії невизначеностей саме це число також трансформується в нечітку множину, що веде до необхідності оперування нечіткими множинами типу 2. Ідея нечіткої множини типу 2 як поглиблення та узагальнення множини першого типу належить Л. Заде [6]. Узагальнена нечітка множина вимагає задання великої кількості параметрів, що не завжди має практичний сенс. Тому часто обмежуються використанням інтервальних функцій належності [7, 8, 9]. На сьогодні такий підхід застосовується у великій кількості різних задач: класифікації образів [10], моделювання та класифікації мультимедійного трафіку [11], керування мобільними роботами [12], прийнятті рішень [13], прогнозуванні часових послідовностей [14, 15, 7], апроксимації функцій [16] тощо.

Беручи до уваги позитивні результати цих та інших досліджень, видається можливим застосувати математичний апарат нечітких множин типу 2 і в задачі кластеризації, зокрема такої, що орієнтована на множини даних соціального характеру.

Мета роботи — розробка методу кластерного аналізу даних соціального спрямування на основі інтервальних нечітких множин типу 2.

ВИХІДНІ ПЕРЕДУМОВИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Існує велика кількість методів кластеризації, які можна класифікувати на чіткі та нечіткі. Чіткі методи кластеризації розбивають вихідну множину об'єктів X на декілька підмножин, що не перетинаються. При цьому будь-який об'єкт із X належить лише одному кластеру. Нечіткі методи кластеризації дозволяють одному й тому самому об'єкту належати одночасно до декількох (або навіть до всіх) кластерів, але з різним ступенем. Єдиною відмінністю є те, що у випадку нечіткого розбиття ступінь належності об'єкта до кластера приймає значення з інтервалу $[0,1]$, а при чіткому — з двохелементної множини $\{0,1\}$. Нечітка кластеризація в багатьох ситуаціях адекватніше описує характер вихідної множини, наприклад, для об'єктів, розташованих на межі кластерів [2].

Основою переважної більшості сучасних методів нечіткого кластерного аналізу є алгоритм FCM (Fuzzy C-Means) Дж. Беждека [17].

Проте якість знайдених центрів суттєво залежить від попереднього вибору як значень μ_{ij} , так і центрів c_i . Крім того, FCM використовує обмеження, подібне до того, що накладає на шуканий розв'язок теорія ймовірностей: сума ступенів належності i -ї точки до всіх кластерів $j = \overline{1, N}$

становить 1: $\sum_{i=1}^c \mu_{ij} = 1$ для всіх j [18]. Таке обмеження має на меті уникнути тривіального розв'язку, коли всі ступені належності виявляються рівними нулю, і дає змістовні результати в тих прикладних застосуваннях, де припущення про «імовірнісну» природу ступенів належності має практичний сенс.

Але, оскільки ступені належності, отримані за такого обмеження, відносні, вони непридатні в тих задачах, в яких ступінь належності точки до кластера має відображати її типовість, характерність саме для цього кластера. Це повністю узгоджується з теорією нечітких множин Заде, адже ступінь належності точки до класичної нечіткої множини є абсолютною величиною, незалежною від ступенів належності цієї ж точки до інших нечітких множин, визначених на тій самій універсальній множині. Таке формулювання доцільніше для більшості задач кластеризації, оскільки ступінь належності точки до кластера є мірою того, наскільки ця точка є носієм спільних характеристик кластера, її типовості; і ступінь належності не повинен залежати від того, як вона розташована відносно інших кластерів.

Виходячи з цього, у роботі [5] було переглянуто цільову функцію методу FCM таким чином, щоб за досягнення її мінімуму ступені належності для репрезентативних точок кластерів були високими, а для не репрезентативних — низькими, незалежно від взаємного положення точок та кластерів. Результуючий функціонал має вигляд:

$$E = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N \mu_{ij}^m d_{ij}^2 + \sum_{i=1}^c \eta_i \sum_{j=1}^N (1 - \mu_{ij})^m, \quad (1)$$

де η_i — додатне число.

Значення η_i визначає відстань від центра кластера, на якій значення ступеня належності точки до кластера стає рівним 0,5.

За такої цільової функції відповідним чином змінюються також і формули для перерахунку змінних величин методу:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_{ij}^2}{\eta_j}\right)^{\frac{1}{m-1}}}; \quad \eta_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_{ij}^m d_{ij}^2}{\sum_{j=1}^N \mu_{ij}^m}.$$

Співвідношення, що використовується для перерахунку координат центрів кластерів, порівняно з FCM залишається без змін:

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^p \mu_{ij}^m x_j}{\sum_{j=1}^p \mu_{ij}^m}$$

Розв'язки, які отримано при такому підході, більше відповідають дійсності. Таке розуміння ступенів належності має ще один позитивний момент: воно дає змогу легко відфільтрувати точки, що вносять шум, оскільки вони за такого формулювання матимуть низькі ступені належності до всіх без винятку кластерів.

Не зважаючи на таке вдосконалення, одна проблема залишається спільною для FCM та PCM: обидва методи в усіх обчисленнях спираються на параметр m , що задає рівень нечіткості кластерів.

Випадок $m = 1$ відповідає чіткій кластеризації. Зі зростанням m ступені належності всіх без винятку точок до всіх кластерів наближаються до 0,5, як показано на рис. 1 (для випадку двох кластерів). Кожна крива зображає зміну ступеня належності точки до одного з кластерів.

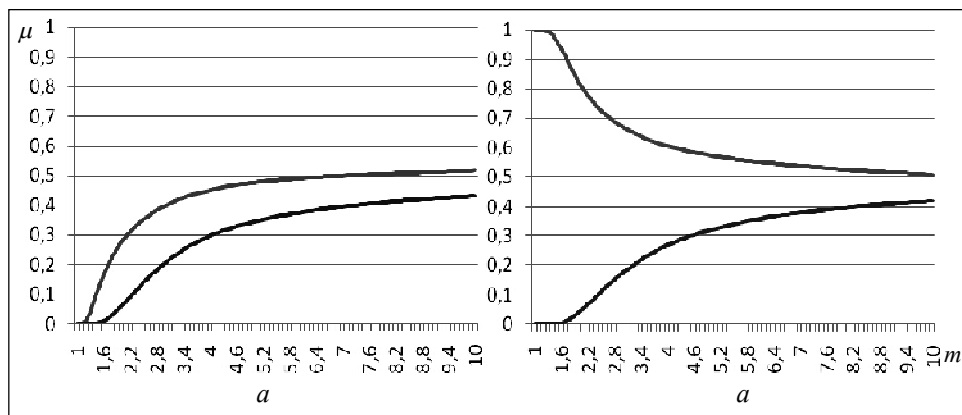


Рис. 1. Зміна ступенів належності точки до кластерів при зміні рівня нечіткості: a — точка нерепрезентативна; b — точка репрезентативна

На рис. 1 видно, що в усіх випадках m змінюється монотонно, обрати на такій кривій одну оптимальну точку неможливо. Тому закономірно, що строго обґрунтованих механізмів визначення m не існує.

Параметр m , як правило, задається емпірично дослідником, при цьому доводиться повністю покладатися на це заздалегідь задане значення без жодних гарантій його правильності. З цим пов'язана невизначеність, яку неможливо врахувати, коли отримане значення міри належності точки до кластера є єдиним числом. Тому для того, щоб унеможливити себе від помилкового результату, що пов'язаний із неправильним вибором значення m , доцільно використовувати інтервальні функції належності типу 2. Такий підхід найчастіше застосовується тоді, коли точний характер розподілу ступенів належності другого типу в області між границями інтервалу невідомий. Саме такий випадок являє собою задача кластеризації: невідомо, чи піддається виділенню та математичному опису закономірність, за якою розподілені ступені належності другого типу, та чи має дослідження цієї закономірності

практичний сенс. З іншого боку, інформація про верхню та нижню функції належності, що описують кожен кластер залежно від значення параметра m , має виняткову цінність, оскільки інтервал (його ширина та розташування відносно нуля та одиниці) несе значно більше інформації про міру належності точки до кластера, ніж єдине число. Наприклад, ширина інтервалу може свідчити про ступінь точності отриманого розв'язку. Тому пропонується модифікувати алгоритм кластеризації, який наведено в [5], для роботи з інтервальними ступенями належності. Цим буде досягнуто повне врахування невизначеності, пов'язаної з різними можливими значеннями рівня нечіткості, для подальшого аналізу результатів кластеризації.

Нехай є N об'єктів $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Необхідно розбити їх на c кластерів та визначити місця розташування центрів кластерів c_i , $i = \overline{1, c}$, а також ступені належності μ_{ij} кожної з точок x_i до кластера c_i . Виходячи з визначення ступеня належності як міри типовості заданої точки для відповідного кластера, знайти такі значення шуканих параметрів, які ведуть до мінімуму функціонала (1). Враховуючи властивості рівня нечіткості m та його вплив на результати кластерного аналізу, представити ступені належності у вигляді інтервалів, ліва та права границі яких лежать у межах $[0, 1]$.

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв'язання поставленої задачі пропонуємо модифікацію алгоритму кластерного аналізу РСМ [5]. Окрім нетрадиційного трактування ступенів належності та стійкості до шуму він володіє ще однією властивістю. Йдеться про те, що, оскільки міри належності однієї й тієї самої точки до різних кластерів незалежні одна від одної, ступінь належності точки до одного з них можна змінити без обов'язкової процедури перерахунку ступенів її належності до всіх інших кластерів. Ця властивість є надзвичайно корисною, оскільки вона дає змогу «розтягти» ступінь належності точки до кластера з чіткого значення в інтервал, і це не ставить під загрозу виконання обмеження на суму значень ступенів належності точки до всіх наявних кластерів.

Не зважаючи на всі переваги, у класичному алгоритмі РСМ не вдалося уникнути спільного для переважної більшості методів кластеризації недоліку: він передбачає апіорне задання числа кластерів до початку виконання обчислень. Найпростіший шлях уникнути цієї проблеми — виконувати розбиття при різній можливій кількості кластерів та порівнювати результати за певним критерієм оптимальності. У роботі [19] наведено декілька функціоналів, які називаються індексами достовірності та цілком відповідають вимогам, що висуває ця задача до критеріїв такого роду. Скористаємося індексом Квона, зокрема, для визначення оптимального числа кластерів для заданого рівня нечіткості m :

$$V_k(c) = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N (\mu_{ij})^m \|x_j - v_i\|^2 + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c \|v_i - \bar{v}\|^2}{\min_{i \neq j} \|v_i - v_j\|^2},$$

де μ_{ij} — ступінь належності точки j до кластера i ; v_i — центр j -го кластера; \bar{v} — середнє значення центрів кластерів; m — рівень нечіткості; c — кількість кластерів; N — кількість точок.

Що менше значення має V_k , то кращим вважається розбиття.

Проте визначення кількості кластерів — не єдине застосування цього показника. У межах цього підходу пропонується використовувати його також для визначення меж інтервалу розтягу ступеня належності. Межі інтервалу визначимо, керуючись поведінкою індекса Квона на заданому інтервалі зміни параметра m (рис. 2, а). Практичний інтерес викликає лише перший його локальний мінімум, який спостерігається за оптимального значення m [5] (рис. 2, б). Тому за межі інтервалу приймемо праву та ліву точки перегигну кривої, найближчі до розглядуваного локального мінімуму.

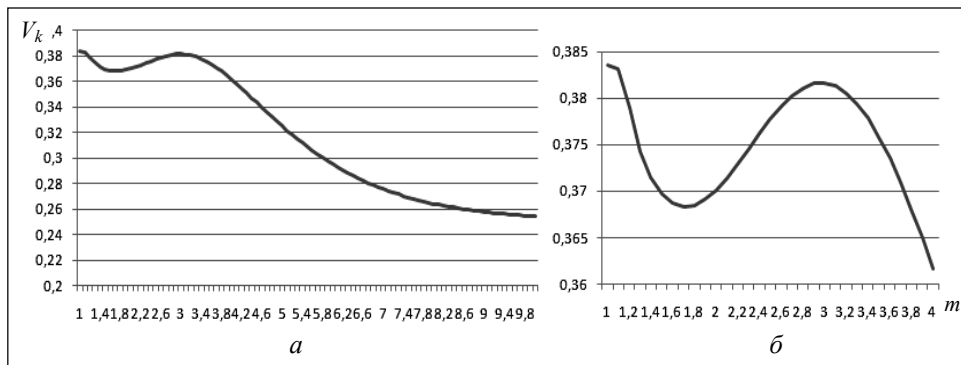


Рис. 2. Зміна індексу Квона залежно від зміни рівня нечіткості: а — в межах від 1 до 10; б — збільшений фрагмент: від 1 до 4

При такому підході отриманий нечіткий кластер матиме вигляд, як показано на рис. 3. Для його повного опису достатньо визначити лише верхню та нижню функції належності.

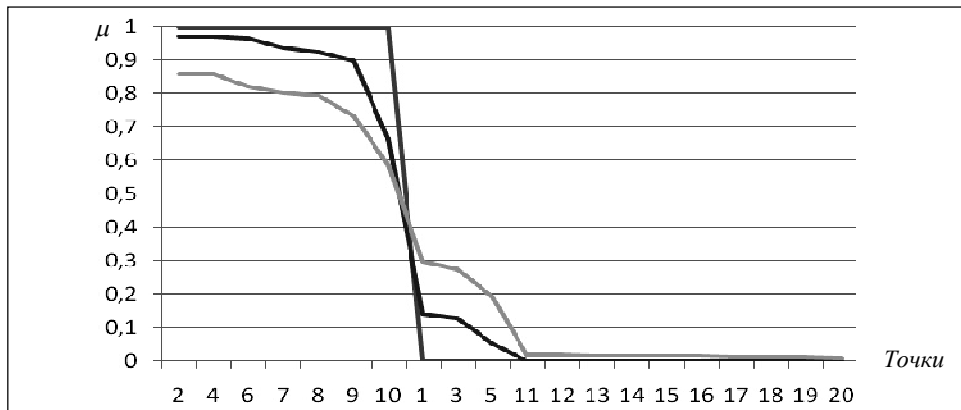


Рис. 3. Інтервальні функції належності точок до кластеру

Для початкової ініціалізації центрів кластерів використаємо звичайний метод FCM. Він збігається за лічені ітерації, тому якнайкраще підходить для цього завдання, адже воно вимагає грубого наближеного розв'язку.

Отже, сформулюємо покроковий алгоритм розв'язання задачі кластерного аналізу в заданій постановці.

1. Глобальний індекс Квона ініціалізувати максимально можливим значенням.
2. Задати початкову кількість кластерів $c = 2$.
3. Визначити приблизні місця розташування центрів кластерів за допомогою алгоритму FCM.
4. Оцінити значення η для результату роботи FCM.
5. Сформувати матрицю D як матрицю Евклідових відстаней від кожної точки з вихідної множини до центра кожного з кластерів.
6. Задати початкове значення рівня нечіткості $m = 1$.
7. Розрахувати початкове значення локального індексу Квона.
8. Розрахувати функцію належності для кожної з пар (точка, кластер), користуючись відповідним співвідношенням із методу PCM.
9. Перерахувати положення центрів кластерів за формулою, спільною для обох методів.
10. Перерахувати матрицю відстаней D .
11. Розрахувати цільову функцію PCM при заданих значеннях ступенів належності, координат центрів кластерів, елементів матриці D та вектора η .
12. Якщо розраховане значення цільової функції менше за отримане на попередній ітерації, повернутись до кроку 8.
13. Розрахувати значення локального індексу Квона при заданому m . Якщо воно менше за попереднє значення, то збільшити m та повернутись до кроку 8.
14. Перерахувати значення глобального індексу Квона. Зберегти проміжні результати обчислень для поточного $m = m_k$.
15. Якщо кількість кластерів менша за кількість точок у вихідній множині, збільшити c та перейти до кроку 3.
16. Серед усіх проміжних результатів обрати варіант розбиття з мінімальним значенням глобального індексу Квона. Подати ступені належності у вигляді інтервалів, обмежених їхніми значеннями при $m = 1$ та отриманим на кроці 14 $m = m_k > 1$.

КОМП'ЮТЕРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ЗА ПОКАЗНИКАМИ ЛЮДСЬКОГО РОЗВИТКУ В КРАЇНАХ СВІТУ

Для аналізу було взято дані зі щорічного звіту ООН з людського розвитку за 2010 р. [20] для всіх незалежних держав світу за такими показниками:

- середня очікувана тривалість життя при народженні;
- середня тривалість освітньої підготовки громадян;
- ВВП на душу населення;
- індекс гендерної нерівності в країні.

У результаті у вхідних даних було виділено 3 компактних кластери (табл. 1 та 2).

Таблиця 1. Координати центрів кластерів

Показники	Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3
Індекс гендерної нерівності	0,615842	0,290623	0,73791
ВВП на душу населення	0,096877	0,3814	0,018852
Тривалість життя	0,732709	0,920551	0,415003
Кількість років освітньої підготовки	0,532329	0,837381	0,253012

Таблиця 2. Інтервальні ступені належності країн до кластерів

Країни	Кластер 1		Кластер 2		Кластер 3	
Algeria	0,976295	1	0,00087	0,097652	0,000931	0,090729
Australia	1,98E-05	0,018657	0,514417	0,962005	8,02E-07	0,005172
Austria	0,000102	0,03422	0,791044	0,995485	2,54E-06	0,008165
Bangladesh	0,015304	0,112614	2,66E-05	0,0229	0,663903	0,765039
Belgium	5,08E-05	0,026589	0,801127	0,999869	1,61E-06	0,006799
Benin	0,000528	0,039172	8,02E-06	0,013866	0,884219	0,99949
Brazil	0,945761	0,999997	0,000745	0,090964	0,001058	0,09548
...
Togo	0,006406	0,093062	2,20E-05	0,021245	0,946151	0,968477
Tunisia	0,62551	0,935993	0,000945	0,098948	0,000628	0,075782
Turkey	0,696438	0,9928	0,000536	0,078341	0,002025	0,121107
United Kingdom	0,000259	0,049088	0,832883	0,978633	4,25E-06	0,010059
Venezuela	0,588932	0,950364	0,000741	0,088684	0,000924	0,088121
Zimbabwe	2,17E-05	0,015335	4,13E-06	0,010372	0,596237	0,974833

Отримані кластери мають вигляд нечітких множин типу 2 (рис. 4). Значна ширина інтервалу деяких конкретних значень ступенів належності дає змогу судити про наявність шумів у вхідних даних.

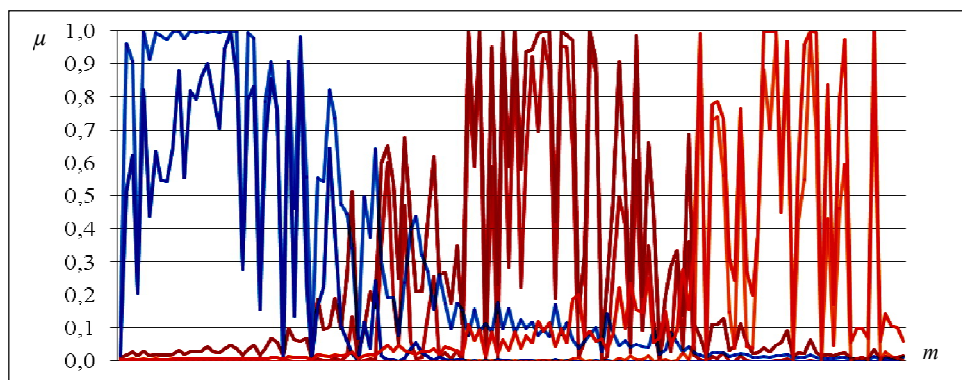


Рис. 4. Графічне подання результатів кластеризації

Інтервальні значення ступенів належності було обчислено, виходячи зі значень рівня нечіткості $m = [1; 1,65]$. На рис. 5 показано характер зміни індексу Квона залежно від значення m .

На рис. 5, б можна побачити локальний мінімум цієї залежності в точці $m = 1,65$. Цю точку і прийнято за праву межу інтервалу зміни параметра m .

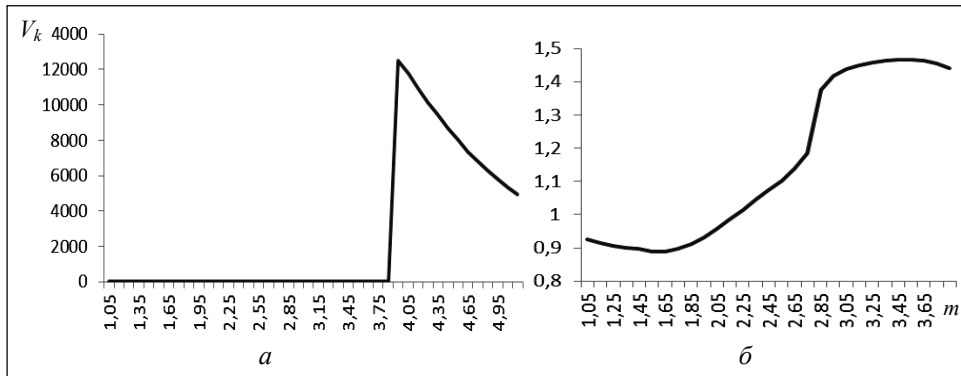


Рис. 5. Характер зміни індексу Квона залежно від значення рівня нечіткості (a — для $m = [1; 5]$; b — для $m = [1; 3,7]$)

При цьому варто скористатися такими рекомендаціями:

- Метод дає змогу отримати інтервал, в якому знаходиться оптимальне значення рівня нечіткості. Інтервал (його ширина та розташування відносно нуля та одиниці) несе значно більше інформації про міру належності точки до кластера, ніж єдине число.
- У разі значної ширини інтервалу слід залучити експерта для прийняття остаточного рішення. Експерт, у свою чергу, може прийняти рішення про повторення експерименту у зв'язку зі значною невизначеністю у вхідних даних.

ВИСНОВКИ

Запропоновано метод кластеризації на основі інтервальних функцій належності типу 2 з використанням індексу вірогідності Квона для визначення оптимального числа кластерів та меж інтервальних значень ступенів належності.

Значна ширина інтервалу деяких конкретних значень ступенів належності дає змогу зробити висновок про наявність шумів у вхідних даних. Зважаючи на це та на високу складність поставленої прикладної задачі, для прийняття будь-якого остаточного рішення доцільно залучати експертів з цієї галузі.

Метод випробувано в прикладній задачі соціального характеру та отримано змістовні результати, що свідчить про перспективність використання запропонованого підходу в задачах такого роду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Котова Е.С. Кластерный анализ в задачах социально-экономического прогнозирования. — <http://vuzlib.net/beta3/html/1/4055/4081/>.
2. Мандель И.Д. Кластерный анализ. — М.: Статистика, 1988. — 176 с.
3. Серебрякова Л.А. Методы оценки уровня социально-экономического развития регионов // Вестн. СевКавГТУ. Сер. Экономика. — 2003. — № 3 (11). — <http://science.ncstu.ru/articles/econom/11/02.pdf>.

4. *Захарченко С.М., Кондратенко Н.Р., Манаєва О.О.* Дослідження можливостей генетичного алгоритму в задачі кластеризації користувачів мережі Internet // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2010. — № 2 (18). — С. 67–72.
5. *Krishnapuram R., Keller J.M.* A possibilistic approach to clustering // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1993. — № 1(2). — P. 98–110.
6. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy sets and systems 100 Supplement. — 1999. — P. 9–34.
7. *Liang Q., Mendel J.M.* Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2000. — 8. — P. 535–550.
8. *Mendel J.M., John R.I., Liu F.* Interval Type-2 Fuzzy logic systems made simple // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2006. — 14. — № 6. — P. 808–821.
9. *Mendel J.M., John R.I.* Interval Type-2 fuzzy sets made simple // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2002. — 10. — № 2. — P. 117–127.
10. *Zeng J., Liu Z.Q.* Type-2 Fuzzy sets for pattern classification: A review // Proceedings of the IEEE Symposium on Foundations of computational intelligence. — 2007. — P. 193–200.
11. *Liang Q., Mendel J.M.* MPEG MBR Video traffic modeling and classification using fuzzy technique // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2001. — 9. — № 1. — P. 183–193.
12. *Wu K.C.* Fuzzy interval control of mobile robots // Computers and Electrical Engineering. — 1996. — 22. — P. 211–229.
13. *Yager R.R.* Fuzzy subsets of type II in decisions // Cyber Journals. — 1980. — 10. — P. 137–159.
14. *Karnik N.N., Mendel J.M.* Applications of type-2 fuzzy logic systems to forecasting of time series // Information Sciences. — 1999. — 120. — P. 89–111.
15. *Mendel J.M.* Uncertainty, fuzzy logic, and signal processing // Signal Processing Journal. — 2000. — 80. — P. 913–933.
16. *Karnik N.N., Mendel J.M.* An introduction to type-2 fuzzy logic systems. — Los Angeles, CA. — <http://sipi.usc.edu/~mendel/report>.
17. *Bezdek J.C.* Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms. — NY: Plenum Press, 1981. — 256 p.
18. *Зайченко Ю.П.* Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. — К.: Издат. дом «Слово», 2008. — 344 с.
19. *Oliveira J.V., Pedrycz W.* Advances in fuzzy clustering and its applications. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2007. — 435 p.
20. *The Real Wealth of Nations: pathways to human development.* Human development report 2010: 20-th anniversary edition . — UNDP, 2010. — 227 p.

Надійшла 07.06.2011

К НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ СИТУАЦИЙ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

В.И. ИВАНЕНКО, В.М. МИХАЛЕВИЧ

Рассмотрен достаточно широкий класс параметрических задач принятия решений, рассматриваемых с позиции получения критерия оптимальности — отношения предпочтений на решениях, можно разделить на два подкласса: задачи с неопределенностью (неоднозначностью указанного решения) и задачи без неопределенности (т.н. детерминистические задачи). Для такой классификации необходимы критерии существования неопределенности, которые и предлагаются в данной работе.

ВВЕДЕНИЕ

Анализируется ситуация в системе принятия решений, представляющей собой пару: того, кто принимает решение (ТПР) и ситуацию принятия решения (СПР) [1, 2]. Предлагаемая работа является продолжением работы [3] и совместно с ней уточнением и обобщением работы [4].

При этом задачи принятия решений (они преимущественно рассматриваются как оптимизационные) можно разделить на два подкласса: задачи без неопределенности (т.н. детерминистические задачи) и задачи с неопределенностью, т.к. неопределенность значений ненаблюдаемого параметра часто порождает неопределенность при выборе оптимального решения в заданной ситуации, т.е. задаваемой схемой, или, коротко говоря, неопределенность схемы ситуации. Для такой классификации необходимы критерии наличия неопределенности в этих задачах. Поэтому возникает задача получения критериев неопределенности схем ситуаций.

Цель работы — решение указанной задачи для параметрических ситуаций, т.к. согласно [3], анализируя ситуации, можно ограничиться параметрическими. Для этого используются результаты работы [4].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Параметрической схемой ситуации задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная четверка вида (X, Θ, U, g) , где g является отображением из $\Theta \times U$ в X для произвольных непустых множеств X, Θ, U . Класс всех ССЗР обозначим \mathbb{Z} .

При этом множество X называется множеством последствий, Θ — множеством значений ненаблюдаемого параметра, U — множеством решений, а g — отображением последствий ССЗР (X, Θ, U, g) .

Под основной задачей принятия решения для ТПР в заданной ситуации или, коротко, задачей решения (ЗР) понимается задание этим ТПР

отношения предпочтения на последствиях — первая ЗР и решениях — вторая ЗР.

Определение 2. ССЗР $(X', \Theta', U', g') \in \mathbb{Z}$ называется подсхемой ССЗР $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, если $X' \subseteq X$, $\Theta' \subseteq \Theta$, $U' \subseteq U$, и $g' := g|_{\Theta' \times U'}$.

Подсхему (X', Θ', U', g') ССЗР $Z := (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ будем обозначать $Z|_{X', \Theta', U'}$.

Определение 3. Две ССЗР $(X_1, \Theta_1, U_1, g_1)$, $(X_2, \Theta_2, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}$ называются изоморфными, что будем обозначать $(X_1, \Theta_1, U_1, g_1) \simeq (X_2, \Theta_2, U_2, g_2)$, если существуют такие биекции $i: X_1 \rightarrow X_2$, $j: U_1 \rightarrow U_2$, $k: \Theta_1 \rightarrow \Theta_2$, что для любых $\theta \in \Theta_1, u \in U_1$ имеет место

$$g_2(k(\theta), j(u)) = i(g_1(\theta, u)).$$

Рассмотрим класс \mathbf{Z} ССЗР, у которых на множествах последствий задано отношение предпочтения. Каждой ССЗР этого класса соответствует четверка вида $\mathcal{Z} := ((X, \succ), \Theta, U, g)$. Тогда $\mathbf{Z}((X, \succ), \Theta) := \{((X, \succ), \Theta, ;, ;) \in \mathbf{Z}\}$.

Определение 4. Две ССЗР $((X_1, \succ_1), \Theta_1, U_1, g_1)$, $((X_2, \succ_2), \Theta_2, U_2, g_2) \in \mathbf{Z}$ называются изоморфными, что будем обозначать $((X_1, \succ_1), \Theta_1, U_1, g_1) \simeq ((X_2, \succ_2), \Theta_2, U_2, g_2)$, если $(X_1, \Theta_1, U_1, g_1) \simeq (X_2, \Theta_2, U_2, g_2)$ и при этом (\simeq) переводит отношение предпочтений (X_1, \succ_1) в отношение предпочтений (X_2, \succ_2) .

Определение 5. Подсхемой ССЗР $((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ называется ССЗР $((X', \succ'), \Theta', U', g') \in \mathbf{Z}$, где ССЗР $(X', \Theta', U', g') \in \mathbb{Z}$ является подсхемой ССЗР $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, а $(\succ') = (\succ|_{X'})$.

Подсхему $((X', \succ'), \Theta', U', g')$ ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ будем обозначать $\mathcal{Z}|_{X', \Theta', U'}$.

Определение 6. Правилем выбора предпочтений (ПВП) для ЗР в классе ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ (кратко ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$) будем называть всякое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на \mathbb{Z}' и сопоставляющее каждой $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ некоторую пару соответствий (X, \succ_Z) и (U, \succ_Z^*) , т.е. $\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\mathbb{Z}'}$, что будем обозначать также $\pi_Z = (\pi_{1Z}, \pi_{2Z}) = ((X, \succ_Z), (U, \succ_Z^*))$. Класс всех ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ будем обозначать через $\Pi(\mathbb{Z}')$.

Замечание. Каждый ТПР имеет определенное (свое) ПВП для класса \mathbb{Z}' , которое является моделью ТПР-а относительно решения им ЗР в классе \mathbb{Z}' . Зная ПВП для $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ произвольного ТПР, мы можем узнать его (этого ТПР-а) решение основной ЗР для $Z \in \mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$.

Определение 7. ПВП в $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ будем называть всякое отображение π , определенное на \mathbf{Z}' и сопоставляющее каждой $\mathcal{Z} = ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'$

некоторое соответствие (U, \succ_Z^*) , т.е. $\pi \in [2^{(U^2)}]^{Z'}$, что будем обозначать также $\pi_Z = (U, \succ_Z^*)$. Класс всех ПВП в $Z' \subseteq Z$ будем обозначать через $\Pi(Z')$.

Определение 8. Будем говорить, что ССЗР Z класса $Z' \subseteq Z (Z' \subseteq Z)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi'(Z') (\Pi'(Z'))$, если либо $\Pi'(Z') = \emptyset (\Pi'(Z') = \emptyset)$, либо найдутся такие ПВП $\pi', \pi'' \in \Pi'(Z') (\Pi'(Z'))$, что $\pi'_{1Z} = \pi''_{1Z}$, а $\pi'_{2Z} \neq \pi''_{2Z} (\pi'_Z \neq \pi''_Z)$.

Для всякого нестрогий порядка (X, \succ) введем в рассмотрение его продолжение (расширение) на множестве отображений X^Θ , обозначая это расширение тем же символом (\succ) , таким образом, что для любых $u_1, u_2 \in X^\Theta$ имеет место, по определению, соотношение

$$u_1 \succ u_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} u_1(\theta) \succ u_2(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta, \tag{1}$$

т.е. введенное предпочтение на отображениях является «покоординатным» предпочтением отображений, которое будем называть доминированием.

Ясно, что при этом соответствие (X^Θ, \succ) будет транзитивным и нереклексивным, а значит строгим частичным порядком.

Лемма 1. Если отношение предпочтения (X, \succ) — нестрогий порядок, то u_1, u_2 будет парой несвязных отношением (\succ) отображений из множества X^Θ , т.е. $u_i \bar{\succ} u_j, i \neq j, i, j \in \{1, 2\}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, что для любых неравных $i, j \in \{1, 2\}$ имеет место соотношение

$$u_i(\theta_i) \succ u_j(\theta_j). \tag{2}$$

Доказательство. Условия $u_1 \bar{\succ} u_2, u_2 \bar{\succ} u_1$, в силу соотношения (1), равносильны тому, что найдутся соответственно такие $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, для которых $u_1(\theta_1) \bar{\succ} u_2(\theta_1), u_1(\theta_2) \bar{\succ} u_2(\theta_2)$. Но последние соотношения, в силу того, что (X, \succ) — нестрогий порядок, равносильны условиям $u_1(\theta_1) \succ u_2(\theta_1), u_2(\theta_2) \succ u_1(\theta_2)$, которые, в свою очередь, равносильны соотношению (2).

Лемма доказана.

Определение 9. Для произвольных непустых множеств A, Θ и отношения предпочтения (A, \succ) отображения $f_1, f_2 \in A^\Theta$ называются *комонотонными* относительно (\succ) , если ни для каких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ не выполняется $f_1(\theta_1) \succ f_1(\theta_2)$ и $f_2(\theta_2) \succ f_2(\theta_1)$. Здесь (\succ) , как обычно, обозначает асимметричную часть (\succ) .

Лемма 2. Если отношение предпочтения (X, \succ) — нестрогий порядок, то для любого отображения $g : \Theta \times U \rightarrow X$ семейство отображений $(g(\theta, \cdot)) \in$

$\in X^U, \theta \in \Theta$) попарно комонотонно относительно (X, \succ) тогда и только тогда, когда семейство отображений $(g(\theta, \cdot) \in X^\Theta, u \in U)$ попарно связно соответствием доминирования (X^Θ, \succ) .

Доказательство. В силу определения 9, $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$ $g(\theta_1, \cdot)$ и $g(\theta_2, \cdot)$ будет некомонотонной парой отображений из X^U относительно (X, \succ) тогда и только тогда, когда найдутся такие $u_1, u_2 \in U$, что $g(\theta_1, u_1) \succ g(\theta_1, u_2)$ и $g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_2, u_1)$, а это согласно леммы 1 будет тогда и только тогда, когда $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^\Theta$ будет парой не связных соответствием доминирования (X^Θ, \succ) отображений.

Лемма доказана.

Через \mathbf{Z}_0 обозначим подкласс таких ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succ_{\mathcal{Z}}), \Theta, U, g)$ класса \mathbf{Z} , у которых $(X, \succ_{\mathcal{Z}})$ является нестрогим порядком.

Для любого подкласса ССЗР \mathbf{Z}' класса \mathbf{Z} через $\Pi_1(\mathbf{Z}')$ обозначим все такие ПВП класса \mathbf{Z}' , что для любой ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'$ выполняются следующие условия:

У1. (U, \succ^*) — нестрогий порядок.

У2. Для любых $u_1, u_2 \in U$:

если $g(\cdot, u_1) \succ g(\cdot, u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$;

если $g(\cdot, u_1) \sim g(\cdot, u_2)$, то $u_1 \sim^* u_2$.

Из рассуждений аналогичных использованным в [4] при обосновании непустоты $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ следует, что $\Pi_1(\mathbf{Z}_0) \neq \emptyset$.

Если имеем ССЗР $\mathcal{Z} = ((X, \succ), \Theta, U, g)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}')$, то в силу определений 9 из [4] и 8 понятно, что ССЗР $\hat{\Pi}p(\mathcal{Z}) = ((X, \succ), U, \{(u, g(\theta, u)) : u \in U, \theta \in \Theta\})$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\hat{\Pi}p(\Pi_1(\mathbf{Z}'))$, а так как $\hat{\Pi}p(\Pi_1(\mathbf{Z}')) = \Pi_1(\hat{\Pi}p(\mathbf{Z}'))$, то $\hat{\Pi}p(\mathcal{Z})$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\Pi}p(\mathbf{Z}'))$. Также понятно, что обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Этот и некоторые другие результаты легко получить, используя критерии неопределенности ССЗР в соответствующих классах ПВП, полученные ниже.

Рассмотрим следующую совокупность ССЗР класса \mathbf{Z} :

- $((\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_2, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_2) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_2\})$;
- $((\{x_1, y, x_2\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y), (y, x_1), (y, y), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_2, u_2) = x_2, g(\theta_1, u_2) = y, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_2\})$;
- $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}),$

- $\{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_2, u_2) = x_3, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_3\}$);
- $((\{x_1, y_1, x_2, y_2\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y_1), (y_1, x_1), (y_1, y_1), (x_2, x_1), (x_2, y_1), (x_2, x_2), (x_2, y_2), (y_2, x_1), (y_2, y_1), (y_2, x_2), (y_2, y_2)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = y_2, g(\theta_1, u_2) = y_1, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_2\})$
 - $((\{x_1, x_2, x_3, y\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3), (x_3, y), (y, x_1), (y, x_2), (y, x_3), (y, y)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = y, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_3\})$);
 - $((\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_4)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_3, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_4\})$);
 - $((\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_4)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_4, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_3\})$);
 - $((\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_4)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_4, g(\theta_1, u_2) = x_3, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_2\})$);
 - $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_3, g(\theta_2, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_2) = x_2\})$);
 - $((\{x_1, x_2, y, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, y), (y, x_1), (y, x_2), (y, y), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, y), (x_3, x_3)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_3, g(\theta_1, u_2) = y, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_2\})$.

ССЗР, изоморфные этим схемам в порядке написания, будем называть соответственно схемами типа I–X класса \mathbf{Z} . При этом путаницы со схемами типа I–VIII класса $\hat{\mathbf{Z}}$ не будет, т.к. из контекста всегда ясна форма ССЗР.

Лемма 3. Если ССЗР $\mathcal{Z} = ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$, то найдутся $u_1, u_2 \in U$, для которых отображения $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^\ominus$ не связаны соответствием (X^\ominus, \succ) .

Доказательство. Из определения неопределенности ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'_0$ следует, что найдутся такие ПВП $p', p'' \in \Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$, для которых имеет место соотношение $(U, \succ^*) := p'_Z \neq p''_Z := (U, \succ^{**})$. А это означает, что найдутся неравные $u_1, u_2 \in U$, для которых $u_1 \succ^* u_2$, а $u_1 \not\succ^{**} u_2$. Тогда, в силу условия У1, имеем

$$u_1 \succ^* u_2, u_2 \succ^{**} u_1. \quad (3)$$

Рассмотрим отображения $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^\ominus$. Предположим, что эти отображения связаны отношением (X^\ominus, \succ) . Тогда, если $g(\cdot, u_1) \succ g(\cdot, u_2)$, то, в силу условия У2, $u_1 \succ^* u_2$ и $u_1 \succ^{**} u_2$, что противоречит соотношению (3). Если $g(\cdot, u_2) \succ g(\cdot, u_1)$, то, в силу условия У2, $u_2 \succ^* u_1$ и $u_2 \succ^{**} u_1$, что также противоречит соотношению (3). Наконец, если $g(\cdot, u_1) \sim g(\cdot, u_2)$, то, в силу условия У2, $u_1 \sim^* u_2$ и $u_1 \sim^{**} u_2$, что снова противоречит соотношению (3).

Значит отображение $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ не связаны отношением (X^\ominus, \succ) .

Лемма доказана.

Лемма 4. Если для ССЗР $\mathcal{Z} = ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ найдутся $u_1, u_2 \in U$, для которых отображения $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^\ominus$ не связаны соответствием (X^\ominus, \succ) , то ССЗР \mathcal{Z} включает подсхему, являющуюся одной из схем типа I–X класса \mathbf{Z}_0 .

Доказательство. Пусть для $u_1, u_2 \in U$ отображения $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2)$ не связаны соответствием (X^\ominus, \succ) . Тогда, в силу леммы 1, найдутся такие $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, что для любых неравных $i, j \in \{1, 2\}$ имеет место соотношение (2), т.е.

$$g(\theta_1, u_1) \succ g(\theta_1, u_2) \text{ и } g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_2, u_1). \quad (4)$$

Рассмотрим подсхему $\overline{\mathcal{Z}} := \mathcal{Z}|_{\{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}}$. Без уменьшения общности можем считать, что

$$g(\theta_1, u_2) \succ g(\theta_2, u_1), \quad (5)$$

т.к. в противном случае вместо $\overline{\mathcal{Z}}$ мы можем рассматривать изоморфную ей в классе \mathbf{Z} , полученную из $\overline{\mathcal{Z}}$ заменой θ_i на θ_j , u_i на u_j , где $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$. Вместе с соотношением (2) условие (5) дает соотношение:

$$g(\theta_i, u_j) \succ g(\theta_2, u_1) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}. \quad (6)$$

Тогда, в зависимости от того, какой из элементов множества $\{g(\theta_i, u_j) | i, j \in \{1, 2\}\}$ максимальный, получим все возможные, с точностью до изоморфизма в классе \mathbf{Z} , подсхемы ССЗР \mathcal{Z} . А именно:

Если $g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_i, u_j)$, где $i, j \in \{1, 2\}$, то могут возникнуть лишь следующие варианты:

1. $g(\theta_2, u_2) = g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) = g(\theta_2, u_1)$.
2. $g(\theta_2, u_2) = g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) \neq g(\theta_2, u_1), g(\theta_1, u_2) \sim g(\theta_2, u_1)$.
3. $g(\theta_2, u_2) = g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) \succ g(\theta_2, u_1)$.

4. $g(\theta_2, u_2) \neq g(\theta_1, u_1), g(\theta_2, u_2) \sim g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) = g(\theta_2, u_1)$.
5. $g(\theta_2, u_2) \neq g(\theta_1, u_1), g(\theta_2, u_2) \sim g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) \neq g(\theta_2, u_1), g(\theta_1, u_2) \sim g(\theta_2, u_1)$.
6. $g(\theta_2, u_2) \neq g(\theta_1, u_1), g(\theta_2, u_2) \sim g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) \succ g(\theta_2, u_1)$.
7. $g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) = g(\theta_2, u_1)$.
8. $g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) \neq g(\theta_2, u_1), g(\theta_1, u_2) \sim g(\theta_2, u_1)$.
9. $g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_1, u_1), g(\theta_1, u_2) \succ g(\theta_2, u_1)$.

Если $g(\theta_1, u_1) \succcurlyeq g(\theta_i, u_j)$, где $i, j \in \{1, 2\}$, то без учета уже рассмотренных вариантов 1–6, могут возникнуть еще лишь следующие варианты:

10. $g(\theta_1, u_1) \succ g(\theta_2, u_2), g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_1, u_2)$.
11. $g(\theta_1, u_2) \succ g(\theta_2, u_2)$.
12. $g(\theta_1, u_2) = g(\theta_2, u_2)$.
13. $g(\theta_1, u_2) \neq g(\theta_2, u_2), g(\theta_1, u_2) \sim g(\theta_2, u_2)$.

Наконец, предположив, что $g(\theta_1, u_2) \succcurlyeq g(\theta_i, u_j)$, где $i, j \in \{1, 2\}$, получим противоречие соотношению (4).

