

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ» НТУУ «КПІ»
МОН ТА НАН УКРАЇНИ

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО–ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 2

2016

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, проф., д.т.н., Україна

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Т.Л. СААТІ, проф., США

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

Навчально-науковий комплекс

«Інститут прикладного системного аналізу»

НТУУ «КПІ» МОН та НАН України

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах**

• **Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор**

• **Методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності**

• **Нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL-SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
AT THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE «KPI»
OF MES AND NAS OF UKRAINE

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 2

2016

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Prof., Ukraine

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,
Russia

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTSEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

T.L. SAATY, Prof., USA

L. SAKALAIUSKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Educational-Scientific Complex
«Institute for Applied System Analysis» at the
National Technical University of Ukraine «KPI»
of MES and NAS of Ukraine
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Methods of optimization, optimum control and theory of games**

• **Methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty**

• **New methods in system analysis, computer science and theory of decision making**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «КПІ», директор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: «Україніка наукова» та УРЖ «Джерело», ВИНІТИ РАН, РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), DOAJ (Directory of Open Access Journals), Index Copernicus.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**
Редактор **Р.М. Шульженко**
Молодший редактор **Л.О. Тарин**
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 21.06.2016. Формат 70x108/16.
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

Видавництво та поліграфія ВПК «Політехніка»
ВПІ НТУУ «КПІ»
03056, Київ–56, просп. Перемоги, 37, корп. 15

Dear Readers!

The Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is Rector of the National Technical University of Ukraine «KPI», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

2 • 2016

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ	
<i>Статкевич В.М.</i> Связь сетей Петри с бесскобочной польской записью	7
<i>Забелин С.И.</i> Генетический алгоритм защиты SDN от сетевых атак	14
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Сергиенко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В.</i> Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределенных вычислительных системах	20
<i>Zavertanuu V., Makarenko A.</i> Aggressive and peaceful behavior in multiagent systems on cellular space	36
<i>Козуля Т.В., Шаронова Н.В., Білова М.О., Козуля М.М.</i> Інформаційні особливості визначення оцінки відповідності стану екологічності системних об'єктів	45
<i>Гладка О.М.</i> Системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів у багатозв'язних криволінійних LEF-пластах	58
МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР	
<i>Яковлева А.П., Курдуп І.О.</i> Дослідження задач знаходження оптимального розподілу ресурсів між підприємствами	74
<i>Краснюк Р.П., Цегелик Г.Г.</i> Оптимізація планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних у розподіленій обчислювальній мережі	81
МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	
<i>Павлюк Ю.Р., Подладчікова О.В., Подладчіков В.М.</i> Застосування епіполярної геометрії для стереоскопічного аналізу корональної хвилі	92
<i>Кузнєцова Н.В.</i> Виявлення та оброблення невизначеностей у формі неповних даних методами інтелектуального аналізу	104
<i>Романчук К.Г., Стефанишин Д.В.</i> Сценарний підхід та метод Байєса для оцінювання ризиків системних аварій на гідровузлах	116
НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	
<i>Спекторский И.Я.</i> Последовательности функций и ряды Тейлора с нечетким комплексным аргументом	125
Реферати	141
Відомості про авторів	149

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

2 • 2016

CONTENTS

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

<i>Statkevych V.M.</i> Connection between Petri nets and Polish notation	7
<i>Zabelin S.I.</i> Genetic algorithm for SDN protection against network attacks	14

DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS

<i>Sergiyenko A.M., Simonenko V. P., Simonenko A.V.</i> An enhanced scheduling algorithm for task planners in heterogeneous distributed computing systems	20
<i>Zavertanyv V., Makarenko A.</i> Aggressive and peaceful behavior in multiagent systems on cellular space	36
<i>Kozulia T.V., Sharonova N.V., Belova M.O., Kozulia M.M.</i> Information characteristics of an assessment of the compliance status of environmental friendliness of system objects	45
<i>Hladka O.M.</i> Systematic approach to mathematical modeling of filtration processes in multiply-connected curvilinear LEF-layers	58

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM CONTROL AND THEORY OF GAMES

<i>Iakovleva A.P., Kurdup I.O.</i> Investigation of the problems of the allocation of resources among enterprises	74
<i>Krasniuk R.P., Tsegelyk G.G.</i> The planning optimization of tasks distribution and data packets transportation in a distributed computer network	81

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND CONTROL IN CONDITONS OF RISK AND UNCERTAINTY

<i>Pavliuk Y.R., Podladchikova O.V., Podladchikov V.M.</i> Application of epipolar geometry for the stereoscopic analysis of coronal waves	92
<i>Kuznietsova N.V.</i> Identification and dealing with uncertainties in the form of incomplete data by data mining methods	104
<i>Romanchuk K.G., Stefanyshyn D.V.</i> The scenario approach and the Bayesian method in assessing the risks of system accidents at hydraulic structures	116

NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING

<i>Spectorsky I.Ya.</i> Functional sequences and Taylor series with a fuzzy complex number as an argument	125
References	141
Information about the authors	149

СВЯЗЬ СЕТЕЙ ПЕТРИ С БЕССКОБОЧНОЙ ПОЛЬСКОЙ ЗАПИСЬЮ

В.М. СТАТКЕВИЧ

Рассмотрены сети Петри, которые порождают языки бесскобочной польской записи и обратной польской записи для пропозициональных формул и арифметических выражений. Пропозициональные формулы могут содержать заданное количество переменных, а арифметические выражения — переменных и констант. Предложены также ингибиторные сети Петри для указанных языков, позволяющие формировать вещественные числа в двоичной записи с фиксированной точкой в арифметических выражениях. Метод построения сетей позволяет использовать произвольные функции заданной аности. Предложена цветная сеть Петри для вычисления значений пропозициональных формул в обратной польской записи. Метод построения сети позволяет использовать произвольные функции заданной аности с применением таблицы истинности соответствующей функции.

ВВЕДЕНИЕ

Сети Петри были предложены К. Петри в 1962 г. и являются удобным средством для моделирования различных процессов, систем и сетей (см., например, [1, 2]). Следует отметить такие их важные свойства, как недетерминированность, асинхронность, параллелизм и конфликтность.

Каждая сеть Петри может порождать язык. В работе [1] определены 12 классов языков и исследована их связь с формальными языками, определяемыми иерархией Хомского (см., например, [3]).

Сети Петри имеют определённую связь с вычислениями. В работе [1, с. 147] предлагалось в качестве упражнения исследовать связь с арифметикой Пресбургера. Однако моделировать машину Тьюринга сети Петри не могут, так как невозможно проконтролировать отсутствие фишки в позиции. Доказано (см. [2, § 5.2]), что ингибиторные сети (сети, имеющие ингибиторные дуги, позволяющие проверять отсутствие фишек в позиции) и сети с приоритетами (обобщение сетей Петри) равносильны классу машин Тьюринга, а в [4] построена ингибиторная сеть, исполняющая произвольно заданную машину Тьюринга. В работе [5] детально исследована связь сетей Петри с исчислением процессов (алгеброй процессов).

Цветные сети Петри [2, 6] — обобщение сетей Петри, когда фишкам могут быть сопоставлены признаки (например, цвета) из заданного множе-

ства признаков, а правила запуска переходов модифицируются с учётом признаков фишек, — в случае бесконечного множества признаков равно- мощны классу машин Тьюринга. В случае конечного множества признаков цветной сети соответствует сеть Петри, возможно большего размера (см. [2, §5.3]).

В статье [7] сети Петри применяются для анализа контекстно- свободных грамматик.

Отметим также подход к определению класса языков, предложенный в работе [8].

В этой работе предлагаются сети Петри, которые порождают языки бесскобочной польской записи, а также обратной польской записи для про- позициональных формул и арифметических выражений. Эта запись, пред- ложенная Я. Лукасевичем (см., например, [3, с. 244–245]), имеет широкое применение в синтаксическом анализе и программировании, в частности, с 1960-х годов разрабатывались компьютеры и калькуляторы, поддержи- вающие обратную польскую запись. Также в данной работе предлагается цветная сеть Петри, позволяющая вычислять значения пропозициональных формул.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сетью Петри называют набор $\langle P, T, W, \mu_0 \rangle$, где P — множество позиций (конечное и непустое); T — множество переходов (конечное и непустое), $W : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ — весовая функция; $\mu_0 : P \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ — начальная маркировка. Сеть Петри представляется в виде двудольного ориен- тированного мультиграфа, множество вершин которого разбивается на два непересекающихся подмножества P и T (доли), а дуги направлены от по- зиций к переходам или от переходов к позициям [1, 2].