Таким образом, варианты 1–13 исчерпывают все возможные. При этом варианту 1 соответствуют схема типа I класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_2, u_2)$; варианту 2 соответствует схема типа II класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), y := g(\theta_1, u_2), x_2 := g(\theta_2, u_2)$; варианту 3 соответствует схема типа III класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_1, u_2), x_3 := g(\theta_2, u_2)$; варианту 4 соответствует ССЗР изоморфная схеме типа II класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), y := g(\theta_1, u_1), x_2 := g(\theta_2, u_2)$; варианту 5 соответствует схема типа IV класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), y_1 := g(\theta_1, u_2), x_2 := g(\theta_2, u_2), y_2 := g(\theta_1, u_1)$; варианту 6 соответствует схема типа V класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_1, u_2), x_3 := g(\theta_2, u_2), y := g(\theta_1, u_1)$; варианту 7 соответствует ССЗР изоморфная схеме типа III класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_1, u_1), x_3 := g(\theta_2, u_2)$; варианту 8 соответствует ССЗР изоморфная схеме типа V класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_1, u_1), x_3 := g(\theta_2, u_2), y := g(\theta_2, u_2)$; варианту 9 соответствует схема типа VI класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_1, u_2), x_3 := g(\theta_1, u_1), x_4 := g(\theta_2, u_2)$; варианту 10 соответствует схема типа VII класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_1, u_2), x_3 := g(\theta_2, u_2), x_4 := g(\theta_1, u_1)$; варианту 11 соответствует схема типа VIII класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_2, u_2), x_3 := g(\theta_1, u_2), x_4 := g(\theta_1, u_1)$; варианту 12 соответствует схема типа IX класса \mathbf{Z} , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1), x_2 := g(\theta_2, u_2), x_3 := g(\theta_1, u_1)$; варианту 13 соответствует схема

типа X класса Z , если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1)$, $x_2 := g(\theta_2, u_2)$, $y := g(\theta_1, u_2)$, $x_3 := g(\theta_1, u_1)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Любая ССЗР класса $Z'_0 \subseteq Z_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(Z'_0)$ содержит подсхему являющуюся какой-то из схем типа $I-X$ класса Z_0 .

Доказательство непосредственно следует из лемм 2 и 3.

Теорема доказана.

Определение 10. ССЗР класса Z_0 с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(Z_0)$ называется *элементарной схемой* для $\Pi_1(Z_0)$, если ее любая подсхема будет без неопределенности в классе $\Pi_1(Z_0)$.

Лемма 5. Схемы типов $I-X$ и только они будут элементарными схемами для $\Pi_1(Z_0)$.

Доказательство. Любая подсхема ССЗР класса Z_0 с множеством решений и множеством ненаблюдаемого параметра, состоящих из двух элементов будет без неопределенности в классе $\Pi_1(Z_0)$. Это следует из того, что всякая ССЗР класса Z_0 , у которой множество решений или множество ненаблюдаемого параметра состоит из одного элемента, не будет с неопределенностью в классе $\Pi_1(Z_0)$.

Доказательство неопределенности схем типа $I-X$ в классе $\Pi_1(Z_0)$ аналогично доказательству неопределенности схем типа $I-VIII$ в классе $\Pi_1(\hat{Z}_0)$ и основывается на том, что для любой схемы типа $I-X$ $Z := ((X, \succ), \Theta, U, g) \in Z_0$ в качестве отношения предпочтения на множестве решений $U = \{u_1, u_2\}$, в силу не связности элементов $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ соответствием (X^Θ, \succ) , можно, не нарушая условие $Y2$, выбрать любой нестрогий порядок. А их будет несколько.

То, что любая подсхема этих ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(Z_0)$ легко проверить непосредственно, опираясь на условия $Y1$ и $Y2$.

Лемма доказана в одну сторону. В другую сторону утверждение леммы следует из теоремы 1.

Лемма доказана.

Определение 11. Систему элементарных схем для $\Pi_1(Z_0)$ будем называть *полной*, если любая элементарная схема для $\Pi_1(Z_0)$ изоморфна какому-то представителю этой системы.

Теорема 2. Полная система элементарных схем для $\Pi_1(Z_0)$ состоит из схем типов $I-X$ класса Z_0 .

Доказательство. Оно следует из леммы 5.

Теорема доказана.

Теорема 3. Если ССЗР класса $Z'_0 \subseteq Z_0$ содержит подсхему вида схемы одного из типов I–X, то эта ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(Z'_0)$.

Доказательство. Пусть ССЗР $Z := ((X, \succ), \Theta, U, g) \in Z'_0$ содержит подсхему одного из типов I–X и $\{u_1, u_2\}$, где $u_1, u_2 \in U$, является множеством решений этой подсхемы. Тогда отображения $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ не связаны соответствием (X, \succ) , расширенным на множество X^Θ , что следует из соотношения (1). Тогда $g(\cdot, u_1) \succ g(\cdot, u_2)$ и $g(\cdot, u_2) \succ g(\cdot, u_1)$. При этом, как отмечалось ранее, асимметричная составляющая этого расширения, т.е. (X^Θ, \succ) , является строгим частичным порядком.

Определим пару соответствий (X^Θ, \succ') и (X^Θ, \succ'') следующим образом. Для любых отображений $u, v \in X^\Theta$ положим:

$$u \succ' v \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \succ v \text{ либо } (u \succ g(\cdot, u_1) \text{ и } g(\cdot, u_2) \succ v), \quad (7)$$

$$u \succ'' v \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \succ v \text{ либо } (u \succ g(\cdot, u_2) \text{ и } g(\cdot, u_1) \succ v). \quad (8)$$

При этом ясно, что $g(\cdot, u_1) \succ' g(\cdot, u_2)$ и $g(\cdot, u_2) \succ'' g(\cdot, u_1)$. Покажем, что соответствия (X^Θ, \succ') и (X^Θ, \succ'') являются строгими частичными порядками. Из соображений симметрии, доказательство достаточно провести, например, для соответствия (X^Θ, \succ') .

Сначала покажем нерелексивность соответствия (X^Θ, \succ') . Рассуждая от противного, предположим, что $u \succ' u$, где $u \in X^\Theta$. Тогда, в силу соотношения (7) $u \succ g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2) \succ u$. Следовательно, согласно транзитивности соответствия (X^Θ, \succ) , получим, что $g(\cdot, u_2) \succ g(\cdot, u_1)$. А это противоречит не связности отображений $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ соотношением (X^Θ, \succ) .

Покажем теперь транзитивность соответствия (X^Θ, \succ') . Предположим, что $u \succ' v$ и $v \succ' h$, где отображения $u, v, h \in X^\Theta$. Тогда рассмотрим все возможные варианты:

- если $u \succ v$ и $v \succ h$, то $u \succ h$, в силу транзитивности соответствия (X^Θ, \succ) . Значит, согласно соотношению (7), имеем, что $u \succ' h$;
- если $u \succ v, v \succ g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2) \succ h$, то, в силу транзитивности соответствия (X^Θ, \succ) , имеем, что $u \succ g(\cdot, u_1)$. Тогда, согласно соотношению (7), $u \succ' h$;
- если $u \succ g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \succ v$ и $v \succ h$, то, как и выше, $g(\cdot, u_2) \succ h$ и тогда, в силу соотношения (7), $u \succ' h$;

• наконец, оставшийся вариант — условие $u \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$, $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq v, v \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq h$, которые являются несовместными, т.к. из них следует (в силу транзитивности соответствия $(X^\ominus, \succcurlyeq)$), что $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$, а это противоречит не связности отображений $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ соответствием $(X^\ominus, \succcurlyeq)$.

Далее, воспользовавшись теоремой Шпильрайна [5, с. 31], продолжим строгие частичные порядки (X^\ominus, \succ') и (X^\ominus, \succ'') до строгих порядков, которые обозначим (X^\ominus, \succ'_0) и (X^\ominus, \succ''_0) . Тогда их сужения на множество $\{g(\cdot, u) : u \in U\}$ определяют линейные порядки, которые можем обозначить соответственно (U, \succ'_0) и (U, \succ''_0) .

Определим ПВП $p', p'' \in \Pi(\mathbf{Z}'_0)$ таким образом, что для всех ССЗР $\mathbf{Z}' \in \mathbf{Z}'_0$, не совпадающих с ССЗР \mathbf{Z} , $p'_{\mathbf{Z}'} \stackrel{\text{def}}{=} p''_{\mathbf{Z}'} := (U, U^2)$. А для ССЗР \mathbf{Z} $p'_{\mathbf{Z}} := (U, \succ'_0)$, $p''_{\mathbf{Z}} := (U, \succ''_0)$. Тогда, по построению, имеем, что $p', p'' \in \Pi(\mathbf{Z}'_0)$ и $p'_{\mathbf{Z}} = p''_{\mathbf{Z}}$, т.е. ССЗР \mathbf{Z} с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$.

Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия теорем 1 и 3 мы получаем критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ в терминах элементарных подсхем:

ССЗР любого класса $\mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну подсхему типа I–X класса \mathbf{Z}_0 .

Тогда критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_1)$ очевидно будет иметь следующий вид:

ССЗР любого класса $\mathbf{Z}'_1 \subseteq \mathbf{Z}_1$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_1)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну подсхему типа I, III, VI–IX класса \mathbf{Z}_0 .

Критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)(\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ можно дать и в терминах сечений вдоль боковой «плоскости» графика этой схемы, в виде следующей теоремы.

Теорема 4. ССЗР $((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0(\mathbf{Z}_1)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)(\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $u_1, u_2 \in U$, для которых отображения $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^\ominus$ не связны соответствием (X^\ominus, \succ) .

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы представляет содержание леммы 3, а его достаточность вытекает из леммы 4 и теоремы 3.

Теорема доказана.

Критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0) \Pi_1(\mathbf{Z}_1)$ можно, наконец, дать и в терминах сечений вдоль фронтальной «плоскости» графика этой схемы в виде следующей теоремы.

Теорема 5. ССЗР $((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0(\mathbf{Z}_1)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)(\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, что отображения $g(\theta_1, \cdot), g(\theta_2, \cdot) \in X^U$ не комонотонны относительно (X, \succ) .

Доказательство следует из теоремы 4 и леммы 2.

Теорема доказана.

Определение 12. Система неизоморфных в классе \mathbf{Z} элементарных схем для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ называется *базой неопределенности схем* для класса $\mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$, если любая ССЗР класса \mathbf{Z}'_0 с неопределенности в $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ содержит подсхему, изоморфную какому-то представителю этой системы.

Теорема 6. База неопределенности схем для любого класса $\mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ пустая, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ и состоит из элементов в количестве от одного до десяти в противоположном случае.

Доказательство. Следует из леммы 5 и теоремы 1.

Теорема доказана.

Далее для любого подкласса ССЗР \mathbb{Z}' класса ССЗР \mathbb{Z} через $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ обозначим все такие ПВП класса \mathbb{Z}' , что для любой ССЗР $Z := (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ выполняются следующие условия:

УУ1. (U, \succ^*) — нестрогий порядок.

УУ2. Для любых $u_1, u_2 \in U$:

если $g(\cdot, u_1) \succ g(\cdot, u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$;

если $g(\cdot, u_1) \sim g(\cdot, u_2)$, то $u_1 \sim^* u_2$.

УУ3. (X, \succ) — нестрогий порядок.

Рассмотрим следующую совокупность ССЗР класса \mathbb{Z} :

- $(\{x_1, x_2\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_2, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_2) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_2\})$;
- $(\{x_1, x_2, x_3\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_2, u_2) = x_3, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_3\})$;
- $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_3, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_4\})$;
- $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_4, g(\theta_1, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_3\})$;
- $(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_4, g(\theta_1, u_2) = x_3, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_2, u_2) = x_2\})$;
- $(\{x_1, x_2, x_3\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_1, u_1) = x_3, g(\theta_2, u_2) = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_2) = x_2\})$.

ССЗР, изоморфные этим схемам в порядке написания, мы будем называть соответственно схемами типов I–VI класса \mathbb{Z} .

Тогда критерий неопределенности ССЗР в классе $\Pi_1(\mathbb{Z})$ сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 7. Всякая ССЗР любого класса \mathbb{Z} будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда эта ССЗР содержит подсхему вида схемы типов I–VI класса \mathbb{Z} .

Доказательство. Пусть ССЗР $Z := (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$. Тогда найдутся такие $\pi', \pi'' \in \Pi_1(\mathbb{Z})$, для которых $\pi'_{1Z} = \pi''_{1Z} := (X, \succ)$ — нестрогий порядок и $(U, \succ^*) := \pi'_{2Z} = \pi''_{2Z} := (U, \succ^{**})$. А это означает, что ССЗР $Z := ((X, \succ), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\{\mathbf{Z}\})$. Следовательно, в силу теоремы 1, ССЗР Z содержит подсхему вида какой-либо из схем типа I–X класса \mathbf{Z} . Но любая из этих подсхем определяет в ССЗР Z подсхему одного из типов I–VI класса \mathbb{Z} .

В обратную сторону. Если ССЗР $Z := (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ содержит подсхему типа I класса \mathbb{Z} , то определим строгий частичный порядок $(X, \succ') := (X, \{(x_2, x_1)\})$. Если ССЗР Z содержит подсхему типа II либо типа VI класса \mathbb{Z} , то определим строгий частичный порядок $(X, \succ'') := (X, \{(x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\})$. Если же ССЗР Z содержит подсхему одного из типов III–V, то определим строгий частичный порядок $(X, \succ''') := (X, \{(x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\})$. В силу теоремы Шпильрайна эти строгие частичные порядки мы можем продолжить до линейных порядков, которые обозначим соответственно (X, \succ'_0) , (X, \succ''_0) и (X, \succ'''_0) . Тогда, в силу теоремы 3, либо ССЗР $((X, \succ'_0), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0$, либо ССЗР $((X, \succ''_0), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0$, либо ССЗР $((X, \succ'''_0), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$. Следовательно ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g)$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$.

Теорема доказана.

Введем, аналогично как и в классе \mathbf{Z} , понятия элементарной схемы и полной системы элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$, а также базы неопределенности схем класса $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$.

Определение 13. ССЗР класса \mathbb{Z} с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$ называется **элементарной схемой** для $\Pi_1(\mathbb{Z})$, если любая подсхема этой ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$.

Определение 14. Система элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ называется **полной**, если любая элементарная схема для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ изоморфна какому-то представителю этой системы.

Определение 15. Система неизоморфных элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ называется **базой неопределенности схем** класса $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$, если

любая ССЗР класса \mathbb{Z}' с неопределенностью в $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ содержит подсхему, изоморфную какому-то представителю этой системы.

Воспользовавшись теоремой 7, мы получаем критерий полноты системы элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ и классификацию неопределенности в $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ любого подкласса \mathbb{Z}' класса \mathbb{Z} в виде следующих теорем.

Теорема 8. Полная система элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ состоит из схем типов I–VI класса \mathbb{Z} .

Теорема 9. База неопределенности схем любого класса $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ пуста, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ и состоит в количестве от одного до шести элементов в противном случае.

ВЫВОДЫ

Предложенный подход к изучению неопределенности схем ситуаций помимо критериев, позволяющих проанализировать ситуацию на наличие указанной неопределенности в указанных классах ПВП, также дает возможность сужать эти классы ПВП, добавляя новые аксиомы и проверяя в схеме наличие указанной неопределенности, используя полученные ее критерии, вплоть до получения формализма модели критерия оптимальности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 134 с.
2. Ivanenko V.I. Decision systems and non-stochastic randomness. — Berlin: Springer, 2010. — 272 p.
3. Михалевич В.М. К параметрической форме моделирования ситуации в общей задаче принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 77–87.
4. Михалевич В.М. К неопределенности в непараметрических схемах ситуаций задач принятия решений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 1. — С. 61–76.
5. Фишборн П. Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1972. — 352 с.

Поступила 24.01.2012

ВПЛИВ ВРАЗЛИВОСТІ ОБ'ЄКТІВ НА РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМОЇ ТА ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧ МЕНЕДЖМЕНТУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

М.В. ДЕМЧИШИН, Є.Г. ЛЕВЧЕНКО

Оптимізація розподілу ресурсів між об'єктами захисту інформації ведеться на основі математичної моделі, в якій цільова функція визначає кількість вилученої інформації. Розглянуто та графічно проілюстровано ситуації, коли слід переходити від концентрації ресурсів на одному з об'єктів до їх розподілу між об'єктами. Показано, як впливає ймовірність виділення нападом певної кількості ресурсів на кінцевий результат.

ВСТУП

У математичних моделях менеджменту інформаційної безпеки цільова функція зазвичай визначає один із показників протистояння (часто — його оптимальне значення) через виражену в той чи інший спосіб вразливість системи захисту інформації (СЗІ) [1–4]. У моделі Гордона-Лоеба (ГЛ) [1–3] таким показником є зменшення втрат від вилучення інформації завдяки внесенню інвестицій із відрахуванням витрат y на її захист, а вразливість об'єкта розглядається як ймовірність того, що напад буде успішним при $y = 0$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У [4] цільова функція має вигляд:

$$I(x, y) = \sum_{k=1}^l I_k(x, y) = \sum_{k=1}^l G_k p_k q_k(x, y) f_k(x, y), \quad (1)$$

де $I(x, y)$ — відносна кількість вилученої інформації; $k = \overline{1, l}$ — номер об'єкта захисту інформації; G_k — обсяг інформації на k -му об'єкті,

$\sum_{k=1}^l G_k = G$; x та y — ресурси нападу і, відповідно, захисту, які віднесені до

G_k ; p_k — ймовірність нападу на k -й об'єкт; $q_k(x, y)$ — ймовірність виділення ресурсів x при нападі на k -й об'єкт; $f_k(x, y)$ — залежність частки вилученої інформації на k -му об'єкті від співвідношення x та y .

У [4] для різних інформаційних систем і умов протистояння наведено огляд актуальних задач, які можуть бути розглянуті за допомогою описаної методики.

Мета роботи — розв'язання однієї з таких задач, а саме — визначення оптимального розподілу ресурсів захисту по об'єктах, при якому досягається

ся мінімум вилученої інформації. Частинні випадки цієї задачі розглянуто в [5], а формулювання задач для різних систем і умов протистояння — у [4].

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКІВ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

Під час застосування функції (1) ключовим питанням є встановлення явної форми залежностей $f_k(x, y)$ та їх фізичного змісту, тобто зв'язку з характеристиками об'єктів. Об'єкти можуть мати як фізичну природу (приміщення, паперова документація, канали витоку інформації), так і електронну (поштові сервери, файл-сервери тощо). Ці залежності мають задовольняти цілій низці вимог. Для того, щоб виокремити їх вплив, покладемо $p_k = 1$, $q_k(x, y) = \text{const} = 1$ і одержимо спрощену форму виразу (1):

$$I(x, y) = \sum_{k=1}^l G_k f_k(x, y). \quad (2)$$

Таким чином, об'єкти на першому етапі нашого розгляду відрізняються лише двома показниками — обсягом інформації та залежністю $f_k(x, y)$, яку можна трактувати як характеристику вразливості об'єкта, яку визначимо як відношення кількості вилученої інформації до затрачених ресурсів: $v = \frac{I}{X}$.

Надалі маленькими літерами позначатимемо відносні величини:

$$g_k = \frac{G_k}{G}; \quad i_k = \frac{I_k}{G}; \quad x_k = \frac{X_k}{G}; \quad y_k = \frac{Y_k}{G}.$$

Під час розгляду функціональних залежностей індекси опускаємо.

Основна вимога до залежностей $f(x, y)$: при $\frac{x}{y} \rightarrow 0$ $f(x, y) \rightarrow 0$, при

$\frac{x}{y} \rightarrow \infty$ $f(x, y) \rightarrow a$, де $a \leq 1$ — максимально можлива кількість вилученої інформації, яка визначається специфікою об'єкта та його системи захисту.

Цим умовам відповідають степеневі $f(x, y) = \frac{a(x/y)^n}{(x/y)^n + c}$ і показникові

$f(x, y) = a(1 - e^{-m(x/y)^n})$ функції [4]. Враховуючи, що за відповідного вибору параметрів ці залежності можуть стати досить близькими, обмежимося розглядом степеневих функцій. Параметри n та c у степеневій функції $f(x, y)$ можна встановити, виходячи з таких міркувань.

- При $x/y \gg 1$ залежності $f(x, y)$ при різних n та c повинні мати схожий характер, який відповідає умові $f(x, y) \rightarrow a$. При $\sim x/y \geq 0$ опуклість кривої може бути направлена як вгору, так і вниз — залежно від початкової вразливості об'єкта. У математичному виразі степеневі залежності $f(x, y)$ опуклість направлена вгору при $n \leq 1$ та вниз — при $n > 1$.

• Вважаючи, що втрата 10–15 % інформації для підприємства є досить відчутною, а 15–20 % — критичною, формулюємо умову: при $x/y \approx 1$ — $i(x, y) \approx 0,05..0,15$, при $x/y \approx b$ — $i(x, y) \approx 0,2..0,3$. Граничне значення $x/y \approx b$ обирається з таких міркувань. Кількість ресурсів, які можуть бути виділені на захист інформації, за статистичними оцінками становить $y \approx 0..0,15g$. Вважаємо, що витрати ресурсів сторони нападу лежать в інтервалі $x \approx 0..0,5g$ (подальше їх збільшення визнаємо недоцільним). Виходячи з реальних граничних витрат та вважаючи, що витрати обох сторін визначаються одними і тими ж показниками (важливістю об'єкта та його вразливістю) і тому змінюються синхронно, отримуємо граничне значення $x/y = \frac{0,5}{0,15} \approx 3$. Надалі ресурси нападу подаватимемо у відносних величинах

у двох варіантах: віднесені до кількості інформації — $x_k = \frac{X_k}{G_k}$, $x_k = 0..1$

або до ресурсів захисту — $x_k/y_k = 0..3$. Значення x/y , які лежать за межами цього інтервалу (зокрема, при $y \rightarrow 0$ $x/y \rightarrow \infty$) можуть бути розглянуті окремо. Варто зазначити, що наведені величини є орієнтовними і в окремих випадках можуть бути перевищені.

• При невеликих значеннях x/y ($x/y \lesssim 1$) СЗІ має бути рентабельною, тобто зменшення втрат інформації ΔI має перевищувати витрати y на її захист. При значних величинах $x/y \approx 3$ рентабельним має бути напад: $i \gtrsim x$.

Для того, щоб мати можливість графічно зображати результати, розглянемо систему з двох об'єктів. Оскільки цю роботу спрямовано на аналіз дій нападу з метою розробки заходів протидії, вважатимемо величини, які визначаються стороною захисту, сталими та рівними: $g_1 + g_2 = g = 1$, $y_1 + y_2 = y = 0,05g$. При прийнятих допущеннях щодо p_k та $q_k(x, y)$ маємо $i_k(x, y) = g_k f_k(x, y)$. Степеневі залежності $f(x, y)$, які відповідають визначеним вимогам і показують вплив параметрів a , n та c наведено на рис. 1.

Вважаючи, що об'єкти мають різний ступінь вразливості та враховуючи наведені вище умови, оберемо функції $f(x, y)$ для двох об'єктів у формі (рис. 1):

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x_1}{\frac{x_1}{y_1} + 3}; f_2(x, y) = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3}{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3 + 4}. \quad (3)$$

Зазначимо, що коефіцієнти $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{3}$ введені у вирази $f_k(x, y)$ (3) для того, щоб підкреслити кривизну ліній, що, звичайно, не обмежує загальність дослідження.

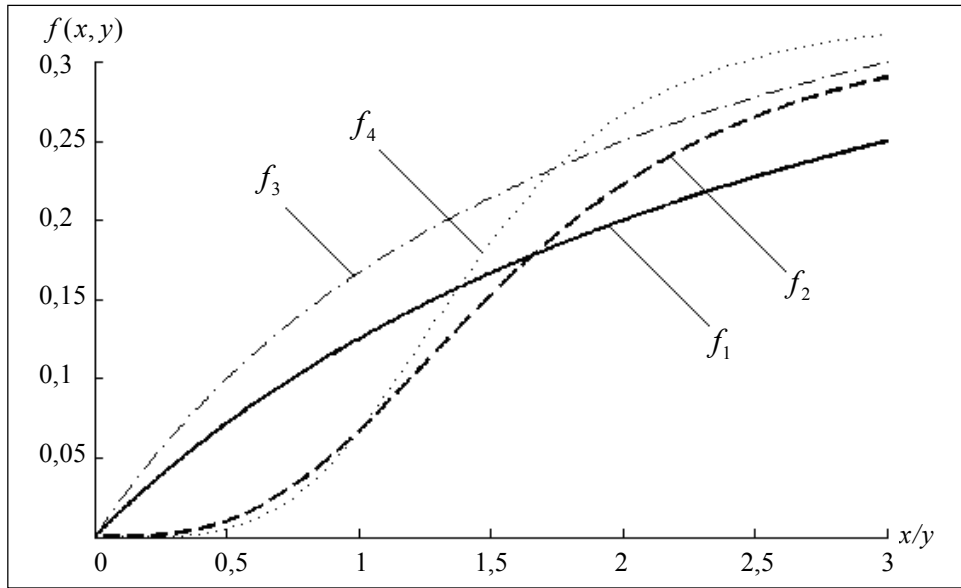


Рис. 1. Степеневі залежності $f(x, y)$ при різних значеннях параметрів

Опуклість у початковій області об'єкта 1, відповідно до (3), направлена вгору, що свідчить про низький рівень початкової вразливості, а для об'єкта 2 картина протилежна (рис. 1). Прикладом елементу захисту, для якого характерна форма залежності 2, є шифрування даних. Для зламу цієї системи потрібна значна кількість ресурсів, проте після досягнення цієї мети кількість вилученої інформації стрімко зростає.

Цільова функція (2) із врахуванням (3) приймає вигляд:

$$i(x_1, x_2, y_1, y_2) = i_1(x_1, y_1) + i_2(x_2, y_2) = \frac{1}{2} g_1 \frac{\frac{x_1}{y_1}}{\frac{x_1}{y_1} + 3} + \frac{1}{3} g_2 \frac{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3}{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3 + 4}. \quad (4)$$

Використовуючи (4), можна сформулювати оптимізаційні задачі двох типів:

- *пряма задача* — при заданій кількості ресурсів нападу $x_1 g_1 + x_2 g_2 = x$ знайти оптимальний розподіл $\{x_1^0, x_2^0\}$, який забезпечує максимальну кількість вилученої інформації i_{\max} (надалі через x та y позначатимемо сумарні ресурси двох об'єктів);
- *зворотна задача* — знайти необхідну кількість ресурсів $x_1 g_1 + x_2 g_2 = x$ та їх розподіл, який забезпечує вилучення заданої кількості інформації i .

Графічну ілюстрацію розв'язку обох задач наведено на рис. 2. Значення X, Y, Z в інформаційних полях позначених точок зображають величини, які наведені на відповідних вісях координат — у цьому випадку $x_1, x_2, i(x, y)$.

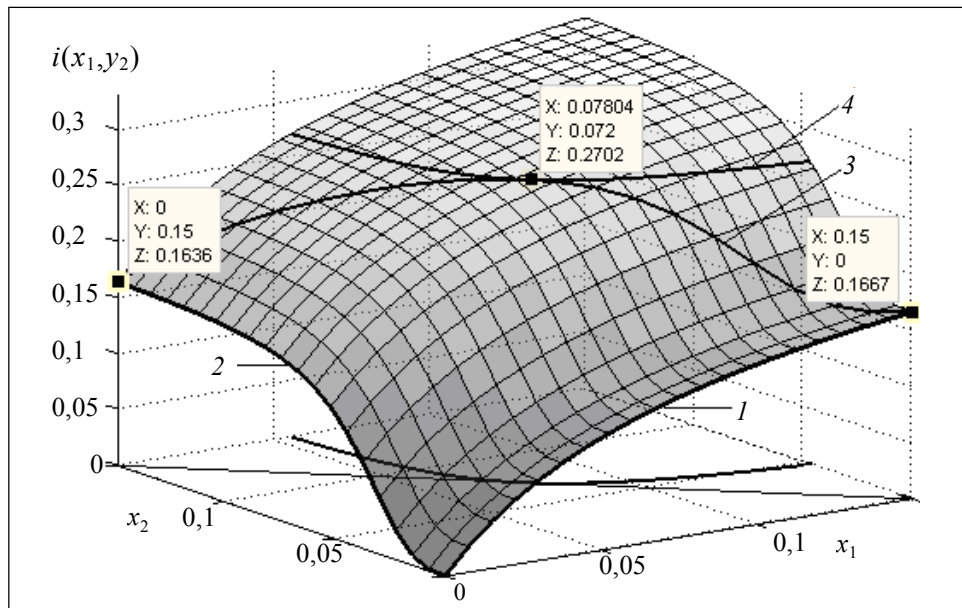


Рис. 2. Графічна ілюстрація розв'язку прямої та зворотної задач

Розглянемо спочатку розв'язок *прямої задачі*. Задаємо кількість ресурсів нападу (для прикладу візьмемо $x = 0,15$) і будемо обмежувальну пряму $x_1 + x_2 = 0,15$, а потім здійснюємо переріз об'ємної фігури $i(x_1, x_2)$, побудованої на залежностях $i_1(x_1)$, $i_2(x_2)$ при $g_1 = g_2 = 0,5$, $y_1 = y_2 = 0,025$, $y_1 + y_2 = 0,05$, $y_1 g_1 + y_2 g_2 = 0,025$ (криві 1 та 2) вертикальною площиною, що проходить через цю пряму (у виразі $i_k(x, y)$ величину $y = \text{const}$ опускаємо). Лінія 3, утворена цим перерізом, визначає множину всіх можливих значень $i(x_1, x_2)$ і дає змогу знайти i_{\max} та відповідний розподіл x_1^0, x_2^0 (на рис. 2 $x_1^0 = 0,078$, $x_2^0 = 0,072$, $i_{\max} = 0,27$).

Кількість максимумів, які має функція $i(x_1, x_2)$ при обмеженні $x_1 + x_2 = x$ визначається формою складових $i_1(x_1)$, $i_2(x_2)$. Один максимум спостерігається у випадку, коли кожна зі складових виражається однією дробно-лінійною або дробно-нелінійною функцією, тобто похідні $i_1'(x_1)$, $i_2'(x_2)$ мають не більше одного максимуму. У протилежному випадку можна спостерігати декілька локальних максимумів. Максимальне значення функція може приймати і на кінці інтервалу, що відображає ситуацію, коли всі ресурси слід вкладати в один із об'єктів.

Як видно з (4), на величини $i(x_1, x_2)$ і, відповідно, i_{\max} , крім виду залежностей $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)$, має вплив також розподіл g_1/g_2 інформації між об'єктами. При зміні цього співвідношення криві $i_1(x_1)$, та $i_2(x_2)$ на рис. 2 будуть змінювати своє положення: одні підніматись, а інші — опускатись. При цьому буде змінюватись форма просторової фігури $i(x_1, x_2)$, форма ліній перерізу і значення оптимальних величин.

Розглянемо тепер *зворотню задачу*. Її розв'язок одержимо в результаті перерізу поверхні $i(x_1, x_2)$ площиною $x_1 0 x_2$, проведеною на рівні

$i(x_1, x_2) = C$ (рис. 2). Точка дотику отриманої в результаті перерізу лінії рівня (ізокванти) $i(x_1, x_2) = C$ (крива 4) і обмежувальної прямої (ізокости) $x_1 + x_2 = x$ дає розв'язок задачі, тобто значення x , яке забезпечує вилучення інформації $i(x_1, x_2) = C$ і відповідний оптимальний розподіл $\{x_1^0, x_2^0\}$, а саме, розподіл, який забезпечує задану величину $i(x_1, x_2)$ при мінімальному значенні $x_1 + x_2 = x$. На рис. 2 переріз здійснено на рівні $C = i_{\max} = 0,27$, визначеному розв'язком прямої задачі. На рис. 3 показано положення ліній перерізу і точок дотику до обмежувальних прямих $x_1 + x_2 = x$, які визначають оптимальні величини x_1^0, x_2^0 для різних значень $i(x_1, x_2)$: 1 — $i = 0,3$, 2 — $i = 0,27$, 3 — $i = 0,2$, 4 — $i = 0,1$.

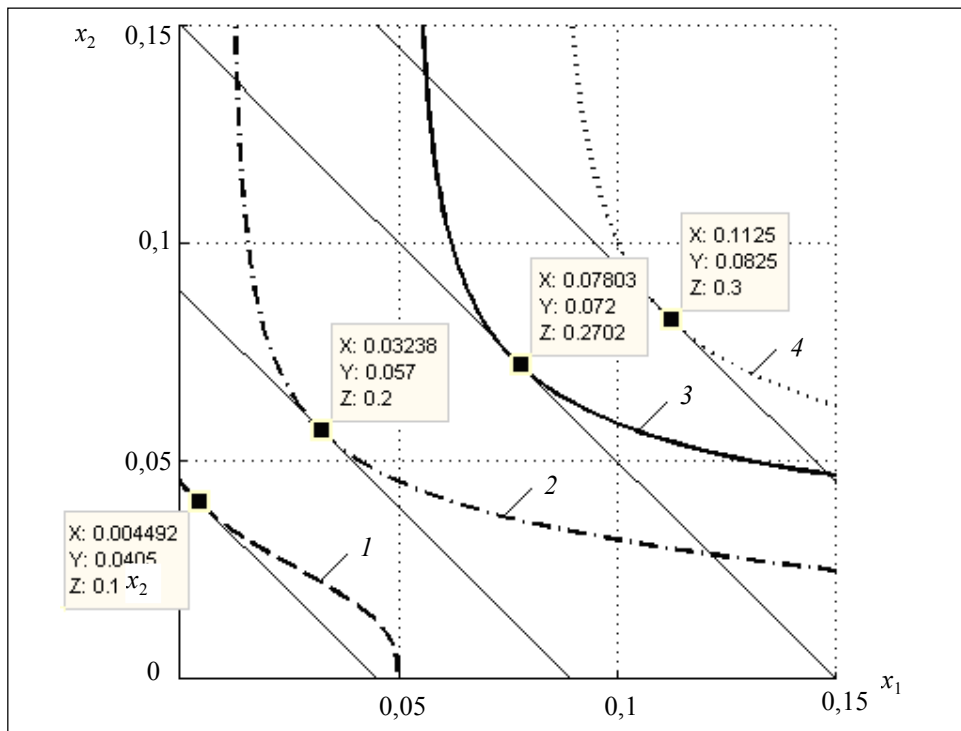


Рис. 3. Формування оптимального розподілу ресурсів нападу

Необхідні значення ресурсів нападу x для деяких значень i , а також оптимальні розподіли $\{x_1^0, x_2^0\}$ для них, розраховані за виразом (4) при $g_1 = g_2 = 0,5$, $y_1 = y_2 = 0,025$, наведено в таблиці.

Таблиця. Величини x та оптимальні розподіли $\{x_1^0, x_2^0\}$ ресурсів нападу, які необхідні для вилучення заданої кількості інформації $i(x_1, x_2)$

$i(x_1, x_2)$	0,1	0,2	0,27	0,3
x	0,045	0,089	0,15	0,195
x_1^0	0,005	0,032	0,078	0,112
x_2^0	0,04	0,057	0,072	0,082

Результати, наведені в третьому стовпчику таблиці, є розв'язком зворотної задачі, де вхідні дані взято з попередньо знайденого розв'язку прямої задачі ($i(x_1, x_2) = 0,27$ для $x = 0,15$). В інших стовпчиках мають місце розв'язки зворотної задачі для довільних значень $i(x_1, x_2)$.

Таким чином, обмежувальна пряма $x_1 + x_2 = x$ своїм дотиком до ліній, утворених перерізом поверхні $i(x_1, x_2)$ двома взаємно перпендикулярними площинами, визначає точку оптимізації, яка, у свою чергу, після проектування на площину $x_1 O x_2$, задає оптимальний розподіл (x_1^0, x_2^0) . Кількісні результати, наведені в таблиці, розраховані з використанням функції `fmincon` пакету Optimization Toolbox програмного комплексу Matlab. Ця функція знаходить мінімум скалярної функції багатьох змінних при обмеженнях типу $Ax \leq B$. Графічна інтерпретація надається лише для ілюстрації сутності явища.

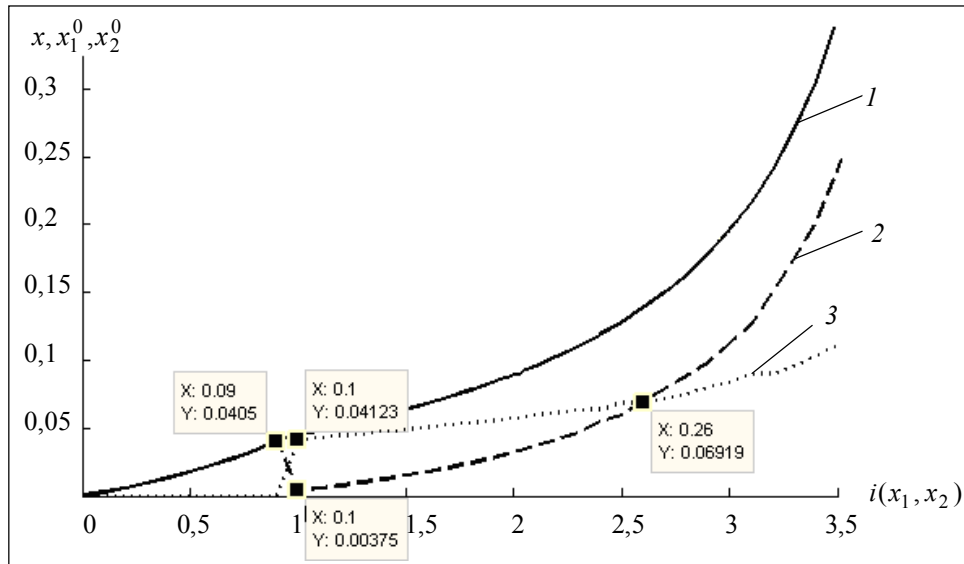


Рис. 4. Розподіл ресурсів при розв'язку зворотної задачі, крива 1 — x , 2 — x_1^0 , 3 — x_2^0

На рис. 4 наведено залежність x від величини i , а також оптимальні розподіли x_1^0, x_2^0 для різних i . Інтервал можливих значень i обрано з огляду на розрахункові значення $f(x, y)$ з рис. 1. Цікавим на цьому графіку є наявність двох критичних точок $i_{кр}^{(1)}$ та $i_{кр}^{(2)}$. При $i < i_{кр}^{(1)}$ всі ресурси нападу доцільно зосередити на одному з об'єктів. Цей об'єкт визначається кількістю інформації на ньому і ступенем його вразливості. На рис. 4 $i_{кр}^{(1)} = 0,09$, при $i < 0,09$ $x_1^0 = x$, $x_2^0 = 0$. При $i > i_{кр}^{(1)}$ відбувається перерозподіл ресурсів нападу: x_1^0 суттєво зменшується (з 0,0405 до 0,00375), а x_2^0 стрибком зростає від 0 до 0,04123. При подальшому збільшенні x обидві величини x_1^0 та x_2^0 зростають, причому $x_2^0 > x_1^0$. При $i = i_{кр}^{(2)}$ вони досягають

однакового значення ($x_1^0 = x_2^0 = 0,06919$), після чого x_1^0 перевищує x_2^0 . Використовуючи економічну термінологію, можемо вважати, що $i_1(x)$ та $i_2(x)$ — субститути, а перехід від одного об'єкта до іншого характеризує еластичність доходу.

Наявність критичних точок можна пояснити такими причинами. На початковому етапі зростання x $i_1(x) > i_2(x)$ та $i_1'(x) > i_2'(x)$, тобто кількість інформації, яка вилучається з першого об'єкта, і швидкість зростання цієї кількості перевищують відповідні величини для другого об'єкта (криві 1 та 2 на рис. 1). При такому припущенні про однакову кількість інформації на об'єктах ($g_1 = g_2$) це може бути спричинено більшою початковою вразливістю першого об'єкта. У цих умовах доцільно направляти всі ресурси нападу на перший об'єкт: $x_1^0 = x$. Проте зі збільшенням x значення $i_1'(x)$ зменшується, а значення $i_2(x)$ та $i_2'(x)$ зростають, що зрештою призводить до ситуації, коли сума $g_2 i_2(x_2) + g_1 i_1(x - x_2)$ стає більшою, ніж $g_1 i_1(x_1)$. У цій точці доцільно перейти до розподілу ресурсів між двома об'єктами. Значення $i_{кр}^{(1)}$ визначається кривизною ліній $f_1(x)$, $f_2(x)$ та співвідношенням g_1/g_2 . Під час переходу через цю точку залежність $x(i)$ змінює свій нахил, оскільки до цієї точки вона повністю визначається функцією $i_1(x)$, а при $i > i_{кр}^{(1)}$ — обома функціями $i_1(x)$, $i_2(x)$. Зменшення нахилу $x(i)$ свідчить про перехід до ефективнішого використання ресурсів нападу.

Отриманий результат деякою мірою перегукується з висновками [1], де ставиться задача оптимізації загальної кількості виділених ресурсів захисту і при деяких видах залежності кількості вилученої інформації i від вразливості v оптимальна кількість ресурсів захисту $y = y^0$ дорівнює нулю при малих, а в деяких випадках — також при дуже великих значеннях вразливості.

Стрибокподібний перерозподіл ресурсів у точці $i_{кр}^{(1)}$ можна проілюструвати ще за допомогою геометричної інтерпретації розв'язку (рис. 5), де показано, що в інтервалі $x \leq 0,04358$ ресурси нападу доцільно направляти на перший об'єкт, а при перевищенні цього значення розподіляти між об'єктами (квадратики — точки, в яких $x \rightarrow \min$).

Значення x_1^0 , x_2^0 у рисунках обираються такими, щоб сума ординат на кривих 1, 2 рис. 1 під час виконання обмежувальної умови набувала максимального значення. Це фактично є формулюванням принципу Лагранжа, який у застосуванні до нашої задачі дає змогу одержати аналітичні вирази для x_1^0 , x_2^0 .

Запишемо функцію Лагранжа, подаючи лінійну та кубічну залежності $f_k(x, y)$ в загальній формі:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = g_1 \frac{a_1(x_1/y_1)}{x_1/y_1 + c_1} + g_2 \frac{a_2(x_2/y_2)^3}{(x_2/y_2)^3 + c_2} - \lambda(x_1 + x_2 - x).$$

Беручи частинні похідні по невідомим x_1 , x_2 , λ , одержуємо систему рівнянь, яка визначає x_1^0 , x_2^0 , λ :

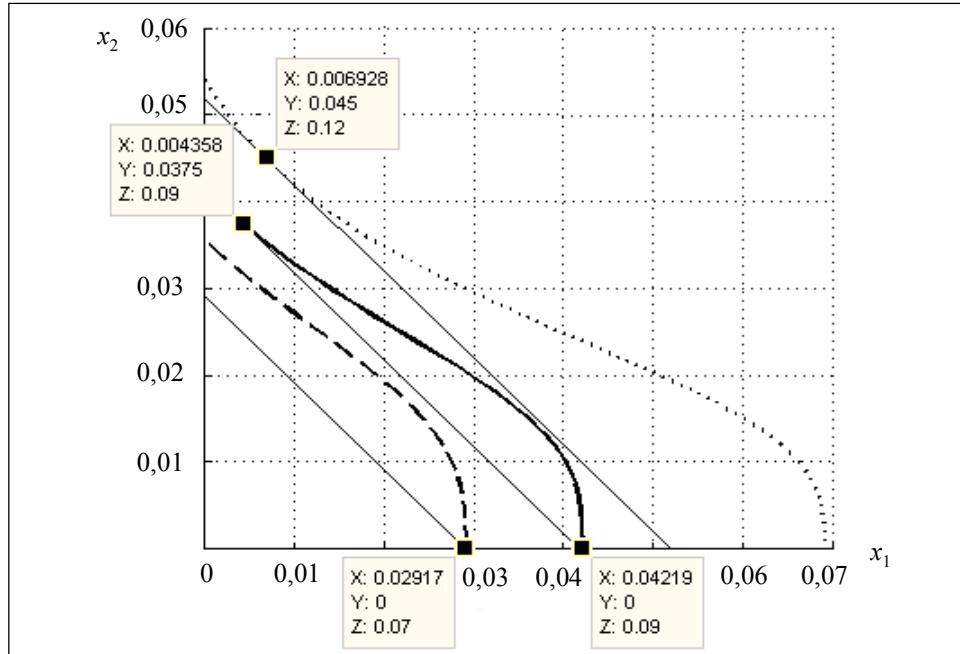


Рис. 5. Графічне пояснення стрибкоподібного перерозподілу ресурсів

$$\begin{cases} x_1^0 = \sqrt{\frac{a_1 c_1}{\lambda}} g_1 y_1 - c_1 y_1 \\ \left(\frac{x_2^0}{y_2}\right)^3 - \sqrt{\frac{3 g_2 a_2 c_2}{\lambda}} \left(\frac{x_2^0}{y_2}\right) + c_2 = 0 \\ x_1^0 + x_2^0 = x \end{cases}$$

Розв'язок значно спрощується, якщо обидві залежності $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ виражаються функціями першого степеня:

$$f_1(x, y) = \frac{a_1(x_1/y_1)}{x_1/y_1 + c_1}; \quad f_2(x, y) = \frac{a_2(x_2/y_2)}{x_2/y_2 + c_2}.$$

Тоді шукані величини можна записати в явній формі:

$$x_1^0 = \sqrt{\frac{a_1 c_1}{\lambda}} g_1 y_1 - c_1 y_1; \quad x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2 c_2}{\lambda}} g_2 y_2 - c_2 y_2;$$

$$\lambda = \frac{\left(\sqrt{a_1 c_1 g_1 y_1} + \sqrt{a_2 c_2 g_2 y_2}\right)^2}{\left(x + c_1 y_1 + c_2 y_2\right)^2}.$$

Врахуємо тепер залежність $q(x, y)$, в якій y задається як параметр. Вид цієї залежності можна встановити з таких міркувань. Зрозуміло, що

$q(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та при $x \rightarrow \infty$, отже $q(x, y) \rightarrow \max$ при певному значенні x (оскільки $q(x, y) \geq 0$). Вважатимемо, що ймовірність виділення ресурсів пропорційна обсягу інформації на об'єкті та його вразливості, яку визначаємо як $v_k = \frac{i_k}{x_k} = \text{tg } \alpha_k$, де α_k — кут між віссю абсцис і прямою, проведеною з початку координат у точку на кривій (рис. 1), яка відповідає певному значенню $f_k(x, y) = i_k(x, y)$. Розраховані таким чином величини $v_k(x, y)$, що відповідають залежностям $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ (3), зображено на рис. 6 (криві 1, 2).

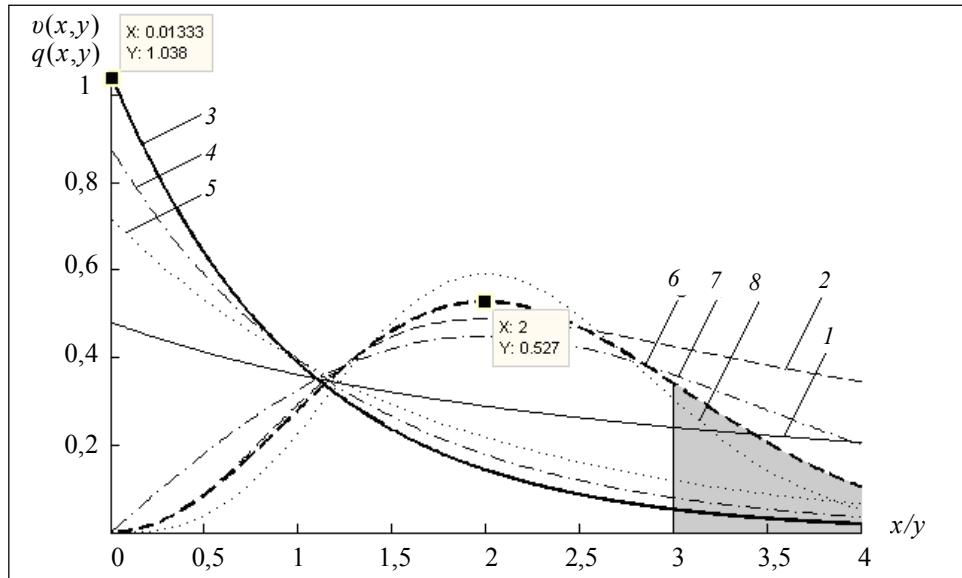


Рис. 6. Формування залежності $q(x, y)$ в обмеженому інтервалі значень x/y

Зазначимо, що використати залежність $v(x, y)$ у «чистому» вигляді в якості $q(x, y)$ неможливо. Це пояснюється тим, що при зростанні x вразливість $v = \text{tg } \alpha_k$, виражена залежностями $f(x, y)$ (рис. 1), спадає досить повільно (рис. 6, криві 1, 2), тоді як імовірність нападу при $x \geq g$ прямує до нуля (через нерентабельність). Тому під час формування залежності $q(x, y)$ слід, крім вразливості, врахувати ще й доцільність нападу, яка визначається рентабельністю вкладених ресурсів $r = \frac{i-x}{x} = v - 1$. Слід зазначити, що введене поняття вразливості відрізняється від вразливості [1], яка визначається як імовірність успішного здійснення нападу і не пов'язана явно з кількістю вилученої інформації. Вразливість у нашій інтерпретації пов'язана з рентабельністю і за позитивного її значення $v > 1$. Інтервал можливих значень x у виразі $q(x, y)$ обмежений певним значенням $x_{\text{гр}}$, яке визначається умовою:

$$\int_0^{x_{\text{гр}}} q(x, y) dx = 1. \quad (5)$$

Звуження інтервалу x викликає необхідність деформування залежності $q(x, y)$ порівняно з $v(x, y)$: у межах $0..x_{гр}$ її слід підняти, а за межами цього інтервалу — опустити, відкинувши «хвіст» розподілу з точки $x_{сп}$. Ступінь деформації в інтервалі $0..x_{гр}$ визначається умовою (5). Точка $x = x_m$, за якої досягається максимум $q(x, y) = q_m$, при деформації залишається незмінною, оскільки відповідає максимальному значенню вразливості.

Враховуючи, що вразливості об'єктів істотно різняться, оберемо для кожного з них свою залежність $q(x, y)$ (рис. 6). Для першого об'єкта форму залежності $v(x, y)$ подамо у вигляді функції

$$q_{11}(x, y) = Ne^{-\alpha \frac{x}{y}} = 1,05e^{-\frac{x}{y}}. \quad (6)$$

Форма кривої $v(x, y)$ для другого об'єкта показує, що залежність $q(x, y)$ можна обрати у вигляді розподілу Максвелла:

$$q_{21}(x, y) = N \left(\frac{x}{y} \right)^2 e^{-h^2 \left(\frac{x}{y} \right)^2} = 0,36 \left(\frac{x}{y} \right)^2 e^{-0,25 \left(\frac{x}{y} \right)^2}, \quad (7)$$

де $h = \frac{1}{x_m}$. Перший індекс в (6), (7) — номер об'єкта, другий — номер варіанта. Розрахунок нормованих коефіцієнтів N в (6), (7) знаходимо з умови (5). Сталу h у цьому випадку визначаємо, поклавши $x_m = 2$. Значення $x_{гр}$ впливає з прийнятого інтервалу обмеження $x = 0..0,15$ і становить $x_{гр} = 0,15$, що, при обраному значенні $y = 0,05$, відповідає відношенню $x/y = 3$. Ступінь відхилення прийнятого розподілу $q(x, y)$ (крива 6 в межах $x/y = 0..3$) від розподілу Максвелла визначається відносною площею відкинутого «хвоста» — $\Delta S = 0,21$ (заштрихована область).

Для порівняння на рис. 6 показано також інші залежності, які можна використовувати для апроксимації функцій $q(x, y)$. Для першого об'єкта (криві 4, 5):

$$q_{12}(x, y) = 0,88e^{-0,8 \frac{x}{y}}, \quad q_{13}(x, y) = 0,719e^{-0,6 \frac{x}{y}}. \quad (8)$$

Для другого об'єкта — розподіл Релея (крива 7) та кубічна залежність (крива 8):

$$q_{22}(x, y) = 0,37 \left(\frac{x}{y} \right)^2 e^{-0,125 \left(\frac{x}{y} \right)^2}, \quad q_{23}(x, y) = 0,331 \left(\frac{x}{y} \right)^3 e^{-0,375 \left(\frac{x}{y} \right)^2}. \quad (9)$$

Вибір функції $q(x, y)$ для кожного об'єкта визначається його динамічною вразливістю, яка впливає із залежностей $f(x, y)$ (рис. 1).

На рис. 7 зображено залежності $i_{kn} = g_k f_{kn}$, які розраховані на основі (1) за умови, що $g_k = 0,5$, $p_k = 1$, $y_k = 0,025$, $f_k(x, y)$ задається виразами (3), $q_{kn}(x, y)$ — виразами (6)–(9).

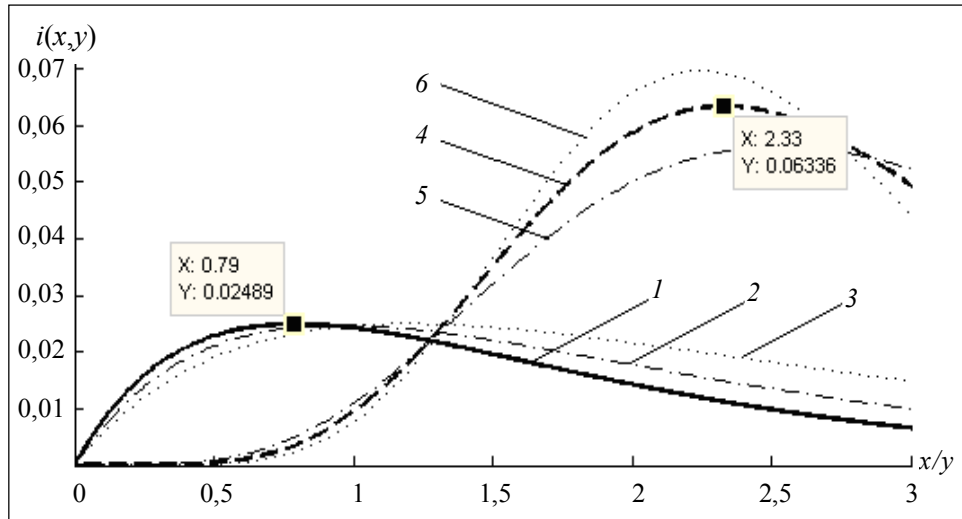


Рис. 7. Функції $i(x, y)$ з врахуванням залежностей $q(x, y)$

Із врахуванням залежностей $f_k(x, y)$, $q_{kn}(x, y)$, які відповідають виразам (3), (6), (7), цільова функція $i(x_1, x_2)$, що визначає відносну кількість вилученої інформації з двох об'єктів, має вигляд:

$$i(x, y) = g_1 q_{11}(x_1, y_1) f_1(x_1, y_1) + g_2 q_{21}(x_2, y_2) f_2(x_2, y_2) =$$

$$= \frac{1}{2} g_1 1,05 e^{-\frac{x_1}{y_1}} \frac{\frac{x_1}{y_1}}{\frac{x_1}{y_1} + 3} + \frac{1}{3} g_2 0,36 \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 e^{-0,25 \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2} \frac{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3}{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3 + 4}. \quad (10)$$

Графічне зображення об'ємної фігури, яка відповідає цій функції, наведено на рис. 8. Використання залежності $q(x, y)$ викликає деформацію фігури рис. 2. У результаті з'являється вершина «гори» (рис. 8), яка визначає абсолютний максимум $i_{\max} = 0,06498$ і оптимальний розподіл ресурсів $x_1^0 = 0,0225$ та $x_2^0 = 0,105$, а також його сумарне значення $x^0 = 0,123$ при $g_1 = g_2 = 0,5$, $y_1 = y_2 = 0,025$.

Лінії рівня, отримані в результаті перерізу об'ємної фігури рис. 8 площинами $i(x_1, x_2) = C$ при різних C дозволяють скласти чіткіше уявлення про крутизну цієї фігури в різних напрямках (криві 1–3 на рис. 9). Для порівняння на цьому ж рисунку наведено лінії перерізу (криві 4–6) ще однієї залежності $i(x_1, x_2) = g_1 q_{13}(x_1) f_1(x_1) + g_2 q_{23}(x_2) f_2(x_2)$. Перерізи здійснено на рівнях: криві 1, 4 — $i(x_1, x_2) = 0,06$; 2, 5 — $i(x_1, x_2) = 0,05$; 3, 6 — $i(x_1, x_2) = 0,04$.

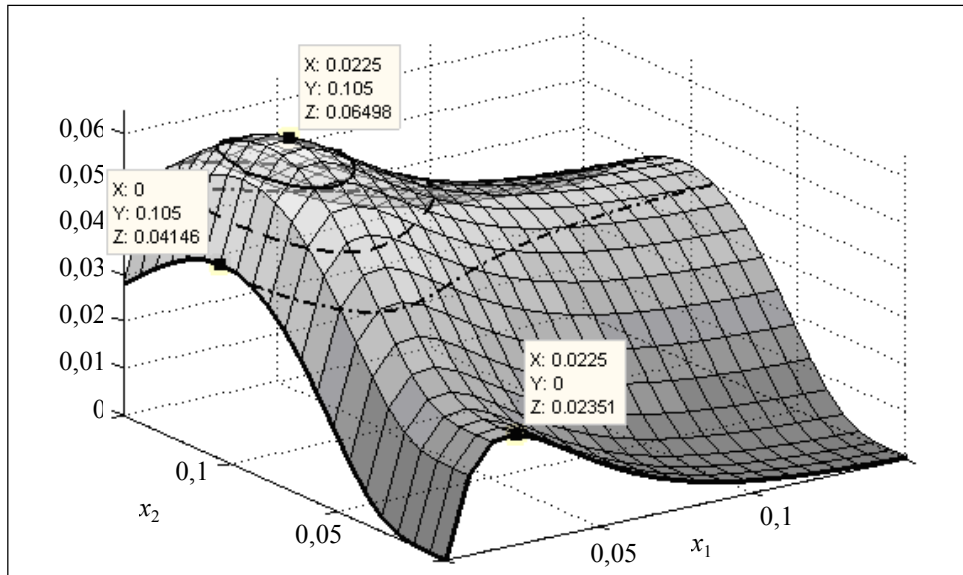


Рис. 8. Просторова фігура $i(x, y)$ із врахуванням залежностей $q(x, y)$

Густина ліній в околі точки i_{\max} у горизонтальному та вертикальному напрямках дозволяє оцінити чутливість величини i до відхилення x_1 та x_2 від їх оптимальних значень x_1^0 , x_2^0 .

Підсумовуючи, нагадаємо, що кінцевою метою дослідження є пошук оптимальної стратегії дій захисту, тобто визначення оптимальних значень y_k^0 . Розрахунок максимальних значень $i(x, y)$ та $\{x_k^0\}$ допомагає передбачити дії суперника та розробити заходи протидії.

Визначення оптимального відношення $(y_1/y_2)^0$ для системи з двох об'єктів проводиться в такій послідовності.

- На основі експертних оцінок визначаємо розподіл $\{g_k\}$.
- У результаті аналізу фізичної вразливості кожного об'єкта підбираємо залежності $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$.
- Поклавши $p_1 = p_2 = p = 1$ та вибравши вид функції $q(x, y)$, формуємо цільову функцію:

$$i(x, y) = g_1 q_1(x, y) f_1(x, y) + g_2 q_2(x, y) f_2(x, y).$$

- Виходячи з реальних можливостей, встановлюємо межі допустимих значень x та y , наприклад

$$y = (0..0,05)g, \quad x = (0..3)y = (0..0,15)g.$$

- Виходячи з умови досягнення максимальної рентабельності ресурсів нападу на кожному об'єкті, тобто враховуючи вираз для динамічної вразливості об'єкта, яка впливає з обраної залежності $f_k(x, y)$, визначаємо x_k/y_k .

- Враховуючи співвідношення g_1/g_2 , v_1/v_2 , задаємо $y_1/y_2 = g_1/g_2 v_1/v_2$ і, знаючи $y = y_1 + y_2$, знаходимо y_1 та y_2 .
- Задаємо g_1, g_2, y_1, y_2 у вираз (8) і, використовуючи функції пакета Optimization Toolbox програмного комплексу Matlab, знаходимо оптимальні значення $\{x_1^0, x_2^0\}$, які визначаються критерієм $i(x_1^0, x_2^0) = \min_{x_1, x_2} i(x_1, x_2)$.

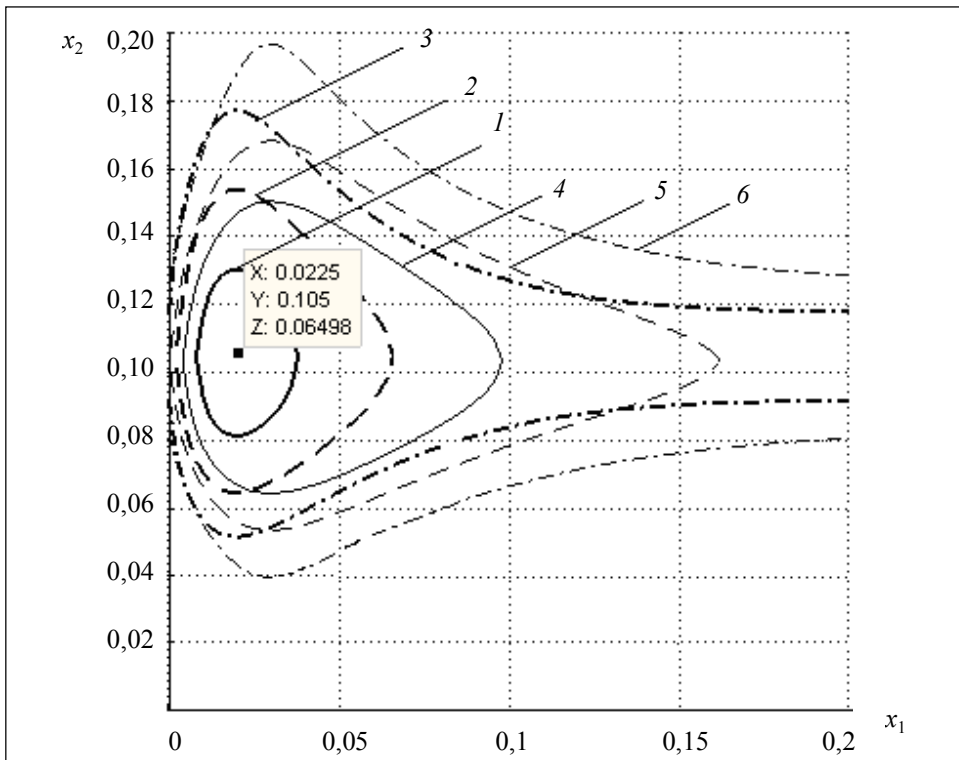


Рис. 9. Лінії рівня просторової фігури рис. 8

- Використовуючи значення $\{x_k^0\}$, повторюємо описану процедуру по відношенню до $\{y_k\}$ і знаходимо $\{y_k^0\}$, виходячи з критерію $i(y_1^0, y_2^0) = \min_{y_1, y_2} i(y_1, y_2)$

ВИСНОВКИ

Зроблені у нашому розгляді обмеження та припущення не є принциповими і не звужують область застосування наведеної методик. Розроблену модель можна застосовувати до системи з довільною кількістю об'єктів при різних розподілах обсягів інформації та різній вразливості об'єктів.

Її обґрунтуванням може бути те, що вона дає якісно схожі, а при певному виборі параметрів — повністю співпадаючі результати з найбільш відомою і широко вживаною моделлю ГЛ, яка знайшла своє емпіричне підтвердження [6].

Окреслимо можливі напрями розвитку методики.

- Встановлення зв'язку між залежностями $f_k(x, y)$ і характеристиками об'єктів — як фізичних, так і електронних. На цій основі проводиться уточнення залежностей $f_k(x, y), q_k(x, y)$.

- Розробка методики розв'язку багатопказникової екстремальної задачі з використанням цільової функції, в яку входять декілька показників (наприклад, кількість вилученої інформації i та кількість ресурсів захисту y з певними ваговими коефіцієнтами).

- Розробка універсальної програми динамічного управління ресурсами в багаторубіжних системах в умовах комплексного протистояння, коли частина ресурсів кожної сторони витрачається на захист власної інформації, а інша частина — на здобуття інформації суперника з врахуванням можливості попереднього проведення розвідки.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Gordon L.A., Loeb M.P.* The economics of information security investment // ACM Transactions on information and system security, Nov. — 2002. — 5, № 4. — P. 438–457.
2. *Matsuura K.* Productivity space of information security in an extension of the Gordon-Loeb's investment model // The 7-th workshop on the economics of information security, Hanover, USA, June 25–28. — 2008. — <http://weis2008.econinfosec.org/papers/Matsuura.pdf>.
3. *Huang C.D., Hu Q., Behara R.S.* Economics of information security investment in the case of simultaneous attacks // Proceeding of the 5-th workshop on the economics of information security, Cambridge, England, June 26–28. — 2006. — P. 1–33.
4. *Левченко Є.Г., Рабчун А.О.* Оптимізаційні задачі менеджменту інформаційної безпеки // НТЖ «Сучасний захист інформації». — 2010. — № 1. — С. 16–23.
5. *Левченко Є.Г.* Оптимізація розподілу ресурсів між об'єктами захисту інформації. — К.: НТЖ «Захист інформації». — 2007. — № 1. — С. 34–38.

Надійшла 14.10.2010

МОДИФИКАЦИИ КРИТЕРИЕВ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛЕЗНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Е.В. СОБОЛЕВА

В качестве критериев обобщенной полезности для задач многофакторной оптимизации предлагаются экспоненциальная и энтропийная модели, а также модификации (путем введения дополнительных слагаемых с обратными степенями) известных смешанных моделей (аддитивно-мультипликативной и в виде полинома Колмогорова-Габора). Приведены статистические результаты исследования точности и сложности процедур компараторной параметрической идентификации различных моделей обобщенных критериев.

ВВЕДЕНИЕ

Чаще всего процесс принятия решений осуществляется в условиях многокритериальности. Прямой задачей для систем поддержки принятия решений является *синтез* эффективных схем принятия решений на основании многокритериального экспертного оценивания альтернатив выбора. Большинство исследований посвящено тем или иным аспектам решения данной задачи: выбору функций нормирования частных критериев, методам их параметрической идентификации, методикам получения экспертных оценок важности частных критериев [1, 2], исследованию эффективности применения различных структур критериев обобщенной полезности (КОП) [1, 3].

При решении задачи синтеза может возникнуть необходимость решения обратной задачи [4] — *анализа* схем принятия решений, реализованных экспертом. Такая многоуровневая постановка задач востребована при проведении маркетинговых исследований: анализ схем принятия решений на уровне спроса предоставляет больше информации для синтеза схем принятия решений на уровне предложения. Задача анализа схем принятия решений актуальна также при проектировании систем искусственного интеллекта. Методам параметрической идентификации схем принятия решений посвящен ряд работ [5–7]. Вопрос статистического экспериментального исследования эффективности применения различных структур обобщенных критериев, которое может быть осуществлено с использованием математической постановки задачи их параметрической идентификации, в литературе освещен недостаточно.

Объект данного исследования — процесс принятия решения на множестве альтернатив, характеризующихся множеством частных критериев, осуществляемый путем сведения последних в единый обобщенный критерий.

Предмет исследования — эффективность идентификации схем принятия решений различными моделями обобщенных критериев.

Цель работы — проанализировать ограниченности областей применения известных структур КОП; предложить новые более универсальные модели, имеющие меньшее число параметров; изложить результаты экспериментального исследования эффективности известных и предложенных моделей обобщенных критериев для идентификации схем принятия решений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Экспериментальное исследование эффективности (Э) использования различных моделей КОП (P) осуществимо посредством решения задач (z) структурно-параметрической идентификации ситуаций принятия решений.

$$P_i \xrightarrow[z_{j=1..1000}: K(X_j, R_j) \rightarrow \min_{P, \Lambda}]{} \mathcal{E}_i,$$

где K — критерий идентификации; $X_j = \{x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}\}_j$ — множество альтернатив выбора j -й ситуации принятия решения, представленных набором нормированных значений четырех частных критериев (генерируются случайным образом); R_j — принятое решение, представленное в виде бинарного отношения эквивалентности альтернатив: $R_j = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)\}_j$ (задается на области Парето); $\Lambda = \{\lambda_{l=1..m}, d\lambda\}$ — множество параметров КОП, состоящее из множества весовых коэффициентов частных критериев и множества дополнительных параметров.

В нашем случае, идентификация ситуации принятия решения осуществляется путем перебора всего множества структур обобщенных критериев, и посредством параметрической оптимизации КОП, реализованной в рамках подхода «компараторной идентификации» [4]. В рамках данного подхода, из отношения эквивалентности, используя функционал обобщенного критерия, получаем систему уравнений, которая решается относительно вектора параметров совместно с условиями нормирования.

$$P(\Lambda, x_1) - P(\Lambda, x_2) = 0,$$

$$P(\Lambda, x_3) - P(\Lambda, x_4) = 0,$$

$$P(\Lambda, x_5) - P(\Lambda, x_6) = 0,$$

$$\sum_l \lambda_l = 1, \lambda_l \geq 0. \quad (1)$$

В общем случае система (1) несовместна и не имеет единственного точного решения. В качестве решения, учитывающего отклонения от всего множества ограничений, использован [5] $\Lambda^o = \arg \min \sum_{v=1}^4 |F_v(\Lambda) - b_v|$, где

$F(\Lambda)$ — функционал-вектор левых частей равенств системы (1); $b = \{0, 0, 0, 1\}$ — вектор правых частей.

Поскольку задача параметрической оптимизации в данной постановке не может быть сведена к задаче линейного программирования для всех структур КОП, то как один из наиболее эффективных для решения такого рода задач, использован метод, основанный на идее покоординатной оптимизации. Особенность применения метода в данном приложении [7] заключается в том, что в качестве координат принимаются соотношения пар коэффициентов (параметров КОП), что позволяет обойтись без пересчетов с целью выполнения нормирующего равенства.

Принятые в работе показатели эффективности (Э) использования различных моделей КОП: максимальное и среднее значения критерия идентификации; максимальная и средняя относительные погрешности ($\delta K = |K^o - \tilde{K}^o| / \tilde{K}^o$, где K^o и \tilde{K}^o — минимальные значения критерия, полученные с помощью текущей и наилучшей в данном случае структур КОП); среднее время решения задачи ($t_{\text{сред}}$) параметрической оптимизации; количество идентифицируемых ситуаций выбора, когда данная структура КОП оказалась лучшей (W).

АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ИЗВЕСТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ КРИТЕРИЕВ

Задача идентификации ситуации многокритериального выбора может быть интерпретирована как задача поиска функции отображения пространства частных критериев на некоторую поверхность обобщенного критерия строго в соответствии с упорядочением точек-альтернатив выбора, установленным принятым решением. Анализ семейства поверхностей, соответствующих различным структурам КОП, позволяет выявить принципиальное различие областей их применения в дополнение к известным достоинствам и недостаткам [1].

В качестве обобщенных многофакторных оценок альтернатив выбора используются аддитивные, мультипликативные [1] и смешанные функции, включающие в себя аддитивные и мультипликативные составляющие:

- в виде суммы аддитивной и мультипликативной функций [3]:

$$P(x) = a \sum_i \lambda_i \xi_i + (1-a) \prod_i \xi_i^{\lambda_i}, \quad (2)$$

где a — дополнительный параметр ($0 \leq a \leq 1$);

- построенная на основе полинома Колмогорова-Габор (3), объединяющая аддитивные и мультипликативные члены в виде произведения пар (при необходимости, троек и т.д.) нормализованных характеристик альтернатив [4]:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m \lambda_{ij} \xi_i \xi_j + \dots \quad (3)$$

С целью анализа моделей были исследованы поверхности, образуемые функциями обобщенной полезности в пространстве двух частных критериев, а также линии уровня таких поверхностей (линии «эквивалентности»)

(рис. 1). Значения весовых коэффициентов на рис. 1: $\lambda_1 = 0,8$ и $\lambda_2 = 0,2$ для аддитивной, мультипликативной моделей и аддитивно-мультипликативной (АМ) модели (2), $a = 1/2$; для модели (3) в виде полинома Колмогорова-Габора (ПКГ) второй степени были взяты равные значения коэффициентов $\lambda_i, \lambda_{ij} = 1/5$.

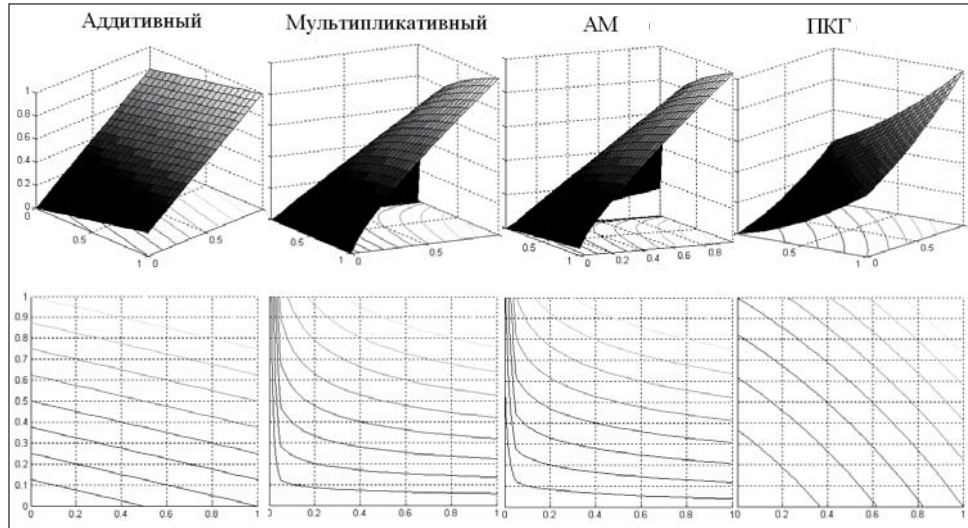


Рис. 1. Известные обобщенные критерии

Известные смешанные модели обобщенных критериев принципиально отличаются друг от друга классом идентифицируемых ситуаций выбора (рис. 2).

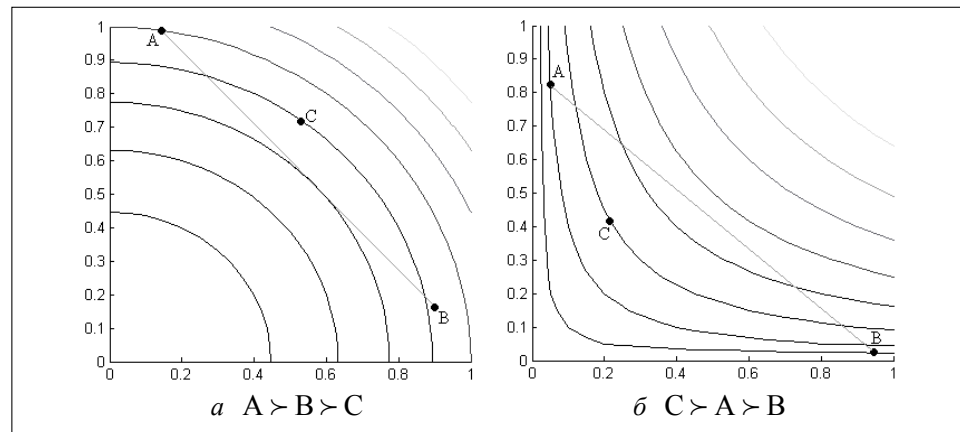


Рис. 2. Варианты ситуаций выбора в пространстве двух частных критериев, где нанесены линии уровня обобщенного критерия в виде ПКГ (а), нанесены линии уровня мультипликативного обобщенного критерия (б)

В случае, когда менее предпочтительный вариант находится в пространстве частных критериев дальше от начала координат, чем гиперплоскость, проходящая через более предпочтительные (рис. 2, а), то ситуация выбора может быть идентифицирована моделью в виде полинома Колмогорова-Габора (причем, исключительную роль в этом играют члены со степенью больше единицы). А в случае, когда более предпочтительный (по мнению

эксперта) вариант находится в пространстве частных критериев ближе к началу координат, чем гиперплоскость, проходящая через менее предпочтительные (рис. 2, б), то ситуация выбора может быть идентифицирована исключительно мультипликативной составляющей моделей обобщенной полезности. При этом показатели степени для частных критериев как параметры мультипликативного обобщенного критерия, смещают зону его чувствительности либо ближе к началу координат (когда показатели степени меньше 1, как в обобщенном критерии (2)), либо дальше от начала координат (когда показатели степени больше 1, как в (3)).

Таким образом, на адекватность модели критерия обобщенной полезности влияет топологическое распределение анализируемых альтернатив в пространстве частных критериев — выпуклость либо вогнутость области Парето относительно каждой пары координат. Ситуация выбора в случае выпуклости либо вогнутости области Парето может быть идентифицирована несовпадающими классами обобщенных критериев. Актуальным является поиск моделей критериев обобщенной полезности, имеющих минимальное количество параметров, и в то же время позволяющих охватить более широкий спектр задач.

ПРЕДЛАГАЕМЫЕ МОДЕЛИ КРИТЕРИЕВ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

С целью минимизации числа параметров, предлагаются две нелинейные модели КОП, не имеющие дополнительных параметров: экспоненциальная и энтропийная.

Сложная экспоненциальная функция использовалась в качестве функции полезности частных критериев [8]. Применяв простую экспоненциальную функцию для построения критерия обобщенной полезности, получаем следующую модель:

$$P(x) = \sum_i (1 - e^{-\lambda'_i \xi_i}), \quad (4)$$

где $\lambda'_i = 1 - \lambda_i$ — весовые коэффициенты частных критериев, $\sum_i \lambda'_i = 1$.

Функция обобщенной полезности, построенная по принципу информационной энтропии (4), отражает смысловое наполнение понятия «полезность» как информационной категории:

$$P(x) = \sum_i \lambda_i \cdot \xi_i^{\lambda_i}. \quad (5)$$

Предложенные модели обобщенных критериев (4)–(5), в отличие от модели (1), не имеют дополнительных параметров, при этом гиперповерхности, описываемые ими в пространстве частных критериев, сходны, следовательно, пересекается и класс задач, для которых модели (1), (3)–(4) адекватны.

С целью охвата более широкого круга задач, функцию (2) аддитивно-мультипликативной (АМ) обобщенной полезности предлагается дополнить второй мультипликативной составляющей с обратными степенями, т.е.

большими единицы (6), а модель в виде ПКГ (3) дополнить полиномиальными членами с дробными степенями того же порядка:

$$P(x) = a \sum_i \lambda_i \xi_i + b \prod_i \xi_i^{\lambda_i} + (1 - a - b) \prod_i \xi_i^{1/\lambda_i}, \quad (6)$$

где b — дополнительный параметр ($b \geq 0$, $0 \leq a + b \leq 1$) и $\lambda_i \neq 0$.

В качестве модификации (в направлении универсализации и минимизации числа параметров) модели обобщенного критерия, построенного в виде полинома Колмогорова-Габова (2), может быть взят следующий вариант, в котором добавлены члены с дробными степенями и отсутствуют произведения несовпадающих частных критериев:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i + \sum_{j=2}^u \sum_{i=1}^m (\lambda_{i+m(2j-3)} \xi_i^j + \lambda_{i+m(2j-2)} \xi_i^{1/j}), \quad (7)$$

где u — определяет сложность модели (степень базового ПКГ).

Графическое представление поверхностей предложенных моделей обобщенной полезности представлены на рис. 3, где изображена обобщенная полезность для двух частных критериев ($m = 2$). Значения весовых коэффициентов на рис. 3: $\lambda_1 = 0,8$ и $\lambda_2 = 0,2$ для моделей (3–5); $a, b = 1/3$ для модели (5); $u = 2$, $\lambda_j = 1/6$, $j = \overline{1,6}$ для модели (7).

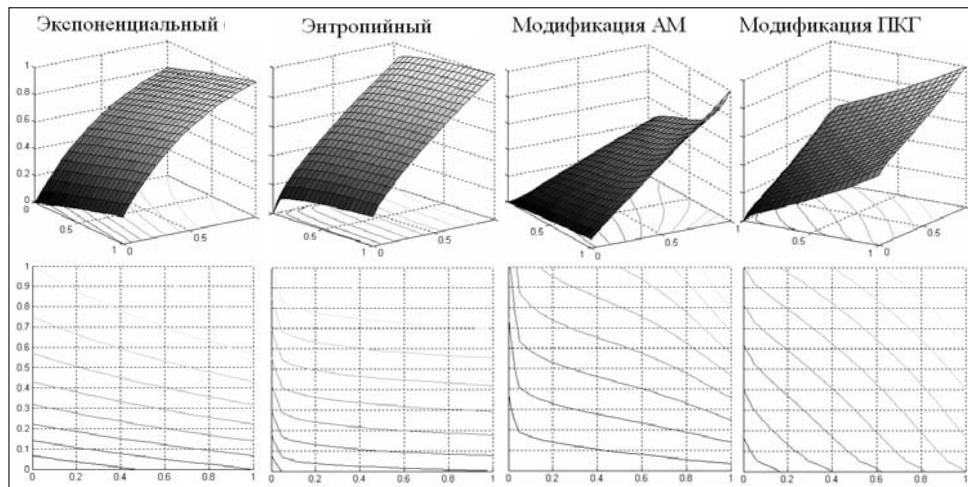


Рис. 3. Предлагаемые КОП

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Исследование эффективности использования различных моделей КОП осуществлялось посредством специально разработанного программного модуля в среде пакета математических программ. В каждом из 1000 проведенных экспериментов на идентичных исходных данных для различных моделей обобщенных критериев осуществлялась их параметрическая оптимизация (решение системы (1)) методом, основанным на идее покоординатного спуска. Сложность моделей в виде ПКГ (3), (7) была ограничена второй степенью ($u = 2$).

Показатели эффективности использования различных структур КОП для решения задачи идентификации схем принятия решений приведены в таблице. Также в таблице указана мощность вектора оптимизируемых параметров, выраженная через число частных критериев (m) (и через значение параметра сложности для моделей (3), (7)).

Т а б л и ц а . Результаты экспериментов

Модель	$Card(\Lambda)$	K_{\max}	$K_{\text{сред}}$	δK_{\max}	$\delta K_{\text{сред}}$	$t_{\text{сред}}, c$	W
Аддитивная	m	0,85	0,25	0,50	0,13	0,0050	28
Мультипликативная	m	1,83	0,51	1,46	0,39	0,0059	2
АМ (2)	$m+1$	1,00	0,28	0,73	0,17	0,0076	21
Модель на основе ПКГ(3)	$C_{m+u}^u - 1$	0,82	0,26	0,47	0,14	0,0189	25
Экспоненциальная (4)	m	0,76	0,21	0,43	0,10	0,0049	53
Энтропийная (5)	m	0,46	0,13	0,27	0,02	0,0045	657
Модификация АМ (6)	$m+2$	0,64	0,19	0,44	0,07	0,0162	161
Модификация ПКГ (7)	$m(2u - 1)$	0,78	0,23	0,46	0,12	0,0140	53

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Впервые предложенные экспоненциальная и энтропийная модели КОП имеют минимальное количество параметров, поэтому задача их параметрической идентификации имеет такую же временную сложность, как и для простых моделей (аддитивной и мультипликативной). Однако, за счет нелинейности они занимают промежуточную и более востребованную нишу относительно класса задач, и как результат конкурируют по точности с простейшими моделями.

Предложенные модификации известных моделей обобщенных критериев значительно увеличивают точность базовых моделей, при этом количество параметров увеличено на единицу для аддитивно-мультипликативной модели (соответственно, растет временная сложность) и сокращено для модели в виде полинома Колмогорова-Габора (временная сложность уменьшается). Особенностью предложенной модификации аддитивно-мультипликативной модели обобщенного критерия (6) является невозможность равенства нулю весовых коэффициентов полезности частных критериев. В работе был исследован упрощенный вариант модификации модели в виде полинома Колмогорова-Габора (7), который при необходимости может быть дополнен произведениями несовпадающих частных критериев.

По результатам исследований наилучшей моделью обобщенного критерия является энтропийная модель (5). Эта модель превосходит исследованные известные модели и предложенные в данной работе модификации обобщенных критериев по всем анализируемым показателям. По временной сложности параметрической идентификации с ней сравнима экспоненциальная модель. Достоинством модификации модели в виде ПКГ (7), как и базовой модели [4], является возможность приведения ее к аддитивной форме большей размерности и перехода к задаче линейного программиро-

вания. Модификация аддитивно-мультипликативной модели (6) уступает предложенным моделям по всем показателям, однако повышает точность базовой модели.

ВЫВОДЫ

Для задачи идентификации схем принятия решений обоснована ограниченность областей эффективного применения известных структур критериев обобщенной полезности на множестве упорядочиваний альтернатив выбора (решения) в пространстве значений частных критериев; предложены модификации обобщенных критериев, значительно увеличивающие точность идентификации; произведено экспериментальное исследование и сравнительный анализ эффективности использования известных и предложенных структур обобщенных критериев.

Дальнейшие исследования могут быть посвящены решению более общей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брахман Т.Р.* Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. — М.: Радио и связь, 1984. — 287 с.
2. *Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А.* Системный анализ в управлении. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 368 с.
3. *Петров К.Э.* Мультипликативно-аддитивная функция оценки полезности // Радиоэлектроника и информатика. — 2000. — № 4. — С. 35–36.
4. *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. — К.: Наук. думка, 2002. — 164 с.
5. *Бескорвайный В.В., Трофименко И.В.* Параметрическая идентификация мультипликативных моделей для многофакторного выбора решений // 36. наук. пр. Харк. ун-ту повітряних сил. — Х.: ХУПС, 2005. — Вып. 5(5). — С. 74–78.
6. *Петров Э.Г., Булавин Д.А., Петров К.Э.* Решение задачи структурно-параметрической идентификации модели индивидуального многофакторного оценивания методом группового учета аргументов // АСУ и приборы автоматизации. 2004. — Вып. 129. — С. 4–13.
7. *Бескорвайный В.В., Петров Э.Г., Трофименко И.В.* Метод решения общей задачи компараторной идентификации моделей многофакторного оценивания // Бионика интеллекта. — 2006. — Вып. 2 (65). — С. 3–7.
8. *Harrington E.C.* The desirability function // Industrial Quality Control. — 1965. — № 21. — P. 494–498.

Поступила 07.06.2010

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ У ВЕЛИКИХ НАВЧАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

В.В. ЯСІНСЬКИЙ, А.О. БОЛДАК

На основі узагальнення результатів інтелектуального опрацювання даних щосеместрового комплексного моніторингу якості підготовки фахівців у НТУУ «КПІ» та моніторингу якості знань слухачів системи доуніверситетської підготовки НТУУ «КПІ», виявлено та досліджено явище самоорганізації залишкових навчальних знань як складного, нелінійного, динамічного процесу. Виявлено й узагальнено його закономірності для короткострокових та довгострокових залишкових знань та встановлено послідовність стадій формування структури цих знань.

ВСТУП

Особливе місце в сучасних системних педагогічних дослідженнях посідають так звані «залишкові навчальні знання» (ЗНЗ), які залишаються в пам'яті випускників через достатньо великі проміжки часу після закінчення навчання у ВНЗ, але роль яких є визначальною в становленні їх як фахівців [1].