Пусть A — конечное множество символов (алфавит), A^* — множество слов, т.е. конечных цепочек символов из A . Пустой символ обозначают как λ и полагают, что $\lambda \notin A$. Формальным языком L над алфавитом A на- зывают некоторое подмножество множества $A^* : L \subset A^*$ [3].

Сопоставим каждому переходу некоторый символ алфавита A или пустой символ λ , $\delta : T \rightarrow A \cup \{\lambda\}$ — функция помечения. Свободно поме- ченной сетью Петри называют сеть, в которой все переходы помечены раз- личными символами алфавита A . Различают свободные языки сети Петри, без λ -переходов и с λ -переходами. Последовательности $\sigma = t_1, \dots, t_n, \dots$ за- пусков переходов сети отвечает слово $w(\sigma) = \delta(t_1), \dots, \delta(t_n), \dots \in A^*$ (перехо- ды, помеченные символом λ , не учитываются). Пусть задано множество заключительных маркировок F . Языком сети Петри L -типа называют множество слов w таких, что после запуска соответствующей последова- тельности переходов σ текущая маркировка является заключительной. Языком сети Петри T -типа называют множество слов w таких, что после запуска последовательности переходов σ ни один переход невозможно за- пустить [1, 2].

Ингибиторной сетью Петри называют сеть Петри, содержащую, кроме обычных дуг, ещё и ингибиторные дуги. Последние направлены лишь от позиций к переходам, всегда имеют кратность 1 и на рисунке обозначаются заканчивающимися не стрелками, а окружностями. Соответствующий переход можно запустить тогда, когда выполнены обычные условия запуска перехода, а также во всех входных позициях, соединённых с ним ингибиторными дугами, отсутствуют фишки [2].

Пропозициональные формулы определяются следующим образом: 1) пропозициональная буква является формулой; 2) если A и B — формулы, то $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $\neg A$ — также формулы; 3) других формул нет.

Бесскобочной польской записью выражения (согласно иной терминологии – префиксной формой записи) называют запись, в которой символ операции предшествует операндам, обратной польской записью (или постфиксной формой записи) – запись, в которой операнды предшествуют символу операции ([3, с. 244–245]). Например, обычной инфиксной форме записи выражения $(2 * 3) + (4 - 1)$ соответствует польская запись $+ * 2 3 - 4 1$ и обратная польская запись $2 3 * 4 1 - +$.

СЕТИ ПЕТРИ ДЛЯ БЕССКОБОЧНОЙ ПОЛЬСКОЙ ЗАПИСИ

Рассмотрим свободно помеченные сети Петри на рис. 1. Данные сети порождают языки L -типа с заключительной маркировкой $\mu_f = (0)$, соответствующие польской записи пропозициональных формул и арифметических выражений. Здесь x_1, \dots, x_n — переменные, c_1, \dots, c_m — константы, «+», «-», «*», «/» — бинарные операции, « \neg » — унарный минус. При добавлении в выражение дополнительной k -арной функции (например, стрелки Пирса, штриха Шеффера, тригонометрической, степенной, логарифмической и т.д.) следует дополнить сеть ещё одним переходом \hat{t} , помеченным соответствующим символом, и дугами $p_1 - \hat{t}$, $\hat{t} - p_1$ с весами $W(p_1, \hat{t}) = 1$, $W(\hat{t}, p_1) = k$. Графы достижимости для данных сетей бесконечны.

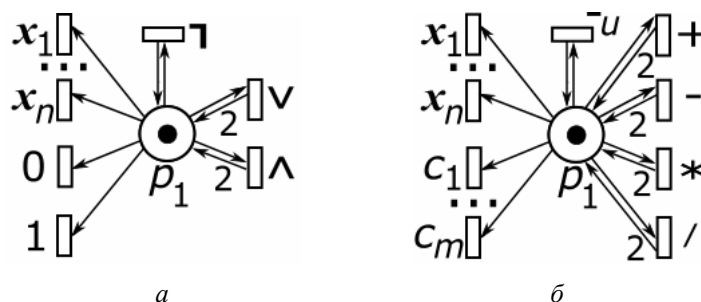


Рис. 1. Сети Петри для бесскобочной польской записи: a — пропозициональных формул; b — арифметических выражений

После формирования сетями слова w переменные и константы можно в дальнейшем (уже не с помощью данных сетей) интерпретировать, задавая конкретные логические или числовые значения. Также на этапе интерпрета-

ции для сети на рис. 1, б можно проверить корректность полученного арифметического выражения: отсутствие деления на ноль, принадлежность аргументов функций типа tg , ctg , \ln их областям определения и т.д.

Сеть на рис. 1, б можно усовершенствовать, позволив формировать константы. Ингибиторная сеть на рис. 2 (в предположении, что $\mu_f = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$) позволяет формировать вещественные числа в двоичной записи с фиксированной точкой. В момент начала формирования константы в позиции p_2 появляется фишка-флаг, запрещая запуск переходов, отвечающих за переменные и операции. После формирования константы фишка из позиции p_2 исчезает, разрешая запуск указанных переходов. Здесь « $-n$ » указывает на то, что константа отрицательна.

Для сетей на рис. 1–2 указанные языки L -типа совпадают с языками T -типа.

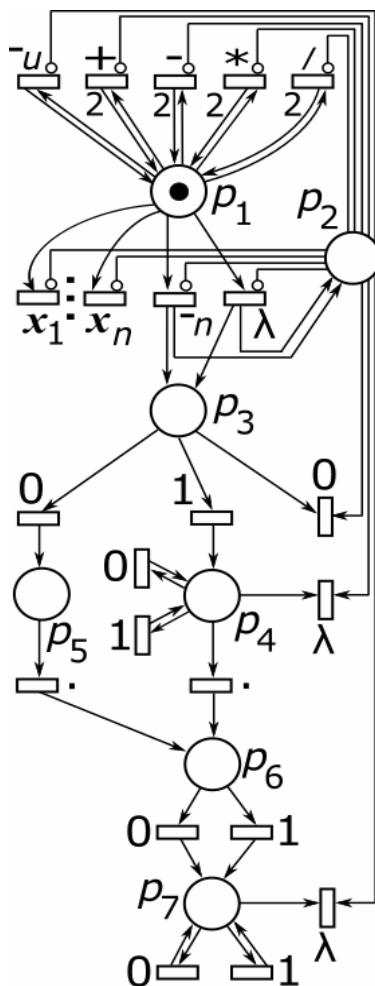


Рис. 2. Ингибиторная сеть Петри для бесконечной польской записи арифметических выражений

СЕТИ ПЕТРИ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ПОЛЬСКОЙ ЗАПИСИ

Рассмотрим сети Петри с λ -переходом на рис. 3. Данные сети порождают языки L -типа с заключительной маркировкой $\mu_f = (0, 0, 0, 1)$, соответствующие обратной польской записи пропозициональных формул и арифметических выражений. При добавлении в выражение дополнительной k -арной ($k \geq 2$) функции следует дополнить сеть ещё одним переходом \hat{t} , помеченным соответствующим символом, и дугами $p_3 - \hat{t}$, $p_2 - \hat{t}$, $\hat{t} - p_2$ с весами $W(p_3, \hat{t}) = k - 1$, $W(p_2, \hat{t}) = W(\hat{t}, p_2) = 1$, а при добавлении унарной функции – дугами $p_2 - \hat{t}$, $\hat{t} - p_2$ с весами $W(p_2, \hat{t}) = W(\hat{t}, p_2) = 1$.

Сеть на рис. 3, б также можно усовершенствовать (рис. 4), добавив блоки формирования вещественных чисел с фиксированной точкой подобно тому, как изображено на рис. 2, и положив $\mu_f = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Отметим, что для сетей на рис. 3 в отличие от сетей на рис. 1 и 2 языки T -типа не совпадают с указанными языками L -типа из-за наличия тупиков $(0, 0, l, 1)$, $l \in \mathbb{N}$. Однако от этих тупиков можно избавиться, проведя ингибиторную дугу от

позиции p_3 к λ -переходу, что сделает языки T -типа равными языкам L -типа (для сети на рис. 4 подобная ингибиторная дуга присутствует).