Аналіз науково-педагогічної літератури показав, що більшість питань пов'язаних із феноменом ЗНЗ поки що не знайшли необхідного висвітлення та вивчення. Усі відомі педагогічні дослідження обмежуються, як правило, вивченням впливу певних факторів на досягнення найближчого результату — успішного проходження студентами певного виду педагогічного контролю. Достатньо ґрунтовно досліджено лише традиційні види педагогічного контролю залежно від часу його проведення — поточний, тематичний, рубіжний, підсумковий та заключний. Немає чіткого трактування ЗНЗ і в атестаційних та акредитаційних службах. Так, наприклад, відсутні стандартизовані педагогічні контрольні матеріали перевірки якості ЗНЗ навіть із таких базових предметів як математика та фізика, не кажучи вже про блок загальнопрофесійних та профілюючих дисциплін. Нерідко під цим контролем розуміють лише окремі види та форми традиційного контролю. Виникає протиріччя між необхідністю діагностики якості знань студентів під час впровадження нових освітніх стандартів і відсутністю ефективних технологій їх діагностування.

Фактично, ЗНЗ є кінцевою метою діяльності будь-якої навчальної системи. У роботі навчальна система розглядається як велика система [2], в якій формування знань відбувається в результаті інформаційної взаємодії

її структурно взаємозв'язаних і функціонально взаємозалежних компонентів: студентського, соціального, викладацького середовищ та підсистеми моніторингу знань, кожна з яких може розглядатись як самостійна складна система. Складність такої системи зумовлена наявністю багатьох внутрішніх та зовнішніх зворотних зв'язків, а також нелінійністю і слабкою формалізованістю процесів, пов'язаних із формуванням, накопиченням та зберіганням знань, особливо тоді, коли йдеться про великі групи студентів і починає проявлятися синергетичний ефект їх взаємодії.

Мета роботи — виявлення властивостей системи «колективних» залишкових знань, інваріантних до особливостей окремих індивідуумів, навчальних дисциплін та тестів. Дослідження базується на результатах інтелектуальної обробки інформації, яку отримано в результаті багаторічного комплексного моніторингу якості підготовки фахівців у НТУУ «КПІ» за період 2005–2011 р., яким було охоплено близько 50 тис. студентів та більше тисячі дисциплін, а також моніторингу якості залишкових знань слухачів системи доуніверситетської підготовки НТУУ «КПІ», якою за період 1991–2011 р. було охоплено практично всі регіони України та більше 100 тис. слухачів [3].

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ

У роботі [4] у межах синергетичного підходу запропоновано та досліджено математичну модель еволюції розподілу знань у великій навчальній системі. У цій роботі показано, що розподіл пріоритетів відтворення інформаційних квантів навчального потоку, який визначає структуру ЗНЗ, через деякий достатньо великий проміжок часу набуває сталості. Тобто, існує така зв'язна компактна множина структур ЗНЗ (глобальний атрактор у фазовому просторі структур ЗНЗ), до якої збігаються всі фазові еволюційні траєкторії для будь-якої початкової структури.

Експериментальний підхід до визначення ознак глобального атрактора, про який йдеться, полягає в наступному.

Нехай для деякої динамічної системи $S(t)$ існує її відображення в набір характеристик:

$$S(t) \rightarrow \langle \chi_1(t), \chi_2(t), \dots, \chi_n(t) \rangle.$$

Тоді, якщо серед характеристик $\chi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ знайдеться хоча б одна, така, що з часом набуває постійного значення, то це буде свідчити про наявність глобального атрактора. Тобто:

$$\exists i = \overline{1, n} \quad \exists t_i^{\text{кп}} > 0 \quad \forall t > t_i^{\text{кп}} : \chi_i(t) = \text{const} \Rightarrow S(t) \in A,$$

де $t_i^{\text{кп}}$ — оцінка моменту часу переходу системи $S(t)$ в атрактор A за характеристикою $\chi_i(t)$.

Якщо знайдеться ансамбль таких характеристик, то оцінка $t^{\text{кп}}$ може бути уточнена:

$$\exists J \subseteq \overline{1, n} \quad \forall j \in J \quad \exists t_j^{\text{кп}} > 0 \quad \forall t > t_j^{\text{кп}} : \chi_j(t) = \text{const};$$

$$\forall t > t^{\text{кп}} = \max_{j \in J} (t_j^{\text{кп}}) \quad \forall j \in J : \chi_j(t) = \text{const} \Rightarrow S(t) \in A.$$

КІЛЬКІСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ

Кількісна оцінка ЗНЗ здійснюється системою моніторингу навчальних знань і, насамперед, має бути всебічною та об'єктивною.

Взаємодія між компонентами великої навчальної системи має інформаційний характер. Це означає, що система навчальних знань, що складається з інформаційно-семантичних і комутаційних елементів навчального матеріалу, передається від викладацького середовища студентам у вигляді впорядкованого інформаційного навчального потоку, який є матеріальним носієм цих навчальних знань. Під час моніторингу система ЗНЗ, що сформована та збережена в студентському середовищі, також відтворюється у вигляді інформаційного потоку. Кількісна оцінка розбіжності цих інформаційних потоків як матеріальних носіїв системи навчальних знань є характеристикою ЗНЗ та має об'єктивний характер.

Відповідно до зазначеного, з логічної структури матеріалу навчальних дисциплін $d_k, k = \overline{1, l}$ було виділено послідовності викладання найдрібніших одиниць навчального матеріалу (квантів $\langle h_{k,i} \rangle, i = \overline{1, n_k}$, де n_k відповідає кількості квантів навчального матеріалу дисципліни d_k), для кожного з яких було отримано оцінку ступеня його відтворення $\mu_{k,i,j} = \mu_j(h_{k,i}), \mu_{k,i,j} \in [0, 1]$ особою $\alpha_j, j = \overline{1, m}$, що проходила тестування. Індивідуальний інформаційний слід навчального процесу, визначений як послідовність оцінок $T_{k,j} = \langle \mu_{k,i,j} \rangle, i = \overline{1, n_k}$, відображає структуру залишкових знань із навчальної дисципліни d_k індивідуума α_j .

Результати моніторингу, розділені за окремими дисциплінами (k — фіксовано) та групами студентів, можна подати у вигляді традиційної для методів аналітичного опрацювання даних моделі «об'єкт–властивість» [5]:

$$X = (x_{i,j})_{i=1, j=1}^{n,m}, \quad (1)$$

в якій стовпці X^j — індивідуальні інформаційні сліди $T_{k,j}$ для окремих індивідуумів, а рядки X_i — набір значень $\mu_{k,i,j}$ для кванта $h_{k,i}$.

Узгодження індивідуальних даних моніторингу залишкових знань з різних дисциплін здійснюється завдяки індивідуальному нормуванню даних моделі (1):

$$\bar{x}_{i,j} = \frac{x_{i,j} - \min_{i=1, n} (x_{i,j})}{\max_{i=1, n} (x_{i,j}) - \min_{i=1, n} (x_{i,j})},$$

де $\bar{x}_{i,j}$ — нормоване значення для $x_{i,j}$ з (1). Таке нормування, забезпечує вирівнювання масштабів як за рівнем, так і за довжиною індивідуальних інформаційних слідів [6].

Вплив випадкової складової на результати тестування компенсовано завдяки усередненню індивідуальних інформаційних слідів:

$$\bar{T}_k = \langle \bar{\mu}_{k,i} \rangle; \bar{\mu}_{k,i} = \frac{\sum_{l=1}^m \mu_{k,i,l}}{m}, \quad i = \overline{1, n_k}. \quad (2)$$

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ «КОЛЕКТИВНИХ» ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ

«Колективні» інформаційні сліди \bar{T}_k є кількісними оцінками теоретичної моделі розподілу пріоритетів відтворення інформаційних квантів навчального потоку. Мета експериментальних досліджень полягає у виявленні таких ознак геометричної форми цих слідів, які через деякий достатньо великий проміжок часу набувають сталості.

Дослідження характеристик геометричної форми узагальненого інформаційного сліду подано у вигляді кумуляти:

$$C_k = \langle c_{k,i} \rangle; c_{k,i} = \sum_{l=1}^i \bar{\mu}_{k,l}, \quad i = \overline{1, n_k}, \quad (3)$$

пов'язане з виявленням такого розбиття:

$$\pi(\bar{T}_k) = \langle T_{k,1}, T_{k,2}, \dots, T_{k,r} \rangle, \quad T_{k,l} \subseteq \bar{T}_k, \quad l = \overline{1, r} \quad \forall l_1, l_2 = \overline{1, r} \quad l_1 < l_2 \Rightarrow h_{k,l_1} < h_{k,l_2},$$

для якого виконується умова $\sum_{\mu_{k,p} \in T_{k,l}} (\bar{\mu}_{k,p} - M(\bar{\mu}_{k,p}))^2 \rightarrow \min$, де $M(\bar{\mu}_{k,p})$ —

математичне очікування оцінки $\bar{\mu}_{k,p}$ у сегменті $T_{k,l}$ усередненого сліду (2).

Наведена вище умова відповідає виділенню неперервних проміжків оцінок $\bar{\mu}_{k,p}$, які утворюють найкращу кусочно-постійну апроксимацію усередненого сліду (2), або найкращу кусочно-лінійну апроксимацію кумуляти (3). Запропоновано ітераційний спосіб визначення такої апроксимації для заданого числа інтервалів r , який формує границі інтервалів $t_{j,j+1}^i$ відповідно до виразу: $t_{j,j+1}^i = \arg \min_{\bar{\mu} \in T_j^{i-1} \cup T_{j+1}^{i-1}} (K(T_j^{i-1} \cup T_{j+1}^{i-1}))$, де i відповідає кроку

алгоритму, а $K(T_j^{i-1} \cup T_{j+1}^{i-1})$ є критерієм відхилення апроксимуючого лінійного сегмента від кумуляти.

У результаті дослідження гістограми розподілу найкращої кількості інтервалів розбиття, яка відповідає точці перегину залежності $K(r)$ (рис.1, а), для всієї вибірки вихідних даних (для окремих груп студентів та окремих навчальних дисциплін) (рис.1, б), встановлено, що структуру усередненого інформаційного сліду визначає розбиття на 5 сегментів, які якісно характеризують його геометричну форму.

Тобто, структуру усередненого інформаційного сліду можна подати як п'ятірку $S_k = S(\bar{T}_k) = \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \rangle$, в якій $s_i = \sum_{\bar{\mu} \in T_i} \bar{\mu} / |T_i|$, $i = \overline{1, 5}$.

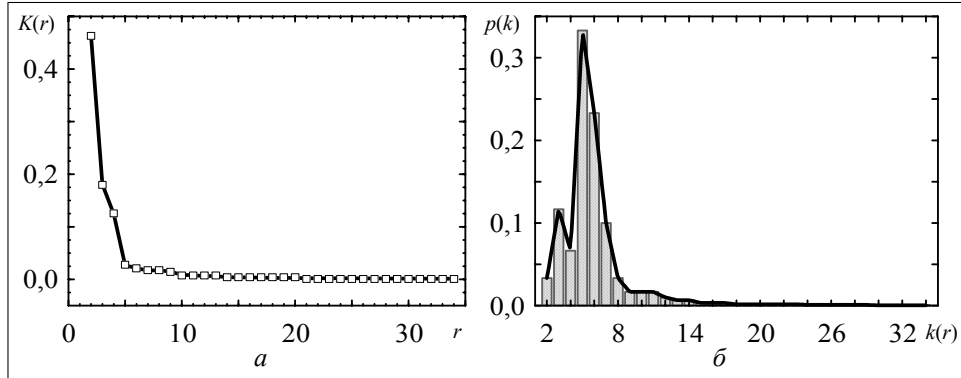


Рис. 1. Залежність похибки апроксимації від кількості інтервалів розбиття: *a* — типова залежність $K(r)$; *b* — гістограма розподілу найкращої кількості інтервалів розбиття для всієї вибірки

У результаті досліджень встановлено, що для кожного з інтервалів T_k , $k = \overline{1,5}$, на яких визначена структура, спостерігається її рекурентне повторення на макрорівні. Також для впорядкованої за обсягом залишкових знань послідовності s_k , $k = \overline{1,5}$ має місце співвідношення: $\sum_{k=1}^3 V_k \approx 67\%$.

У випадку, коли структури S_k розглядаються як вектори з нормою $\|\vec{S}_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (s_{k,i})^2}$, близькість структур S_k та S_l можна оцінити як відстань $d(S_k, S_l) = \|\vec{S}_k - \vec{S}_l\|$, де $\vec{S}_k = \vec{S}_k / \|\vec{S}_k\|$, $k = \overline{1,5}$ — нормовані структури, а за ступень структурованості інформаційного сліду прийняти величину $L(S) = d(S_0, S)$, де $S_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$ є структурою з найслабкішим проявом геометричної форми.

У результаті кластерного аналізу структур методом k -середніх [7] (рис. 2) виділено типові структури короткострокових та довгострокових залишкових знань.

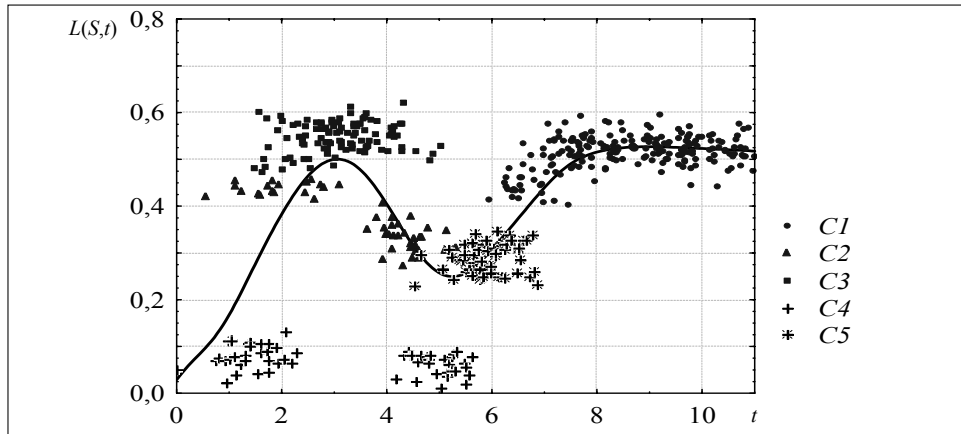


Рис. 2. Залежність структури (5 кластерів) та ступеня структурованості усередненого сліду від часу

Таким чином, на рис. 2 можна спостерігати дві стійкі структури: перша з них, яка відповідає інтервалу часу від 2 до 4 відліку, є проміжною, а друга (починаючи з 7 відліку), відповідно до прийнятого підходу, відповідає глобальному атрактору в фазовому просторі структур ЗНЗ. Це дає підстави для визначення послідовності стадій $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$, які відповідають процесу формування структури ЗНЗ (рис. 3).

Як видно з рис. 3, стадії T_2 та T_5 відповідають найбільшій виразності структури, на стадії T_3 та T_4 відбуваються процеси реструктуризації залишкових знань.

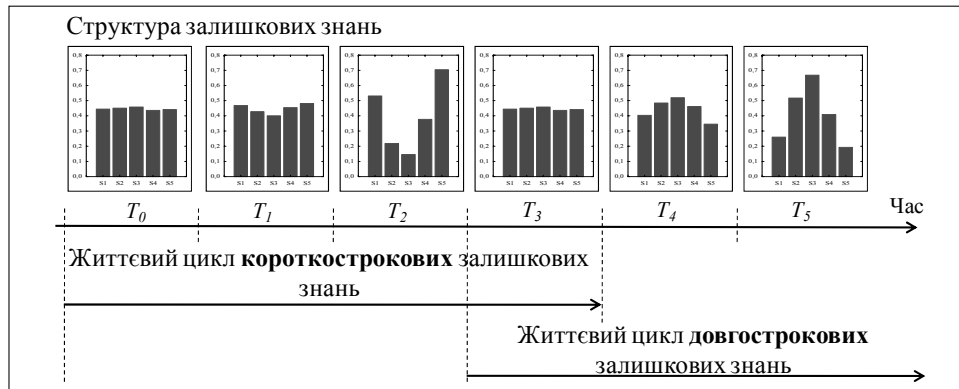


Рис. 3. Стадії формування структури залишкових знань

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МІЦНОСТІ ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ

«Коллективні» інформаційні сліди навчального потоку можна використати для кількісного оцінювання обсягу та міцності ЗНЗ.

У результаті дослідження динаміки обсягу залишкових знань

$$V_k = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} \bar{\mu}_{k,i}}{n_k},$$

де V_k — відносний обсяг залишкових знань, який приймає значення з діапазону $[0, 1]$; $\bar{\mu}_{k,i}$ — усереднена міра відтворення інформаційного кванта $h_{k,i}$ з усередненого сліду \bar{T}_k ; n_k — кількість квантів у сліді \bar{T}_k , встановлено, що класична модель «кривої забування» Еббингауза [8]:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\alpha}, \quad (4)$$

де V_0 — відповідає засвоєному обсягу знань, а стала α характеризує повільність процесів забування та залежить від багатьох факторів, добре описує динаміку обсягу залишкових знань лише на початкових стадіях.

Параметри моделі (4), оцінені методом найменших квадратів на вибірці з 140 узагальнених слідів (рис. 4), які відповідають проміжку часу від нульового до четвертого відліку, мають значення: $V_0 = 0,92$, $\alpha = -0,24$.

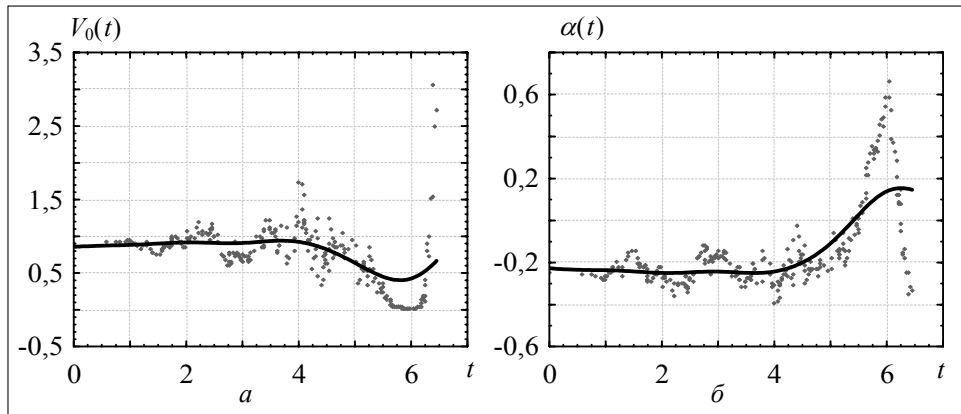


Рис. 4. Залежність параметрів моделі (7) від часу: а — залежність $V_0(t)$; б — залежність $\alpha(t)$

Виходячи з рис. 5, можна стверджувати, що на пізніх стадіях обсяг залишкових знань перевищує оцінку, яку дає крива (4), а також спостерігається періодичний затухаючий процес.

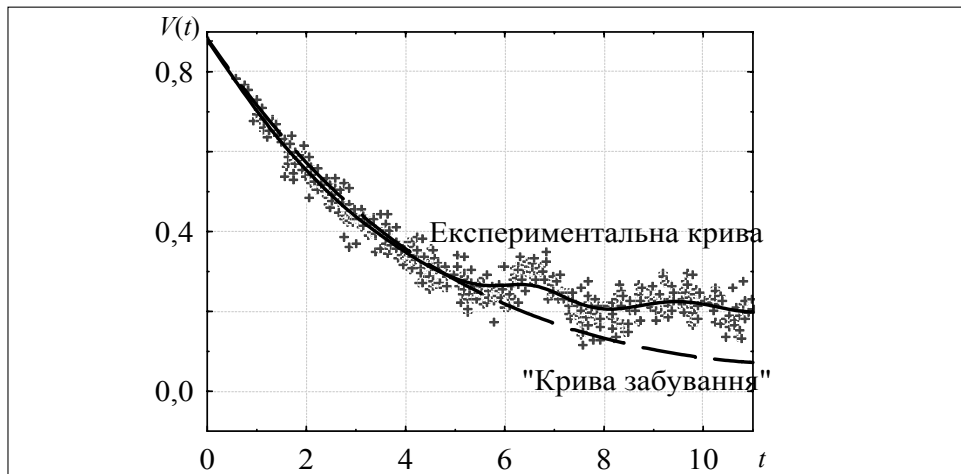


Рис. 5. Порівняння експериментальної кривої $V(t)$ та «кривої забування»

Встановлено, що на кожному з інтервалів T_k , $k = \overline{0,5}$ (рис. 3) швидкість спадання $V(t)$ є майже постійною та для міцності залишкових знань має місце таке співвідношення: $0 < \Delta_0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 < \Delta_5$, де Δ_k , $k = \overline{0,5}$ — оцінка $\frac{dV(t)}{dt}$ на інтервалі I_k , а для довжин інтервалів T , $k = \overline{0,5}$ справедливі співвідношення:

$$T_0 < T_1 < T_2; T_3 < T_4 < T_5; T_0 < T_2; T_1 < T_4; T_2 < T_5.$$

ВИСНОВКИ

Запропоновано підхід до кількісної оцінки системи залишкових знань, який ґрунтується на оцінках міри розбіжності вихідного інформаційного навчаль-

ного потоку та його «сліду» як матеріальних носіїв системи навчальних знань. У межах цього підходу запропоновано кількісну міру ступеня відтворення «найдрібнішої» інформаційної одиниці (кванта) вихідного навчального потоку та модель його «сліду», яка дозволяє експериментально досліджувати як рівень, так і структуру залишкових навчальних знань.

Виявлено ознаки проміжної та глобальної стійких структур, які інваріантні до особливостей окремих індивідуумів, навчальних дисциплін та тестів. Ці ознаки дозволяють якісно відрізнити короткострокові та довгострокові залишкові знання, а також визначити 6 стадій еволюції системи залишкових знань. Встановлено, що залежність обсягу залишкових знань від часу описується класичною «кривою забування» Еббінгауза лише для короткострокових залишкових знань. Для довгострокових знань оцінка їх обсягу згідно з цією моделлю є заниженою. Досліджена динаміка та встановлена експериментальним шляхом синхронність процесів дисипації рівня знань та формування їх структури дозволяє уточнити тривалість стадій еволюції системи залишкових знань.

Отримані результати дозволяють сформулювати нову педагогічну категорію «Залишкові навчальні знання», яка може ефективно використовуватися під час вирішення таких задач оптимізації процесу моніторингу якості навчального процесу, як розробка експрес-тестів для ідентифікації фаз еволюції та знаходження верхньої та нижньої меж рівня залишкових знань; розробка комплексних тестів для перевірки залишкових знань на різних фазах їх еволюції; розробка методик узгодження оцінок залишкових знань для різних фаз їх еволюції.

ЛІТЕРАТУРИ

1. Ясінський В.В. Системне моделювання процесів накопичення і дисипації знань // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 3. — С. 111–121.
2. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Системний аналіз. Проблеми, методологія, застосування. — К.: Наук. думка, 2011. — 726 с.
3. Ясінський В.В. Матеріали дванадцяти турів комплексного моніторингу якості підготовки фахівців в НТУУ «КПІ». — К.: Політехніка, 2011. — 216 с.
4. Ясінський В.В. Задача прогнозування і керування процесом еволюції знань у складних навчальних системах // Наук. вісті. — 2011. — № 6. — С. 79–83.
5. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справ. изд. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 471 с.
6. Згуровський М.З., Болдак А.А. Системное согласование данных разной природы в мультидисциплинарных исследованиях // Кибернетика и систем. анализ. — 2011. — 46, № 5. — С. 152–163.
7. Hartigan J.A., Wong M.A. A k-means clustering algorithm // Applied Statistics. — 1979. — № 28. — С. 100–108.
8. Schacter D. The seven sins of memory. — Boston: Houghton Mifflin, 2002. — 272 p.

Надійшла 01.03.2012

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ ПРОДУКЦИИ ПО СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С.С. ФЕДИН, Н.А. ЗУБРЕЦКАЯ, А.С. ГОНЧАРОВ

На основе формализации задачи пространственной экстраполяции в нейросетевом логическом базисе предложен подход к созданию нейросетевых моделей прогнозирования конкурентоспособности продукции различного целевого назначения. Разработана нейросетевая модель экспертной системы для сравнительной оценки и прогнозирования конкурентоспособности продукции по совокупности единичных показателей качества и цене. Практическая реализация модели осуществлена на примере холодильников бытового назначения.

ВВЕДЕНИЕ

Конкурентоспособность продукции оценивается по совокупности качественных и стоимостных показателей, которые с точки зрения потребителя являются существенными и обеспечивают удовлетворение конкретных потребностей [1]. Для прогнозирования конкурентоспособности продукции в большинстве случаев используют экспертные методы и параметрические критерии выбора альтернатив (цена, объем продаж, прибыль и т.д.) [2, 3].

Следует отметить, что применение классических экспертных методов характеризуется субъективностью получаемых оценок и не позволяет полностью разрешить проблему прогнозирования конкурентоспособности при значимом разбросе цен изделий-конкурентов. При этом качество изделий характеризуется совокупностью идентичных по составу единичных показателей, значения которых представлены в разных шкалах измерений.

Для определенного сегмента рынка, т.е. группы потребителей однотипных товаров [4], указанная проблема может быть формализована в виде задачи пространственной экстраполяции (прогнозирования) конкурентоспособности продукции по совокупности ее единичных показателей качества и цены. Такой подход основан на применении параметрических критериев выбора альтернатив, при этом конкурентоспособность представляется отображением взвешенной матрицы показателей качества продукции на вектор цены. Метод пространственной экстраполяции позволяет получать оценки значений векторного поля прогнозируемой цены по отдельным наблюдениям показателей качества продукции [5].

Решение задачи пространственной экстраполяции можно осуществить с использованием модели нейросетевой экспертной системы [6, 7], содержащей информацию о зависимости между входами (значениями показателей качества) и выходом (ценой продукции) в виде матрицы весовых коэффициентов.

Цель работы — разработка модели нейросетевой экспертной системы, предназначенной для прогнозирования конкурентоспособности продукции по цене и совокупности единичных показателей качества.

ОБЪЕКТ, ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объект исследования — прогнозирование конкурентоспособности продукции.

Предметом исследования является модель нейросетевой экспертной системы, предназначенная для прогнозирования конкурентоспособности на основе зависимости между совокупностью показателей качества и ценой холодильников бытового назначения.

При проведении исследования использованы методы пространственной экстраполяции, статистического анализа и нейросетевой обработки данных.

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу пространственной экстраполяции конкурентоспособности продукции по цене на примере холодильников бытового назначения фирм W и G (полное наименование фирм, условно названных W и G , не приводится по этическим соображениям). Пусть имеется конечное множество альтернатив — точек в пространстве ситуаций, в которых определены некоторые решения (в общем виде — численные векторы). Тогда задача экстраполяции заключается в том, чтобы оценить значение вектора решения для альтернативы, которая не содержится в указанном множестве. При этом решение необходимо получить, используя относительное положение такой точки-альтернативы среди точек, в которых решение известно.

Содержательную постановку задачи прогнозирования конкурентоспособности продукции, сформулируем следующим образом: какова была бы цена холодильников фирмы G , если бы при идентичных по составу показателей качества, значения которых представлены в разных измерительных шкалах, холодильники со значениями показателей качества фирмы G изготавливались бы фирмой W ?

Формализацию задачи прогнозирования конкурентоспособности продукции по цене Y в зависимости от совокупности показателей качества X_j , $j=1, \dots, m$ можно представить следующим образом. Пусть имеется множество объектов I_i , $i=1, \dots, n$:

$$I_i = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}.$$

Каждый объект I_i характеризуется множеством независимых входных переменных X_j , значения которых известны и на основании которых определяется значение зависимой выходной переменной (отклика) Y :

$$I_i = \{X_1, X_2, \dots, X_m, Y\}.$$

Значения каждой входной переменной X_j имеют свой физический смысл, свою размерность и могут быть представлены в различных шкалах

измерения: номинальной — N , порядковой — P , интервальной — I и относительной — R .

Если $\{X_j^{N,P,I,R}\}$ — множество единичных показателей качества некоторого объекта W , то $\{X_j^N\}$, $\{X_j^P\}$, $\{X_j^I\}$, $\{X_j^R\}$ — подмножества векторов значений номинальных, порядковых, интервальных и относительных независимых входных переменных, определяющих зависимую переменную Y_W :

$$I_W = \{X_j^{N,P,I,R}, Y_W\}.$$

Представим характеристики объекта I_W в виде отображения $X_j^{N,P,I,R} \Rightarrow Y_W$, которое можно использовать для получения прогнозной оценки Y_G объекта-конкурента G , при условии, что для объектов W и G подмножества $\{X_j^N\}$ и $\{X_j^P\}$ содержат идентичные категории, а коэффициенты вариации подмножеств $\{X_j^I\}$, $\{X_j^R\}$ имеют один и тот же порядок.

Для независимых входных переменных, представленных в разных измерительных шкалах, отображения вида $X_j^{N,P,I,R} \Rightarrow Y$ можно получить на основе нейросетевого моделирования. При этом, если выходная переменная Y представлена вектором значений на множестве действительных чисел, то имеет место решение задачи пространственной экстраполяции в нейросетевом логическом базисе [8].

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ НЕЙРОСЕТЕВОЙ ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ

Априорное изучение информации, выбор факторов и формирование исходной выборки

Для разработки модели нейросетевой экспертной системы сформирована выборка исходных данных о технических характеристиках (единичных показателях качества) холодильников фирм-производителей W и G . Показатели качества, принятые в качестве независимых входных переменных нейросетевой модели, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Показатели качества холодильников

Обозначения	Технические характеристики	Единицы измерения
X_1	Класс энергопотребления	А+, А, В
X_2	Мощность замораживания	кг/сут
X_3	Уровень шума	дБ
X_4	Общий объем	л
X_5	Объем холодильной камеры	л
X_6	Объем морозильной камеры	л
X_7	Наличие системы No Frost	«+», «-»
X_8	Наличие быстрой заморозки	«+», «-»
X_9	Наличие отделения глубокого охлаждения	«+», «-»

Исходная выборка (табл. 2) содержит данные о значениях показателей качества $X_1 - X_9$ и соответствующей им средней цене Y_W каждой из моде-

лей холодильников фирмы *W* (использовались данные о средних ценах по Украине на 01.12.2011 г. в у.е.).

Таблица 2. Выборка исходных данных о показателях качества $X_1 - X_9$ и цене Y_W холодильников фирмы *W*

Модель холодильника	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	Y_W
<i>W1</i>	A+	10	42	302	211	91	-	+	-	564
<i>W2</i>	A+	4,5	42	350	243	107	+	+	-	665
<i>W3</i>	A	4,5	42	323	226	97	+	-	-	538
<i>W4</i>	A	4,5	42	320	223	97	+	+	-	566
<i>W5</i>	A	4,5	39	347	228	119	-	-	-	470
<i>W6</i>	A+	4,5	39	304	212	92	-	+	+	501
<i>W7</i>	A	4,5	42	349	252	97	+	+	+	637
<i>W8</i>	A+	4,5	38	371	255	116	-	+	-	529
<i>W9</i>	A	7,5	44	432	325	107	+	+	+	796
<i>W10</i>	A	10	42	302	211	91	-	+	-	556
<i>W11</i>	A+	10	42	302	211	91	-	+	-	567
<i>W12</i>	B	6	37	281	200	81	-	+	-	543
<i>W13</i>	A+	4,5	39	311	195	116	-	-	-	452
<i>W14</i>	A	12	42	326	226	100	+	+	-	597
<i>W15</i>	A	9	38	264	198	66	+	+	-	890
<i>W16</i>	A	3	40	289	227	62	+	+	-	525
<i>W17</i>	A	4	39	319	231	88	-	-	-	442
<i>W18</i>	A	9	37	263	198	65	-	+	+	764
<i>W19</i>	A	6,3	43	425	305	120	+	+	+	894
<i>W20</i>	A+	12	42	350	243	107	+	+	-	607
<i>W21</i>	A	10	44	425	305	120	+	+	+	770
<i>W22</i>	A+	2	36	207	189	18	+	-	-	521
<i>W23</i>	A	6	37	273	201	72	-	+	-	590
<i>W24</i>	B	9	37	281	200	81	-	+	-	699
<i>W25</i>	A+	4	39	318	230	88	-	-	-	442

Предварительный анализ данных, отсеивание и кодирование факторов

В результате предварительного анализа выбранных независимых входных переменных установлено, что показатель X_4 коррелирован с X_5 и X_6 , так как является суммой их значений. Это подтверждается корреляционной матрицей, полученной в демо-версии системы STATISTICA 6.0 для показателей X_4 , X_5 , X_6 (табл. 3).

Таблица 3. Матрица парных коэффициентов корреляции показателей X_4 , X_5 , X_6

Показатель	X_4	X_5	X_6
X_4	1,00	0,93	0,85
X_5	0,93	1,00	0,60
X_6	0,85	0,60	1,00

Кроме того, наличие показателя X_9 наблюдается только в 6 из 25 фактов (табл. 2), что позволяет исключить его из дальнейшего анализа. Поэтому в качестве входов нейросетевой модели были оставлены семь факторов $X_1 - X_3$, $X_5 - X_8$, обозначенных $X_1 - X_7$. При этом фактор X_1 — класс энергопотребления — определялся в соответствии с ДСТУ 4238–2003 на основе индекса энергетической эффективности и представлен в виде порядковой величины с использованием кодирования (табл. 4) [9].

Таблица 4. Кодирование фактора X_1

Класс энергопотребления	Индекс энергетической эффективности, %	Кодированное значение
A++	$I < 30$	1
A+	$30 \leq I \leq 42$	2
A	$42 \leq I \leq 55$	3
B	$55 \leq I \leq 75$	4

Факторы: X_2 — мощность замораживания; X_3 — уровень шума; X_4 — объем холодильной камеры; X_5 — объем морозильной камеры величины, представленные в шкале отношений; X_6 — система No Frost; X_7 — быстрая заморозка — номинальные величины, которые при «+» или «-» кодировались как 1 или 0 соответственно. Выходная переменная (отклик) Y_W — цена холодильников фирмы, W — представлена величинами в шкале отношений.

Формирование обучающей, тестовой и контрольной выборки

Для разработки модели нейросетевой экспертной системы сформирована выборка из факторов $X_1 - X_7$ (табл. 5). Первые 20 фактов этой выборки предназначены для обучения и тестирования модели, а факты с 21-го по 25-й составляют контрольную выборку, необходимую для оценки качества прогноза.

Таблица 5. Выборка для обучения, тестирования и контроля модели нейросетевой экспертной системы

Модель холодильника	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Y_W
1	2	3	4	5	6	7	8	9
W1	2	10	42	211	91	0	1	564
W2	2	4,5	42	243	107	1	1	665
W3	3	4,5	42	226	97	1	0	538
W4	3	4,5	42	223	97	1	1	566
W5	3	4,5	39	228	119	0	0	470
W6	2	4,5	39	212	92	0	1	501
W7	3	4,5	42	252	97	1	1	637
W8	2	4,5	38	255	116	0	1	529
W9	3	7,5	44	325	107	1	1	796

Окончание табл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
W10	3	10	42	211	91	0	1	556
W11	2	10	42	211	91	0	1	567
W12	4	6	37	200	81	0	1	543
W13	2	4,5	39	195	116	0	0	452
W14	3	12	42	226	100	1	1	597
W15	3	9	38	198	66	1	1	890
W16	3	3	40	227	62	1	1	525
W17	3	4	39	231	88	0	0	442
W18	3	9	37	198	65	0	1	764
W19	3	6,3	43	305	120	1	1	894
W20	2	12	42	243	107	1	1	607
W21	3	10	44	305	120	1	1	770
W22	2	2	36	189	18	1	0	521
W23	3	6	37	201	72	0	1	590
W24	4	9	37	200	81	0	1	699
W25	2	4	39	230	88	0	0	442

Формирование прогнозной выборки

Выборка для прогноза конкурентоспособности холодильников фирмы *G* по цене (табл. 6) содержит 20 фактов и имеет такую же структуру, что и обучающая выборка (табл. 5).

Таблица 6. Выборка для прогноза конкурентоспособности холодильников фирмы *G*

Модель холодильника	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Y_G
1	2	3	4	5	6	7	8	9
G1	3	5	39	205	103	0	1	584
G2	3	4	41	230	75	1	1	672
G3	2	9	40	251	64	1	1	1261
G4	2	3	42	202	62	0	1	799
G5	3	7,5	42	200	62	1	1	972
G6	2	7,5	42	200	62	1	1	912
G7	3	2	41	255	39	0	1	584
G8	3	4	40	230	92	0	1	524
G9	2	5	41	203	70	0	1	820
G10	3	9	41	221	61	0	1	749
G11	3	4,5	39	205	75	1	1	784
G12	3	4	40	278	86	0	1	720
G13	4	3	43	214	48	0	1	398
G14	3	5	40	204	70	0	0	479
G15	3	4	40	230	86	0	0	645
G16	3	4	40	278	86	0	1	680
7	2	4	40	230	82	0	1	555

Окончание табл. 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
G18	3	5	40	223	61	0	0	466
G19	2	10	40	245	86	0	1	987
G20	2	5	40	223	61	0	1	657

Статистический анализ данных

Статистический анализ данных обучающей (табл. 5, факты 1–20) и прогнозной выборок (табл. 6) показывает, что для холодильников фирм W и G факторы X_1 , X_6 и X_7 характеризуются одинаковым количеством категорий и кодированных значений, а коэффициенты вариации факторов $X_2 - X_5$, имеют один и тот же порядок (табл. 7).

Таблица 7. Оценка коэффициентов вариации факторов $X_2 - X_5$

Фирма	Коэффициенты вариации факторов, %			
	X_2	X_3	X_4	X_5
W	43,0	5,2	14,6	18,1
G	41,9	2,6	10,8	21,9

Использование t -теста для независимых выборок для уровня значимости $p = 0,1$ в демо-версии системы STATISTICA 6.0 позволило установить значимое различие между средними значениями цены $\bar{Y}_W = 605,15$ и $\bar{Y}_G = 712,40$ с учетом вариации $\sigma_W = 133,33$, $\sigma_G = 208,60$. Это подтверждается специальным статистическим графиком «ящики с усами» (рисунок).

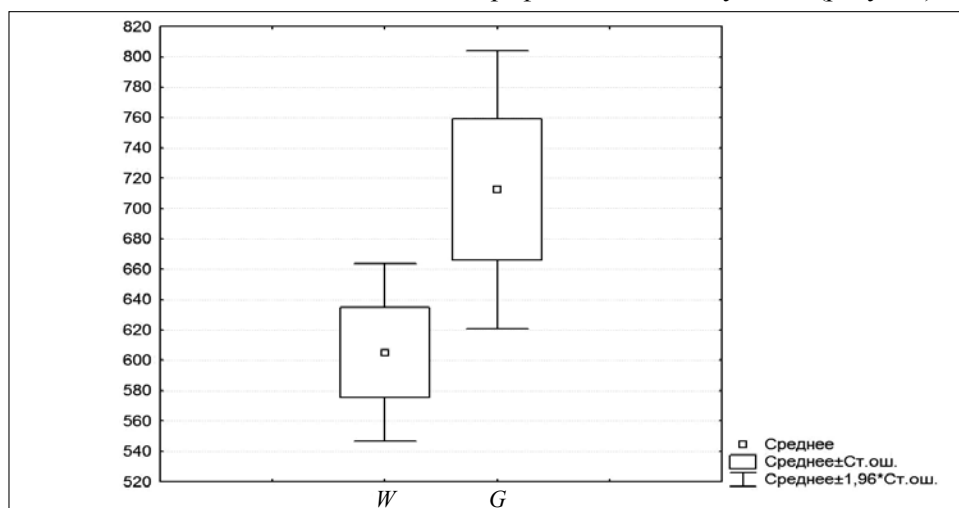


Рисунок. Диаграмма «ящики с усами» в демо-версии системы STATISTICA 6.0

Отсутствие на диаграмме пересекающихся областей стандартных ошибок указывает на значимое различие цен на холодильники. При этом выполняется условие равенства единичных показателей качества изделий-конкурентов фирм W и G . Таким образом, для прогнозирования конкурентоспособности по цене холодильников фирмы G можно реализовать

отображение вида $X_j^{N,P,R} \Rightarrow Y_W$ с использованием модели нейросетевой экспертной системы, созданной на основе показателей качества $X_1 - X_7$ холодильников фирмы W и обучающего показателя Y_W .

Создание модели нейронной сети

Модель двухслойной нейронной сети с архитектурой 7:10:1 построена с использованием лицензионной версии системы BrainMaker Professional 3.52. Точность обучения и тестирования модели задавалась в процентном отношении от диапазона обучающего показателя Y_W , допуски обучения и тестирования выбраны $TOL = 0,02$ и $TOL_{\text{test}} = 0,10$.

При тестировании модели факт тестовой выборки относился к категории «Good» — т.е. находится «в допуске» при условии:

$$O \in P \pm TOL(Y_{\max} - Y_{\min}),$$

где O (Output), P (Pattern) — соответственно прогнозируемое и обучающее значение выбранного для тестирования факта, $(Y_{\max} - Y_{\min})$ — диапазон обучающего показателя — цены.

Оценка качества модели нейросетевой экспертной системы

Оценку качества обобщения данных с использованием разработанной нейросетевой модели осуществляли на основе коэффициента детерминации D и S -оценки по зависимостям (1) и (2):

$$D = \frac{\left[N \sum_{i=1}^N (PO) - \sum_{i=1}^N P \sum_{i=1}^N O \right]^2}{\left[N \sum_{i=1}^N P^2 - \left(\sum_{i=1}^N P \right)^2 \right] \left[N \sum_{i=1}^N O^2 - \left(\sum_{i=1}^N O \right)^2 \right]}, \quad (1)$$

$$S = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_P}, \quad S \in [0, 1], \quad (2)$$

где P , O — соответственно обучающее и прогнозируемое значение выходной переменной нейросетевой модели; $N = 5$ — объем тестовой и контрольной выборок; σ_{Δ} — стандартное отклонение ошибки прогноза, полученной по контрольной выборке; $\Delta = (P - O)$ — ошибка прогноза; σ_P — стандартное отклонение выходной переменной контрольной выборки.

Известно, что $D = R^2$, где R — коэффициент множественной корреляции — критерий статистической надежности нейросетевой модели [10]. Полученные в соответствии с (1) значения $D_{\text{test}} = 0,84$ и $D_{\text{control}} = 0,93$ для тестовой и контрольной выборки на 84 % и 93 % объясняют долю вариации отклонений зависимой переменной Y_W от ее среднего значения, обусловленную вариацией всех независимых переменных (табл. 8, 9).

Таблица 8. Оценка качества модели нейросетевой экспертной системы по коэффициенту детерминации D для тестовой выборки $N = 5$

№ тестового факта в обучающей выборке	Обучающее (действительное) значение Y_W	Прогнозируемое значение Y_{WO}	Соответствие допуску тестирования $TOL_{test} = 0,10$
3	538	565	+
7	637	622	+
11	567	557	+
15	890	668	-
19	894	753	-
$D_{test} = 0,84$			$Good_{fact} = 3$

Таблица 9. Оценка качества модели нейросетевой экспертной системы по коэффициенту детерминации D для контрольной выборки $N = 5$

№ факта в исходной выборке	№ факта в контрольной выборке	Обучающее (действительное) значение Y_W	Прогнозируемое значение Y_{WO}
21	1	770	819
22	2	521	457
23	3	590	642
24	4	699	708
25	5	442	458
$D_{control} = 0,93$			

Разработанная нейросетевая модель обладает «очень высокими» обобщающими способностями при тестировании и контроле, что подтверждается выполнением условия $D_{control} > D_{test}$ и оценками коэффициента множественной корреляции $R_{test} = \sqrt{D_{test}} = 0,92$ и $R_{control} = \sqrt{D_{control}} = 0,96$ в соответствии со шкалой Чеддока [11] (табл. 10).

Таблица 10. Взаимосвязь между количественной и качественной оценками коэффициента множественной корреляции в соответствии со шкалой Чеддока

Количественная мера статистической связи	Качественная мера статистической связи
0,1–0,3	Слабая
0,3–0,5	Умеренная
0,5–0,7	Заметная
0,7–0,9	Высокая
0,9–0,99	Очень высокая

Полученное в соответствии с зависимостью (2) значение критерия $S = 0,35$ для контрольной выборки $N = 5$ соответствует условию $S < 0,5$ и характеризует высокую достоверность результата прогнозирования (табл. 11).

Таблица 11. Оценка качества прогнозирования для контрольной выборки $N = 5$

Стандартное отклонение σ_{Δ}	Стандартное отклонение σ_p
46,8	132,2
S-оценка: $46,8/132,2 = 0,35$	

РЕЗУЛЬТАТ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

На основе нейросетевого прогнозирования установлено, что холодильники фирмы G в большинстве случаев неконкурентоспособны по цене по сравнению с аналогичными холодильниками фирмы W , так как их действительная цена Y_G значительно больше прогнозной цены Y_{GO} при идентичных по составу показателях качества (табл. 12).

Таблица 12. Результат прогнозирования цены холодильников фирмы G с использованием модели нейросетевой экспертной системы

Действительная цена холодильников Y_G , у.е.	Прогнозная цена холодильников Y_{GO} , у.е.	Абсолютное отклонение Y_G от Y_{GO} , у.е.	Относительное отклонение Y_G от Y_{GO} , % $\frac{(Y_G - Y_{GO})}{Y_G} \cdot 100$
584	478	106	18,2
672	570	102	15,2
1261	744	517	41,0
799	467	332	41,6
972	479	493	50,7
912	484	428	46,9
584	454	130	22,3
524	493	31	5,9
820	488	332	40,5
749	692	57	7,6
784	585	199	25,4
720	588	132	18,3
398	444	-46	-11,6
479	444	35	7,3
645	446	199	30,9
680	588	92	13,5
555	504	51	9,2
466	443	23	4,9
987	776	211	21,4
657	561	96	14,6
Средние значения			
712,4	536,4	176,0	21,2

ВЫВОДЫ

На основе метода пространственной экстраполяции и формализации задачи прогнозирования конкурентоспособности продукции разработана модель

нейросетевой экспертной системы для прогнозирования и сравнительной оценки конкурентоспособности холодильников бытового назначения в зависимости от цены и совокупности единичных показателей качества.

С использованием разработанной модели нейросетевой экспертной системы установлено завышение цены холодильников бытового назначения фирмы *G* примерно на 21 % по сравнению с холодильниками фирмы *W*, аналогичными по техническим характеристикам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаркавенко С.С.* Маркетинг. — К.: Лібра, 1996. — 384 с.
2. *Долинская М.Г.* Маркетинг и конкурентоспособность промышленной продукции. — М.: Изд-во стандартов, 1991. — 256 с.
3. *Минько Э.В., Кричевский М.Л.* Качество и конкурентоспособность. — СПб.: Питер, 2004 — 268 с.
4. *Котлер Ф.* Основы маркетинга: пер. с англ. — М.: Прогресс, 1990. — 736 с.
5. *Растринин Л.А., Пономарев Ю.П.* Экстраполяционные методы проектирования и управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 120 с.
6. *Бублик Н.Д., Секерин А.Б., Попенов С.В.* Новейшие компьютерные технологии прогнозирования финансовых показателей и рисков. — Уфа: Изд-во Всерос. заочного финансово-эконом. ин-та, 1998. — 62 с.
7. *Федин С.С., Секерин А.Б., Зенкин Н.А.* Оцінка та прогнозування конкурентоспроможності продукції методом зворотнього розповсюдження // Легка промисловість. — 2001. — №1. — С. 62–63.
8. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Бенамеур Лиес.* Методы и алгоритмы решения задач идентификации и прогнозирования в нейросетевом логическом базисе. — М.: Горячая линия–Телеком, 2003. — 205 с.
9. *Енергозбереження.* Енергетичне маркування електрообладнання побутової призначеності. Визначання енергетичної ефективності холодильних приладів: ДСТУ 4238:2003 — [Чинний від 2004-04-01]. — К.: Держспоживстандарт України, 2004. — 14 с. — (Національний стандарт України).
10. *Петрунин Ю.Ю.* Информационные технологии анализа данных. Data analysis. — 2-е изд. — М.: КДУ, 2010. — 292 с.
11. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 471 с.

Поступила 10.02.2012

**ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ РИЗИКУ VAR НА ОСНОВІ
ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ
ВОЛАТИЛЬНОСТІ**

П.І. БІДЮК, М.М. КОНОВАЛЮК

Для опису динаміки умовної дисперсії запропоновано модель стохастичної волатильності, структура якої відповідає фактичним змінам дисперсії фінансових гетероскедастичних процесів. Оцінки параметрів моделі стохастичної волатильності обчислюються за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів у середовищі OpenBUGS. Для підвищення швидкості обчислень створено належну специфікацію цієї моделі. Оцінки змінної в часі умовної дисперсії, отримані за методом Монте-Карло, використано для прогнозування значення величини можливих втрат *Var* для вибраних біржових фінансових процесів, поданих статистичними методами. При цьому досягнуто високу точність прогнозів, яку застосовують для прийняття рішень під час виконання торговельних операцій.

ВСТУП

Актуальною задачею фінансового аналізу даних є розвиток методів керування різноманітними фінансовими ризиками, які ґрунтуються на застосуванні математичного апарату. Відомо, що фінансові активи характеризують очікувану дохідність та ризик. Із математичної точки зору, очікувану дохідність описує математичне сподівання, а ризик описує дисперсія або волатильність дохідності протягом часового періоду володіння активами. Волатильність характеризує амплітуду коливань дохідності активу щодо очікуваного значення. Велика невизначеність щодо дохідності активу відображається у високій волатильності.

У фінансовій сфері постають задачі аналізу ринкових та кредитних ризиків, задачі оцінювання банками розміру резервного капіталу для покриття ризику активних операцій. Для розв'язання цих задач застосовують різні моделі волатильності з використанням підходу Value-at-Risk (*Var*).

Сучасному валютному та фондовому ринку притаманна неоднорідність волатильності, яку враховують економетричні моделі умовної гетероскедастичності (неоднорідності за дисперсією) типу Узагальненої авторегресії зумовною гетероскедастичністю [1]. Практика застосування таких моделей свідчить про те, що не всі ефекти реальних даних можуть бути враховані в цих моделях. На точніше врахування ефектів реальних даних спрямовані сучасні альтернативні підходи до моделювання волатильності.

Змінна в часі волатильність, яка майже завжди наявна у фінансових даних, спричиняє зростання інтересу до моделей часових рядів зі змінною дисперсією. Поведінка фінансових часових рядів може бути подана моделлю, яка описує природу змінної волатильності доходів таким чином:

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1), \quad t=1,2,\dots,T,$$

де y_t — дохід активів. Це представлення відоме як модель авторегресії з умовною гетероскедастичністю (АРУГ). Вказана модель широко застосовується в прикладних дослідженнях [2, 3, 4].

Волатильність також може бути змодельована як неспостережувана компонента деякого прихованого стохастичного процесу. Такі моделі називають моделями стохастичної волатильності (МСВ), і останніми роками зосереджена значна увага щодо їхнього дослідження [5, 6, 7]. Ці моделі мають дві основні переваги над моделями АРУГ. Перша перевага МСВ полягає в тому, що є належна теоретична основа, оскільки вони можуть інтерпретуватись як дискретні версії неперервних моделей стохастичної волатильності, яка пропонується сучасною теорією фінансів [8]. Другою перевагою цих моделей є можливість узагальнити одновимірні ряди до багатовимірних у більш природній спосіб. З іншого боку, моделі СВ складніші для оцінювання, ніж моделі АРУГ, тому що не просто отримати їх точні функції правдоподібності. Для вирішення проблеми оцінювання моделі СВ запропоновано декілька методів [3, 4].

Кількісною мірою ринкового ризику є характеристика VaR [9]. VaR застосовується в задачах оцінювання та прогнозування фінансових ризиків, наприклад, для оцінювання мінімального розміру резервного капіталу з урахуванням ризику. Достатньо загальне формулювання цієї кількісної міри ризику дало можливість поширити її також на інші види ризику, зокрема, на операційний, кредитний тощо.

Мета роботи — отримати значення VaR за відомих значень волатильності фінансового процесу, який поданий статистичними даними щоденних обмінних курсів валют (долар/гривня) за вибраний часовий період.

МОДЕЛІ ЗІ ЗМІННОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

Моделі зі змінною волатильністю можна поділити на два типи: спостережувані та параметричні [7, 10]. У загальному випадку обидва типи моделей можна подати таким чином:

$$y_t | z_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2).$$

У спостережуваних моделях z_t — функція запізнення величини y_t .

Найпростішим прикладом моделей подібного типу є моделі АРУГ, які запропоновано в роботі [11]. Вони описують дисперсію як лінійну функцію квадратів минулих спостережень:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2 + \dots + a_p y_{t-p}^2,$$

тобто модель визначається щільністю умовного розподілу:

$$y_t | Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

де Y_{t-1} — множина спостережень до часу $t-1$. Це дає можливість виразити дисперсію у певний момент часу через спостереження, що отримані в минулі моменти часу. Тому лише один тип шуму (збурення) впливає безпосередньо і на ряд, і на волатильність.

Розглянемо особливості використання моделей, що описують прогноз на один крок вперед. Під час здійснення оцінювання та тестування моделі за відносно простим алгоритмом можна отримати ймовірнісний вираз завдяки поєднанню щільностей. Щільність умовного розподілу передбачає використання умовних моментів, які мають широке застосування у фінансовій теорії. Спостережувані моделі аналогічні авторегресійним моделям із ковзними середніми, які зазвичай застосовують для моделювання зміни в часі середніх значень досліджуваних процесів.

Розглянемо другий тип моделей зі змінною волатильністю — параметричні моделі. У параметричних моделях z_t є функцією неспостережуваної або прихованої компоненти. Лог-нормальна модель стохастичної волатильності, яку запропонував Тейлор [12], є самим простим та відомим прикладом:

$$y_t | h_t \sim N(0, \exp(h_t)),$$

$$h_t = \alpha + \beta h_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \quad (1)$$

де h_t — лог-волатильність, яка є не спостережуваною, але може бути оцінена під час використання спостережуваних даних. На відміну від попередніх, у цих моделях використовується два типи шумів (збурень), один із яких впливає на волатильність. Ці моделі аналогічні гаусівським у просторі станів.

Загальним недоліком параметричних моделей волатильності є те, що у них недостатньо точний аналітичний прогноз щільностей $y_t | Y_{t-1}$ на один крок уперед на відміну від моделей середнього, які вписуються у форму гаусівського простору станів. Тому під час використання цих моделей необхідно застосовувати апроксимаційні або чисельні методи для оцінювання параметрів.

Моделі стохастичної волатильності, з одного боку, є статистично важкими (зокрема, для оцінювання параметрів), а з іншого — їх властивості є простішими для розуміння. Також ці моделі мають аналог представлення у неперервному часі.

МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

Волатильність залежить від неспостережуваних компонентів. Відомо дві інтерпретації прихованої волатильності θ_t .

Першою є подання її як випадкового та нерівномірного потоку нової інформації, складного для моделювання на фінансових ринках [13]. Най-

більш популярну параметричну модель стохастичної волатильності запропонував Тейлор [12]:

$$y_t = u_t \exp(\theta_t / 2),$$

$$\theta_t = \mu + \phi\theta_{t-1} + v_t,$$

де u_t та v_t — два незалежні гаусівські процеси білого шуму з дисперсією 1 та σ_v^2 , відповідно. Ця модель має назву лог-нормальної моделі стохастичної волатильності.

Оскільки v_t — гаусівський процес, то θ_t також описується стандартною гаусівською авторегресією. Вона буде стаціонарною, якщо $|\phi| < 1$ та:

$$\mu_\theta = E(\theta_t) = \frac{\mu}{1 - \phi},$$

$$\sigma_\theta^2 = \text{Var}(\theta_t) = \frac{\sigma_v^2}{1 - \phi^2}.$$

Оскільки u_t завжди стаціонарний, то y_t буде стаціонарним тоді і тільки тоді, коли θ_t — стаціонарний. Процес y_t , що є добутком двох стаціонарних процесів, є стаціонарним. Використовуючи властивості лог-нормального розподілу, можна показати, що всі моменти існують тоді, коли θ_t стаціонарний, а ексцес

$$\frac{E(y_t^4)}{(E(y_t^2))^2} = 3 \exp(\sigma_h^2) \geq 3,$$

показує, що МСВ має товщі «хвости», ніж у відповідному нормальному розподілі, при цьому непарні моменти дорівнюють нулю.

У цілому оцінювання зазначеної моделі дещо важче, ніж у відповідних моделях АРУГ. Властивості цієї моделі розглянуто в роботах [5, 7, 12].

Другою інтерпретацією волатильності θ_t є подання її як дискретної змінної величини, що описує режим, в якому працює фінансовий ринок. Марковські перехідні моделі, розглянуті Гамільтоном [14] — найпопулярніший підхід до моделювання змін режиму фінансового ринку:

$$y_t = u_t \exp(\theta_t / 2),$$

$$\theta_t = \mu + \phi s_t,$$

де s_t — ланцюг Маркова першого порядку з двома можливими станами, який може бути рівним 0 або 1 та незалежний від u_t . Значення часового ряду s_t для всіх t залежать тільки від останнього значення s_{t-1} , а саме для $i, j = 0, 1$:

$$P(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = i, \dots) = P(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij}.$$

Імовірності $(p_{ij})_{i,j=0,1}$ називають імовірностями переходу з одного стану в інший.

Ланцюг Маркова описується матрицею переходу:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ 1 - p_{11} & p_{11} \end{pmatrix},$$

де $p_{00} + p_{01} = p_{10} + p_{11} = 1$.

КІЛЬКІСНА МІРА РИЗИКУ VALUE-AT-RISK

Величина *Var* — це така оцінка величини втрат за деякою фінансовою позицією, яка із заданою ймовірністю $1 - p$ не перевищить втрати, обумовленні певними факторами ризику пролягом заданого часового горизонту. Іншими словами, *Var* — це максимально ймовірна втрата.

Var метод може бути застосований до різних типів вимірювання ризиків: ринкового, кредитного, операційного та товарного [15]. Невизначеність щодо майбутніх цін та доходностей фінансових активів обумовлена волатильністю курсів фінансових активів. Ця невизначеність — основний вид фінансового ризику, а саме — ринковий ризик, для оцінки якого використовується ринкова *Var*.

Ринковий ризик означає ймовірність того, що неочікуване відхилення ринкових факторів (відсоткових ставок, валютного курсу) спричинено зростанням або зменшенням обсягу складових активів фінансового портфеля. *Var* у цьому контексті є максимально очікуваною втратою ринкових фінансових інструментів портфеля активів, який може бути відомий за визначений часовий період та з визначеним рівнем довіри $(1 - p)$.

Динамічні моделі дають можливість враховувати залежність волатильності від часу та типові особливості часових рядів доходностей, таких як умовна гетероскедастичність та «важкі хвости» кривих щільностей розподілу доходностей. Але ці моделі не можуть повністю враховувати аномалії на хвостах розподілів доходностей, які зумовленні різкими стрибками курсів фінансових активів та великими значеннями волатильності у випадкові моменти часу.

Поширені два варіанти вимірювання величини *Var*: у грошовому вираженні та за відсотковою ставкою. Під час моделювання використовують величину *Var*, виражену ставкою відсотка. Розглянемо ринкову *Var*. Нехай P_t — ціна активу у момент часу t , а $P_{t+\tau}$ — ціна активу в момент часу $t + \tau$, y_t — дохідність активу в момент часу t . Логарифмована дохідність активу визначається за формулою:

$$y_t = y_t(\tau) = \ln \frac{P_{t+\tau}}{P_t}.$$

Відношення $\frac{P_{t+\tau}}{P_t}$ показує поведінку ціни щодо двох моментів часу. Це

відношення буде більшим за одиницю під час зростання ціни активу та меншим за 1 при зменшенні ціни. Відповідно, логарифм цього співвідношення показує дохідність із врахуванням знаку. Якщо значення $y_t > 0$, то

інвестор отримує прибуток ($P_{t+\tau} - P_t > 0$). Якщо значення $y_t < 0$, то інвестор несе втрати ($P_{t+\tau} - P_t < 0$). Розрахувати ціну активу в кінці періоду за заданою дохідністю за цей період можна таким чином:

$$P_{t+\tau} = P_t e^{y_t}.$$

При врахуванні середнього значення формула набуде вигляду:

$$y_t = \ln \frac{P_{t+\tau}}{P_t} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{P_i}{P_{i-1}}.$$

Значення ринкової VaR для часового горизонту τ із імовірністю p визначається умовою:

$$P(y_t(\tau) < VaR_t(\tau)) = p. \quad (2)$$

Оскільки інвестор зазнає втрати, якщо $y_t(\tau) < 0$, то вважається, що для малих значень p величина $VaR_t(\tau)$ в (2) набуває від'ємного значення.

На практиці значення ймовірності p беруть рівним 0,05 (методологія RiskMetrics [9]) або 0,01 (Базельський спостережний комітет [16]); $\tau = 1,10$, для інтервалу спостережень зазвичай використовують щоденні дані.

Під час розрахунку VaR проблемою є оцінювання розподілу доходностей активів. Розповсюджені два методи розрахунку VaR : дельта-нормальний метод та метод історичного моделювання. Розглянемо коротко дельта-нормальний метод.

ДЕЛЬТА-НОРМАЛЬНИЙ МЕТОД

Основним припущенням дельта-нормального методу є нормальність розподілу доходностей та незмінність волатильності, які, як правило, не виконуються на практиці.

Нехай доходності активів $y_t(\tau)$ мають нормальний закон розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ із щільністю розподілу $n_N(x | \mu, \sigma^2)$ і взаємно некорельовані, тобто описуються гаусівським процесом білого шуму. Математичне сподівання $\mu = \mu(\tau) = E\{y_t(\tau)\}$ — очікувана дохідність активу, а дисперсія розподілу $\sigma^2 = \sigma^2(\tau) = D\{r_t(\tau)\}$ — дисперсія дохідності за період τ . Дисперсія σ^2 та середньоквадратичне відхилення дохідності σ характеризують ризик або волатильність дохідності активу.

Застосувавши перетворення $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ до формули (2) ринкового визначення VaR , отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{VaR_t} n_N(x | \mu, \sigma^2) dx = \int_{-\infty}^X \phi(z) dz = \Phi(X) = \Phi\left(\frac{VaR_t - \mu}{\sigma}\right) = p, \quad (3)$$

де $\phi(z)$ — щільність та $\Phi(X)$ — функція стандартного нормального розподілу.

Звідси отримуємо:

$$VaR_{t,p} = \mu + \Phi^{-1}(p)\sigma, \quad (4)$$

де $\Phi^{-1}(p)$ — квантиль розподілу з функцією $\Phi(X)$ рівня p .

При $\mu = 0$ отримуємо:

$$VaR_{t,p} = \Phi^{-1}(p)\sigma = -\Phi^{-1}(1-p)\sigma. \quad (5)$$

При $p = 0,05; 0,01$ формула (5) має вигляд:

$$\begin{aligned} VaR_{t,95\%} &= -1,645\sigma, \\ VaR_{t,99\%} &= -2,326\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

На практиці параметри μ , σ можуть не бути сталими.

Можна також припустити, що випадковий процес дохідності $y_t(\tau)$ є умовно гауссівським, тоді

$$VaR_{t,p} = \Phi^{-1}(p)\sigma_t = -\Phi^{-1}(1-p)\sigma_t.$$

Таким чином, для розрахунку величини *VaR* із рівнями довіри 95 % та 99 % достатньо знати величину волатильності σ_t :

$$VaR_{t,95\%} = -1,645\sigma_t, \quad (7)$$

$$VaR_{t,99\%} = -2,326\sigma_t. \quad (8)$$

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ VAR

У більшості наукових праць модель стохастичної волатильності, яку запропонував Тейлор, має такі дві форми:

$$\begin{cases} y_t | \theta_t = e^{\frac{1}{2}\theta_t} u_t, & u_t \sim N(0,1), \\ \theta_t | \theta_{t-1}, \mu, \phi, \tau^2 = \mu + \phi(\theta_{t-1} - \mu) + v_t, & v_t \sim N(0, \tau^2), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t u_t, & u_t \sim N(0,1), \\ \ln \sigma^2 = \mu + \phi \ln \sigma^2 + v_t, & v_t \sim N(0, \sigma^2). \end{cases}$$

У цих моделях по-різному представлена волатильність, тобто:

$$\sigma_t = e^{\frac{1}{2}\theta_t}.$$

Тепер формули (7) та (8) можна записати у вигляді:

$$VaR_{t,95} = -1,645e^{\frac{1}{2}\theta_t}, \quad (9)$$

$$VaR_{t,99} = -2,326e^{\frac{1}{2}\theta_t}. \quad (10)$$

Формули (9) та (10) можна застосувати для розрахунку величини VaR для курсів обміну валют (наприклад, долар/гривня).

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕННЯ VAR У СЕРЕДОВИЩІ OPENBUGS

Аналіз статистичних даних щоденних курсів обміну валют (долар/гривня) за період із 24.10.2006 по 15.04.2011 виконано в [17]. Для отримання значень VaR використовуємо оцінки волатильності обмінних курсів (долар/гривня), які отримані з відповідної моделі стохастичної волатильності. У [17] надано специфікацію моделі для отримання значень волатильності у визначені моменти часу, її необхідно доповнити для отримання значень VaR . Специфікація моделі у середовищі OpenBUGS має такий вигляд:

```
model{
  mu ~ dnorm(0, 0.1)
  phistar ~ dbeta(20, 1.5)
  ntau ~ dgamma(2.5, 0.025)
  phi<- 2*phistar-1

  theta0 ~ dnorm(mu, ntau)
  meantheta[1] <- mu + phi*(theta0 - mu)
  theta[1] ~ dnorm(meantheta[1] , ntau)

  for (i in 2 : N){
    meantheta[i] <- mu + phi * (theta[i-1] - mu)
    theta[i] ~ dnorm(meantheta[i], ntau)
  }

  for (j in 1 : N){
    meany[j] <- 1/exp(theta[j])
    y[j] ~ dnorm(0, meany[j])
  }

  for (k in 1 : N){
    VaR[k]<- -1.645*exp(theta[k]/2)
  }
}
```

Вхідні та початкові данні залишаються незмінними. Детально послідовність виконання операцій у середовищі OpenBUGS розглянуто в [17]. Після виконання необхідних обчислень за програмою отримано значення VaR обмінних курсів (долар/гривня) за період з 24.10.2006 по 15.04.2011. Результати імітаційного моделювання подано в таблиці.

Таблиця. Результати розрахунків *VaR* для курсів обміну валют (долар/гривня) за період з 24.10.2006 по 15.04.2011

Значення <i>VaR</i>	Середнє значення	Середньоквадратичне відхилення	Значення похибки	2,5 % медіани	Медіана	97,5 % медіани	Початкова ітерація	Кількість ітерацій
<i>VaR</i> [1]	-0,5726	0,9672	0,06845	-2,602	-0,005706	-0,001611	1	20000
<i>VaR</i> [2]	-0,2781	0,5392	0,03693	-1,869	-0,005694	-0,001727	1	20000
<i>VaR</i> [3]	-0,1665	0,3774	0,02576	-1,375	-0,006195	-0,002164	1	20000
<i>VaR</i> [4]	-0,1145	0,2899	0,01986	-1,034	-0,007977	-0,003824	1	20000
<i>VaR</i> [5]	-0,08515	0,237	0,01621	-0,8219	-0,007047	-0,003401	1	20000
<i>VaR</i> [6]	-0,06661	0,2032	0,01387	-0,6842	-0,005114	-0,001958	1	20000
<i>VaR</i> [7]	-0,05539	0,1817	0,01243	-0,5654	-0,00421	-0,001599	1	20000
<i>VaR</i> [8]	-0,04943	0,1754	0,012	-0,5139	-0,003662	-0,001256	1	20000
<i>VaR</i> [9]	-0,04534	0,1729	0,01175	-0,4752	-0,003642	-0,001302	1	20000
<i>VaR</i> [10]	-0,04312	0,1717	0,01168	-0,4482	-0,003772	-0,001647	1	20000
<i>VaR</i> [11]	-0,04157	0,1727	0,0116	-0,4326	-0,004109	-0,001806	1	20000
<i>VaR</i> [12]	-0,04074	0,1727	0,01158	-0,4131	-0,004372	-0,00198	1	20000
...

ВИСНОВКИ

Прогнозування значень стохастичної волатильності потребує побудови адекватних моделей для опису динаміки умовної дисперсії. Незважаючи на значні успіхи в моделюванні гетероскедастичних процесів, під час розв'язання багатьох практичних задач точність оцінок прогнозів стандартного відхилення може бути незадовільною. Як правило, прийнятні результати щодо обчислення оцінок прогнозів можна досягти за допомогою сучасних моделей умовної дисперсії, у яких волатильність розглядається як випадковий процес. Зокрема, до моделей такого класу відноситься і модель стохастичної волатильності. У роботі використано оцінки параметрів МСВ, які отримані авторами раніше [17] за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів. Для розрахунку кількісної величини ризику в середовищі OpenBUGS модифіковано специфікацію моделі стохастичної волатильності в середовищі OpenBUGS.

Беручи за основу модель стохастичної волатильності для опису змінної в часі дисперсії, запропонований підхід дозволить прогнозувати значення величини *VaR* фінансових процесів, які представлені статистичними даними. При цьому досягається висока точність прогнозів, придатна для прийняття рішень під час виконання фінансових операцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bollerslev T. General autoregressive conditional heteroscedasticity // Journal of Econometrics. — 1986. — **31**. — P. 518–537.
2. Bollerslev T., Chow R., Kroner K. ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence // Journal of Econometrics. — 1992. — **52**. — P. 5–59.
3. Bollerslev T., Engle R.F., Nelson D. ARCH models. Handbook of Econometrics. — Amsterdam: North-Holland, 1993. — **4**. — 1078 p.

4. *Bera A., Higgins M.* ARCH models: properties, estimation and testing // *Journal of Economic Surveys*. — 1993. — № 7. — P. 305–366.
5. *Taylor S.J.* Modelling stochastic volatility: a review and comparative study // *Mathematical Finance*. — 1994. — № 4. — P. 183–204.
6. *Ghysels E., Harvey A. and Renault E.* Stochastic volatility. Statistical methods in finance. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — P. 733.
7. *Shephard N.* Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility. Time series models with econometric, finance and other applications. — London: Chapman & Hall. — 1996. — 677 p.
8. *Hull J. and White A.* The pricing of options on assets with stochastic volatilities // *Journal of Finance*. — 1987. — № 42. — P. 281–300.
9. *Risk Management: A Practical.* — GuideBoston: risk metrics group, 1999. — 139 p.
10. *Cox D.R.* Statistical analysis of time series: some recent developments // *Scandinavian Journal of Statistics*. — 1981. — № 8. — P. 93–115.
11. *Engle R.F.* Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation // *Econometrica*. — 1982. — **50**. — P. 987–1007.
12. *Taylor S.J.* Modelling financial time series. — Chichester: John Wiley, 1986. — 268 p.
13. *Clark P.K.* A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices // *Econometrica*. — 1973. — № 41. — P. 135–156.
14. *Hamilton J.D.* A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle // *Econometrica*. — 1989. — № 57/2. — P. 357–384.
15. *Alexander C.* The handbook of risk management and analysis. — NY: John Wiley & Sons, 1996. — 293 p.
16. *International convergence of capital measurement and capital standards: Revised Framework.* — Basel Committee on Banking Supervision, 2004. — 62 p.
17. *Коновалюк М.М.* Байєсівський аналіз моделі стохастичної волатильності в середовищі OpenBUGS // *Наук. вісті НТУУ «КПІ»*. — 2011. — № 2. — С. 77–84.

Надійшла 29.09.2011

ЗАСТОСУВАННЯ ЗВОРОТНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ СКЛАДНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ

Т.А. ЖЕЛДАК

Представлено метод побудови апроксимуючих поліноміальних функцій багатьох змінних, який засновано на використанні в поліномах від'ємних степенів та застосуванні до поліномів обмеження на сумарну величину ступеня добутку змінних. Запропоновано використання штрафної функції на кількість членів полінома. Експериментальним шляхом отримано оптимальну величину коефіцієнта запропонованої штрафної функції.

ВСТУП

Технологічний процес виробництва сталі в кисневому конвертері передбачає, що у ванну конвертера завантажуються чавун та металобрухт у певній пропорції, які потім обдуваються під тиском струменем кисню [1]. Кисень вступає в реакцію з рідкоземельними елементами, легкими металами, сіркою та фосфором, розплавлені фракції яких видаляються у вигляді газів чи долучаються до шлаку. Звичайно, окислювальні реакції відбуваються з виділенням тепла. Кінцевою метою такого процесу є окислення всіх можливих домішок, які залишалися в чавуні чи були в металобрухті, з одночасним отриманням на виході розчину заліза певної температури та певним вмістом вуглецю.

Водночас сталь як матеріал і відповідні вироби з неї, зокрема, сортовий прокат, характеризуються низкою фізичних властивостей: границя текучості, границя міцності, ударна пружність, границя витривалості та відносне здовження зразку при фіксованому механічному навантаженні [2]. Саме ці параметри регламентують державні чи міжнародні стандарти для виробів з тієї чи іншої марки сталі.

Саме марка сталі є ідентифікатором, який пов'язує на рівні технологічного процесу хімічний склад металу з механічними характеристиками готової продукції, що з цього металу виготовляється. Цей зв'язок, а також послідовність технологічних операцій з металом ілюструє рис. 1.

Слід відзначити, що до моменту, коли безпосередніми вимірюваннями чи статистично виконується експертиза готової продукції, виконання будь-яких вимірів ускладнене, з одного боку — через високі температури розплаву та зливків, а з іншого — такі виміри не дадуть повної картини механічних властивостей. Річ у тім, що сортовий прокат набуває властивостей у тому числі й після завершення всіх технологічних операцій — під час охолодження. Тому доволі складно прогнозувати механічні властивості за хімічним складом розпеченої сталі.

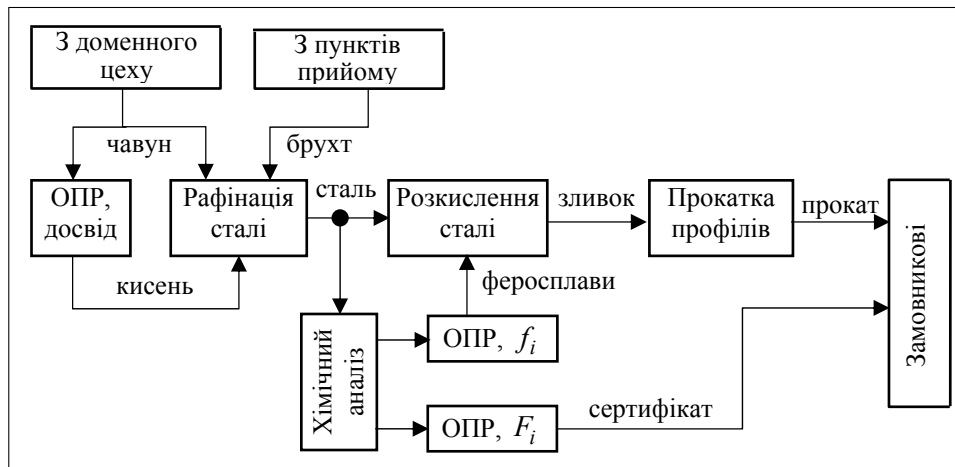


Рис. 1. Технологічний процес виробництва сортового прокату на ДМЗ ім. Петровського

Одним із факторів, властивих конвертерному виробництву, особливо на застарілому обладнанні, як на Дніпропетровському металургійному заводі ім. Петровського [3], є великий вміст у розплаві вільного кисню та його сполуки з вуглецем у вигляді газових вкраплень (дисперсії). Задля зв'язування цих молекул і перетворення на рідкий шлак використовують спеціальні присадки — феросплави. Існує декілька різновидів феросплавів на основі марганцю, алюмінію та кремнію, що мають різну вартість та різні зв'язуючі властивості. Комбінуючи вміст окремих феросплавів, що додаються до киплячої сталі на заключному етапі її виготовлення та їх загальний об'єм, можна досягти бажаних показників якості готової продукції. При цьому слід зауважити, що питома вартість феросплавів значно вища за всі інші вихідні матеріали, тому головна математична задача, яка вирішується під час їх застосування — оптимізація собівартості готової продукції, для якої необхідний хімічний склад сталі буде природним багатовимірним обмеженням.

Отже, актуальною бачиться задача прогнозування механічних властивостей майбутньої готової продукції на ранніх етапах виготовлення вуглецевої сталі з метою формування таких керуючих впливів, які б могли скоригувати процес, що вже відбувається.

Мета роботи — розробка сімейства моделей залежностей механічних характеристик готової продукції від хімічного складу сталі та формування цільової функції оптимізації процесу розкислення.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Як зазначено в [2], хімічний склад розчину у ванні конвертера невідомий, адже до чавуну з певним хімічним складом та температурою додається металобрухт, склад якого оцінити, навіть у вигляді нечіткої множини чи ймовірно, вкрай важко. Останніми роками все частіше спостерігаються випадки «несумлінного» збирання металобрухту, коли в матеріалі, що постачається на переробку, вміст, власне, заліза не перевищує 30–50 %. Тож оператор конвертера виконує процес плавки виключно на досвіді, керуючи двома головними параметрами — висотою фурми, через яку подається ки-

сень, та швидкістю подачі кисню. Його задача полягає в тому, аби якнайшвидше (з метою економії кисню) отримати розчин, кількість домішок в якому не вищий за припустиму норму, а температура не виходить за межі рекомендованої для розливки.

Після цього ванну нахиляють і зливають метал у ківш, де і відбувається розкислення. Під час розливання береться експрес-аналіз хімічного складу, за яким технолог має швидко прийняти рішення про кількість феросплавів та їх пропорцію, аби досягти бажаних властивостей сталі.

У [4] показано, що майбутня марка сталі з надійністю 0,9624 визначається такими одинадцятьма вимірами: вміст вуглецю, марганцю, кремнію, сірки, фосфору, хрому, нікелю, міді, титану та алюмінію в розчині під час розливки та температурою розливки. Також отримана нейронно-мережева модель, що дозволяє прогнозувати марку сталі за згаданими вище параметрами.

Утім, така модель не дозволяє сформулювати керуючий вплив у випадку, якщо хімічний склад металу в ході розливки виявився невідповідним заданій марці чи бажаним механічним властивостям готової продукції.

Застосовуючи класичний підхід [5, 6], який засновано на використанні багатовимірної нелінійної регресії, в якості базових модельних функцій якої є прості поліноми

$$y = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^{S_{ij}}, \quad (1)$$

де k — кількість змінних; M — кількість членів полінома; a_{ij} — коефіцієнти при складових полінома; S_{ij} — ступені аргументів, дозволяє отримати запис у вигляді суми функцій окремих змінних.

Недолік подібного підходу зумовлений тим, що за його використання ігнорується взаємозв'язок між хімічними складовими, тобто кожна з функцій

$$f_j = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad j = 1 \dots k \quad (2)$$

є незалежною від усіх інших. Результуючий функціонал будується фактично як сума функцій (2)

$$y = \sum_{j=0}^k f_j. \quad (3)$$

Таке припущення, хоч і не критичне з точки зору математики, обмежує результуючі модельні функції, оскільки не дозволяє враховувати взаємний вплив хімічних складових один на одного. Зокрема, вміст сірки й фосфору, або ж нікелю й хрому зазвичай мають високу кореляцію між собою, тоді як вміст сірки чи фосфору з вмістом легких металів (марганцю, нікелю, хрому, титану) взагалі не корелює.

Застосування методу [5] обмежене ще одним об'єктивним фактором. Більшість залежностей, наприклад, для функції необхідної кількості феросплаву від хімічного складу, є суттєво нелінійними. Тож для встановлення

зв'язку між, наприклад, вмістом у розплаві фосфору й кількістю необхідного феросплаву першого типу (феросиліцій) застосовується поліном третього порядку з чотирма коефіцієнтами. Якщо ж врахувати, що змінних, які визначають хімічний склад і рекомендовані [2, 3] для оцінки кількості феросплавів для певних марок сталі використовується 12, а для деяких інших 14 і навіть 15, результуючі моделі матимуть по 30–50 коефіцієнтів.

Оскільки, відновлення моделей відбувається в результаті спостережень за реальними процесами під час дослідження, підприємство випускає приблизно 70 видів готової продукції з більше, ніж 30 марок сталі, а одна плавка триває 20–40 хв, то для отримання необхідної вибірки, за якою можна було б побудувати необхідні залежності, потрібні роки. Адже для забезпечення моделі з 30–50 коефіцієнтами, відновленими методом найменших квадратів (МНК) із бажаною надійністю хоча б 0,95, необхідно мати базу з 5000–8000 плавок.

Уникнути недоліків моделі, що застосовується, дозволяє використання для апроксимації керованої змінної від певного набору параметрів моделі узагальнених поліномів вигляду:

$$y = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \prod_{j=1}^k x_j^{S_{ij}}. \quad (4)$$

У (4), як і в (1), ступені, в яких предиктори входять до моделі, — натуральні числа, але вже наявні добутки параметрів.

Відома низка методів, що дозволяють отримати коефіцієнти полінома для будь-якого заданого критерію якості апроксимації, наприклад, критерію регулярності або мінімального зміщення [7]. Зокрема, комбінаторний алгоритм дає можливість отримати запис шляхом викреслювання певних складових із повного полінома, а метод групового врахування аргументів (МГУА) — навпаки, поступово ускладнює модель на основі елементарних поліномів першого-другого порядку.

Проблема комбінаторного алгоритму щодо застосування до розгляненої задачі очевидна — для $k=15$ змінних, кожна з яких може виступати в ступені від 0 до m , необхідно переглянути $m^k + 1$ різних поліномів, відновивши для кожного коефіцієнта методом найменших квадратів. Останнє нереально не лише з точки зору часу, а й виходячи з того, що починаючи з певного порядку матриці коефіцієнтів стануть погано зумовленими і безпосереднє рішення системи матричних рівнянь в МНК виявиться не ефективним.

З точки зору швидкості та простоти синтезу моделей МГУА, звичайно, має перевагу. Утім, на жаль, для вирішення цієї задачі застосування цього універсального методу призводить до небажаних наслідків: уже на третьому кроці самоорганізації під час застосування найпростішої форми базової моделі другого порядку

$$f(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 \quad (5)$$

серед кращих моделей опиняються такі, що зовсім спотворюють реальні фізичні залежності. Насамперед це стосується складових п'ятого, шостого та інших порядків, коефіцієнти при яких, відповідно, мають розмірність тисяч

і десятків тисяч. З точки зору критерію регулярності, такі моделі найкращі на своєму кроці, проте вкрай чутливі до точності визначення вхідних факторів. Оскільки йдеться про результати експрес-хімічного аналізу розпеченого металу при температурі приблизно 1600°C, помилки можливі. Через це отримані як за критерієм регулярності, так і за критерієм мінімуму зміщення, моделі у випадку практичного застосування на даних, які не були використані під час навчання дають викиди, що значно виходять за можливий діапазон варіювання параметрів.

Як зазначено в [6], рідко в яких технічних чи природних системах пара параметрів мають між собою залежність, складнішу за другий порядок. Саме це зумовило пропозицію [8] обмежити ступені поліномів, що входять до виразу (4) умовою:

$$\sum S_{ij} \leq m, \quad (6)$$

де m — заздалегідь визначена максимальна степінь поліному моделі. Значимо, що нерівність (6) обмежує не тільки максимальний рівень змінної x_j в складовій i , а й степінь усіх параметрів у складовій. Тобто, для $m = 3$ можливі вирази $a_i x_1^3$, $a_i x_1^2 x_2$, $a_i x_1 x_2^2$, $a_i x_2^3$ та $a_i x_1 x_2 x_3$, або ж входження тих самих змінних у нижчих степенях. При цьому складова $a_i x_1 x_2 x_3 x_4$ заборонена по (6), хоча кожна змінна входить до виразу в першій степені, проте сума степенів усіх змінних більша за 3.

Подібне обмеження дозволило авторам [8] застосувати генетичний алгоритм до розв'язання задачі розрахунку невідомих коефіцієнтів виразу (4), адже замість хромосом довжиною $m^k - 1$ матимемо лише

$$M = \frac{(m+k)!}{m!n!} \quad (7)$$

можливих складових. Наприклад, для залежності границі міцності сталі від хімічного складу та товщини готового виробу ($k = 9$ змінних), якщо припустити входження в моделі ступенів змінних від 0 до 3 ($m = 4$), замість 262143 можливих складових розглядаються лише 715.

Знайти рішення для задачі такої складності можна навіть повним перебором можливих моделей.

ОПИС ДОСЛІДЖЕННЯ

Серія експериментів із відновлення апроксимаційних функцій з використанням моделей вигляду (2)–(3) та скорочених поліномів вигляду (4)–(6) виконаних на базовому підприємстві, показали, що відновлення функцій розкислення та результуючих механічних характеристик за цими методами має вкрай обмежену точність.

Оцінка коефіцієнтів парної кореляції між окремими вхідними аргументами (складові хімічного аналізу) та змінною, що описує шукану функцію, майже в половині випадків мала від'ємне значення. І хоча коефіцієнт парної кореляції свідчить лише про наявність та степінь лінійного зв'язку, подібні

результати, зокрема як подано в табл. 1, дозволяють припустити наявність суттєвих зворотних зв'язків між предикторами та вихідною змінною.

Таблиця 1. Коефіцієнти парної кореляції між значеннями механічних властивостей сортового прокату та значень показників хімічного складу сталі до розкислення

Показники хімічного складу, %	Механічні характеристики сортового прокату				
	Границя текучості, кгс/мм ²	Границя міцності, кгс/мм ²	Ударна в'язкість при $t = -20$ °С, кгсм/см ²	Ударна в'язкість після механічного старіння, кгсм/см ²	Відносне подовшення, %
Вуглець	0,084097	0,133192	-0,08043	0,009997	-0,14025
Марганець	-0,11697	-0,16656	-0,05853	0,025829	0,113689
Кремній	0,02797	-0,16319	0,076881	0,159299	-0,06278
Сірка	0,129429	-0,24827	-0,08207	-0,04637	-0,12497
Фосфор	0,250497	-0,18007	-0,17694	-0,09435	0,072617
Хром	-0,03198	-0,04063	-0,05504	-0,10765	0,115402
Нікель	0,119189	-0,12141	-0,15062	-0,24716	-0,01625
Мідь	0,078779	-0,1984	-0,38222	-0,45227	-0,1956
Товщина полки, мм	-0,03506	-0,47014	-0,09082	-0,24628	-0,39667

Введення в моделі (4) дозволу на від'ємність степенів S_{ij} дозволяє не тільки значно підвищити фізичну відповідність моделей сутності процесів, а й створити новий тип предикторів, а саме різні співвідношення. Використовуючи замість (6) обмеження

$$\sum |S_{ij}| \leq m, \quad (8)$$

можна отримати в якості складових результуючого поліному базові функції вигляду, наприклад $a_i \frac{x_1}{x_2}$. Як показують дослідження, саме на подібні спів-

відношення припадає найбільший внесок інформації про механічні власності матеріалу, яку можна отримати з хімічного аналізу. Наприклад, пластичність матеріалу (y_5) набагато краще корелює із відношенням вмісту фосфору до сірки x_5 / x_4 , ніж з кожним із цих параметрів окремо.