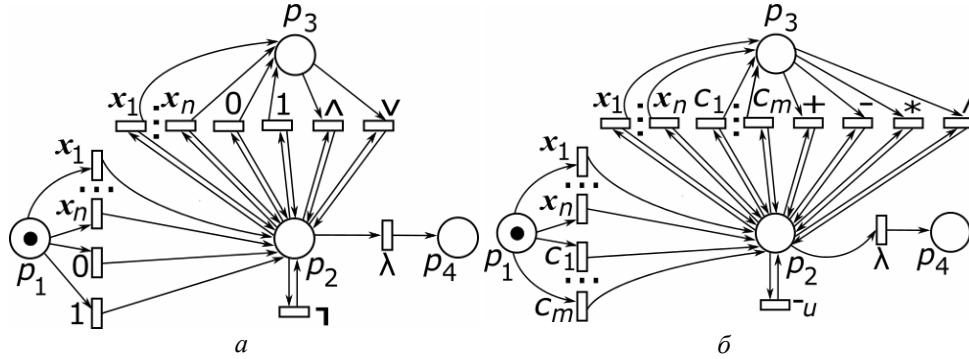


Рис. 3. Сети Петри для обратной польской записи: *a* — пропозициональных формул; *б* — арифметических выражений

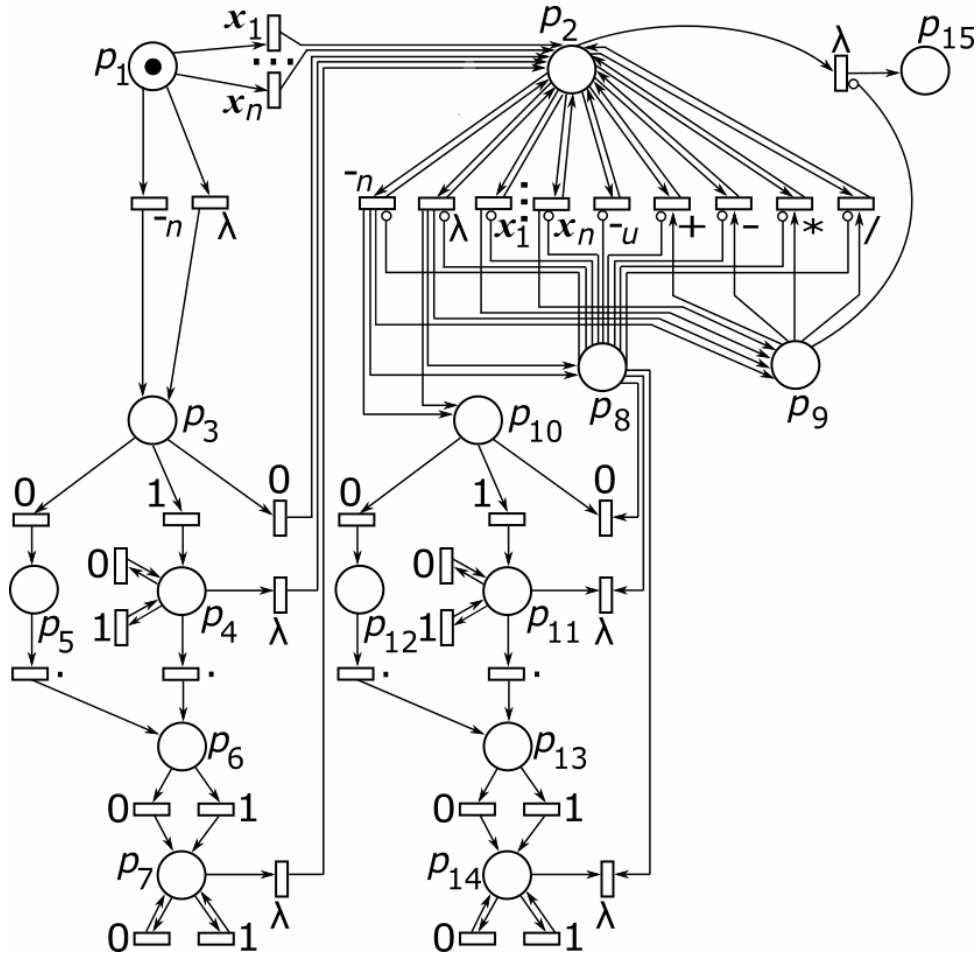


Рис. 4. Ингибиторная сеть Петри для обратной польской записи арифметических выражений

При отсутствии переменных или при выборе конкретной интерпретации сеть на рис. 3, *a* можно усовершенствовать, позволив вычислять зна-

чения пропозициональных формул. Цветная сеть на рис. 5 и рис. 6 воспроизводит известный алгоритм вычисления значения выражения, записанного обратной польской записью. Множество признаков — $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, порядок срабатывания переходов соответствует обратной польской записи пропозициональной формулы.

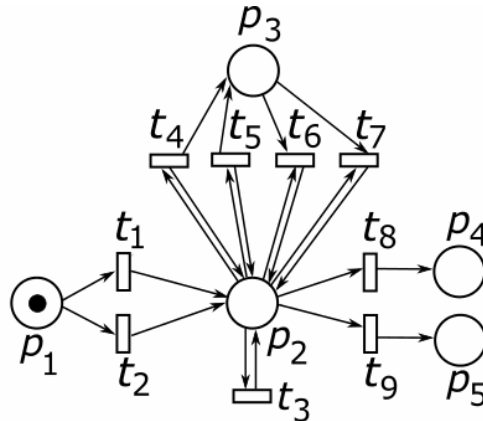


Рис. 5. Цветная сеть Петри для вычисления значений пропозициональных формул

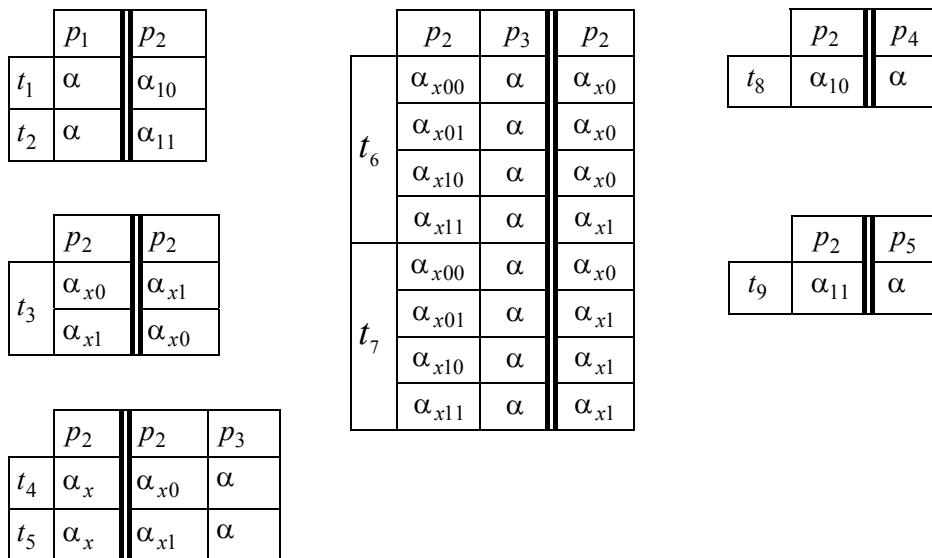


Рис. 6. Условия запуска переходов для цветной сети на рис. 5

Позиции $p_1, p_3 - p_5$ могут содержать только простые фишки, обозначаемые α . Значение выражения равно 0, если фишка содержится в позиции p_4 , и равно 1, если фишка содержится в позиции p_5 . Позиция p_2 может содержать только цветные фишки, обозначаемые α_n , где n вычисляется следующим образом. Старший бит числа n всегда равен единице, а остальные биты формируют стек значений, вершина которого находится в младшем бите; фактически единица в старшем бите является аналогом начального символа Z_0 (маркера дна стека) в МП-автомате (см., например, [3, с. 193–194]).

Переходы t_1 , t_2 , t_4 и t_5 отвечают за запись констант 0 и 1 в стек, переходы t_3 , t_6 и t_7 — за выполнение операций логического отрицания, конъюнкции и дизъюнкции соответственно, переходы t_8 и t_9 — за получение результата. Условия запуска переходов указаны на рис. 6 (под x подразумеваются старшие биты двоичной записи числа n).

При добавлении в пропозициональную формулу дополнительной k -арной ($k \geq 2$) функции следует дополнить сеть ещё одним переходом \hat{t} , помеченным соответствующим символом, и дугами $p_3 - \hat{t}$, $p_2 - \hat{t}$, $\hat{t} - p_2$. Также необходимо указать условия запуска перехода \hat{t} , которые строятся на основании таблицы истинности соответствующей функции.