Слід зауважити, що поліноми, які забезпечують для функцій апроксимації прийнятний рівень критерію регулярності, найчастіше натрапляють на проблему нестачі вхідних даних. З одного боку, чим складніший характер мають моделі, тим менша їх середньоквадратична похибка апроксимації. З іншого — чим більше коефіцієнтів у моделі, отриманій за обмеженою кількістю прикладів даних, тим нижча їх якість, гірша t — статистика і, як наслідок, адекватність усієї апроксимаційної моделі. Як наслідок — майже випадкові результати на виході моделі у випадку надходження на вхід нових даних, що виходять за діапазони навчальної вибірки.

З огляду на це пропонується ввести штрафну функцію на розмірність апроксимаційного поліному. Зокрема, у традиційний [7] критерій регулярності пропонується додати складову штрафу у вигляді тиску розмірності

$$J(A, M) = \sum_{t=1}^N (Y_t - y_t)^2 + \alpha M \rightarrow \min, \quad (9)$$

де A — вектор коефіцієнтів при складових поліному a_i ; M — кількість ненульових значень коефіцієнтів; y_t — значення вихідної змінної в прикладі $t=1..N$; Y_t — значення апроксимаційної функції в тому ж прикладі; α — параметр тиску розмірності, $0 < \alpha < 1$.

Значення, що може приймати параметр тиску розмірності та його вплив на результати апроксимації будуть досліджені нижче.

Запропонований штраф за розмірність функції також має об'єктивне обґрунтування з точки зору технологічного процесу. Річ у тім, що система підтримки прийняття рішень, якою користується оператор конвертерного виробництва [3], повинна мати якомога простішу організацію з точки зору використання пам'яті та швидкодії. Більшість робочих місць не обладнані ЕОМ, тож використання функції апроксимації кладеться або на мікроконтролер з обмеженим обсягом пам'яті, або ж на віддалений комп'ютер, зв'язок з яким виконується каналом низької пропускної здатності. Десятки (іноді сотні) коефіцієнтів, які породжуються традиційними методами самоорганізації моделей, практично унеможливають застосування таких функцій на практиці.

Запропонований підхід до побудови апроксимаційних функцій був перевірений на двох моделях металургійного виробництва: залежності механічних характеристик готової продукції від хімічного складу та необхідності у феросплавах в процесі розкислення вуглецевої сталі при її конвертерному виробництві.

У ході серії експериментів було відновлено низку функціональних залежностей механічних характеристик та необхідних обсягів розкислювачів під час виробництва двох профілів готової продукції: швелерів 18П та профілю кутового шириною 125 мм.

Зведені результати чисельної апроксимації подані в табл. 2. Тут в якості МНК позначено результати застосування класичного підходу з незалежними поліномами від окремих параметрів за (2)–(3). В якості МГУА — результати застосування методу групового врахування аргументів на опорній функції другого порядку (5) з критерієм регулярності. Також наведені результати застосування генетичного алгоритму з цільовою функцією вигляду (9) та степенями — натуральними числами («ГА-натур») і, відповідно — запропонованого методу генетичного алгоритму з цільовою функцією вигляду (9) та обмеженням (8) («ГА-від'ємні»). В обох останніх випадках $m = 3$.

Оцінками якості роботи алгоритмів у табл. 2 є: M — кількість членів полінома функції апроксимації (кількість коефіцієнтів, що відновлюються); S_{\max} — максимальна степінь члена поліному (для МНК — окремого аргументу, для всіх інших методів — добутку аргументів); SSR — середнє квадратичне відхилення апроксимованої величини від безпосередньо виміряного

значення (оскільки різні функції y_k мають різну розмірність, використане відносне значення похибки, приведене до середнього по всім дослідом).

Таблиця 2. Порівняння результатів відновлення функцій за чотирма методиками

Задача	Функція	Кількість змінних	МНК			МГУА			ГА-натур			ГА-від'ємні		
			M	S _{max}	SSR	M	S _{max}	SSR	M	S _{max}	SSR	M	S _{max}	SSR
Сертифікація	Границя текучості	9	23	5	0,04	69	5	0,01	14	3	0,14	6	3	0,04
	Границя міцності	9	27	6	0,03	110	7	0,02	21	3	0,12	8	3	0,05
	Відн. подовження	9	21	5	0,06	76	6	0,02	15	3	0,15	4	3	0,09
Розкислення	Феросиліцій	14	43	5	0,11	166	5	0,03	17	3	0,23	11	3	0,11
	Силікмарганець	15	37	4	0,13	123	4	0,03	19	3	0,24	9	3	0,13

Як видно з табл. 2, найкращу якість апроксимації забезпечує метод групового урахування аргументів, який водночас дає найбільшу кількість коефіцієнтів результуючого поліному. Недоліки такої апроксимації викладено раніше. Застосування генетичного алгоритму відновлення коефіцієнтів функції апроксимації з обмеженням степені забезпечує прийнятну якість результатів за меншої кількості коефіцієнтів, ніж під час використання традиційної методики багатовимірної нелінійної регресії. Додатково слід відзначити, що використання від'ємних степенів у поліномах апроксимаційної функції дозволяє у два-три рази зменшити кількість коефіцієнтів, що відновлюються, при цьому помилка апроксимації також зменшується у 1,5–2,5 рази.

Ілюстрацією якості апроксимації може слугувати рис. 2, де показано дані експериментів та їх апроксимацію за допомогою МГУА та ГА з використанням від'ємних степенів поліномів та тиску розмірності.

Програмне забезпечення, що реалізує запропоновану методику відновлення коефіцієнтів апроксимуючого поліному, було реалізовано мовою Matlab. На рис. 3 показано результат апроксимації тієї ж функції границі міцності від хімічного складу сталі (пунктир — дані спостережень, суцільна — результати апроксимації всього вісьмома членами).

Із рис. 3 видно, що похибка апроксимації присутня майже в усіх дослідом, утім, отримана апроксимаційна залежність поводить себе так само, як і реальні дані (пікам даних відповідають піки функції, западинам — западини). Це дозволяє стверджувати про прийнятність отриманої моделі для оцінки механічних властивостей готової продукції.

Питання величини параметра тиску розмірності α є компромісом між бажанням отримати якомога простішу залежність із меншою кількістю коефіцієнтів, та бажанням якомога точніше описати вхідні дані. Як видно з табл. 2, застосування генетичного алгоритму з критерієм оптимізації, що включає складову тиску розмірності, далеко не завжди забезпечує середнє

квадратичне відхилення функції від реальних даних, менше ніж 5 %. Аби проілюструвати вплив величини α на результати апроксимації, було проведено низку досліджень на одній із функцій (y_5 — відносне подовження зразку), результати якого наведено в табл. 3.

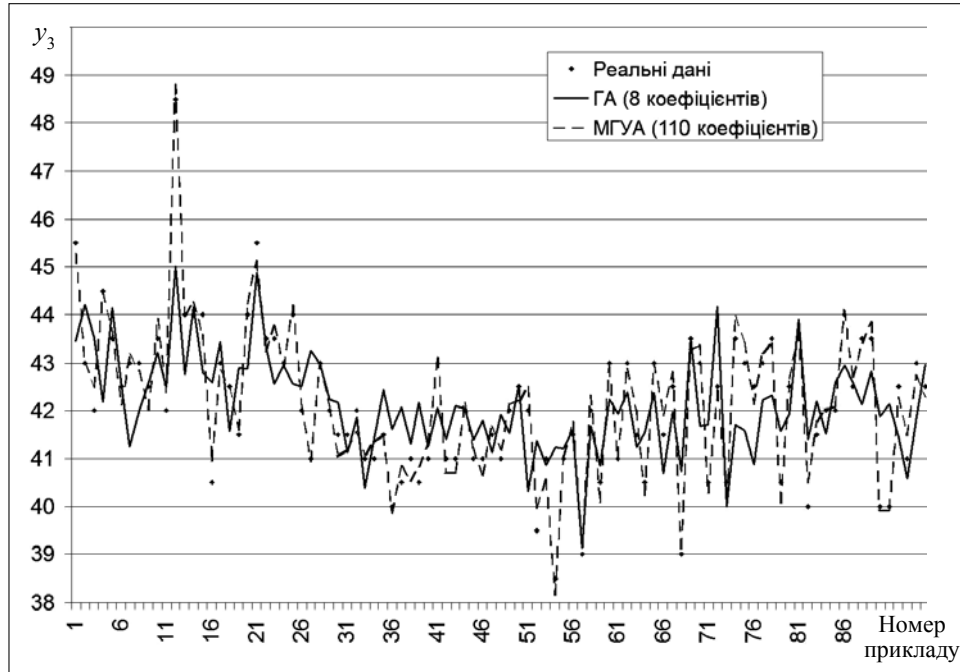


Рис. 2. Порівняння якості апроксимації залежності границі міцності сортового прокату від хімічного складу сталі (95 прикладів) двома методами

Таблиця 3. Дослідження впливу тиску розмірності на результати апроксимації

Величина α в (9)	Кількість членів апроксимаційного поліному M	Середня квадратична похибка апроксимації, SSR	Кількість ітерацій ГА пошуку коефіцієнтів функції
0	68	0,023	2740
0,001	33	0,0246	1230
0,01	22	0,026	330
0,05	15	0,034	216
0,1	8	0,051	189
0,2	6	0,075	234
0,3	4	0,09	716
0,5	3	0,21	1210

Аналізуючи результати, що зведені в табл. 3, слід відзначити, що величину в розмірності варто обирати не більшою за 0,1. Оскільки для функції, для якої була побудована залежність, будувався апроксимаційний поліном від $k = 9$ змінних, можна зробити припущення, що оптимальною величиною коефіцієнта, що досліджується, є $\alpha = 1/k$. Утім, подібне припущення потребує додаткової експериментальної перевірки на ширшому наборі да-

них, за різної кількості вхідних параметрів функцій та різному вигляді залежностей.

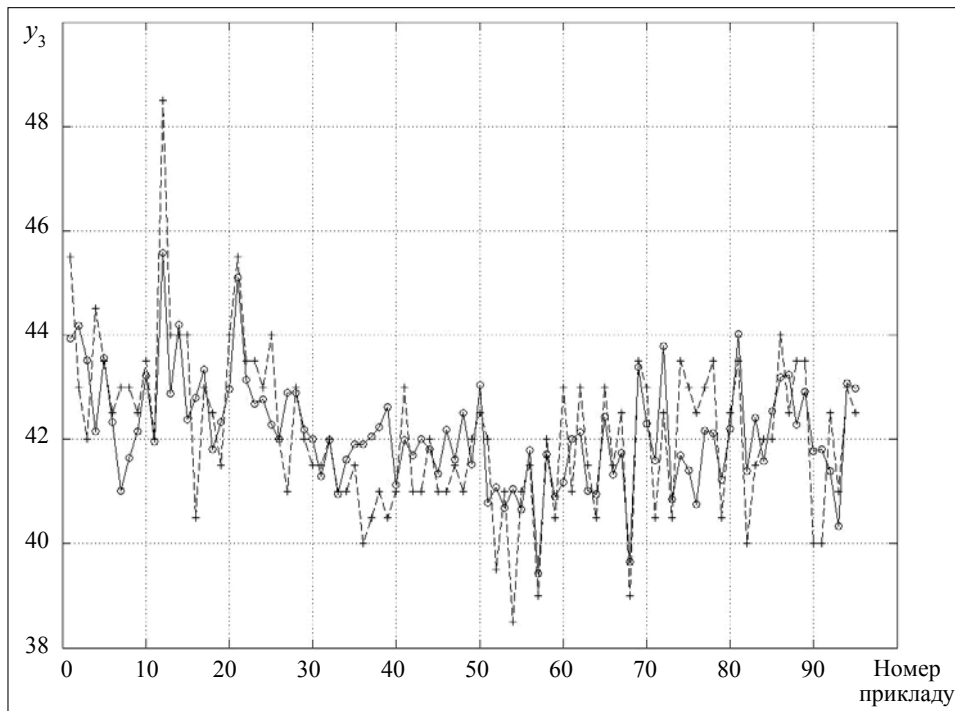


Рис. 3. Апроксимація залежності границі міцності сортового прокату від хімічного складу сталі (95 прикладів) з використанням генетичного алгоритму й обмеження степенів членів поліному

Також побачимо, що за відсутності тиску розмірності $\alpha = 0$ результати відновлення функції забезпечують прийнятну похибку апроксимації, не гіршу за апроксимацію з допомогою МГУА, застосовуючи при цьому поліноми з порівняльною кількістю коефіцієнтів. Коли ж розмірності стають більшим від 0,1 одразу погіршується якість апроксимації, зважаючи на те, що зменшення кількості коефіцієнтів уже відбувається несуттєво.

Привертає увагу також останній стовпчик табл. 3, в якому наведено кількості кроків (поколінь) генетичного алгоритму, витрачені на пошук найкращого за критерієм (9) рішення. Очевидно, що за середніх значень $\alpha = 0,01 \dots 0,2$ найкращий поліном знаходиться набагато швидше, ніж завищеному чи заниженому значенні α . Це свідчить про те, що оптимум при малих чи навпаки надто великих значеннях параметра тиску розмірності знаходиться серед сотень близьких локальних оптимумів.

Результат апроксимації залежності відносного подовження від хімічного складу сталі (9 параметрів) при найкращому, на думку автора, значенні $\alpha = 0,1$ наведено на рис. 4.

Як можна побачити на рис. 4, при вказаному значенні α апроксимуюча функція достатньо якісно відтворює залежність, враховуючи ключові коливання та екстремуми.

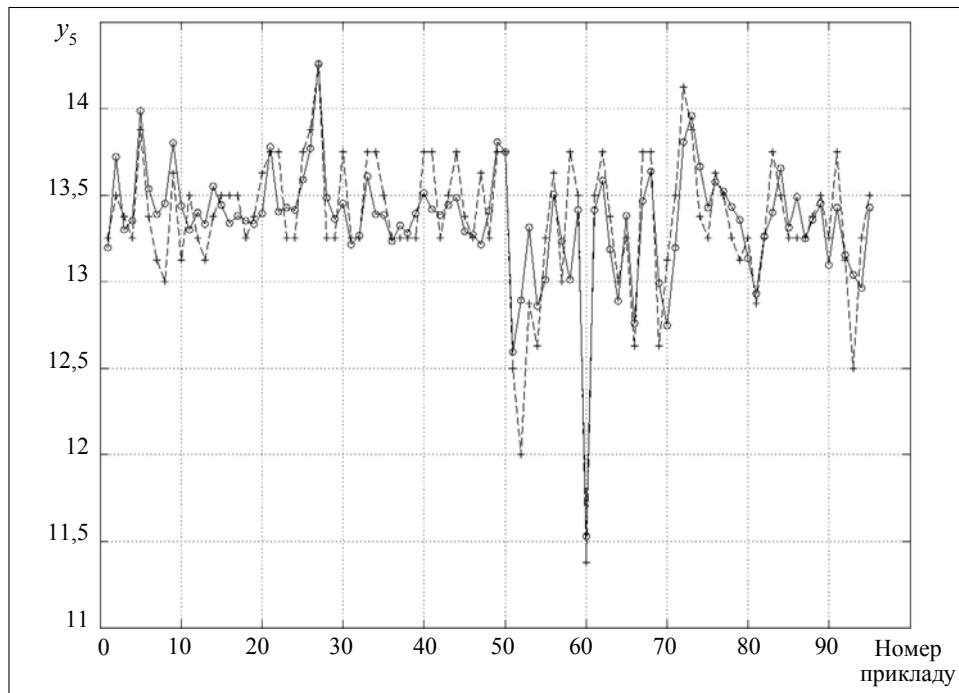


Рис. 4. Апроксимація залежності відносного подовження сталевого прокату від хімічного складу

ВИСНОВКИ

У металургійному виробництві існує актуальна задача відновлення залежностей керуючих функцій розкислення та стану об'єкта управління (механічні властивості готової продукції) від хімічного складу розпеченої сталі в кисневому конвертері. При цьому набір параметрів, що визначають шукані характеристики, відомий заздалегідь.

У роботі подано метод побудови апроксимуючих поліноміальних функцій багатьох змінних, який засновано на використанні у поліномах від'ємних степенів та застосуванні до поліномів обмеження на сумарну величину степені добутку змінних. Перше дозволяє значно наблизити отримані апроксимаційні залежності до їх фізичного сенсу, а друге — значно спростити вигляд результуючих функцій, зменшивши кількість коефіцієнтів, що відновлюються.

В якості базового алгоритму розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції використано метод найменших квадратів, а в якості алгоритму пошуку найкращої структури функції — простий генетичний алгоритм із турнірним оператором селекції, рівномірним схрещуванням та рівномірною випадковою мутацією. Подібне сполучення алгоритмів дозволяє за вірних налаштувань отримати залежності механічних властивостей та керуючих функцій розкислення в режимі реального часу (200–300 поколінь).

У результаті аналізу роботи та отриманих результатів викладеного методу побудови апроксимуючої функції з використанням від'ємних степенів

у поліномах апроксимаційної функції було з'ясовано, що його застосування дозволяє в 2–3 рази зменшити кількість коефіцієнтів, що відновлюються, при цьому середньоквадратична помилка апроксимації також зменшується в 1,5–2,5 рази.

У результаті виконаної роботи оцінено оптимальну величину параметра тиску розмірності, запропонованого автором у якості штрафної функції критерію оптимізації. Запропоновано надалі користуватися значенням $\alpha \leq 0,1$, оскільки при більших значеннях неприпустимо зростає помилка апроксимації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидов В.А. Производство конвертерной стали [Технологическая инструкция] ТИ-233-СТ КК-02-2002. — Д.: ДМЗ им. Петровского — 2002. — 148 с.
2. Бозушевский В.С., Литвинов Л.Ф. Математические модели и системы управления конвертерной плавкой. — К.: НПК «Киев. ин-т автоматики», 1998. — 304 с.
3. Нестеров М.Е., Желдак Т.А. Повышение эффективности устаревшего производства с помощью современных самообучающихся систем поддержки принятия решений на примере кислородно-конвертерного цеха ДМЗ им. Петровского // 36. наук. пр. НГУ. — Д.: Нац. гірничий ун-т. — 2010. — № 34, Т. 2. — С. 202–207.
4. Желдак Т.А., Кучеренко Н.А. Використання систем самонавчання для ідентифікації марки сталі в киснево-конвертерному виробництві // Наук. вісн. НГУ. — Д.: Нац. гірничий ун-т. — 2011. — № 1. — С. 94–98.
5. Гаранжа Д.М. Система статистичного контролю якості прокатної продукції // Системний аналіз та інформаційні технології: матер. міжнар. наук.-техн. конф. САІТ–2011, 23–28 трав. — К.: ННК «ПСА» НТУУ «КПІ». — 2011. — С. 216.
6. Дрейпер Н., Смит Г., Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ. — 3-е изд., пер. с англ. — М.: Издат. дом «Вильямс», 2007. — 912 с.
7. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем: монография. — К.: Наук. думка, 1981. — 296 с.
8. Горбійчук М.І., Шуфнарівч М.А. Метод побудови математичних моделей складних процесів на засадах генетичних алгоритмів // Искусственный интеллект. — 2010. — № 4. — С. 50–57.

Надійшла 09.12.2011

УДК 519.7

**МЕРЫ ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ ИНФОРМАЦИИ
(НА ПРИМЕРЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СИТУАЦИЙ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ). ЧАСТЬ I**

Н.Н. ДИДУК

Показано, что положенные в основу современной кибернетики представления об информации, о способах ее изучения и об ее преобразованиях, *неверны*. Впервые обнаружена непосредственная связь информации с *ситуациями неопределенности* (там, где нет неопределенности, не может быть и информации). Показано, что преобразования информации не могут осуществляться иначе, чем путем преобразования соответствующих ситуаций неопределенности. Получен вывод, что система мер информации, предложенная К. Шенноном, нуждается в развитии и в пополнении мерами, предназначенными для измерения интенсивности преобразований. Рассмотрен первый пример “настоящего” преобразования информации — *квантование*, — и построена первая мера интенсивности преобразования.

В статье сделана попытка развить предложенную Клодом Шенноном систему мер информации и дополнить ее новыми мерами, предназначенными для измерения *интенсивности преобразований* ситуаций неопределенности. Эта работа естественным образом делится на три этапа. Сначала необходимо рассмотреть *примеры* “настоящих” преобразований информации и построить для них недостающие меры интенсивности преобразований. Примеры лучше всего продемонстрировать на ситуациях неопределенности *вероятностного типа*, т.е. того типа, который был положен Шенноном в основу аппарата классической теории информации (поскольку объяснять новые идеи на незнакомом материале — дело безнадежное). Это и является целью статьи.

Затем необходимо разработать некоторую *систему* элементарных преобразований — своеобразную *азбуку преобразований информации* для кибернетики, которая могла бы использоваться для конструирования разнообразных более сложных преобразований. Для всех элементарных преобразований нужно построить недостающие меры интенсивности преобразований. Все это тоже можно сделать сначала для привычного частного случая — вероятностных ситуаций неопределенности.

Наконец, все элементарные преобразования и новые меры информации необходимо распространить на *все типы неопределенности*. Для этого уже необходим новый математический аппарат, который разрабатывается в рамках *теории ситуаций неопределенности* (ТСН). Это, в конечном счете, должно привести к возникновению совершенно новых представлений, как об информации, так и об ее преобразованиях, а также к образованию двух

взаимосогласованных комплексов мер *внутренней* и *внешней* информации для ситуаций неопределенности всех типов.

В действительности значительная часть этой работы уже выполнена. Однако полученные результаты до такой степени не стыкуются с распространенными сейчас ошибочными представлениями об информации и ее преобразованиях, что публикацию этих результатов все равно желательно начинать так, как это делается в настоящей статье, т.е. с рассмотрения примеров “настоящих” преобразований информации для привычного частного случая — *вероятностных ситуаций*.

1. КАК СЛЕДУЕТ ИЗУЧАТЬ ИНФОРМАЦИЮ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ?

Это не праздный вопрос. И не риторический. Уже давно назревала необходимость получить на него ответ. А для этого прежде всего необходимо было выяснить, что такое информация и при каких обстоятельствах мы с ней сталкиваемся. Однако никто даже и не собирался это выяснять. Вместо этого об информации говорят и пишут так, как будто ответы на оба вопроса давно известны. К сожалению, однако, большую часть этих “говорений” и “писаний” вообще нельзя принимать всерьез. Это касается, например, безответственного (и к тому же — безапелляционного) отождествления информации со *сведениями* («Словарь по кибернетике» [1, с. 221–222], «Энциклопедия кибернетики» [2, том 1, с. 408]). Безответственного потому, что сведения — это только часть существующей в Природе информации, причем, *микроскопическая часть* (та, которая освоена человеком). Это касается также сложившейся стойкой привычки говорить и писать, что работа любого компьютера состоит в преобразовании, или в так называемой “переработке”, информации. И эта привычка держится несмотря на то, что породившая ее “знаменитая” концепция “*переработки информации в компьютерах*” основана на грубейшей ошибке, состоящей в том, что с некоторых пор информацию разучились отличать от ее материального носителя — *текстов* (т.е. последовательностей букв, цифр и других значков).

Фактически концепция “переработки информации в компьютерах” представляет собой результат введения в обращение внутренне противоречивого “понятия”, означающего *невозможный сплав* двух понятий: (материального) *текста* и (нематериальной) *информации*.

Еще пример. Многие, кажется, до сих пор думают, что бывают такие “разновидности информации”, как “*цифровая, буквенная, графическая информация*”. И что этими “разновидностями информации” определяются и разновидности ее преобразований. По их мнению, книги, например, содержат в основном “буквенную информацию”. А перевод книги с одного языка на другой якобы представляет собой некоторое преобразование “буквенной информации”. Так, в своей брошюре «Мышление и кибернетика» В.М. Глушков написал:

«Представим себе теперь, что мы имеем дело с какой-либо задачей преобразования буквенной информации, например с проблемой перевода с английского языка на русский... Существует целый ряд различных систем элементарных преобразований буквенной и числовой информации, которые обладают *свойством полноты*, т.е. возможностью составления из них *любых правил преобразования* буквенной и числовой информации» [3, с. 4, 6].

Таким образом, (хотя в это невозможно поверить) Глушков не отличал тексты от информации, а перевод текста с английского языка на русский он представлял себе как преобразование “буквенной информации”. Но легко

показать, что с такими представлениями нельзя не только решить проблему перевода — ее нельзя даже сформулировать! В самом деле, хорошо известно, что при переводе текста (на другой язык) содержащуюся в нем *информацию* (имеется в виду *настоящая информация*, а не “буквенная”!) необходимо не преобразовать, а по возможности наилучшим образом *сохранить* (в этом и состоит смысл хорошего перевода). С другой стороны, сам текст, очевидно, необходимо при этом *преобразовать*. Но тогда возникает пара “наивных” вопросов: 1) можно ли решить проблему перевода, не понимая разницу между текстом и информацией? и 2) может ли в таком случае помочь в решении этой проблемы свойство полноты системы операций над *текстами*? (Подчеркнем особо, что ни о каких операциях над собственно *информацией* в приведенной цитате речь вообще не идет!)

Все эти представления — как о “буквенной и цифровой информации”, так и о “переработке информации в компьютерах”, — по существу, родом из *до-шенноновской эпохи*. Но уже пора, наконец, проснуться и вспомнить, что эта эпоха давно кончилась! Это произошло в середине XX века, когда Клод Шеннон получил свои поразительные результаты, составившие основу теории информации. Ничего подобного мировая наука не знала. И, как это ни удивительно, “*не знает*” до сих пор! Чтобы убедиться в *последнем*, достаточно обратить внимание на то, как принято оценивать сами эти результаты. Например, А.М. Яглом и И.М. Яглом — авторы очень хорошей популярной книги «Вероятность и информация» (выдержавшей несколько изданий), — считают, что теория информации Шеннона представляет собой новую важную область... чего бы Вы думали? Ни за что не догадаетесь! Оказывается — важную область *математики*. Так, в предисловии к первому изданию своей книги они написали:

«...значительной представляется заслуга замечательного американского математика и инженера Клода Шеннона, который в 1947–1948 гг. сумел указать новую важную область математики, истоки которой связаны с совсем элементарными соображениями» [4, с. 5].

Аналогичный взгляд высказал и А.Н. Колмогоров. В предисловии к русскому изданию сборника «Работы по теории информации и кибернетике» он отметил выдающееся значение работ Шеннона для... *чистой математики* [5, с. 5]. Такие оценки заслуг Шеннона выглядят как очень “похвальные” (правда, с некоторым покровительственным оттенком). Однако представьте себе, что кто-то высказался бы по поводу открытия Ньютоном *закона всемирного тяготения* в таком духе:

Своим законом всемирного тяготения Ньютон сумел указать новую важную область *математики*, истоки которой связаны с совсем элементарными соображениями.

Представили? Это как раз *тот случай*. Ни Ягломы, ни Колмогоров *не заметили* достижений Шеннона *в естествознании* — достижений, которые *несоизмеримо* (!) выше его математических и инженерных достижений, вместе взятых. Хорошо известно, что ни одну из своих знаменитых теорем Шеннон как следует не доказал — *так*, как это требуется в математике (и многие математики по этой причине называли его “инженером”). Но, по-видимому, никто так и не понял, что Шеннон *открыл* эти теоремы и что сами теоремы в действительности являются *законами природы*, причем, законами *неведомого до сих пор типа* (так как они не имеют никакого отношения к физи-

ке). И он дал только наброски доказательств, добровольно предоставив другим честь получения полноценных доказательств. (В разных странах защищались сотни диссертаций и были изданы многие десятки монографий, в которых авторы только тем и занимались, что доказывали теоремы Шеннона.)

И вот, в этой *странной обстановке* (когда, например, создается новая наука — *информатика*, — которая к информации имеет такое же отношение, как и “переработка информации в компьютерах”) до сих пор так и не было получено ясного ответа на вопрос, является ли информация *математическим понятием*. Но автор настоящей статьи показал, что ответ должен быть **отрицательным**. Для получения этого ответа необходимо было закончить линию рассуждений, начатую еще У.Р. Эшби в его книге «Введение в кибернетику». Эшби написал:

«Передаваемая информация не является внутренним свойством индивидуального сообщения... информация, передаваемая отдельным сообщением, зависит от того множества, из которого оно выбрано» [6, с. 177].

В связи с этой цитатой возникает вопрос: тогда, может быть, информация является внутренним свойством упомянутого в цитате множества? Легко убедиться, что это не так, поскольку содержащаяся в сообщении информация зависит *не только* от этого множества, а от чего-то еще. От чего? Иначе говоря, возникает новый вопрос: *существует ли нечто такое, что информация оказывается внутренним свойством этого “нечто”*? Автор настоящей статьи получил такой ответ:

Информация не является внутренним свойством текстов (Эшби), но “зато” она является внутренним свойством **ситуаций неопределенности** (причем, это касается ситуаций **всех типов неопределенности**, а не одного только вероятностного типа).

Но *что* такое ситуации неопределенности **всех типов**? Многие ли знают, *что* такое *тип неопределенности*? Несмотря на то, что в этой статье мы имеем дело практически только с одним типом неопределенности — *вероятностным*, — желательнее дать читателю представление и о других наиболее известных типах. *Самый* известный из них — *бесструктурный*. Он характерен тем, что, по существу, совпадает с понятием *множество*. Однако бесструктурные ситуации до сих пор вообще не рассматривались как *полноценные* ситуации неопределенности, поскольку отсутствовал необходимый для работы с ними *аппарат неопределенности* (теоретико-множественный аппарат заменить его не может). Более того, существовало твердое убеждение, что никакой такой аппарат в данном случае и нельзя создать, поскольку было совершенно непонятно, *что* с бесструктурными ситуациями вообще можно делать. Следующий известный пример — *нечеткие ситуации*. С этим типом неопределенности возникла та же проблема — был создан математический аппарат, аналогичный теоретико-множественному. Попытки же создать *аппарат неопределенности* ни к чему путному не привели.

В статье [7] показано, как перечисленные типы неопределенности (в том числе и вероятностный) *погружаются* в общий аппарат неопределенности (и получают в результате доступ ко всем содержащимся в нем средствам и инструментам). Еще один практически важный тип неопределенности — *поливероятностный* — рассмотрен в статье [8]. Однако работа по освоению новых типов неопределенности вряд ли когда-нибудь закончится, поскольку их номинальное количество *бесконечно*.

Из сказанного выше следуют два важных вывода. Во-первых, **нельзя изучать информацию, не рассматривая какую-либо ситуацию неопределенности** (там, где нет неопределенности, не может быть и информации). Во-вторых, **преобразования информации — это преобразования ситуаций неопределенности** (а вовсе не преобразования текстов).

Таким образом, полученные выводы опровергают основную идею, содержащуюся в концепции “переработки информации в компьютерах”, — идею, согласно которой

преобразования текстов — это и есть преобразования информации. Однако полученное опровержение порождает новую проблему: теперь необходимо начать систематическое изучение “настоящих” преобразований информации. Но это не все. Как будет показано ниже, эти выводы опровергают также представления об информации как о такой сущности, которую может изучать математика.

2. РОЛЬ СИТУАЦИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ИЗУЧЕНИИ ИНФОРМАЦИИ

Полученные выше выводы ведут к радикальному изменению представлений о том, что такое информация и что такое ее преобразования. Хотя и очевидно, что информация *может быть* как-то связана с текстами, но для ее изучения необходимо обращаться не к текстам, а к ситуациям неопределенности. Это значит, что необходимо специально заняться изучением ситуаций неопределенности и их преобразований. А в связи с этим возникает новый вопрос:

Можно ли изучение ситуаций неопределенности считать **математической** проблемой?

Любопытная особенность этого вопроса состоит в том, что он звучит как бы несерьезно, так как ни у одного специалиста не возникает даже тени сомнения в том, что на него нужно ответить утвердительно (ну какой же еще может быть эта проблема, если не математической?). Однако (вот беда!) утвердительный ответ является **неверным**. Попытаемся объяснить, почему.

Ситуации неопределенности в одном важном отношении принципиально отличаются от текстов: они являются частью **реальности** — той, в которой мы живем, принимаем решения и действуем. За исключением некоторых особых случаев, мы не можем произвольным образом изменить ситуацию неопределенности, в которой мы оказались. Так что эти ситуации нельзя, например, “загонять” в какие-то специальные преобразователи и там подвергать произвольным преобразованиям по нашему желанию, как это делается с текстами.

Поэтому мы также не можем преобразовывать и информацию, являющуюся внутренним свойством этих ситуаций. А, значит, мы вообще не можем подвергать информацию произвольным преобразованиям в специально построенных для этого “преобразователях”, поскольку *всякая* информация является внутренним свойством одной или нескольких ситуаций неопределенности.

Иначе говоря, ситуации неопределенности, так же, как и информация — это **не математические объекты**, т.е. не то, что мы *выдумываем* “из головы” (как треугольники или интегралы), а то, с чем мы *сталкиваемся* (в практической деятельности). Поэтому их изучение просто не может быть математической проблемой. А если эта проблема — не математическая, то какая? Очевидно, **естественнонаучная**, так как она состоит в нахождении способа удовлетворительно описать некий *фрагмент реальности* — ситуации неопределенности — и (по возможности) обнаружить какие-либо **свойства** данного фрагмента реальности (такие, как **информация**), а также действующие в его пределах **законы**.

Этот вывод является ключевым — он должен существенно повлиять на то, как данную проблему следует формулировать и решать. В самом деле, если пытаться сравнивать естественнонаучные проблемы с математическими, то бросается в глаза следующее: как способы постановки и решения тех и других проблем, так и критерии правильности их решения не имеют между собой почти ничего общего.

Однако...

Главной особенностью проблемы изучения ситуаций неопределенности является то, что ее естественнонаучный характер с самого начала оказался в интересной оппозиции к общепринятой трактовке теории вероятностей. Действительно, ведь вся эта огромная наука тоже изучает ситуации неопределенности, но только лишь одну конкретную их разновидность — *вероятностные ситуации*. В то же время, сейчас считается общеизвестным, что теория вероятностей — это *раздел математики*. Вот цитата из известной популярной книги Б.В. Гнеденко и А.Я. Хинчина «Элементарное введение в теорию вероятностей»:

«Теория вероятностей есть одна из глав математической науки, подобно арифметике или геометрии» [9, с. 15].

Но если теория вероятностей — *раздел математики*, то все объекты, которые она изучает, являются не реальными, а математическими объектами. Это, конечно, в полной мере относится и к вероятностным ситуациям неопределенности. К сожалению (точнее — к счастью), попытка согласовать подобные представления с тем, что мы уже знаем о ситуациях неопределенности, ведет к откровенному абсурду. Например, возникает вопрос, может ли быть так, что вероятностные ситуации — это математические объекты, а все остальные ситуации неопределенности — реальные? Вероятно, так быть не может. Где же выход из этого тупика?

Выход находится у всех на виду. Действительно, вероятностные ситуации ничуть не лучше и не хуже всех остальных (они только гораздо лучше изучены). И *все знают*, что с ними мы тоже *сталкиваемся* в практической деятельности. Однако вероятностные ситуации имеют одну особенность, которая заинтересовала прежде всего *математиков*. Вот что написал об этом А.В. Скороход в книге «Вероятность вокруг нас»:

«...мы окружены явлениями, природа которых случайна. Как же может оказаться, что тем не менее существуют точные законы, которым явления подчиняются?.. Чтобы ответить на вопрос, нужно изучить случайные события, отвлекаясь от их конкретных свойств, а лишь имея в виду случайность» [10, с. 4].

Вот так и получилось, что теория вероятностей стала развиваться не как естественная наука, а как «одна из глав математической науки». Благодаря такому (математическому) способу изучения случайных явлений теория вероятностей приобрела своеобразное совершенство и стройность. Глядя на это совершенство, хочется спросить, не поспешили ли мы с выводом о том, что изучение ситуаций неопределенности является естественнонаучной (а не математической) проблемой. Поэтому сейчас мы приведем еще более веское — *логическое* — обоснование этого вывода. Но для этого нужно сначала дать краткую формулировку проблемы. Вот она.

Необходимо разработать **теорию ситуаций неопределенности (ТСН)**, которая должна обеспечивать возможность удовлетворительно описывать (с помощью специально созданного для этой цели математического аппарата) **произвольные ситуации неопределенности**, встречающиеся на практике, а также их преобразования и систему их информационных характеристик (в том числе таких, как **количество информации, энтропия, мера неопределенности**).

Автор настоящей статьи занимается созданием этой теории около тридцати лет. Первая публикация на эту тему [11] вышла в 1983 г.; а в 1993 г. вышла статья [12] (в двух частях), в которой была сделана попытка осмыслить возникшее новое направление, подвести предварительные итоги и дать этому направлению название. Но впоследствии выяснилось, что предложенное в этой статье название «Теория неопределенности» является неудачным как слишком общее и не отражающее суть проблемы.

В 2004 г. автором была подготовлена к публикации рукопись книги «Теория неопределенности», которую так и не удалось опубликовать из-за “небольших” разногласий с потенциальными рецензентами. Каждый из них не понимал какой-то мелочи: один не понимал того, что вообще существует рассматриваемая в книге проблема; другой не понимал связи информации с ситуациями неопределенности; третий не понимал названия. При этом *все они* не понимали естественнонаучного характера решаемой проблемы (интересно, как можно рецензировать научную работу, не понимая даже, к какой области знания она относится?).

Более подходящее название «Теория ситуаций неопределенности» появилось совсем недавно.

Теперь наш вопрос выглядит так: почему, все-таки, нельзя теорию ситуаций неопределенности развивать “математическим способом” подобно тому, как развивается теория вероятностей? Ведь подобный подход обладал бы даже некоторым преимуществом: он позволил бы упростить терминологию, так как в этом случае незачем (да и невозможно) различать ситуации неопределенности и их математические описания (теория вероятностей не позволяет их различать). Имея в виду эту особенность “математического способа”, достаточно задать следующий вопрос:

Как изменится проблема изучения ситуаций неопределенности и ее формулировка, если кто-то собирается ее решать “математическим способом”?

Пусть читатель (используя аналогию с теорией вероятностей) сам попытается изменить формулировку данной проблемы таким образом, чтобы она превратилась в чисто математическую проблему. Очевидно, что если предварительно не принять решения об отождествлении описаний рассматриваемых ситуаций неопределенности с самими этими ситуациями, то это сделать не удастся. Ну, а если принять такое решение? Пусть читатель самостоятельно убедится, что в этом случае мы не получим ничего — никакой математической проблемы, — а получим полную бессмыслицу. Так что какая бы то ни было формулировка станет невозможной.

Действительно, если кому-то хочется видеть себя *чистым математиком* и по этой причине он будет настаивать на том, чтобы описания ситуаций неопределенности отождествлялись с самими этими ситуациями (автор имел “удовольствие” сталкиваться с такими “чистыми математиками”), то для него наша проблема просто *исчезнет* (а он скажет: «я же говорил, что эта проблема не существует!»). Однако, “к сожалению”, уничтожение проблемы таким способом не избавляет нас от нее, так как в первоначальной формулировке проблема останется. Так что мы получаем следующий *окончательный вывод*:

Проблема изучения разнообразных ситуаций неопределенности и разработки ТСН может иметь **ТОЛЬКО** естественнонаучную формулировку, но не может иметь математической формулировки.

Итак, мы еще раз пришли к выводу, что ситуации неопределенности нельзя изучать “математическим способом”. То же самое можно сказать и о способе изучения *информации* и ее *преобразований*. Действительно, мы убедились, что никакими уловками информацию не удастся превратить в математический объект, поскольку она является внутренним свойством *реальных* ситуаций. Причины же, по которым ситуации неопределенности

(а следовательно, и информация) могут изменяться, вообще не имеют ничего общего ни с математикой, ни с компьютерами. А математика нам нужна не для того, чтобы *осуществлять* эти изменения, а для того только, чтобы суметь их *описать*, когда они происходят.

3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИСПОЛЬЗУЕМОМ ЯЗЫКЕ

То, что в статье в качестве ведущего примера используется вероятностный тип неопределенности, вовсе не значит, что здесь потребуется весь мощный аппарат *современной* теории вероятностей. Напротив, нам здесь нужна лишь простейшая вероятностная модель, сводящаяся к следующему.

1. Задано некоторое абстрактное множество X , о котором известно только то, что его мощность не более чем счетна (ради краткости такие множества были названы *дискретными*).

Понятие дискретного множества не следует смешивать с *топологическим* понятием *дискретного пространства* (дискретное пространство — это множество, наделенное *дискретной топологией*) [13, гл. I, § 1, п. 1].

2. Элементы множества X будем называть *событиями*, или возможными *состояниями природы* (состояниями среды, возможными значениями некоторого параметра и т.п.). Само множество X будем называть *множеством возможностей* (оно же является и полной системой событий).

3. На множестве возможностей X задано некоторое распределение вероятностей (РВ) p .

Теория вероятностей уже давно перестала интересоваться такой простой моделью, и сейчас забыта даже соответствующая ей терминология. Дело в том, что главная область интересов современной теории вероятностей относится к случаю, когда множество событий может быть *несчетным*. Именно переход к несчетной модели потребовал привлечения аппарата теории меры (который к тому времени уже был разработан). В результате появились вероятностные пространства, σ -алгебры, измеримые отображения, а также новые проблемы, связанные с интегрированием.

В то же время, все эти хлопоты, связанные с несчетными множествами, нас не касаются (пока), поскольку мы здесь занимаемся не теорией вероятностей, а *теорией ситуаций неопределенности*, которая до рассмотрения несчетного множества возможностей не доросла (и неизвестно, сможет ли когда-нибудь дорасти). Тем не менее построение общей ТСН даже в предположении, что множество возможностей счетно, является серьезным достижением, поскольку номинальное количество типов неопределенности, охватываемых теорией, *бесконечно* (напомним, что классическая теория информации была разработана только для *одного* типа неопределенности — вероятностного).

Как видно из приведенной выше формулировки, главная задача, возникшая при разработке ТСН, состояла в создании совершенно нового математического аппарата — аппарата, который, конечно, не может (и не должен) быть похожим на аппарат теории вероятностей (поскольку большинство ситуаций неопределенности, подлежащих описанию, не имеют ничего общего ни со случайностью, ни с вероятностями). Элементы же вероятностного языка нам здесь необходимы только потому, что вероятностные ситуации являются одним из важных частных случаев ситуаций неопределенности.

Однако — и это очень важно — даже тот простейший вероятностный язык, который здесь используется, все равно не может полностью совпадать с языком теории вероятностей. Причина отличий в языке неустранима, так как она обусловлена различным отношением двух упомянутых теорий к реальному Миру. Согласно сказанному выше эти две теории относятся к *разным областям знания*: теория вероятностей относится к *математике*, а ТСН — к *естествознанию*.

Первое отличие. С точки зрения теории вероятностей имеется единственный способ, позволяющий *задать* некоторую (вероятностную) ситуацию неопределенности: для этого необходимо ее *описать*. С другой стороны, в ТСН вообще нельзя говорить о *задании* ситуаций неопределенности, поскольку *задать реальную ситуацию* неспособен никто (если, конечно, не принимать во внимание возможности Господа Бога). Это первое отличие ведет к тому, что даже самую обычную для теории вероятностей фразу «на множестве X задано распределение вероятностей p » в ТСН применять *нежелательно*, так как здесь эта фраза не может иметь того смысла, который она имеет в теории вероятностей — она не задает (и даже не описывает) никакую ситуацию неопределенности.

Поэтому, если в ТСН мы хотим *описать* реальную вероятностную ситуацию, характеризуемую распределением p на множестве X , то мы говорим, что на множестве X *действует* распределение p . В этом случае неизвестное состояние природы из множества X оказывается *случайным событием*. Также в этом случае, если на множестве X определена некоторая числовая функция f , то она оказывается *случайной величиной* (относительно действующего распределения p). Математическое ожидание $\mathbf{E}f$ этой случайной величины характеризуется выражением

$$\mathbf{E}f = \sum_{x \in X} p(x) \cdot f(x). \quad (1)$$

Второе отличие. Возможен ряд более сложных *квазивероятностных* ситуаций, которые в ТСН должны поддаваться как содержательному, так и формальному описанию. Все они связаны с разнообразными случаями, когда сведения о *действующем* на множестве X распределении ошибочны, неполны или вообще отсутствуют. Для содержательного описания в ТСН каждого из этих случаев должна быть выработана терминология (теория вероятностей в такой терминологии никогда не нуждалась, поскольку ее формальный аппарат все равно не позволял рассматривать подобные случаи).

Первый из этих трех случаев (когда сведения о *действующем* на множестве X распределении ошибочны) может быть содержательно описан путем указания *пары* (p, q) распределений вероятностей на множестве возможностей X , где p — *действующее* РВ, а q — *гипотеза* о действующем РВ. Эта ситуация превращается в обычную вероятностную ситуацию тогда и только тогда, когда $q = p$. В противном случае мы получаем так называемую *ситуацию заблуждения* (2-я часть статьи, разд. 10, п. 1).

Все остальные случаи (когда сведения о действующем на множестве X распределении неполны или вообще отсутствуют) связаны с возникновением различных ситуаций неопределенности, но уже не на множестве X , а на множе-

стве всех РВ на множестве X (это новое множество несчетно). Поэтому понятно, каково здесь разнообразие возможных частных случаев. Одним из наиболее интересных примеров такого рода являются так называемые **поливероятностные ситуации** (их содержательное описание и способ *погружения* в общий аппарат неопределенности предложены в работе [8, разд. 8, 9]).

4. ПОНЯТИЯ ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ ИНФОРМАЦИИ

С тех пор, как была создана классическая теория информации, параллельно сосуществуют две хорошо известные точки зрения по вопросу о том, как следует измерять *количество информации*. Поскольку эти точки зрения несовместимы, одна из них должна быть отброшена. Какая? Очевидно, та, которая (несмотря на свою интуитивную привлекательность) противоречит теории информации. Однако ниже будет показано, что ее можно использовать для развития аппарата информационных мер.

Мы рассмотрим здесь упомянутые точки зрения на примере того типа неопределенности — *вероятностного*, — в рамках которого они возникли. Предположим, что на множестве X *имеет место* вероятностная ситуация неопределенности, характеризуемая *действующим* на X распределением p (причем, РВ p известно). Тогда, согласно теории информации, с каждым элементом x множества X связано число $I_p(x)$, характеризующее выражением

$$I_p(x) = \log \frac{1}{p(x)}. \quad (2)$$

Величина $I_p(x)$ называется **количеством собственной информации** элемента x .

Но, несмотря на то, что представление о количестве информации, соответствующее выражению (2), сейчас уже вошло во все учебники по теории информации, иногда можно столкнуться с другим мнением о том, как нужно измерять количество информации. Вот что, например, написал Н.И. Кондаков в своем «Логическом словаре-справочнике»:

«...информация — это сведения, которые снимают существовавшую до их получения неопределенность... Степень неопределенности сообщений стали измерять величиной, получившей название *энтропия* и являющейся функцией вероятности. Если вероятность равна 1, то энтропия равна нулю, а если вероятность равна 0, то энтропия равна бесконечности. Количество информации, полученное как разность между начальной энтропией (до получения сообщения) и конечной энтропией (после получения сообщения), называется негэнтропией (отрицательной энтропией). Поэтому информацию иногда называют отрицательной энтропией» [14, с. 210, 211].

К сожалению, этот отрывок является своеобразным “портретом” широко распространенных представлений об информации — это смесь ошибок, путаницы и неуместных намеков на термодинамику. Автор начинает с традиционной ошибки — отождествления информации со *сведениями* (об этом мы уже говорили). Затем выясняется (2-я и 3-я фразы), что автор *не знает*, что такое теоретико-информационная энтропия (он путает ее с *количеством собственной информации* (2)). Заканчивается отрывок отождествлением информации с *негэнтропией*. А это противоречит сказанному выше, так как негэнтропия — это понятие, принадлежащее не теории информации, а *термодинамике* [15, стр. 156].

(Попытки использования понятия физической энтропии в качестве “подпорки” для освоения понятия информации были начаты еще Винером, а затем приобрели большую популярность. Эти попытки привели к целому ряду судьбоносных для кибернетики ляпсусов в трактовке понятия *информация*.)

Несмотря на неразбериху и путаницу, составляющие основное содержание приведенного выше отрывка, в нем можно отыскать также некую *мысль*, ради которой он здесь и приведен. Ее нетрудно сформулировать очень коротко. Например, так: *информация — это то, что устраняет (или хотя бы уменьшает) неопределенность*. Однако легко увидеть, что такое представление об информации явно противоречит представлению, связанному с выражением (2). Действительно, рассмотрим **информационную функцию**

$$I_p = x \mapsto I_p(x) \diamond X \quad (3)$$

(функция I_p определена на множестве X и каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие количество его собственной информации $I_p(x)$). Очевидно, что функция I_p является случайной величиной (относительно действующего распределения p). Ее математическое ожидание $\mathbf{E} I_p$ имеет вид

$$\mathbf{E} I_p = \sum_{x \in X} p(x) \cdot I_p(x). \quad (4)$$

В теории информации число $\mathbf{E} I_p$ называется **энтропией** распределения p и обозначается $H(X, p)$. Энтропию рассматривают также как **меру неопределенности** ситуации, характеризуемой распределением p .

Таким образом, для вероятностных ситуаций эти две меры — *энтропия* и *мера неопределенности* — совпадают *по определению* (Шеннон). Однако, как показано в работе [16], в общем случае эти меры различны. Поэтому в ТСН для них приняты и разные обозначения (обе эти меры одинаково хорошо обоснованы — соответственно обшей и усиленной теоремами кодирования [17, 16]).

В ТСН энтропия и мера неопределенности вероятностной ситуации, которая характеризуется действующим на X распределением p , обозначаются соответственно $H(X, p)$ и $G(X, p)$. Причем, имеет место равенство $H(X, p) = G(X, p)$. Но поскольку в этой статье всюду идет речь не об энтропии, а о неопределенности, будет логичнее в дальнейшем использовать символ $G(X, p)$. Итак, мера неопределенности $G(X, p)$ имеет вид

$$G(X, p) = \mathbf{E} I_p = \sum_{x \in X} p(x) \cdot I_p(x). \quad (5)$$

Очевидно, что число $G(X, p)$ измеряет также количество той неопределенности, которая будет снята (исчезнет) в результате наступления любого события $x \in X$. Но легко понять, что в общем случае равенство $I_p(x) = G(X, p)$ выполняться не может (только в исключительных случаях значение случайной величины может равняться ее математическому ожиданию).

Фактически оба упомянутые подхода впервые возникли в связи с работами Р. Хартли. И тогда они не противоречили друг другу — равенство

$I_p(x) = G(X, p)$ можно было обеспечить предположением, что p — *равномерное* распределение на множестве X (Хартли предполагал, что множество X конечно). Однако после работ К. Шеннона, а в особенности — его последователей, стало ясно, что эти подходы несовместимы.

Тем не менее сопоставление этих двух подходов явно указывает на некую насущную потребность в дальнейшем развитии как представлений об информации, так и аппарата информационных мер. Так, в аппарате теории информации нет четкого разграничения между информационными мерами, которые относятся к событиям, *внутренним* по отношению к данной ситуации неопределенности, и к *внешним* событиям, влияющим (со стороны) на ситуацию неопределенности (взятую в целом).

Легко понять, что представления о внутренней и внешней информации и о способах измерения количества той и другой должны опираться на совершенно непохожие соображения. В то время как под *внутренней информацией* естественно понимать информацию, непосредственно связанную с *событиями*, относящимися к данной ситуации, понятие *внешней информацией*, по-видимому, следует связать с *преобразованиями* самих ситуаций неопределенности. Появление понятия внешней информации позволяет по-новому относиться к вышеупомянутой идее о способе измерения информации. Действительно, эту идею теперь можно сформулировать так:

Внешняя информация — это то, что устраняет (или хотя бы уменьшает) неопределенность.

В такой формулировке она уже не противоречит классическим представлениям. И поэтому ее можно было бы рассматривать как предположение о том, как следует измерять количество внешней информации. Вот развернутая формулировка этого предположения.

Предположение 1. Если в результате полученной внешней информации некоторая ситуация неопределенности изменилась, то *количество* этой информации (по-видимому) равно разности между степенями неопределенности до и после изменения.

На первый взгляд это предположение кажется многообещающим. Однако попытка положить его в основу разработки системы мер внешней информации привела к выводу, что оно является *неудовлетворительным* сразу по нескольким причинам.

Во-первых, преобразования ситуаций неопределенности могут быть связаны не только с приобретением информации, но и с ее потерей. Во-вторых, в случаях, когда информация приобретает (поступая из какого-то внешнего источника), результат преобразования ситуации неопределенности, вызванного поступившей информацией, иногда оказывается парадоксальным: степень неопределенности заключительной ситуации может (вопреки ожиданиям) оказаться *большей*, чем степень неопределенности исходной ситуации. В-третьих, преобразования ситуаций неопределенности, связанные с потерей информации, тоже ведут себя парадоксально: разность между степенями неопределенности до и после такого преобразования в некоторых случаях оказывается положительной, а в некоторых — отрицательной.

Все это означает, что идея, содержащаяся в предположении 1, фактически не работоспособна. Тем не менее мы покажем, что ее можно использовать как (очень грубую) подсказку при разработке конкретных мер внешней информации.

5. “ЛИШНИЕ” ПРОБЛЕМЫ

Изучать преобразования ситуаций неопределенности мы начинаем с анализа таких преобразований, как *квантование* (с двумя его частными случаями: *концентрация информации* и *образование проекций*) и *ограничение разнообразия*. Эти преобразования выбраны не случайно: они не только являются важными примерами “настоящих” преобразований информации, но и могут послужить хорошей иллюстрацией тех проблем, которые возникают при разработке математического аппарата ТСН. Читатель скоро убедится, что описания преобразований *квантование* и *ограничение разнообразия* для *вероятностных* ситуаций хорошо известны (и очень просты). Но поскольку таким преобразованиям могут подвергаться не только вероятностные ситуации, возникла проблема нахождения *универсальных* описаний этих преобразований (т.е. описаний, применимых к ситуациям всех типов неопределенности).

Проблема состояла в следующем. В разработке математического аппарата ТСН уже был сделан решающий шаг: было показано, что *любую* ситуацию неопределенности, существующую на (дискретном) множестве X , можно описать с помощью некоторого *пространства неопределенности*, имеющего вид (X, \mathbb{T}) , где $\mathbb{T}: \bar{\mathbf{R}}_+^X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ — *возрастающий* функционал (а $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{R}}_+$ — результаты пополнения числовых множеств \mathbf{R} и \mathbf{R}_+ “бесконечным числом” $+\infty$) [7]. Из этого следовало, что описание произвольного преобразования ситуации, описываемой пространством (X, \mathbb{T}) , должно сводиться к некоторому преобразованию самого этого пространства. Так что осталось “*всего лишь*” узнать, каким преобразованиям нужно подвергнуть пространство (X, \mathbb{T}) для того, чтобы получить универсальные описания преобразований *квантование* и *ограничение разнообразия*.

Но как это узнать? Очевидно, что нужно искать аналогию. Можно заметить, что пара (X, p) , фигурирующая в выражении (5), в каком-то смысле аналогична паре (X, \mathbb{T}) . Действительно, пары вида (X, p) и (X, \mathbb{T}) являются *универсальными* способами описания соответственно *вероятностных* и *произвольных* ситуаций неопределенности на (дискретном) множестве X . Далее, пары (X, p) и (X, \mathbb{T}) напоминают обозначения *разнообразных математических пространств*, примеры которых в математике хорошо известны (алгебраические, топологические, векторные, тензорные, проективные, аффинные пространства, группы, кольца, тела, поля, модули). А с формальной точки зрения преобразования *квантование* и *ограничение разнообразия* представляют собой (как станет ясно немного позже) переход к таким *производным* математическим пространствам, как *факторпространства* и *подпространства* соответственно. Так что, казалось бы, все остальное — дело техники.

Но вот тут-то и начинаются “лишние” проблемы. Их суть состоит в следующем. Считается, что понятие *математическое пространство* относится к так называемым “*общематематическим* понятиям” (наряду с такими *производными* понятиями, как *подпространство*, *факторпространство*, *изоморфизм*). Поэтому естественно ожидать, что должно быть известно, как строить подпространства и факторпространства *произвольных*

математических пространств. Но не тут-то было! Оказывается, что не только это неизвестно, но неизвестно даже, что такое вообще *произвольное математическое пространство* (несмотря на большое количество известных частных случаев).

Такое положение объясняется тем, что как традиционная, так и современная математика (а также логика и метаматематика) не восприняли *общий* подход к математике, предложенный Н. Бурбаки в знаменитом трактате «Элементы математики». В первом томе трактата, которому автор присвоил вводящее в заблуждение название «Теория множеств» [18], фактически излагается *метатеория математики*, которая является ключом к пониманию языка, архитектуры и способа изложения трактата. А наиболее важный раздел первого тома — *Теория структур* [18, гл. IV].

Неприятие подхода Бурбаки проявилось, в частности, в том, что *нигде* в традиционной или современной математике (кроме самого трактата «Элементы математики») не используется введенное Н. Бурбаки *общее* понятие математической *структуры* и, в особенности, понятие *рода структуры* [18, гл. IV, § 1, п. 4]. Вместо этого в каждом разделе математики (и в метаматематике) до сих пор используются свои “местные” понятия математической структуры, которые не стыкуются между собой. Это значит, что каждая математическая теория должна была *самостоятельно* определять все основные и производные “общематематические понятия” и даже понятие *изоморфизма* (без которого нельзя построить ни одно из производных понятий). Вот что написал по этому поводу Бурбаки:

«...каждая новая аксиоматическая теория естественно приводила к определению понятия изоморфизма; но только с современным понятием структуры было окончательно признано, что каждая структура несет в себе понятие изоморфизма и нет никакой нужды давать особое определение изоморфизма для каждого рода структуры» [18, с. 323] (или — в другом переводе — [19, с. 35]).

Использование “местных” разновидностей математических структур в свою очередь вело и к “местным” разновидностям математических пространств. Известные примеры трудно даже перечислить. Тем не менее упомянутые выше пары (X, p) и (X, Γ) среди этих примеров не числятся, и они также не подпадают под определения каких-либо “местных” разновидностей математических пространств. Следовательно, современная математика не дает никаких оснований для отнесения пар (X, p) и (X, Γ) к категории математических пространств. Откуда сразу следует, что и производные пространства (факторпространства и подпространства) от них получить нельзя...

Хотя все это очень печально (точнее — смешно), но здесь и закончились бы наши поиски аналогии, если бы не теория структур Н. Бурбаки, содержащая *ключевое* понятие *рода структуры*. Из этой теории следует, что как PV p , так и возрастающий функционал Γ , представляют собой разновидности структур на множестве X . И хотя *род структуры* p отличается от *рода структуры* Γ , имеется целый ряд стандартных процедур, применимых к структурам *любого рода* (что и является основой для искомой аналогии). К сожалению, однако, сам Бурбаки не ввел понятие *математическое пространство*. И это стало, хотя и не самой главной, но одной из причин исключительной тяжеловесности языка, на котором изложена теория структур. Действительно, гораздо удобнее вместо *рода структуры* говорить

о *роде пространства*. Поэтому здесь дается формальное определение понятия *математическое пространство* (с одиночным носителем).

Определение 1. Пусть X — абстрактное множество и \mathfrak{S} — заданная на нем математическая структура в смысле Н. Бурбаки [18, рез, § 8, п. 2]. Тогда пару (X, \mathfrak{S}) будем называть **математическим пространством**, а множество X — носителем пространства (X, \mathfrak{S}) . ■

Важно понимать, что если (X, \mathfrak{S}) — математическое пространство, то род структуры \mathfrak{S} однозначно характеризует род пространства (X, \mathfrak{S}) . Но если тому и другому роду присваивают имена, то *имя рода пространства* (X, \mathfrak{S}) должно (по чисто лингвистическим причинам) отличаться от *имени рода структуры* \mathfrak{S} . А это как раз и позволяет сделать язык изложения более выразительным.

Теперь, наконец, мы имеем все основания для отнесения пар (X, p) и (X, Γ) к категории математических пространств (со всеми вытекающими последствиями). Пары вида (X, p) (которые являются одним из наиболее простых примеров математических пространств) мы будем называть **пространствами вероятностей** (понятие *пространство вероятностей* следует отличать от известного понятия *вероятностное пространство*). А пары вида (X, Γ) (о которых шла речь выше) названы **пространствами неопределенности**.

Отсутствие в математике общего понятия математического пространства очень мало волнует специалистов, работающих в устоявшихся разделах математики. Однако, если по какой-то причине Вам понадобится построить *новую* аксиоматическую теорию, т.е. теорию таких пространств (X, \mathfrak{S}) , что соответствующий им род структуры еще никем не изучался, то Вы попадете в ситуацию, которая описана выше, и у Вас просто не будет другого выхода, кроме обращения к определению понятия математического пространства и к теории структур Н. Бурбаки [18, гл. IV].

При разработке ТСН как раз возникла такая ситуация — создание необходимого для ТСН аппарата неопределенности потребовало построения аксиоматической теории *рода пространств неопределенности*. И эту теорию пришлось строить *с самого начала*. В статьях [7, 20] показано, как такую работу следует начинать — с построения соответствующего рода структуры и *вывода* понятия изоморфизма (рассматриваемых математических пространств). В статьях [21, 22] показано, что следует делать дальше — выбрать *систему морфизмов* и построить *образы* пространств (в частности — *факторпространства* и *проекции* двумерных пространств) и их прообразы (в частности — *подпространства*).

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ «КВАНТОВАНИЕ»

Мы теперь переходим к рассмотрению конкретных примеров “настоящих” преобразований информации. Квантование — одно из наиболее простых преобразований. Оно имеет следующий смысл. Пусть X есть множество возможностей исходной ситуации неопределенности. Бывают случаи, когда мы не хотим (или не умеем) отличать некоторые элементы множества X от некоторых других его элементов. И иногда оказывается возможным выделить такие подмножества множества X , внутри которых элементы неразличимы. Если набор всех таких *подмножеств неразличимости* образует *разбиение* множества X , то это разбиение можно рассматривать как новое множество возможностей.

Покажем способ описания этого преобразования на примере вероятностной ситуации неопределенности, которая описывается пространством вероятностей (X, p) . Пусть \mathcal{X} — разбиение множества X , которое получилось в результате выделения в множестве X классов неразличимости (они и стали элементами множества \mathcal{X}). Тогда можно построить новое пространство вероятностей вида (\mathcal{X}, ρ) , где РВ ρ характеризуется следующим условием: для каждого класса неразличимости $A \in \mathcal{X}$ имеет место

$$\rho(A) = \sum_{a \in A} p(a). \quad (6)$$

Будем говорить, что ситуация неопределенности, описываемая построенным выше пространством вероятностей (\mathcal{X}, ρ) , является результатом **квантования** (относительно разбиения \mathcal{X}) исходной ситуации (описываемой пространством (X, p)).

Таким образом, нахождение способа описания преобразования *квантование* для вероятностных ситуаций неопределенности оказалось очень простым. Однако нельзя сказать то же самое о других типах неопределенности. Так, (как уже было отмечено в разд. 5) для получения адекватного описания этого преобразования в общем случае потребовалось привлечь *теорию структур* Н. Бурбаки [18, гл. IV].

Можно показать, что пространство вероятностей (\mathcal{X}, ρ) является *факторпространством* пространства (X, p) . Но это можно сделать тоже только путем привлечения теории структур Бурбаки. Для каждого $x \in X$ существует единственное множество $A \in \mathcal{X}$, такое, что $x \in A$. Это множество A (класс из разбиения \mathcal{X} , в который попал элемент x) обозначим $[x]_{\mathcal{X}}$. Существует так называемое *каноническое отображение*

$$\xi = x \mapsto [x]_{\mathcal{X}} \diamond X \quad (7)$$

множества X на множество \mathcal{X} , которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие класс $[x]_{\mathcal{X}}$.

С помощью канонического отображения ξ можно (опираясь на теорию структур) построить факторпространство (когда оно существует) *любого* математического пространства (X, \mathfrak{S}) . Для этого достаточно построить *образ* пространства (X, \mathfrak{S}) при отображении ξ [18, гл. IV, § 2, п. 6]. Поскольку построенное выше пространство вероятностей (\mathcal{X}, ρ) является образом пространства (X, p) при отображении ξ , оно является факторпространством пространства (X, p) .

1. Информационный аспект квантования. Приведенное выше выражение (2), показывает способ вычисления количества собственной информации $I_p(x)$ каждого элемента x пространства вероятностей (X, p) . Легко построить аналогичное выражение для количества собственной информации $I_{\rho}(A)$ каждого элемента $A \in \mathcal{X}$ нового пространства вероятностей (\mathcal{X}, ρ) :

$$I_{\rho}(A) = \log \frac{1}{\rho(A)}. \quad (8)$$

Можно показать, что для любой пары (x, A) , такой, что $A \in \mathcal{X}$ и $x \in A$, числа $I_p(x)$ и $I_{\rho}(A)$ находятся в следующем отношении:

$$I_p(x) \geq I_{\rho}(A). \quad (9)$$

Неравенство (9) показывает, что количество собственной информации при квантовании не возрастает. Это представляется вполне логичным.

Теперь запишем (по аналогии с (5)) выражение для *меры неопределенности* квантованной ситуации неопределенности, описываемой факторпространством (\mathcal{X}, ρ) :

$$G(\mathcal{X}, \rho) = \mathbf{E} I_{\rho} = \sum_{A \in \mathcal{X}} \rho(A) \cdot I_{\rho}(A). \quad (10)$$

А из выражений (5), (9) и (10) нетрудно получить следующее неравенство:

$$G(X, p) \geq G(\mathcal{X}, \rho). \quad (11)$$

2. Мера интенсивности квантования. Теперь можно предложить следующую меру *внешней информации*:

$$E(X, p | \mathcal{X}) = G(X, p) - G(\mathcal{X}, \rho). \quad (12)$$

Число $E(X, p | \mathcal{X})$ будем называть **мерой интенсивности квантования** (или **количеством внешней информации квантования**) пространства вероятностей (X, p) (относительно разбиения \mathcal{X}).

Из неравенства (11) следует, что, каким бы ни было разбиение \mathcal{X} , имеет место неравенство

$$E(X, p | \mathcal{X}) \geq 0. \quad (13)$$

Неслучайно для обозначения внутренних и внешних мер информации выбраны буквы I и E . Так, I есть начальная буква не только слова «information», но и таких слов, как «inner» (внутренний), «inside» (внутри), «interior» (внутренность), а E — это начальная буква таких слов, как «external», «exterior» (внешний, наружный), «externals» (внешность).

Что же измеряет мера интенсивности квантования $E(X, p | \mathcal{X})$? Нетрудно догадаться, что величина $E(X, p | \mathcal{X})$ выражает меру той информации, которая вследствие квантования была *потеряна*. Эта информация как бы осталась внутри классов неразличимости.

3. Примеры. Для того чтобы лучше познакомиться с мерой $E(X, p | \mathcal{X})$, рассмотрим два предельных частных случая, когда разбиение \mathcal{X} тривиально: 1) каждый класс разбиения \mathcal{X} содержит только один элемент множества X и 2) разбиение \mathcal{X} содержит только один класс (и этот класс, конечно, совпадает с множеством X). Формально первый случай изображается так: $\mathcal{X} = \{\{x\} : x \in X\}$, а второй случай — так: $\mathcal{X} = \{\{X\}\}$.

Нетрудно понять, что в первом случае квантование является чисто фиктивным, поскольку в множестве \mathcal{X} имеется в точности столько же элементов, сколько было в множестве X (т.е. *мощности* множеств X и \mathcal{X} совпадают, что формально мы будем изображать так: $|\mathcal{X}| = |X|$). А это значит, что никакая информация не терялась. Действительно, можно показать, что в этом случае имеют место равенства $G(X, p) = G(\mathcal{X}, \rho)$ и $E(X, p | \mathcal{X}) = 0$.

Второй же случай соответствует настолько “радикальному” квантованию, что фактически вся информация теряется, т.е. остается внутри классов неразличимости. Действительно, ввиду того, что множество \mathcal{X} в этом случае состоит только из одного класса, мера неопределенности $G(\mathcal{X}, \rho)$ должна равняться нулю, а тогда получится, что $E(X, p | \mathcal{X}) = G(X, p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Словарь по кибернетике*. — К.: Гл. ред. УСЭ, 1979. — 624 с.
2. *Энциклопедия кибернетики*. — К.: Гл. ред. УСЭ, 1974. — 1. — 608 с.; 2. — 624 с.
3. *Глушков В.М.* Мышление и кибернетика. — М.: Знание, 1966. — 32 с.
4. *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. — 3-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 512 с.
5. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд. ин. лит., 1963. — 830 с.
6. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. — М.: Изд. ин. лит., 1959. — 432 с.
7. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности и изоморфизм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 4. — С. 128–143.
8. *Дидук Н.Н.* Сигнальные пары и их применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 2. — С. 128–143.
9. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 168 с.
10. *Скоруход А.В.* Вероятность вокруг нас. — К.: Наук. думка, 1980. — 196 с.
11. *Дидук Н.Н.* Энтропия дискретных пространств неопределенности // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1983. — № 1. — С. 63–65.
12. *Дидук Н.Н.* Теория неопределенности: назначение, первые результаты и перспективы. I, II // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 4. — С. 160–168; — № 5. — С. 165–173.
13. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 272 с.
14. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник. — 2-е изд. испр. и доп. — М.: Наука, 1975. — 720 с.
15. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. — 392 с.
16. *Дидук Н.Н.* Информационные пространства. Понятия собственной информации и неопределенности // Кибернетика. — 1986. — № 4. — С. 74–80.
17. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности. Энтропия и теорема кодирования // Кибернетика. — 1984. — № 2. — С. 69–73.
18. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
19. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. — М.: Изд. ин. лит., 1963. — 292 с.
20. *Дидук Н.Н.* Новая ветвь аппарата неопределенности широкого назначения. Изоморфизм // Управляющие системы и машины. — 2004. — № 2. — С. 13–22.
21. *Дидук Н.Н.* Система морфизмов для пространств неопределенности и ее применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 1. — С. 34–47.
22. *Дидук Н.Н.* Преобразы пространств неопределенности. Простые подпространства // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 1. — С. 127–142.

Поступила 01.06.2009

Стаття надрукована в редакції автора

УМОВИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ І ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

О.М. БАШНЯКОВ, В.В. ПІЧКУР, І.В. ХІТЬКО

Розглянуто питання побудови оптимальних оцінок множин початкових даних та фазових обмежень для дискретних систем за допомогою методу функцій Ляпунова. Для лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень одержано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда.

ВСТУП

Дослідження, пов'язані з дискретними системами, широко представлені в науковій літературі у зв'язку з розвитком обчислювальних методів і підходів до моделювання та оптимізації складних систем. Крім того, поведінка значної кількості біологічних, соціальних, економічних, технічних систем описуються дискретними системами [1–6]. Результати, пов'язані з аналізом стійкості дискретних систем на основі методу функцій Ляпунова, висвітлено в роботах [7–22]. Важливим із прикладної точки зору є дослідження стійкості на фіксованому інтервалі часу при заданих фазових обмеженнях. Основні підходи до задач практичної стійкості висвітлено в роботах [8, 9, 15, 16, 23–25], у працях [8, 9, 16, 24] розвиваються методи практичної стійкості дискретних систем. При цьому центральною постановкою є задача про знаходження оптимальної множини початкових умов та її оцінка в еліпсоїдальних формах. Такі задачі мають значне прикладне значення. Наприклад, для розрахунку області захоплення частинок у процес прискорення, у системах прискорення і фокусування необхідно застосовувати чисельні алгоритми визначення оптимальних областей практичної стійкості [8, 23].

Робота присвячена побудові оптимальних оцінок множин початкових даних та фазових обмежень для дискретних систем за допомогою методу функцій Ляпунова. Одержано необхідні та достатні умови практичної стійкості, запропоновано підхід до знаходження функції Ляпунова. На основі отриманих тверджень досліджується задача практичної стійкості лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень. Одержано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда, а також оцінки фазових обмежень за умови поділу.

Мета роботи — побудова необхідних і достатніх умов практичної стійкості дискретних систем із використанням функції Ляпунова, а також знаходження оптимальних оцінок множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда, і оцінок фазових обмежень у задачі практичної стійкості лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень.

ТЕОРЕМА ПРО ПРАКТИЧНУ СТІЙКІСТЬ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Розглянемо дискретну систему

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

де $f_k(x): D \rightarrow D$ — n -вимірні вектор-функції, $D \subset R^n$. Позначимо $x(k) = x(k, x_0)$ — розв’язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$, $k = 0, 1, \dots, N$. Нехай $G_0 \subset D$ — множина початкових умов, $\Phi_k \subset D$, $k = 0, 1, \dots, N$ — множина фазових обмежень, $0 \in \text{int } \Phi_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, $f_k(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Означення 1 [8]. Нульовий розв’язок системи (1) називається $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$ -стійким (внутрішньо $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$ -практично стійким), якщо $x(k, x_0) \in \Phi_k$, для всіх $x_0 \in G_0$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких виконується означення 1, позначимо G_* .

Лема 1. Якщо для функції $f: D \rightarrow D$, $D \subset R^n$ виконується умова $a\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$, $a > 0$, $x, y \in D$, то функція f є ін’єктивною в області D .

Доведення. Нехай існує $z \in D$ таке, що $f(x) = z$, $f(y) = z$ та $x \neq y$. Тоді $0 = \|z - z\| = \|f(x) - f(y)\| \geq a\|x - y\|$. Звідси отримуємо $x = y$. Лему доведено.

Теорема 1. Нехай Φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$ — компакти, функції $f_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ неперервні в області D і знайдуться такі додатні константи a_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, що $a_k\|x - y\| \leq \|f_k(x) - f_k(y)\|$, $x, y \in D$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Для того, щоб система (1) була $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$ -стійкою необхідно і достатньо, щоб існували функції Ляпунова $V_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N$ такі, щоб справджувалися співвідношення:

$$G_0 \subseteq \{x \in R^n : V_0(x) \leq 1\}, \quad (2)$$

$$\{x \in R^n : V_k(x) \leq 1\} \subseteq \Phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$V_{k+1}(f_k(x)) \leq V_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Доведення. Достатність [8]. Доведемо від супротивного. Нехай існують функції $V_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N$, що задовольняють умовам (2)–(4), але для розв’язку системи (1) порушується означення 1. Тоді знайдуться $\bar{x}_0 \in G_0$, $0 \leq \bar{k} \leq N$ такі, що $x(\bar{k}, \bar{x}_0) \notin \Phi_{\bar{k}}$. Згідно з (3) $V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) > 1$. Враховуючи (4), отримуємо $1 < V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) \leq V_{\bar{k}-1}(x(\bar{k}-1, \bar{x}_0)) \leq \dots \leq V_0(x(0, \bar{x}_0))$. З умови (2) маємо $\bar{x}_0 \notin G_0$, що суперечить припущенню.

Необхідність. Оскільки Φ_k , $k=0,1,\dots,N$ — компакти, то оптимальна за включенням множина початкових умов G_* є компакт. Нехай $\alpha(\cdot)$ — визначальна функція множини G_* . Це означає, що $\alpha(\cdot)$ є неперервною функцією з R^n в R^1 , функція $\alpha(x) < 1$ при $x \in \text{int } G_*$, $\alpha(x) = 1$ при $x \in \partial G_*$ та $\alpha(x) > 1$, якщо $x \notin G_*$ [23]. З леми 1 випливає, що існують обернені функції $\psi_k(x)$, $k=1,\dots,N$ такі, що $x(k-1) = \psi_k(x(k))$, $k=1,2,\dots,N$. Введемо функцію $\psi_0(x) = x$. Тоді $x_0 = x(0) = \varphi_k(x) = \psi_0(\psi_1(\dots(\psi_k(x))\dots))$, $k=0,1,\dots,N$.

Виберемо функції Ляпунова у вигляді $V_k(x) = \alpha(\varphi_k(x))$, $k=0,1,\dots,N$ і покажемо, що вони задовольняють умовам (2)–(4). Для довільного $x_0 \in G_0 \subseteq G_*$ маємо $V_0(x_0) = \alpha(\varphi_0(x_0)) = \alpha(x_0) \leq 1$. Отже, умова (2) виконується. Справджується рівність $V_k(x(k, x_0)) = \alpha(x_0)$, $k=0,1,\dots,N$, тому умова (4) теж виконується. Припустимо, що існують $\bar{x}_0 \in G_0$ та $0 \leq \bar{k} \leq N$ такі, що $V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) \leq 1$, але $x(\bar{k}, \bar{x}_0) \notin \Phi_{\bar{k}}$. Тоді $V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) = \alpha(\varphi_{\bar{k}}(x)) = \alpha(\bar{x}_0) \leq 1$. За означенням визначальної функції $\bar{x}_0 \in G_*$, а отже $x(k, \bar{x}_0) \in \Phi_k$, $k=0,1,\dots,N$. Це суперечить припущенню. Отже, умова (3) виконується. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо фазові обмеження Φ_k , $k=0,1,\dots,N$ — компакти, то для дослідження $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$ -стійкості можна використовувати функцію Ляпунова у вигляді:

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min_{y \in \partial G_0} \|\varphi_k(x) - y\|, & x \in \{z : \varphi_k(z) \in D \setminus G_*\}, \\ 1 - \min_{y \in \partial G_0} \|\varphi_k(x) - y\|, & x \in \{z : \varphi_k(z) \in G_*\}. \end{cases}$$

УМОВИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ У ФОРМІ МНОГОКУТНИКА

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$x(k+1) = A_k x(k), \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (5)$$

де A_k — невироджені матриці розмірності $n \times n$. Нехай множина початкових даних обирається з класу

$$W_1 = \{K_r(0) : r \geq 0\}, \quad (6)$$

де $K_r(0)$ — круг радіуса r із центром у початку координат. Фазові обмеження задаються у формі многокутника

$$\Phi_k = \bigcap_{s=1}^n \{x \in R^n : |l_{sk}, x| \leq 1\}, \quad k=0,1,\dots,N, \quad (7)$$

де $\{l_{sk}\}_{s=1}^n$ — системи лінійно незалежних векторів, $k = 0, 1, \dots, N$. Розв'язок системи (5) можна записати у вигляді $x(k) = Q_k x(0)$, $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $k = 1, \dots, N$. Позначимо $Q_0 = I$, де I — одинична матриця. Оскільки матриці A_k , $k = 0, 1, \dots, N$ — невироджені, то покладемо $\varphi_k(x) = Q_k^{-1} x$, $k = 0, 1, \dots, N$. Згідно з наслідком до теореми 1 функцію Ляпунова можна вибрати у вигляді:

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min_{y \in \{x: \|x\|=r\}} \|Q_k^{-1} x - y\|, & x \in \{z: Q_k^{-1} z \in R^n \setminus G_*\}; \\ 1 - \min_{y \in \{x: \|x\|=r\}} \|Q_k^{-1} x - y\|, & x \in \{z: Q_k^{-1} z \in G_*\}. \end{cases}$$

Оскільки для $k = 0, 1, \dots, N$ виконується

$$\begin{aligned} \min_{y \in \{x: \|x\|=r\}} \|Q_k^{-1} x - y\| &= \left\| Q_k^{-1} x - \frac{Q_k^{-1} x}{\|Q_k^{-1} x\|} r \right\| = \left| \|Q_k^{-1} x\| - r \right| = \\ &= \begin{cases} \|Q_k^{-1} x\| - r, & x \in \{z: Q_k^{-1} z \in R^n \setminus G_*\}, \\ r - \|Q_k^{-1} x\|, & x \in \{z: Q_k^{-1} z \in G_*\}, \end{cases} \end{aligned}$$

то функція Ляпунова записується так

$$V_k(x) = 1 - r + \|Q_k^{-1} x\|, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

Знайдемо оптимальні оцінки для множини початкових даних, використовуючи (8) та теорему 1. Для цього визначимо параметр r так, щоб траєкторії системи задовольняли фазові обмеження $|\langle l_{sk}, x \rangle| \leq 1$, $s = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, N$, при $V_k(x) \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, N$. З $V_k(x) \leq 1$ випливає $\|Q_k^{-1} x\| \leq r$, $k = 0, 1, \dots, N$. Звідси

$$\begin{aligned} |\langle l_{sk}, x \rangle| &= |\langle l_{sk}, Q_k Q_k^{-1} x \rangle| = |\langle Q_k^T l_{sk}, Q_k^{-1} x \rangle| \leq r \|Q_k^T l_{sk}\| = \\ &= r \sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (9)$$

Для того, щоб система була $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$ -стійкою достатньо, необхідно виконання такої нерівності $r \sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle} \leq 1$, де $k = 0, 1, \dots, N$, $s = 1, 2, \dots, n$, тобто $r \leq \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,n} \frac{1}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}}$.

$$r \leq \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,n} \frac{1}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}}.$$

Таким чином має місце твердження.

Теорема 2. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (5) у класі (6) при фазових обмеженнях (7) має вигляд

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,n} \frac{1}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, $Q_0 = I$.

Нехай множина початкових даних обирається в класі еліпсоїдів

$$W_2 = \{E_r(0, B) : r \geq 0\}, \quad (10)$$

де $E_r(0, B) = \{z : \langle Bz, z \rangle \leq r^2\}$, B — додатно визначена симетрична матриця розмірності $n \times n$. Тоді функція Ляпунова записується у вигляді:

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min_{y \in \{x : \langle Bx, x \rangle = r^2\}} \left\| B^{\frac{1}{2}} (Q_k^{-1} x - y) \right\|, & x \in \{x : Q_k^{-1} x \in R^n \setminus G_*\}, \\ 1 - \min_{y \in \{x : \langle Bx, x \rangle = r^2\}} \left\| B^{\frac{1}{2}} (Q_k^{-1} x - y) \right\|, & x \in \{x : Q_k^{-1} x \in G_*\}. \end{cases} =$$

$$= 1 - r + \left\| B^{\frac{1}{2}} Q_k^{-1} x \right\|,$$

$k = 0, 1, \dots, N$. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості в цьому випадку має вигляд

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,n} \frac{1}{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}}.$$

Розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$x(k+1) = A_k x(k) + b_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (11)$$

де A_k — невироджені матриці $n \times n$, b_k — вектор із R^n , $k = 0, 1, \dots, N-1$ при фазових обмеженнях (7). Знайдемо оптимальні оцінки для множини початкових даних у класі (6).

Розв'язок системи (11) можна записати у вигляді:

$$x(k) = Q_k x(0) + g_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

де $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $g_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1} A_{k-2} \dots A_j b_{j-1} + b_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Позначимо $Q_0 = I$, $g_0 = 0$. Оскільки $0 \in \text{int } \Phi_k$, то $|\langle l_{sk}, g_k \rangle| < 1$, $s = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, N$, і функцію Ляпунова можна вибрати у вигляді:

$$V_k(x) = 1 - r + \left\| Q_k^{-1} (x - g_k) \right\|, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Таким чином отримаємо твердження.

Теорема 3. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (11) в класі (6) при фазових обмеженнях (7) має вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,n} \frac{1 - |\langle l_{sk}, g_k \rangle|}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $g_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1} A_{k-2} \dots A_j b_{j-1} + b_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, $Q_0 = I$, $g_0 = 0$.

Зауважимо, що якщо для системи (11) множина початкових даних обирається в класі (10), то функція Ляпунова записується у вигляді:

$$V_k(x) = 1 - r + \left\| B^{1/2} Q_k^{-1} (x - g_k) \right\|, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Оптимальна оцінка множини початкових умов у цьому випадку записується так

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,n} \frac{1 - |\langle l_{sk}, g_k \rangle|}{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}}.$$

ОПУКЛІ ФАЗОВІ ОБМЕЖЕННЯ

Розглянемо випадок, коли фазові обмеження задаються опуклими компактними множинами $\Phi_k \subset R^n$, $k = 0, 1, \dots, N$. Тоді фазові обмеження можна подати у вигляді:

$$\Phi_k = \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x \in R^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi_k, \psi) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (12)$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера з центром в початку координат, $c(\Phi_k, \psi)$ — опорна функція множини Φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$ [7]. Оскільки $0 \in \text{int } \Phi_k$, то $c(\Phi_k, \psi) > 0$, $k = 0, 1, \dots, N$ для всіх $\psi \in S_1(0)$, тому фазові обмеження можна записати у вигляді:

$$\Phi_k = \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x \in R^n : \left\langle x, \frac{\psi}{c(\Phi_k, \psi)} \right\rangle \leq 1 \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Тоді, аналогічно до теорем 2, 3, одержуємо такі твердження.

Теорема 4. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (5) у класі (6) при фазових обмеженнях (12) має вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi)}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T \psi, \psi \rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, $Q_0 = I$.

Теорема 5. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (11) у класі (6) при фазових обмеженнях (12) має вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi) - |\langle \psi, g_k \rangle|}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T \psi, \psi \rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $g_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1} A_{k-2} \dots A_j b_{j-1} + b_k$, $k=1, 2, \dots, N$, $Q_0 = I$, $g_0 = 0$.

Якщо для систем (5) та (11) множина початкових даних вибирається в класі (10), то оптимальні оцінки множини практичної стійкості мають вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi)}{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T \psi, \psi \rangle}}$$

та

$$r^* = \min_{k=0,1,\dots,N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi) - |\langle \psi, g_k \rangle|}{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T \psi, \psi \rangle}}$$

відповідно.

ОЦІНКА ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

Розглянемо лінійну дискретну систему (5). Множина початкових даних має вигляд:

$$G_0 = K_r(0). \quad (13)$$

Фазові обмеження належать класу

$$W_3 = \{\Phi_k(p) : p \geq 0, k = 0, 1, \dots, N\}, \quad (14)$$

де $\Phi_k(p) = \bigcap_{s=1}^n \{x \in R^n : |l_{sk}, x| \leq p\}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Необхідно знайти мінімальне значення параметра p таке, щоб траєкторії системи, які виходять із множини початкових даних (13), задовольняли фазовим обмеженням з класу W_3 .

Розглянемо функції Ляпунова (8) і визначимо параметр p так, щоб $|l_{sk}, x| \leq p$, $s = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, N$ при $V_k(x) \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, N$. З нерівності (9) випливає, що для $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$ -стійкості системи (5) достатньо, щоб $r \sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle} \leq p$, $k = 0, 1, \dots, N$, $s = 1, 2, \dots, n$. Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 6. Оптимальна оцінка множин фазових обмежень системи (5) з множиною початкових даних (13) у класі (14) має вигляд $p^* = \max_{k=0,1,\dots,N} \max_{s=1,2,\dots,n} r \sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}$, де $Q_k = A_{k-1} \dots A_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, $Q_0 = I$.