Таким образом, предложенная цветная сеть позволяет вычислять значение пропозициональной формулы при условии, что порядок срабатывания переходов соответствует обратной польской записи данной формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон; пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 264 с.
2. Котов В.Е. Сети Петри / В.Е. Котов. — М.: Наука. Гл. ред. физико-мат. лит-ры, 1984. — 160 с.
3. Ахо А. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1. Синтаксический анализ / А. Ахо, Дж. Ульман; пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — 613 с.
4. Зайцев Д.А. Ингибиторная сеть Петри, исполняющая произвольно заданную машину Тьюринга / Д.А. Зайцев // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 2. — С. 26–41.
5. Best E. Petri net algebra / E. Best, R. Devillers, M. Koutny. — Berlin: Springer-Verlag, 2001. — 380 p.
6. Jensen K. Coloured Petri Nets: Modelling and Validation of Concurrent Systems, Springer-Verlag / К. Jensen, L. Kristensen. — Berlin, 2009. — 384 p.
7. Спекторский И.Я. Применение сетей Петри для анализа КС-грамматик / И.Я. Спекторский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 4. — С. 129–133.
8. Jantzen M. Labeled Step Sequences in Petri Nets, Applications and Theory of Petri Nets / M. Jantzen, G., Zetsche // 29th International Conference, Xi'an, China (June 23–27, 2008). — Proceedings. — P. 270–287.

Поступила 01.02.2016

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ЗАЩИТЫ SDN ОТ СЕТЕВЫХ АТАК

С.И. ЗАБЕЛИН

Рассмотрены проблемы обнаружения и блокирования сетевых атак при помощи SDN. Эта проблема сформулирована как задача нахождения «правильного» вектора и является задачей бинарного целочисленного программирования. В качестве сетевой атаки рассматривается DDoS-атака. Построена математическая модель задачи и разработан ее алгоритм, позволяющий выявить множества атакующих хостов по зарегистрированным данным в сети. При обнаружении множества задача сводится к предотвращению атаки, т.е. блокировке по IP-адресам. Для оценки эффективности предложенного алгоритма оперативного управления трафиком и обнаружения сетевых атак были проведены экспериментальные исследования. Для моделирования SDN сетей использовался эмулятор сетей Mininet. Решена задача бинарного целочисленного программирования. Анализ результатов подтверждает, что, используя преимущества SDN, а именно централизацию управления, гибкость, удалось реализовать генетический алгоритм, защищающий сеть от одной из самых распространенных сетевых атак — DDoS.

ВВЕДЕНИЕ

Ценность SDN сетей состоит в их особенности обеспечивать сетевую виртуализацию, динамическую политику управления данными и полный контроль над сетевыми сущностями по всей сети [1]. Такие протоколы, как OpenFlow позволяют реализовать эти возможности SDN. Но при централизации плоскости управления SDN становится лабиринтом для администраторов с целью обеспечения безопасности и корректного функционирования всей сети. Некоторые вредоносные сетевые сущности могут быть использованы для перехвата ценной информации пользователей или прекращения работы всей сети [6].

В работе рассматривается задача выявления множества атак (IP-адресов злоумышленников) по зарегистрированным данным о событиях в сети. При обнаружении множества задача сводится к предотвращению атаки, т.е. блокировке по IP-адресам, например, методом black hole filtering (фильтрация черной дырой).

В качестве сетевой атаки рассматривается DDoS-атака — атака типа «отказ в обслуживании» (Distributed Denial of Service) — один из наиболее популярных видов атак на вычислительную систему. Цель — парализовать работу атакуемого веб-узла.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N_b — количество типов событий, генерируемых DDoS-атакой.

Пусть N_a — количество известных типов DDoS-атак.

Пусть AE это $N_e \times N_a$ — матрица атак-событий, которая представляет множества событий генерируемых каждой атакой; AE_{ij} — количество событий типа i , сгенерированных сценарием атаки j ($AE_{ij} \geq 0$).

Пусть R это N_a -размерный вектор весов, где R_i ($R_i > 0$) — вес i -й атаки.

Пусть O это N_e -размерный вектор, где O_i — количество событий i -го типа (O — наблюдаемый след).

Пусть H это N_a -размерный вектор гипотезы, где $H_i = 1$, если i -я атака соответствует гипотезе, и $H_i = 0$ — в противном случае.

Чтобы правильно проанализировать наблюдаемый след (O), который генерируется одной или несколькими типами DDoS-атак, необходимо найти вектор H , который максимизирует $R \times H$ (задача пессимиста), при ограничениях $(AE.H)_i \leq O_i$ ($1 \leq i \leq N_e$).

Нахождение «правильного» H вектора, по сути, является задачей бинарного целочисленного программирования, которое является NP-полной задачей. Применить классические алгоритмы невозможно, так как в данной задаче N_e равняется нескольким сотням.

Выбран следующий эвристический подход к решению NP-полной задачи: генерируется случайная гипотеза, проверяется правильность гипотезы, тестируется улучшенная гипотеза и т.д. до тех пор, пока решение не будет найдено.

Необходимо найти алгоритм, который мог генерировать новые гипотезы на основе предыдущих гипотез: этим алгоритмом стал генетический алгоритм.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПРИГОДНОСТИ

Две подзадачи возникают при применении генетического алгоритма для решения задачи:

- 1) кодирование решения задачи в строку из битов;
- 2) нахождение функции пригодности как критерия для операции отбора.

Для решения задачи кодирования используется следующий подход: длина каждого индивидуума равна N_a и каждый индивидуум в популяции соответствует конкретному вектору H .

Для нахождения функции пригодности необходимо произвести поиск среди всех множеств возможных атак, представляющих наибольшую опасность системе, т.е. максимизировать произведение R и H . Получаем функцию пригодности:

$$F = \sum_{i=1}^{N_a} R_i \cdot I_i,$$

где I — индивидуум.

Но функция пригодности не учитывает ограничения, т.е. из всего множества возможных индивидуумов не все являются «реалистичными». В этом случае для некоторых типов событий i не будет выполняться $(AE.H)_i \leq O_i$. Для выполнений ограничений введем штраф для «нереалистичных» индивидуумов [3]. Введем штрафную функцию P , которая увеличивается, если «реализм» индивидуума уменьшается. Пусть T_e — количество типов событий, для которых $(AE.H)_i > O_i$. Тогда

$$P = T_e^p.$$

Для функции пригодности выберем квадратную штрафную функцию ($p = 2$). Тогда функция пригодности приобретает следующий вид:

$$F(I_i) = \alpha + \left(\sum_{i=1}^{N_a} R_i \cdot I_i - \beta \cdot T_e^2 \right),$$

где β — вес штрафной функции; α — порог для обеспечения положительных значений в функции пригодности. Если негативная пригодность найдена, то соответствующий индивидуум не может быть отобран. Параметр α позволяет отсеять слишком нереалистичные гипотезы.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ DDoS-АТАК

Прототип генетического алгоритма обнаружения DDoS-атак находит вектор H , который максимизирует произведение $R \cdot H$ с ограничениями $(AE.H)_i \leq O_i$ ($1 \leq i \leq N_a$). Если наблюдаемый след слишком длинный, то след ограничивается N_a -размерным вектором. Для экспериментального исследования избран базис для фазы наблюдения 15 с. После фазы обнаружения по наблюдаемым данным заполняются вектора наблюдаемых следов. Разработана матрица атак-событий с 6 типами DDoS-атак и с 28 возможными событиями.

Каждый эксперимент можно охарактеризовать следующим набором параметров: (P_c, P_m, L, a) , где P_c — вероятность размножения; P_m — вероятность мутации; L — размер популяции; a — количество атак, присутствующих в следе. Для каждого набора произведено 10 запусков (все результаты усреднены по 10 запускам).

Генетический алгоритм обнаружения DDoS-атак был реализован на языке Python с помощью API контроллера SDN POX [4]. Выбранный контроллер является наиболее удачным для целей исследования. Контроллер POX в своем составе имеет программный интерфейс (API) на языке Python для приложений управления сетью [2].

Для моделирования SDN сетей использовался эмулятор сетей Mininet. Эмулятор позволяет создать виртуальные сети с реальными рабочими компонентами (коммутаторами, рабочими станциями, контроллерами) [5].

Mininet ведет себя как настоящая машина и запускает тот же код, что и она. Хост Mininet представляет собой оболочку машины, в которую будут

запускаться различные программы. Хосты могут посылать, получать и обрабатывать пакеты так, будто программа является настоящим Ethernet, но в сущности является виртуальным коммутатором/интерфейсом. Пакеты виртуальных коммутаторов, которые для Mininet хостов становятся реальными Ethernet коммутаторами или маршрутизаторами, обрабатываются в зависимости от того, как они настроены [1].