Якщо множина початкових даних вибирається в класі (10), то оптимальна оцінка множин фазових обмежень системи (5) має вигляд

$$p^* = \max_{k=0,1,\dots,N} \max_{s=1,2,\dots,n} r \sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}.$$

Нехай опорні функції множин фазових обмежень задовольняють умові поділу $c(\Phi_k(p), \psi) = p m_k(\psi)$, $m_k : R^n \rightarrow R$ — неперервні функції, $k = 1, 2, \dots, N$, $p \geq 0$. Тоді справджується рівність

$$\begin{aligned} \Phi_k(p) &= \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \{x \in R^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi_k(p), \psi)\} = \\ &= \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \{x \in R^n : \langle x, \psi \rangle \leq p m_k(\psi)\} = \\ &= \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x \in R^n : \left\langle x, \frac{\psi}{m_k(\psi)} \right\rangle \leq p \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Якщо для лінійної дискретної системи (11) множина початкових даних обирається в класі (10), то оптимальна оцінка множин фазових обмежень має вигляд

$$p^* = \max_{k=0,1,\dots,N} \max_{\psi \in S_1(0)} r \frac{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T \psi, \psi \rangle}}{m_k(\psi) - |\langle \psi, g_k \rangle|}.$$

ВИСНОВКИ

У роботі отримано необхідні та достатні умови практичної стійкості дискретних систем із використанням функції Ляпунова. Вони мають конструктивний характер і дозволяють вказати шлях до знаходження оптимальної функції Ляпунова. На основі отриманих умов для задачі практичної стійкості лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень отримано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда. При цьому знайдено оптимальні функції Ляпунова в аналітичній формі. Розроблений підхід застосовано до задачі оцінки фазових обмежень за умови, що початкова множина вибирається у формі кулі або еліпсоїда, а фазові обмеження є опуклими компактами, що неперервно залежить від параметра і задовольняють умову поділу. Одержані результати мають алгоритмічну спрямованість.

ЛІТЕРАТУРА

1. Dash A.T., Cressma R. Polygamy in human and animal species // *Mathematical Biosciences*. — 1988. — **88**, № 1. — P. 49–456.
2. Hsieh Y. The phenomenon of unstable oscillation in population models // *Mathematical and computer Modelling*. — 1988. — **10**, № 6. — P. 429–435.
3. Rondoni L. Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval // *Journal of Mathematical Physics*. — 1993. — **34**, № 11. — P. 5238–5251.

4. *Sedaghat H.* A class of Nonlinear second order difference equations from macroeconomics // *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*. — 1997. — **29**, № 5. — P. 593–603.
5. *Simonovits A.* Chaotic dynamics of economic systems // *Sigma*. — 1985. — **18**. — P. 267–277.
6. *Tchuente M., Tindo G.* Suites generees par une equation neuronale a memoire // *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*. — 1993. — **317**, № 6. — P. 625–630.
7. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. шк., 2001. — 239 с.
8. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
9. *Гаращенко Ф.Г., Куценко И.А.* Практическая устойчивость дискретных процессов, оценки и их оптимизация // *Проблемы управления и информации*. — 1997. — № 5. — С. 50–61.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 309 с.
11. *Antsaklis P., Michel A.* *Linear Systems*. — Boston: Birkhäuser, 2006. — 670 p.
12. *Basson M., Fogarty M.J.* Harvesting in discrete-time predator-prey systems // *Mathematical Biosciences*. — 1997. — **141**, № 1. — P. 41–47.
13. *Galor O.* *Discrete Dynamical Systems*. — Berlin: Springer, 2007. — 158 p.
14. *Hespanha J., Liberzon D., Teel A.* Lyapunov conditions for input-to-state stability of impulsive systems // *Automatica*. — 2008. — **44**, Issue 11. — P. 2735–2744.
15. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* *Practical stability of nonlinear systems*. — Singapore: World Scientific, 1990. — 207 p.
16. *Martynyuk A.A.* Stability analysis of discrete systems // *International Applied Mechanics*. — 2000. — **36**, № 7. — P. 3–34.
17. *Martynyuk A.A.* *Stability by Lyapunov's matrix function method with applications*. — NY: Marcel Dekker, 1998. — 276 p.
18. *Michel A., Hou L., Liu D.* *Stability of dynamical systems*. — Boston: Birkhäuser, 2008. — 515 p.
19. *Michel A., Miller R.* *Qualitative analysis of large scale dynamical systems*. — AP, 1977. — 307 p.
20. *Potzsche C.* *Geometric theory of discrete Nonautonomous dynamical systems*. — Berlin: Springer, 2010. — 430 p.
21. *Xiushan C., Xiaodong W., Ganyun L.* Stabilization of discrete Nonlinear systems based on control Lyapunov functions // *Journal of Systems Engineering and Electronics*. — 2008. — **19**, Issue 1. — P. 131–133.
22. *Zhong L., Lin H.* Some problems of second method of Lyapunov. In discrete systems // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 1988. — **9**. — P. 1175–1181.
23. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація. — К.: Київський ун-т, 2008. — 383 с.
24. *Гаращенко Ф.Г., Башняков А.Н.* Анализ сходимости итерационных процедур на основе методов практической устойчивости // *Проблемы управления и информатики*. — 1999. — № 2. — С. 15–25.
25. *Мартинюк А.А.* *Практическая устойчивость движения*. — К.: Наук. думка, 1983. — 248 с.

Надійшла 21.10.2010

ДИСКРЕТНЕ ФУР'Є-ПРОДОВЖЕННЯ ЯК АЛГОРИТМ ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Д.М. ЧАБАНЕНКО

Запропоновано методика прогнозування часових рядів на основі виявлення частотного спектра. Методика полягає в апроксимації часового ряду на проміжку навчання аналітичною функцією, яка містить тренд та комбінацію гармонічних коливань. Для оцінювання параметрів моделі використовуються нелінійні методи оптимізації. За допомогою експериментальної апробації показано ефективність запропонованого методу для прогнозування рядів фінансово-економічної динаміки.

ВСТУП

Прогнозування часових рядів економічної динаміки є надзвичайно актуальною задачею в дослідженні складних фінансово-економічних систем. Специфіка фінансових часових рядів полягає в наявності стилізованих фактів [1]: негаусівський розподіл прибутковостей, кластеризація волатильності, флікер-шум ($1/f$ — шум) та ін., що вказує на складність структури системи, що досліджується. Такі часові ряди не завжди адекватно відтворюються сучасними методами прогнозування. Тому питання розробки принципово нових підходів до вирішення задачі прогнозування фінансово-економічних часових рядів є актуальними.

Мета роботи — побудова рядів фінансово-економічної динаміки прогнозної моделі на основі нелінійної апроксимації часового ряду сумою гармонічних функцій.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ: ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Задача прогнозування часових рядів різної природи, зокрема фінансово-економічних, є надзвичайно актуальною з огляду на кількість публікацій з цієї тематики. У роботі розглядаються підходи до побудови моделі трендової складової часового ряду та екстраполяції отриманої аналітичної функції в часі [2], моделювання процесу, що породжує ряд на основі технології нейронних мереж [3], побудова багатофакторних регресійних [4] чи авторегресійних [5] моделей та їх удосконалення — метод групового урахування аргументів (МГУА) та його нечіткий варіант [6]. На відміну від зазначених вище методик, у цій роботі запропоновано методи прогнозування часових рядів на основі частотного спектра.

Наявність характерної циклічної поведінки економічних систем було помічено та пояснено М.Д. Кондратьєвим та рядом інших видатних еконо-

містів [7]. Їхні роботи дали поштовх для цього дослідження, основною ідеєю якого є ідентифікація та моделювання циклічних коливань у фінансово-економічних часових рядах та практичне використання побудованих моделей під час прогнозування часових рядів фінансово-економічної природи.

АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЩОДО ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Відома значна кількість робіт, в яких пропонується досліджувати частотний спектр сигналу та будувати прогноз на основі виявлених частотних закономірностей.

Методи, які засновані на перетворенні Фур'є, дають можливість аналізувати амплітудно-частотну характеристику часового ряду, але не дають можливості виразити у вигляді окремої змінної фази сигналу, яка є важливою для побудови прогнозу. Також частота сигналу, що аналізується, може бути лише кратною проміжку дискретизації, що не дає можливість налаштуватися на частоту, яка не є кратною проміжку дискретизації. Під час використання достатньо великої кількості гармонік, проблема вирішується, але такий підхід, на думку автора, не є оптимальним [8].

Вейвлет-аналіз [9] дає інформацію як про амплітуди сигналу, так і про фазу (зміщення дочірнього вейвлета) та частково долає першу із зазначених вище проблем. Але має місце збитковість інформації в перетворенні, тому що зберігається не основна частота, а Фур'є-спектр цієї частоти.

У роботі [10] подано алгоритм дискретного Фур'є-продовження в якості методик прогнозування низькочастотної складової часового ряду. Запропонований алгоритм дозволяє подолати зазначені вище проблеми, виділяючи моночастотні гармонічні складові, які легко екстраполюються в часі.

МЕТОДИКА ДИСКРЕТНОГО ФЕР'Є-ПРОДОВЖЕННЯ

В цій роботі подано низькочастотну апроксимуючу функцію виду:

$$y_{\text{abs}}(t) = a + bt + \sum_{i=1}^m c_i \sin(d_i t + e_i), \quad (1)$$

або для відносного масштабу:

$$y_{\text{rel}}(t) = a e^{bt} \prod_{i=1}^m c_i \sin(d_i t + e_i). \quad (2)$$

Значення параметрів моделі $a, b, c_1, c_2, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m, e_1, \dots, e_m$ визначаються за допомогою мінімізації наступного критерію оптимальності (функціонал нев'язки):

$$F(a, b, c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m, e_1, \dots, e_m) = \sum_{i=1}^n (|y_i - y_{\text{abs}}(t_0 + i\Delta t)|)^k, \quad (3)$$

або для відносного варіанта:

$$F(a, b, c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m, e_1, \dots, e_m) = \sum_{i=1}^n \left(\left| 1 - \frac{y_i}{y_{\text{rel}}(t_0 + i\Delta t)} \right| \right)^k, \quad (4)$$

де $\{y_i\}$ — дискретно заданий часовий ряд, що прогнозується, k — параметр. При $k=1$ критерії (3) та (4) відповідають мінімальності відхилень за модулем, при $k=2$ — мінімальності квадратів відхилень, при $k \rightarrow \infty$ зазначені вище критерії відповідають критеріям мінімальності максимальних відхилень реальної та апроксимуючої кривої.

Під час розв'язування задачі оптимізації необхідно задати початкові оцінки параметрів, які оптимізуються, а також накласти обмеження на їх значення. Суттєвим обмеженням необхідно накласти на частоту d_i . У випадку короткої навчальної вибірки можлива ситуація, коли найкраща апроксимація відповідає невеликій частині повного гармонічного коливання. При цьому продовження цієї аналітичної кривої може бути не характерним для ряду, що досліджується. Тому необхідною має бути умова відповідності не менш ніж половини повного коливання довжині навчальної вибірки n , тобто

частота коливання не може бути нижчою величини $\frac{\pi}{n}$, де n — довжина

вибірки навчання. Також обмеження має бути накладене на високі частоти, що пояснюється: по-перше, складністю розв'язування задач оптимізації для високих частот, пов'язаними з наявністю великої кількості хибних локальних мінімумів; по-друге, можливою некоректністю такого наближення на високих частотах. Емпірично було вибрано обмеження 10 коливань за час навчальної вибірки.

Оскільки число параметрів функції F зростає зі збільшенням числа гармонік m , пропонується ітераційна апроксимація по одній (або двох) гармоніках, обчислення залишків та застосування наступної ітерації до більш високочастотних залишків для одночастинного наближення:

$$r_i(t) = r_{i-1}(t) - (a + bt + c_i \sin(d_i t + e_i)), \quad (5)$$

або для m -частинного наближення:

$$r_i(t) = r_{i-1}(t) - \left(a + bt + \sum_{j=1}^m c_{ij} \sin(d_{ij} t + e_{ij}) \right). \quad (6)$$

Мінімізація нелінійного функціонала нев'язки (3) або (4) пов'язана з труднощами, які спричинені існуванням декількох локальних мінімумів функції F у просторі значень параметрів. Для подолання цієї проблеми пропонується здійснювати оптимізацію з використанням декількох початкових оцінок значень параметрів. В якості початкових наближень для коефіцієнтів тренду вибираються коефіцієнти лінійного тренду, визначені за допомогою МНК. Вибирається 2 початкових значення для фази: 0 та π радіан. Це дає можливість уточнити величину фази апроксимуючої функції як в бік збільшення, так і в бік зменшення. Запропоновано декілька початкових значень для частоти, обраних із рівномірною сіткою в інтервалі між мінімальною та максимальною частотою. Емпірично вибрано кількість початкових значень частоти для низькочастотних коливань (перша ітерація, апроксимація безпосередньо вхідного ряду) $nf=3$, для середньочастотних (друга та подальші ітерації) $nf=5$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Результати апроксимації логарифму індексу Доу-Джонса (DJ) наведено на рис. 1. Як видно з рис. 1, точність апроксимації досить висока. Така апроксимація дозволяє виокремити низькочастотну складову ряду, що прогнозується, та отримати стаціонарні з точки зору статистики залишки (рис. 2). Отримані залишки піддаються аналогічній апроксимації, у результаті чого виділяється наступна низькочастотна складова, наявна в ряді. Таким чином, виконуючи деяку кількість ітерацій цієї процедури, отримаємо частотний спектр, який містить виокремлені на кожній ітерації низькочастотні складові.

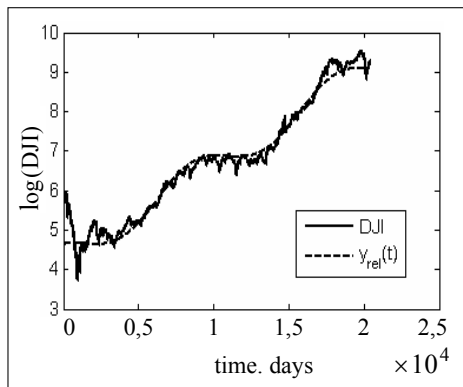


Рис. 1. Індекс Доу-Джонса (ітерація 1)

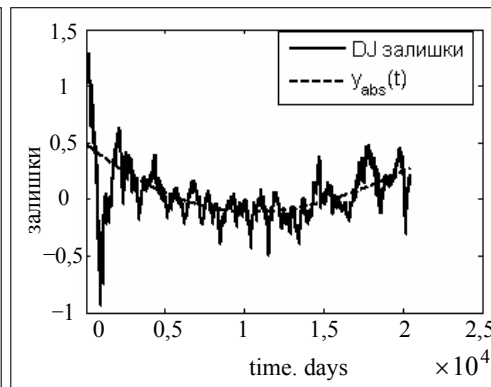


Рис. 2. Залишки та їх повторна апроксимація (ітерація 2)

Цей метод був запропонований авторами в роботі [10] та показав достатньо високі прогностичні можливості на спокійних фінансово-економічних часових рядах, що не містили кризових явищ. Були виявлені погіршення ефективності методики за наявності кризових явищ на навчальній чи прогнозній вибірці, які спричиняли помилки визначення частоти коливань, нестабільність цих частот та різкі падіння величини, що прогнозується. На нашу думку, такі явища можуть бути описані резонансами в коливаннях, що наявні в часовому ряді, для виявлення яких необхідно звернути увагу на випадки накладання декількох коливань.

БАГАТОЧАСТИННЕ НАБЛИЖЕННЯ АПРОКСИМУЮЧИХ ФУНКЦІЙ

Для покращення прогнозних результатів пропонуємо включити в апроксимуючу функцію для однієї ітерації дві синусоїди та проводити оптимізацію, змінюючи параметри одночасно обох гармонік (двочастинне наближення апроксимуючих функцій). Припускається, що такий підхід дозволить виявити складніші закономірності, які були пропущені через накладання частот, так звані «биття».

У табл. 1 наведено параметри функції (1) при одно- та двочастинному наближенні, а також значення середнього відхилення MSE. Даніми для прогнозування є індекс Доу-Джонса та індекс «Standard & Poors 500» (S&P). Цифрою 1 або 2 позначено варіанти одно- чи двочастинного наближення, також вказана перша чи друга гармоніка.

Таблиця 1. Результати двочастинного наближення індексів

Індекс	A	b	c_1	d_1	e_1	c_2	d_2	e_2	MSE
S&P2	$2,75 \cdot 10^{-4}$	3,040	0,0741	$1,62 \cdot 10^{-3}$	5,87	0,383	$6,63 \cdot 10^{-4}$	-0,506	105,28
S&P2 1 гармоніка	$2,75 \cdot 10^{-4}$	3,040	0,0741	$1,62 \cdot 10^{-3}$	5,87	0	0	0	184,11
S&P2 2 гармоніки	$2,75 \cdot 10^{-4}$	3,04	0	0	0	0,383	$6,63 \cdot 10^{-4}$	-0,506	112,46
S&P1	$2,74 \cdot 10^{-4}$	3,04	–	–	–	0,375	$6,61 \cdot 10^{-4}$	-0,483	113,9
S&P1 2 ітер	$1,19 \cdot 10^{-6}$	-0,0066	0,0735	$1,63 \cdot 10^{-3}$	5,78				105,55
DJ2	$2,03 \cdot 10^{-4}$	4,65	0,417	$4,10 \cdot 10^{-4}$	1,30	0,657	$5,94 \cdot 10^{-4}$	2,79	622,56
DJ2 1 гармоніка	$2,03 \cdot 10^{-4}$	4,65	0	0	0	0,657	$5,94 \cdot 10^{-4}$	2,79	1960,47
DJ2 2 гармоніки	$2,03 \cdot 10^{-4}$	4,65	0,417	$4,10 \cdot 10^{-4}$	1,30	0	0	0	1074,11
DJ1	$2,33 \cdot 10^{-4}$	4,31	0,402	$6,64 \cdot 10^{-4}$	2,15	–	–	–	1010,59
DJ1 2i	$-3,13 \cdot 10^{-5}$	1,36	1,18	$9,44 \cdot 10^{-5}$	-2,3	–	–	–	685,8

Порівняння відхилень MSE для двох методів, наведених в табл. 1, показує, що у випадку оцінювання коефіцієнтів одночасно для двох гармонік, мінімальні відхилення отримуються меншими, ніж у випадку повторного застосування апроксимації функції (1) до залишків. Також видно, що аналітичні функції при одно- та двочастинному наближенні не мають спільних частот, що свідчить про неможливість досягнення точності двочастинного наближення ітераційним застосуванням одночастинного.

На рис. 3 та 4 показано графіки апроксимуючих кривих із параметрами, які вказано в табл. 1. Чорними лініями (штриховою та пунктирною) показано криві апроксимації, здійснені згідно з одночастинним наближенням, отримані при першій та другій ітерації. Сірими лініями вказано результати двочастинного наближення: окремо перша ітерація та друга ітерація. Комбінація двох наведених ітерацій із 2-частинним наближенням зображена тонкою суцільною лінією (2 sintrend all).

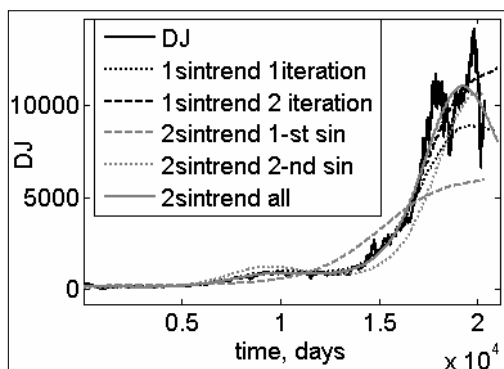


Рис. 3. Прогноз індексу Доу-Джонса

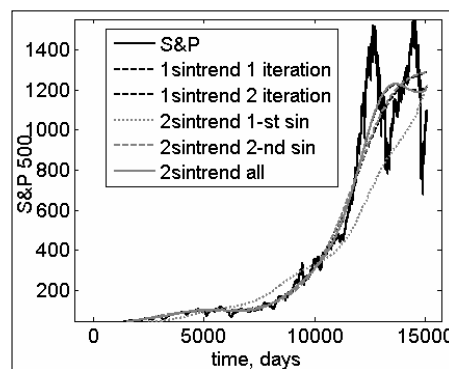


Рис. 4. Прогноз індексу S&P 500

Із рис. 3 та 4 бачимо, що двочастинна апроксимація є точнішою, хоча її частотні складові, взяті окремо, не дають точної апроксимації. Ці результати підтверджують актуальність досліджень, пов'язаних із багаточастинним наближенням гармонічної апроксимуючої функції.

Для прогнозування аналітичну суму гармонічних функцій екстраполюють у часі. Для порівняння прогнозних якостей методів одночастинного та двочастинного наближення, у табл. 2 наведено статистику відхилень прогнозів від реального продовження для різної довжини навчальної вибірки та різних моментів початку прогнозу. У табл. 2 критерієм якості прогнозу вибраний середній квадрат похибки MSE та MAPE:

$$MSE = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2}, \quad (7)$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - y(x_i)|}{\bar{y}} 100\%. \quad (8)$$

Розрахунки прогнозів проводилися для 10-ти ітерацій при одночастинному наближенні та для 5-ти ітерацій при двочастинному. Довжина прогнозів — 1000-денних значень.

Таблиця 2. Порівняння прогнозів одночастинного та двочастинного наближення

Індекс	Довжина навчальної вибірки	Кількість гармонік в аналітичній функції	Похибка оцінювання на вибірці навчання		Похибки прогнозу	
			MSE	MAPE, %	MSE	MAPE, %
DJ	2000	1	60,894	3,1	525,287	18
DJ	2000	2	66,554	3,32	78,312	2,65
S&P	2000	1	3,254	2,27	33,436	10,25
S&P	2000	2	3,428	2,38	9,7438	2,66
DJ	3000	1	65,078	3,5	1520,36	37
DJ	3000	2	63,908	3,56	96,96	2,9
S&P	3000	1	4,531	2,97	50,318	22,3
S&P	3000	2	4,117	2,63	70,298	22,88
DJ	4500	1	56,721	3,93	1170,949	29
DJ	4500	2	53,735	3,883	691,24	24,7
S&P	4500	1	5,537	3,5	67,476	14,5
S&P	4500	2	4,86	3,22	96,584	24,99
DJ	7000	1	63,434	4,8	1533,841	27,4
DJ	7000	2	59,251	4,5	205,006	5,36
S&P	7000	1	7,102	4,3	284,586	35
S&P	7000	2	7,001	4,38	24,182	4,19
DJ	10500	1	71,28	6,1	584,353	12
DJ	10500	2	54,558	4,343	250,468	4,76
S&P	10500	1	11,389	5,5	289,896	28
S&P	10500	2	10,43	5,16	49,838	5,51

Табл. 2 містить усереднені результати прогнозування з різними довжинами навчальної вибірки (з 5-ьох експериментів із кожним індексом та вибраною довжиною навчальної вибірки) для одно- та двочастинного наближення. Ці результати показують, що в більшості випадків (95 %) двочастинне наближення дає кращі прогнози за критерієм середніх квадратів відхилень. Оптимальна довжина вибірки навчання для одночастинного варіанта коливається в межах від 2000 до 3000. При довжинах вибірки навчання 3000 отримані приклади прогнозів із $MAPE = 10,25\%$, що є дещо вищим за результати при інших довжинах вибірки. Це може бути пояснене наявністю постійної частоти коливань, яка залишилась незмінною на прогнозному фрагменті.

ВИСНОВКИ

У цій роботі запропоновано методіку прогнозування часових рядів на основі виявлення частотного спектра. Методика полягає в апроксимації часового ряду на проміжку навчання аналітичною функцією, яка містить тренд та комбінацію гармонічних коливань. Для оцінювання параметрів моделі використовуються нелінійні методи оптимізації для мінімізації функціоналу нев'язки. Експериментальна апробація показала ефективність запропонованого методу для прогнозування рядів фінансово-економічної динаміки. У порівнянні з відомими класичними підходами, ця технологія дає можливість передбачати моменти часу, в яких можлива зміна тенденції часового ряду, що є важливим у роботі трейдерів на фінансових ринках. У випадку високої інформативності отриманих прогнозів, про які говорять відповідність локальних мінімумів часових рядів прогнозу та реального продовження, класичні критерії оцінювання точності прогнозу (MSE , $MAPE$) не дають можливості виокремити цю перевагу методу в порівнянні з іншими методами прогнозування. Тому актуальним залишається питання розробки нових критеріїв точності прогнозів, які, по-перше, адекватно відобразили б співпадіння точок зміни тренду під час прогнозування, а по-друге, дозволили б спростити задачу пошуку оптимальних параметрів моделі. Похибки прогнозів цього методу можуть бути пояснені таким чином: наявністю фінансової кризи на проміжку навчання або прогнозування; похибками моделі частот, що спричиняють невідповідність екстремумів; похибками амплітуд коливань, які не є сталими і можуть збільшуватись під час кризи. Для подолання проблем, які були помічені, пропонується здійснити пошук оптимальних коефіцієнтів одночасно за двома гармоніками (двочастинне наближення) з метою отримання складніших комбінацій гармонічних коливань (накладання частот, «биття»), що покращує ефективність запропонованого методу. Продовженням роботи має бути удосконалення алгоритму для рядів зі змінними частотами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловійов В.М., Шаранов О.Д. Синергетичні та екофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем: монографія. — Черкаси-Брама-Україна, 2010. — 300 с.

2. *Кендалл М., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. — Глав. редакция физ.-математ. лит-ры изд-ва «Наука», 1976. — 375 с.
3. *Ежов А.А., Шумкий С.А.* Нейрокомпьютинг и его применения в экономике и бизнесе. — М.: МИФИ, 1998. — 224 с.
4. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учеб. пособ. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 416 с.
5. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974. — 197 с.
6. *Зайченко Ю.П.* Нечеткий метод группового учета аргументов при неопределенных входных данных // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 4. — С. 40–57.
7. *Кондратьев Н., Яковец Ю., Абалкин Л.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения // Избранные труды. — М.: Экономика, 2002. — 768 с.
8. *Ronald N. Bravwell.* The Fourier Transform and its applications (Second edition, revised). — US: McGraw-Hill Book Company, 1978. — 464 p.
9. *Анушина Е.С., Поляхов Н.Д., Приходько И.А., Анушина Е.С., Хартян Е.В.* Вейвлет-теория в задачах прогнозирования // Изв. СПб ГЭТУ «ЛЭТИ». — 2008. — Вып. 4. — С 50–54.
10. *Сапцін В.М., Чабаненко Д.М.* Фур'є-продовження низькочастотних складових рядів економічної динаміки // Проблеми економічної кібернетики: тези доп. XIV Всеукр. наук.-метод. конф. (8–9 жовт.). — Х.: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2009. — С. 132–133.

Надійшла 08.06.2010

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 681.03

Забезпечення якості формування концептуальної моделі вимог до програмного забезпечення / Баженов М.О., Соколов Б.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 7–19.

Розглянено проблему формування концептуальної моделі вимог до програмного забезпечення (ПЗ) на основі вимог, які отримані від зацікавлених осіб. Модель формується на основі методу семантико-синтаксичного подання тексту. Описано процедуру контролю якості, що складається з аналізу релевантності документа, PAS (Predicate Argument Structure) аналізу та валідації моделі зацікавленими особами. Наведено приклад заповнення глосаріїв. Рис.: 8. Табл.: 2. Бібліогр.: 19 назв.

UDC 681.03

Ensuring the quality of formation of the requirements conceptual model for the software / Bazhenov M.O., Sokolov B.M. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 7–19.

The problem of formation of requirements conceptual model for the software on the basis of the requirements, which are received from the stakeholders. The model is formed on the basis of the method of semantic-syntactic representation of the text. The procedure of quality control consists of analysis of the relevance of the document, PAS (Predicate Argument Structure) analysis and model validation by stakeholders. An example of glossaries filling was made. Figs: 8. Tabl.: 2. Refs: 19 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND
SOCIAL SYSTEMS

УДК 004.8

Использование интервальных функций принадлежности в задачах кластеризации данных социального характера / Кондратенко Н.Р., Снихур О.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 20–29.

Рассмотрено влияние уровня нечеткости на результаты нечеткого кластерного анализа. Предложен подход к решению задачи кластеризации на основе интервальных нечетких множеств типа 2 с применением индекса достоверности Квона. Работа метода продемонстрирована на примере кластеризации стран мира по уровню развития. Рис.: 5. Табл.: 2. Библиогр.: 20 назв.

UDC 004.8

Interval membership functions application in social data clustering / Kondratenko N.R., Snihur O.O. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 20–29.

An approach to the solution of clustering problem on the basis of interval fuzzy sets of 2 type using know validity index, is proposed. The methods working is show on the example of the world countries clustering according to their development level. Influence of degree of fuzziness on fuzzy clustering results is investigated. Figs: 5. Tabl.: 2. Refs: 20 titles.

УДК 519.81

До невизначеності в параметричних схемах ситуацій задач прийняття рішень / Іваненко В.І., Михалеви́ч В.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 30–42.

Розглянуто достатньо широкий клас параметричних задач прийняття рішень, що розглядаються з позиції отримання критерію оптимальності — відношення переваг на рішеннях, можна розділити на два підкласи: задачі з невизначеністю (неоднозначність вказаного рішення) та задачі без невизначеності (так звані детерміністичні задачі). Для такої класифікації необхідні критерії існування невизначеності, які і запропоновані в цій роботі. Бібліогр.: 5 назв.

UDC 519.81

To the uncertainty in the parametric schemes of decision-making problems / Ivanenko V.I., Mykhalevich V.M. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 30–42.

A sufficiently broad class of parametric problems of decision-making, considered from the point of obtaining the criteria of optimality, the relationship of preferences on the solution, can be divided into two subclasses: problem with uncertainty (equivocation of the solution) and problems without uncertainty (so-called deterministic problems). Criterion of existence of uncertainty is necessary for classification, and such criterion are suggested in the work. Refs: 5 titles.

УДК 004.681

Влияние уязвимости объектов на решение прямой и обратной задач менеджмента информационной безопасности / Демчишин М.В., Левченко Е.Г. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 43–57.

Оптимизация распределения ресурсов между объектами защиты информации проводится на основании математической модели, в которой целевая функция определяет количество вытекаемой информации. Рассмотрены и графически проиллюстрированы ситуации, когда следует переходить от концентрации ресурсов на одном из объектов к их распределению между объектами. Показано, как влияет вероятность выделения нападающей стороной определенного количества ресурсов на конечный результат. Рис.: 9. Табл.: 1. Библиогр.: 5 назв.

UDC 004.681

The influence of objects vulnerability on the decision of direct and inverse problems of the information safety / Demchyshyn M.V., Levchenko Y.H. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 43–57.

Optimization of the resources distribution between protection information objects is carried out on the basis of the mathematical model in which the objective function determines the amount of released information. The situations when it should go from resources concentration on one of the objects to their division between two objects were described and shown graphically. The influence of the possibility of delivery by the attack of the definite amount of resources on the ultimate result is shown. Figs: 9. Tabl.: 1. Refs: 5 titles.

УДК 519.81

Модифікації критеріїв узагальнюючої корисності в задачах ідентифікації багатокритеріального вибору / Соболєва К.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 58–65.

У якості критеріїв узагальнюючої корисності для задач багатофакторної оптимізації запропоновано експоненціальну та ентропійну моделі, а також модифікації (шляхом введення додаткових складових зі зворотними степенями) відомих змішаних моделей (адитивно-мультиплікативної та у вигляді поліному Колмогорова-

Габора). Наведено статистичні результати дослідження точності та складності процедур компараторної параметричної ідентифікації різних моделей узагальнюючих критеріїв. Рис.: 3. Табл.: 1. Бібліогр.: 8 назв.

UDC 519.81

Modification of generalized criteria in problems of identification of multi-criteria choice / Soboleva E.V. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 58–65.

As the generalized criteria for the problems of multivariate optimization the exponential and entropy models, as well as modifications (through the introduction of additional components with the reverse indicators) of famous mixed models (additive-multiplicative and in the form of polynomial of Kolmogorov-Gabor). The system results of the study of the accuracy and complexity of the procedures of comparatorial parametric identification of generalized criteria's different models are shown. Figs: 3. Tabl.: 1. Refs: 8 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 004.6+519.2+378

Исследование эволюции остаточных знаний в больших учебных системах / Ясинский В.В., Болдак А.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 66–73.

На основе обобщения результатов интеллектуальной обработки данных помесячного комплексного мониторинга качества подготовки специалистов в НТУУ «КПИ» и мониторинга качества знаний слушателей системы доуниверситетской подготовки НТУУ «КПИ», обнаружено и исследовано явление самоорганизации остаточных учебных знаний как сложного, нелинейного, динамического процесса. Выявлены и обобщены его закономерности для краткосрочных и долгосрочных остаточных знаний и установлена последовательность стадий формирования структуры этих знаний. Рис.: 5. Библиогр.: 8 назв.

UDC 004.6+519.2+378

Research of the evolution of residual knowledge in large education systems / Yasin-sky V.V., Boldak A.O. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 66–73.

On the basis of generalization of the results of intellectual data analysis of end-of-term complex quality monitoring of the specialists training quality in NTUU «KPI» and monitoring of the preliminary training participants knowledge quality, the phenomenon of self-organization of residual education knowledge as a complex, non-linear, dynamic process is discovered and investigated. Its regularities for the short-term and long-term residual knowledge are identified, the sequence of the stages of these knowledge structure formation is set. Figs: 5. Refs: 8 titles.

УДК 339.137.24:004.032.26

Прогнозування конкурентоспроможності продукції за сукупністю показників якості на основі нейромережного моделювання / Федін С.С., Зубрецька Н.А., Гончаров О.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 74–84.

На основі формалізації задачі просторової екстраполяції в нейромережевому логічному базисі запропоновано підхід до створення нейромережних моделей прогнозування конкурентоспроможності продукції різноманітного цільового призначення. Розроблено нейромережеву модель експертної системи для порівняльної

оцінки та прогнозування конкурентоспроможності продукції за сукупністю одиничних показників якості та ціни. Практичну реалізацію моделі здійснено на прикладі холодильників побутового призначення. Рис.: 1. Табл.: 12. Бібліогр.: 11 назв.

UDC 339.137.24:004.032.26

The forecasting of production competitiveness according to the whole set of quality attributes based on neural network modeling / Fedin S.S., Zubretska N.A., Goncharov A.S. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 74–84.

On the basis of formalization the problem of spatial extrapolation in neural network logical basis the approach to creation neural network models of forecasting of different purpose products competitiveness is offered. The neural network model of expert system for assessment and forecasting of competitiveness of the products by the totality of single indicators of quality and price is developed. The practical implementation of model is carried out on the example of the household refrigerators. Figs: 1. Tabl.: 12. Refs: 11 titles.

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ
СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND
CONTROL IN CONDITIONS OF RISK AND
UNCERTAINTY

УДК 519.766.4

Определение величины риска VaR на основе оценок параметров модели стохастической волатильности / Бидюк П.И., Коновалиук М.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 85–94.

Для описания динамики условной дисперсии предложена модель стохастической волатильности, структура которой соответствует фактическим изменениям дисперсии финансовых гетероскедастических процессов. Оценки параметров модели стохастической волатильности вычисляются методом Монте-Карло для марковских цепей в среде OpenBUGS. Для повышения быстродействия вычислений создана надлежащая спецификация этой модели. Оценки переменной во времени условной дисперсии, полученные методом Монте-Карло, использованы для прогнозирования величин возможных потерь *VaR* для выбранных биржевых финансовых процессов, представленными статистическими методами. При этом достигнута высокая точность прогнозов, пригодная для принятия решений при выполнении торговых операций. Табл.: 1. Библиогр.: 17 назв.

UDC 519.766.4

Determining the risk measure VaR using parameters of stochastic volatility model / Bidiuk P.I., Konovaliuk M.M. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 85–94.

To describe the dynamics of conditional variance the stochastic volatility model is proposed the structure of which reflects actual changes of variance for financial heteroscedastic processes. The stochastic volatility model parameters estimates are computed with the Markov chain Monte Carlo technique using Open BUGS environment. To reduce the computation time an appropriate model specification was proposed. The estimates of the conditional variance, computed by the Monte Carlo method, were used for forecasting the value of possible losses *VaR* for selected financial stock processes represented by statistical data. The quality of forecasts is quite acceptable for decision making in stock trading. Tabl.: 1. Refs: 17 titles.

УДК 517.518.8 : 669.184

Применение обратных зависимостей в математических моделях сложных объектов и систем / Желдак Т.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 95–106.

Представлен метод построения аппроксимирующих полиномиальных функций многих переменных, основанный на использовании в полиномах отрицательных степеней и применении к полиномам ограничения на суммарную величину степени произведения переменных. Предложено использование штрафной функции на количество членов полинома. Экспериментальным путем получена оптимальная величина коэффициента предложенной штрафной функции. Рис.: 4. Табл.: 3. Библиогр.: 8 назв.

UDC 517.518.8 : 669.184

Application of inverse dependencies in mathematical models of complex objects and systems / Zheldak T.A. // *System Research and Information Technologies*. — 2012. — № 3. — P. 95–106.

A method of constructing approximating polynomials functions of many variables, based on the use of the negative degrees in polynomials and the application of the limitation on the total value of the product variable to polynoms is presented. The usage of the penalty function for the number of polynomial members is suggested. The optimum value of the proposed penalty functions coefficient is experimentally obtained. Figs: 4. Tabl.: 3. Refs: 8 titles.

НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ,
ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER
SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING

УДК 519.7

Міри внутрішньої та зовнішньої інформації (на прикладі ймовірнісних ситуацій невизначеності). Частина I / Дідук М.М. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2012. — № 3. — С. 107–124.

Показано, що уявлення про інформацію, які покладено в основу сучасної кібернетики про засоби її вивчення та про її перетворення, не є вірними. Вперше виявлено безпосередній зв'язок інформації з ситуаціями невизначеності (там, де не було невизначеності, не може з'явитися інформація). Показано, що перетворення інформації не може здійснюватись інакше, ніж шляхом перетворення відповідних ситуацій невизначеності. Отримано висновок, що система мір інформації, запропонована К. Шенноном, потребує розвитку та поповнення мірами, призначеними для вимірювання інтенсивності перетворень. Розглянуто перший приклад “справжнього” перетворення інформації — квантування, — і побудовано першу міру інтенсивності перетворення. Библиогр.: 22 назв.

UDC 519.7

The measures of internal and external information (on example of probabilistic situations of uncertainty). Part I / Diduk M.M. // *System Research and Information Technologies*. — 2012. — № 3. — P. 107–124.

It is shown, that the idea of information, which is invested in the foundation of modern Cybernetics, and the belief on the ways of its studying and its transformations, are incorrect. For the first time a direct link of the information and situations of uncertainty is found out (where there was no uncertainty, the information could not appear). It is shown, that transformations of the information cannot be carried out otherwise than by the way of transformation of the respective situations of uncertainty. It is received the conclusion that the system of information measures which have been proposed by C. Shannon, requires the development and replenishment with new measures designed to measure the intensity of the transformations. The first example of the “authentic” transformation of the information — quantization, is considered, and the first measure of transformation intensity is built.. Refs: 22 titles.

УДК 517.929.4; 517.962.24

Условия практической устойчивости дискретных систем и функции Ляпунова / Башняков А.Н., Пичкур В.В., Хитько И.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 125–133.

Рассмотрены вопросы построения оптимальных оценок множеств начальных данных и фазовых ограничений для дискретных систем с помощью метода функций Ляпунова. Для линейных дискретных систем при выпуклых фазовых ограничениях получены оптимальные оценки множества начальных условий в форме шара и эллипсоида. Библиогр.: 25 назв.

UDC 517.929.4; 517.962.24

Conditions of practical stability of discrete systems and Lyapunov functions / Bashnyakov O.M., Pichkur V.V., Khitko I.V. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 125–133.

Building of optimal estimates of initial data sets and phase constraints for discrete systems with help of Lyapunov functions is considered. Optimal estimates of initial data sets in the form of a ball and ellipsoid classes are obtained for linear discrete systems with convex phase constraints. Refs: 25 titles.

УДК 519.688

Дискретное Фурье-продолжение как алгоритм прогнозирования финансово-экономических временных рядов / Чабаненко Д.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 134–141.

Предложена методика прогнозирования временных рядов на основе выявления частотного спектра. Методика базируется на аппроксимации временного ряда на промежутке обучения аналитической функцией, содержащей тренд и комбинацию гармонических колебаний. Для оценки параметров модели используются нелинейные методы оптимизации. С помощью экспериментальной апробации показана эффективность предложенного метода для прогнозирования рядов финансово-экономической динамики. Рис.: 4. Табл.: 2. Библиогр.: 10 назв.

UDC 519.688

Discrete Fourier-continuation as an algorithm of financial-economic time series forecasting / Chabanenko D.M. // System Research and Information Technologies. — 2012. — № 3. — P. 134–141.

The time series forecasting method, based on determination of the frequencies spectrum, is offered. The method is based on time series approximation in the interval training of analytic function, that contains the trend and harmonic oscillations combination. The effectiveness of the proposed method for the financial-economical time series forecasting is showed with the help of experimental approbation. Figs: 4. Tabl.: 2. Refs: 10 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Баженов Микола Олександрович,

аспірант Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Башняков Олександр Миколайович,

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, Україна, Київ

Болдак Андрій Олександрович,

доцент, кандидат технічних наук, докторант Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Гончаров Олександр Сергійович,

аспірант кафедри метрології, стандартизації і сертифікації Київського національного університету технологій та дизайну, Україна, Київ

Демчишин Мирослав Володимирович,

аспірант кафедри засобів захисту інформації Національного авіаційного університету, Україна, Київ

Дідук Микола Миколайович,

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ

Желдак Тімур Анатолійович,

кандидат технічних наук, доцент Національного гірничого університету, Україна, Дніпропетровськ

Зубрецька Наталія Анатоліївна,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри метрології, стандартизації і сертифікації Київського національного університету технологій та дизайну, Україна, Київ

Іваненко Віктор Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України «КПІ», Україна, Київ

Кондратенко Наталія Романівна,

доцент, кандидат технічних наук, професор кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Коновалюк Максим Михайлович,

аспірант Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Левченко Євген Григорович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри засобів захисту інформації Національного авіаційного університету, Україна, Київ

Михалевич Вадим Михайлович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Україна, Київ

Пічкур Володимир Володимирович,

доктор фізико-математичних наук, доцент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, Україна, Київ

Снігур Ольга Олексіївна,

студентка Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Соболева Катерина Володимирівна,

аспірантка кафедри системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки, Україна, Харків

Соколов Борис Миколайович,

аспірант Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Чабаненко Дмитро Миколайович,

аспірант кафедри економічної кібернетики Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького, Україна, Черкаси

Федін Сергій Сергійович,

доцент, доктор технічних наук, професор кафедри метрології, стандартизації і сертифікації Київського національного університету технологій і дизайну, Україна, Київ

Хітько Іван Володимирович,

кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, Україна, Київ

Ясінський Василь Васильович,

професор, кандидат фізико-математичних наук, директор Інституту моніторингу якості освіти Національного технічного університету України «КПІ», Україна, Київ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для журналу

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

1. Стаття з анотаціями подається у двох варіантах: **роздрукована** (на папері формату А4 через 1,5 інтервали у двох примірниках, розмір шрифту 12 пт., поля зліва та справа по 3 см) та в **електронному** вигляді.

Назва статті, прізвище та ініціали автора (авторів), а також анотація (5–6 рядків) подаються українською, російською та англійською мовами.

2. Текст статті набирається в редакторі Microsoft Word 98 (або пізнішої версії) шрифтом Times New Roman із вирівнюванням по ширині.

3. На початку статті вказується індекс УДК, назва статті, ініціали та прізвище автора (авторів).

4. Список літератури подається в порядку посилання після тексту статті.

5. Набір формул здійснюється в редакторі формул «Equations».

6. Символи у формулах (крім особливих випадків) набираються курсивом. Допускаються прямі символи, але їх треба розмітити або включити до списку спеціальних символів.

7. Нумерувати необхідно тільки ті формули (винесені на середину рядків), на які є посилання в тексті.

8. Таблиці та рисунки виконуються в одному стилі, їм надається номер, назва і розташовуються після посилань у тексті. Не слід повторювати в статті підписи до рисунків та таблиць.

9. Стаття разом із таблицями, рисунками і списком літератури має бути не більше 15 сторінок. Оглядові статті обсягом до 25 сторінок приймаються за домовленістю із редколегією.

10. До рукопису додаються відомості про кожного автора: країна, місто, місце роботи, службова посада, вчений ступінь та звання, сфера наукових досліджень, контактні телефони, адреса та e-mail.