РЕЗУЛЬТАТЫ

Наиболее важным аспектом для алгоритма является безопасность, поэтому для исследования выбраны два параметра: T_p и T_a :

T_p отвечает за долю индивидуумов, которые обнаружили существующую атаку;

T_a отвечает за долю индивидуумов, которые обнаружили несуществующую атаку.

В начале работы алгоритма $T_{p0} \cong 0,5$ и $T_{a0} \cong 0,5$ (так как изначальные популяции сгенерированы случайно). В конце работы алгоритма теоретически параметры должны быть такими: $T_p = 1$ и $T_a = 0$ (все существующие атаки обнаружены, а несуществующие атаки не обнаружены).

Эволюция T_p и T_a при генерации новых поколений показана на рис. 1 и 2. На рис. 1 по оси абсцисс отложены номера поколений (итерации), по оси ординат — T_p и T_a . После 100 поколений T_p и T_a равны 0,997 и 0,0042 соответственно, что близко к их оптимальным значениям.

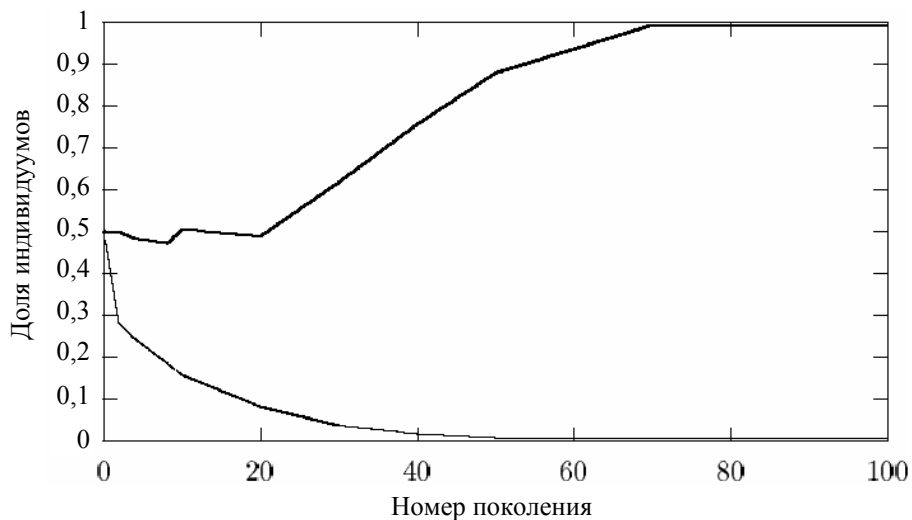


Рис. 1. Эволюция T_p и T_a при генерации новых поколений

Из рис. 2, на котором показана зависимость функции пригодности от номера поколения, видно, что максимальное значение функции пригодности

быстро сходится до оптимума (примерно через 20 поколений). Количество генерируемых атак не повлияло на результат.

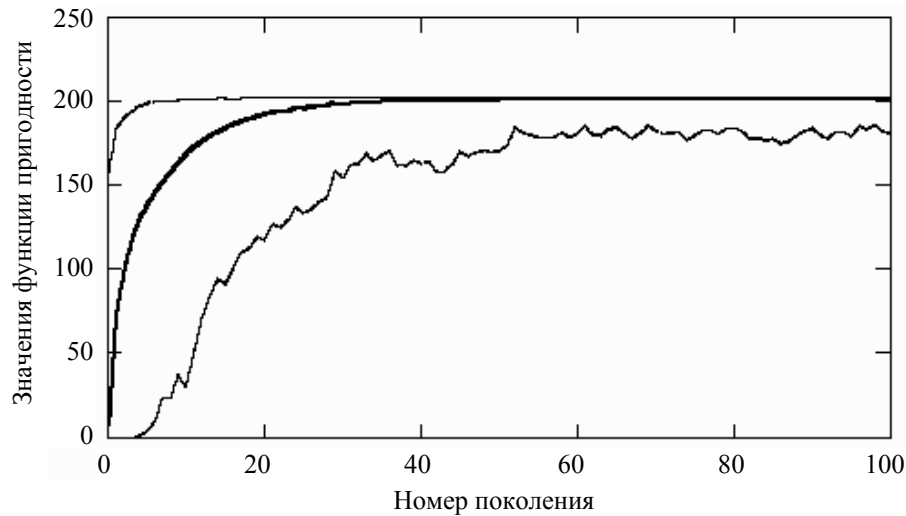


Рис. 2. Значение функции пригодности на протяжении 100 поколений

Соотношение времени выполнения алгоритма (в секундах) при изменении количества DDoS-атак показано на рис. 3. Так, при 200 атаках генетическому алгоритму обнаружения DDoS-атак требуется 10 мин 35 с для анализа.

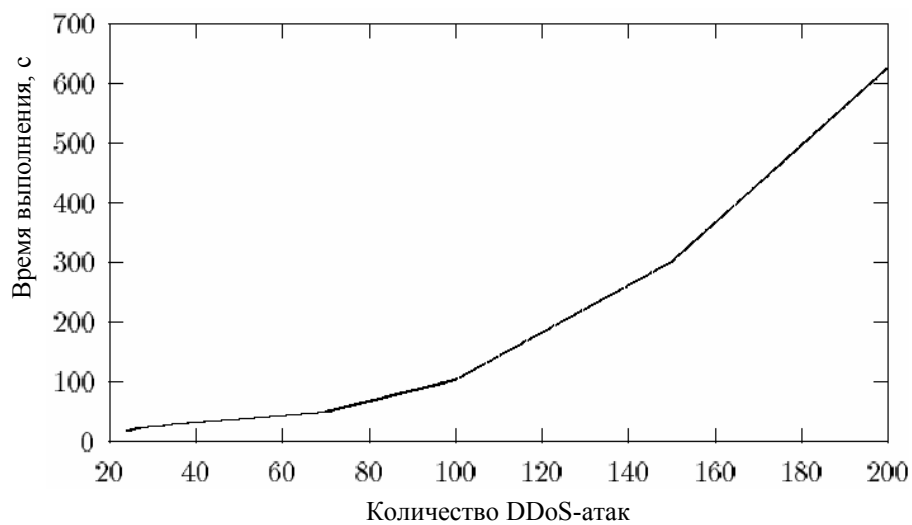


Рис. 3. Время работы выполнения алгоритма (ось абсцисс) при изменении количества DDoS-атак (ось ординат)

ВЫВОДЫ

Используя преимущества SDN, а именно централизацию управления, гибкость, удалось реализовать генетический алгоритм, защищающий сеть от одной из самых распространённых сетевых атак — DDoS.

Приведены результаты экспериментальных исследований, которые направлены на подтверждение применения разработанных методов и инструментов в практической работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nadeau T.* SDN: Software Defined Network [Text] / T. Nadeau, K. Gray. — Washington: O'Reilly Media, 2013. — P. 9–11.
2. *Open Networking Lab - Confluence* [Электронный ресурс] : POX Wiki.Ali Al-Shabibi. — Режим доступа: <https://openflow.stanford.edu/display/ONL/POX+Wiki>
3. *Holland J.* Adaptation in natural and artificial systems [Text] / J. Holland. — University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975. — P. 2.
4. *Limoncelli T.* Adaptation in natural and artificial systems [Text] / T. Limoncelli. — ACM, 2012. — 55 p.
5. *Composing software-defined networks* / C. Monsanto, P. Private, A. Monsanto etc. — New York, USA: USENIX NSDI, 2013. — 13 p.
6. *A security enforcement kernel for openflow networks* / P. Porras, S. Shin, V. Yegneswaran etc. — New York, USA: ACM, 2012. — 10 p.

Поступила 28.01.2016

УЛУЧШЕННЫЙ АЛГОРИТМ НАЗНАЧЕНИЯ
ДЛЯ ПЛАНИРОВЩИКОВ ЗАДАНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А.М. СЕРГИЄНКО, В.П. СИМОНЕНКО, А.В. СИМОНЕНКО

Рассмотрены основы проектирования пространственных планировщиков для глобальных, неоднородных, распределенных вычислительных систем. Представлены теоремы, позволяющие для двудольных графов, отображающих претендование заявок на ресурсы, уменьшить временную сложность венгерского алгоритма с $O(n^3)$ до $O(n^{1.5} \log n)$. Подход применяется в алгоритме адаптивного мультианализа, который основан на предварительном анализе и коррекции графа паросочетаний. При его применении к матрицам графов с коэффициентом заполнения меньше 30% алгоритм имеет статистическую временную сложность, которая близка к линейной.

ВВЕДЕНИЕ

Распределенные вычислительные системы являются новым поколением вычислительных систем, которые используются в основном для научных вычислений. По мере развития таких систем возникают проблемы эффективного распределения задач в них [1, 2, 5]. Одной из проблем большой распределенной системы является вовлечение в вычислительный процесс максимально большего количества ресурсов и, соответственно, распределение большего количества задач по ресурсам. В большинстве систем [3, 6, 11] используются планировщики потокового типа, что определяют либо случайный выбор узла для задачи, либо выбор узла в соответствии с системой приоритетов. Можно назвать следующие знаковые проекты, получившие известность: PBS [7], LSF [4], NQE [7], I-SOFT [8], EASY [9], LoadLeveler [10]. При этом влияние назначения заявки на ресурс при последующих назначениях не учитывается.

Неэффективность такого подхода особенно сильно проявляется в глобальных вычислительных системах, так как в системах такого типа ресурсы и заявки являются неоднородными.

Идея рассматриваемого подхода заключается в разделении составления расписания на предварительный анализ исходной информации, определение стратегии поиска решения и поиск варианта решения с использованием результатов анализа. Этап предварительного анализа существенно уменьшает время решения по сравнению с классическими методами решения задачи планирования [12].

Требования заявок на захват ресурсов вычислительной системы можно разделить на обязательные C_x , $x=1, \dots, p$, и оптимизирующие O_y , $y=1, \dots, k$. С помощью обязательных требований x -го типа $C_x^{i,j} \in \{0,1\}$ анализируется принципиальная возможность предоставления i -й заявке j -го ресурса [13]. Оптимизирующие требования y -го типа $O_y^{i,j} \in [0,1]$ определяют степень предпочтения (приоритет) j -го ресурса для назначения на него i -й заявки по требованиям $O_y^{i,j}$. Для определения приоритета j -го ресурса для назначения на него i -й заявки по всем требованиям можно использовать выражение

$$O_{i,j} = \prod_{x=1}^p C_x^{i,j} \prod_{y=1}^p R_y O_y^{i,j}, \quad (1)$$

где R_y — весовой коэффициент оптимизирующего требования y -го типа.

Если система планирования учитывает обязательные и оптимизирующие требования, то коэффициент претендования в матрице связности вычисляется из выражения (1) и находится в диапазоне $O_{i,j} \in [0,1]$, а при диспетчеризации с учетом только обязательных требований $O_{i,j} = \prod_{x=1}^p C_x^{i,j}$ и $O_{i,j} \in \{0,1\}$. В этом случае матрица связности, отображающая претендование заявок на ресурсы, примет булевый вид. Единичный элемент в этой матрице означает, что ресурс подходит для размещения заявки, т.е. есть достаточный объем памяти, процессор имеет необходимые производительность, программы, данные и т.д.

Для системы из N ресурсов в некоторый момент времени имеется M работ. Пул M задач, для которых система выделяет ресурсы, может быть ограничен наличием свободных ресурсов, т.е. при условии $M = N$. Требования работ на захват ресурсов представлены булевой матрицей связности (МС) $C[i, j]$, $i, j=1, \dots, N$. Необходимо определить отношения работа – ресурс $A = \{(V_i, W_j)\}$, $V_i \in V = \{1, 2, \dots, N\}$, $W_j \in W = \{1, 2, \dots, N\}$ так, чтобы $\forall V_i, W_j (C[V_i, W_j] = 1, V_i \neq W_j)$.

Введем дополнительные условия: ресурс может обслужить только одну заявку; процесс обслуживания заявки не может быть прерван; каждая работа имеет индивидуальные характеристики и может претендовать на захват только некоторых системных ресурсов; нет очереди к ресурсам; одна работа может быть обслужена только одним ресурсом. При этом отсутствие очередей определяется тем, что на данном уровне планирования планировщик более высокого уровня выбирает из общего потока заявок такое количество заявок, которое соответствует количеству свободных ресурсов.

Единичный элемент в МС C соответствует паре (ресурс(j), задача(i)) или (R^j, J^j) соответствует выполнению всех K обязательных требований, предъявляемых к системе обработки заявки на этом ресурсе. Нулевой элемент МС означает невозможность обслуживания. При такой постановке решение задачи распределения заявок по ресурсам сводится к задаче поиска максимального паросочетания в невзвешенном двудольном графе. Для ее решения традиционно применяется алгоритм направленного поиска (АНП) на основе метода Карпа–Хопкрофта.

В работе рассмотрены основы АНП с алгоритмом адаптивного мультианализа (АМА), который обеспечивает ускоренный поиск максимального паросочетания.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСКОРЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОТ ПО РЕСУРСАМ В НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В основу наиболее известных алгоритмов [15–23] поиска максимального паросочетания в произвольном графе положены два основных подхода [16]: сведение задачи к поиску максимального потока в сети и поиска увеличивающего пути от свободных вершин. В основу поиска увеличивающегося чередующегося пути положена схема Диница [16] и разработанный на его основе алгоритм Хопкрофта–Карпа [22]. Наилучшие известные алгоритмы, реализующие этот подход, имеют полиномиальную временную сложность. Однако эти алгоритмы и реализующие их программы имеют сложную структуру или предназначены для частных случаев и не обеспечивают приемлемых временных показателей, что ограничивает применение их в системах диспетчирования параллельных систем.

Для алгоритмов, использующих поиск увеличивающегося чередующегося пути, правильность выбора начального варианта паросочетания в значительной степени влияет на количество шагов при поиске такого пути. Многие авторы [15–19] подчеркивают, что уникальные свойства двудольного графа позволяют уменьшить временную сложность алгоритмов.

Для выявления особенностей двудольного графа, влияющих на временную сложность, выполнено статистическое исследование программной модели базового алгоритма Хопкрофта–Карпа с временной сложностью $O(n^{2.5})$, $n = N$. Результаты моделирования приведены на рис. 1 для графов размерности 10.

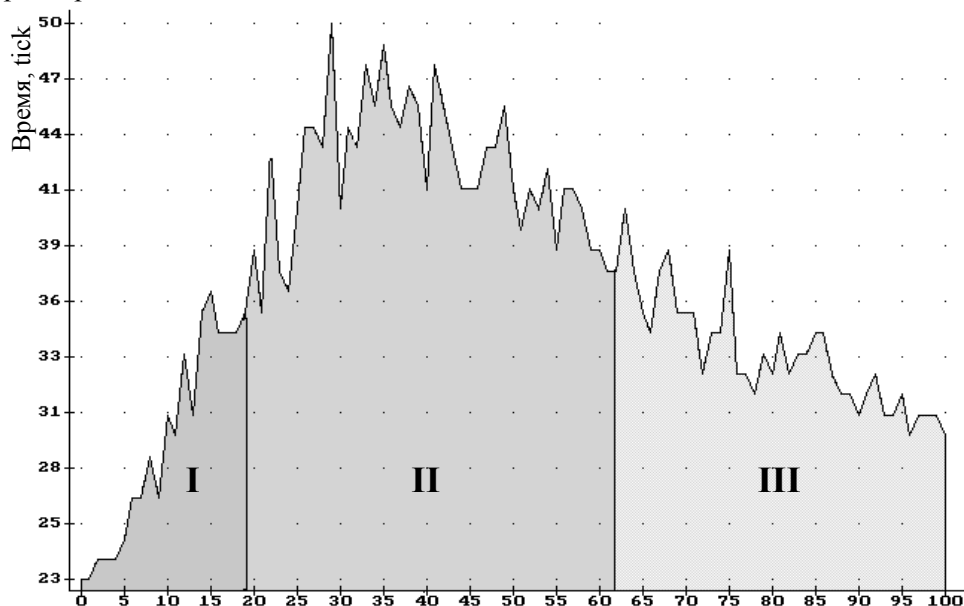


Рис. 1. Зависимость времени решения задачи поиска максимального паросочетания от коэффициента заполнения МС при $N = 10$

При моделировании время вычисления максимального паросочетания вычислялось в относительных временных единицах (тиках). Как видно из этого графика, время решения задачи назначения зависит от коэффициента заполнения МС C и ее размерности N . При этом в графике можно выделить три зоны (I, II, III) с существенно различным временем решения. Исследования показали зависимость размера и положения этих зон от размерности задачи (рис. 2). Значительные различия временных затрат в выделенных зонах обусловило необходимость исследования в них свойств двудольного графа. Кроме этого, анализ базового алгоритма показал зависимость времени решения задачи от правильности выбора исходного (базового) варианта решения.

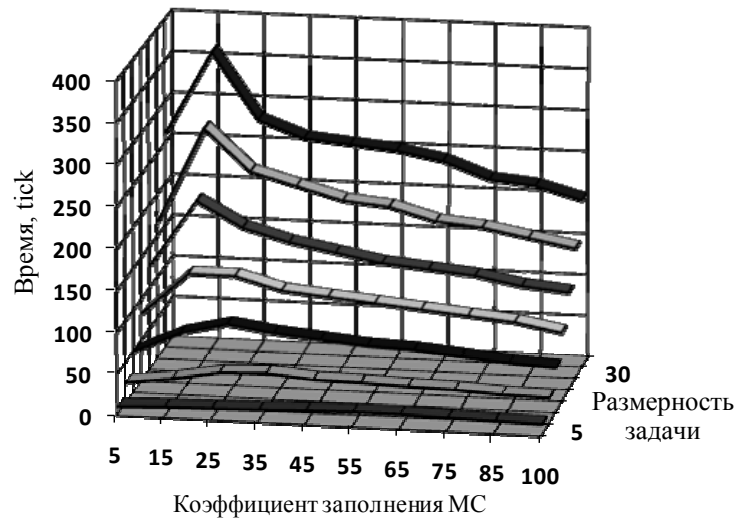


Рис. 2. Зависимость времени решения задачи планирования от ее размерности

Анализ алгоритмов поиска максимального паросочетания, а также анализ процесса поиска решения в выделенных зонах показывает, что наибольшие трудности, влияющие на время поиска максимального паросочетания, возникают в двудольных графах, в которых перманент МС близок к единице или равен нулю. Эти трудности вызваны тем, что поиск максимального паросочетания основан на центральной теореме Кенига–Холла о существовании паросочетания [15, 16] и теореме Берга [17]. Поэтому все известные алгоритмы предусматривают попытки поиска увеличивающегося пути от свободных вершин после генерирования базового варианта даже в том случае, если этого пути нет, что существенно увеличивает время поиска.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕХНОЛОГИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА

Чтобы упростить решение задачи поиска максимального паросочетания, предлагается разделить его на несколько этапов [13, 14], когда собственно решению предшествует быстрый анализ исходной информации и выработка рекомендаций для ее дальнейшего решения. Добавление дополнительных шагов значительно меньшей временной сложности, чем сам алгоритм, не влияет на временную сложность алгоритма в целом, однако позволяет

уменьшить размерность решения задачи за счет выделения назначений, которые обязательно нужно выполнить и выделить назначения, которые выполнять не нужно, и за счет этого избежать лишних проверок на возможность включения их в решение.

Кроме этого, на этапе подготовки исходной информации возможно вычисление мощности максимального паросочетания. Имея численное значение такой мощности, можно избежать поиска увеличивающего пути от свободных вершин при достижении расчетной мощности паросочетания на очередном шаге поиска решения.

Задача назначения требует определения условий возможности ее решения, т.е. возможности полного распределения всех заявок по ресурсам. Необходимые условия существования такого решения формулируются следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N C[i, j] \neq 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad \sum_{i=1}^M C[i, j] \neq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Анализ появления конфликтных ситуаций и условий их возникновения показывает, что выполнение условий (2) необходимо для получения варианта размещения, но недостаточно, так как они не оценивают взаимосвязи возможных мест размещения заявок и влияния возможного назначения на последующие.

При выполнении исследований используются следующие определения.

Определение 1. Задан невзвешенный двудольный граф $G = (V_R, V_J, E)$, где $V_R = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$, $V_J = \{J_1, J_2, \dots, J_N\}$ — вершины графа, отвечающие ресурсам и задачам соответственно; $E = \{E_1, E_2, \dots, E_d\}$ — дуги графа, $E_k = (R^*, J^*)$, где $R^* \in V_R$ и $J^* \in V_J$, $k = 1, \dots, d$, $0 \leq d \leq N^2$. Матрица C_{RJ} называется *матрицей связности* графа G , если

$$C_{RJ}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{при } (R_i, J_j) \in E, \\ 0 & \text{при } (R_i, J_j) \notin E. \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

Определение 2. Подмножество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_k = (R^k, J^k)$, $R^k \in V_R$, $J^k \in V_J$, $k = 1, \dots, n$, $n \in N$ называется *паросочетанием* графа G или его матрицы C_{RJ} , если

$$A = \{(R^1, J^1), \dots, (R^n, J^n)\}, \quad A_R = \{R^1, \dots, R^n\}, \quad A_J = \{J^1, \dots, J^n\}, \quad k = 1, \dots, n$$

и $A_R \subseteq V_R$, $A_J \subseteq V_J$.

Другими словами, подмножество A ребер графа $G = (V, E)$ называется паросочетанием, если никакие два ребра из A не имеют общей вершины.

Определение 3. Пара $a_k = (R^k, J^k)$, $k = 1, \dots, n$ называется *назначением* для ресурса $R^k \in V_R$ и для задания $J^k \in V_J$.

Определение 4. Пусть $X = \{A^1, \dots, A^z\}$, $z \in N$ — множество результатов всех возможных паросочетаний для графа $G = (V, E)$ или его матри-

цы C_{RJ} . Паросочетание A^* называется *максимальным паросочетанием* или *решением* для данного графа G , если

$$|A^*| = n^* \text{ и } n^* = \max\{|A^1|, \dots, |A^z|\}.$$

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ВЫДЕЛЕНИЯ ОБЯЗАТЕЛЬНЫХ НАЗНАЧЕНИЙ

Анализ свойств невзвешенного двудольного графа при решении задачи поиска максимального паросочетания, а также анализ известных алгоритмов позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если в матрице $C_{RJ}[i, j]$ графа $G = (V_R, V_J, E)$ существует решение A мощностью $n = N$ и существует такое назначение (p, q) , что $C_{RJ}[p, q] = 1$, $C_{RJ}[p, j] = 0$, $j \in \{1, \dots, N\} \setminus q$ и/или $C_{RJ}[i, q] = 0$, $i \in \{1, \dots, N\} \setminus p$, тогда это назначение (p, q) всегда участвует в решении A , т.е. $(p, q) \in A$.

Если для невзвешенного двудольного графа существует совершенное паросочетание и в графе есть вершина со степенью один, то ребро, инцидентное этой вершине, и вершины, инцидентные этому ребру обязательно входят в совершенное паросочетание.

Определение 5. Назначение (p, q) по теореме 1 называется *обязательным*.

Следствие. Если существует решение A^* , то задачу назначения можно разделить на две части: в первой части участвуют только обязательные назначения (p, q) , во второй части — оставшиеся назначения из новой матрицы связности C_{RJ}^* , которую получают после удаления строк и столбцов, соответствующих обязательным назначениям, определенным по теореме 1. Причем ввиду редукции графа и соответствующей коррекции МС это следствие может применяться рекуррентно.

Теорема 1*. Любая из вершин в невзвешенном двудольном графе, имеющая степень, равную единице, всегда участвует в одном из вариантов максимального паросочетания.

Теорема 1* справедлива как для вершин-заявок, так и для вершин-ресурсов. В том случае, если вершины со степенью 1 образуют веер, то теорема 1* справедлива для любой вершины, входящей в веер и каждая из них может быть взята в паросочетание, а проверку остальных вершин на возможность получения увеличивающего пути выполнять не следует.

Теорема 2. Если в матрице $C_{RJ}[i, j]$ существует веер E_{FA} :

$$E_{FA} = \{(R^1, q), \dots, (R^f, q)\}, C_{RJ}[R^k, q] = 1, k = 1, \dots, f$$

и $C_{RJ}[R^k, J^k] = 0$, $J^k \neq q$ или $E_{FA} = \{(p, J^1), \dots, (p, J^f)\}$, $C_{RJ}[p, J^k] = 1$, $k = 1, \dots, f$ и $C_{RJ}[R^k, J^k] = 0$, $J^k \neq p$, тогда любая из вершин из E_{FA} вхо-

дит в один из вариантов максимального паросочетания, совершенное паросочетание не может быть получено и мощность максимального паросочетания определяется из выражения $M < N - f + 1$.

Следствие 1. Мощность решения задачи поиска максимального паросочетания может быть уменьшена на количество пар вершин, определенных по теоремам 1 и 1*, и поиск паросочетания должен вестись в новом суграфе.

Следствие 1*. Размерность решения задачи поиска максимального паросочетания должна быть уменьшена на количество вершин, входящих в веер, а поиск паросочетания должен вестись в новом суграфе.

Следствие 2. Смежные ребра, инцидентные вершинам, определенным по теореме 1, должны быть удалены из дальнейшего рассмотрения, а исходный граф редуцирован и преобразован в новый суграф.

Следствие 3. Смежные ребра, инцидентные вершинам, определенным по теореме 2, должны быть удалены из дальнейшего рассмотрения, а исходный граф редуцирован и преобразован в новый суграф.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ВЫДЕЛЕНИЯ КОНФЛИКТНЫХ НАЗНАЧЕНИЙ

Базовый или начальный вариант решения задачи назначения обычно выполняется случайным образом. Анализ свойств двудольного графа показывает, что наряду с обязательными назначениями в нем можно выделить конфликтные, попадание которых в решение неминуемо приводит к появлению свободных вершин, а значит и к дополнительным шагам при формировании окончательного решения. Для выявления конфликтных назначений предлагается выполнить анализ исходного графа, а именно его МС.

В результате выполнения этой операции находятся все основные подматрицы в МС $C'_{RJ} = I - C_{RJ}$, где I — квадратная матрица единичных элементов. Это соответствует выделению в исходной МС нулевых подматриц. Локализация таких подматриц реализуется целевой перестановкой строк и столбцов МС. При разработке алгоритма назначения учитывались следующие очевидные утверждения.

Утверждение 1. Так как каждая строка МС представляет собой отражение возможного распределения заявок на ресурсы, то перемена местами двух строк МС с запоминанием нового расположения заявок не влияет на качественную характеристику МС и исходного графа.

Утверждение 2. Так как каждый столбец МС представляет собой отражение претендования заявок на захват данного ресурса, то перемена местами двух столбцов МС с запоминанием нового расположения ресурсов не влияет на качественную характеристику МС и исходного графа.

Утверждения 1 и 2 не требуют доказательств, так как они следуют из определения изоморфности графов, полученных путем перестановки любых вершин. При эквивалентном преобразовании МС путем перестановки строк и столбцов делается попытка выполнить квазиназначения и получить один

из вариантов решения задачи назначения соответствующего элементам главной диагонали МС. Это не противоречит одному из определений максимального паросочетания [15]: максимальное паросочетание — это максимальное множество единиц матрицы связности, у которых не совпадают координаты.

Алгоритм изоморфного преобразования исходного графа основан на упорядочении МС. Строки упорядочиваются по возрастанию, а столбцы — по убыванию сумм единиц с попыткой получить единичную главную диагональ, что соответствует квазиназначению данной заявки на ресурс. Следует отметить, что для уменьшения временной сложности алгоритма сами перестановки не выполняются, а запоминается новый порядок строк и столбцов по результатам сортировки. В основу алгоритма положены модифицированный метод разложения ориентированного графа на максимально сильносвязанные подграфы и алгоритм поиска минимального подмножества сочленения, предложенные Мальгранжем [15].

Теорема 3. Если после эквивалентного преобразования удастся получить терм-ранг МС, равный рангу МС, то все заявки имеют места назначения, соответствующие единицам в главной диагонали, и найдено полное паросочетание, получен один из вариантов решения задачи назначения заявок на ресурсы.

Доказательство. Задача о паросочетании по определению, приведенном в работе [15], состоит в нахождении в исходном графе G максимального паросочетания. Если мощность паросочетания равна $\lfloor V/2 \rfloor$, т.е. наибольшему возможному значению в графе с V вершинами, то паросочетание называется полным. Так как терм-ранг матрицы равен $\lfloor V/2 \rfloor$, то утверждение верно.

Теорема 4. Если в матрице $C_{RJ}[i, j]$ можно выделить подматрицу $C_{MM}[k, l]$, $k = 1, \dots, T$, $l = (N - S + 1), \dots, N$, где $S + T > N$ и C_{MM} — нулевая матрица, тогда задача назначения не имеет полного решения (рис. 3, а–в).

Доказательство. Предположим, что существует полное решение $A = \{(R^1, J^1), \dots, (R^n, J^n)\}$, $n = N$. Так как решение полное, имеем

$$A_R = \{R^1, \dots, R^n\} = V_R = \{R_1, \dots, R_N\} = \{1, 2, \dots, N\};$$

$$A_J = \{J^1, \dots, J^n\} = V_J = \{J_1, \dots, J_N\} = \{1, 2, \dots, N\}.$$

Рассмотрим вершины $V_{RT} = \{R_1, \dots, R_T\}$, которые принадлежат подматрице C_{MM} . Поскольку они также входят в состав полного решения A , всегда имеем T соответствующих пар $\{(R_1, J_1^*), \dots, (R_T, J_T^*)\}$ в A и $C_{RJ}[R_k, J_k^*] = 1$, для $k = 1, \dots, T$, $\{J_1^*, \dots, J_T^*\} = V_{JT} \subset V_J$. Очевидно, что для таких T ресурсов R_k имеются по крайней мере T заданий J_k^* , которые имеют доступ к ним.

Поскольку C_{MM} — нулевая матрица, имеем $C_{MM}[k, l] = C_{RJ}[k, l] = 0$. Это означает, что есть S вершин-заданий J_k^* , которые не имеют доступа к T ресур-

сам R_k . Поэтому осталось максимально $N - S$ заданий, которые возможно имеют доступ к T ресурсам R_k . Однако, исходя из условия, что $S + T > N$, получаем $T > N - S$, что является противоречием. Поэтому предложение о существовании полного решения A неверно.

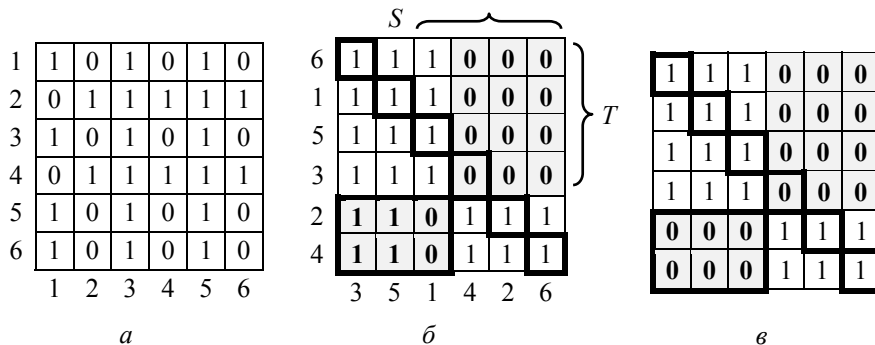


Рис. 3. К теореме 4: a — исходная МС; b — МС после преобразования; v — МС после коррекции: \square — конфликтная зона

Теорема 4 справедлива не только для матрицы C_{MM} , которая находится над главной диагональю матрицы C_{RJ} , но также для любой позиции C_{MM} в C_{RJ} . Из утверждений 1 и 2 очевидно, что всегда существует такое эквивалентное преобразование матрицы, когда матрица C_{MM} может быть перенесена из любой позиции в правый верхний угол матрицы C_{RJ} .

Примечание. Доказательство теоремы 4 можно выполнить на основе теоремы Фробениуса–Кенига и Минка о вычислении перманента 0,1-матрицы.

Теорема 5. Если в матрице C_{RJ} можно выделить подматрицу $C_{MN}[k, l]$, $k = 1, \dots, T$, $l = (N - S + 1), \dots, N$, где $S + T = N$ и C_{MN} — нулевая матрица, тогда

$$R_i \in \{1, \dots, N - S\}, J_j \in \{T + 1, \dots, N\}, (R_i, J_j) \notin A$$

и все элементы (R_i, J_j) должны быть обнулены и исключены из рассмотрения при поиске полного решения (рис. 4).

Доказательство. Предположим, что в C_{RJ} имеется подматрица C_{MT} , в которой есть элемент $C_{MT}[i^*, j^*] = 1$ и $(i^*, j^*) \in A$, $i^* \in \{T + 1, \dots, N\}$, $j^* \in \{1, \dots, N - S\}$. Выделение подматрицы C_{MT} делит МС на подматрицы: $S \times T$, $(N - S) \times T$, $(N - T) \times S$. Так как по условию $S + T = N$, то подматрицы $(N - S) \times T$ и $(N - T) \times S$ — квадратные. Тогда предположение, что $(i^*, j^*) \in A$, где $i^* \in \{T + 1, \dots, N\}$, $j^* \in \{1, \dots, N - S\}$, приводит к тому, что в подматрице $(N - S) \times N$ должны присутствовать $T + 1$ назначений, входящих в A . Но так как $T + 1 > N - S$ и $S + T = N$, то это предположение неверно. Аналогичное доказательство можно привести и для подматрицы $(N - T) \times S$.

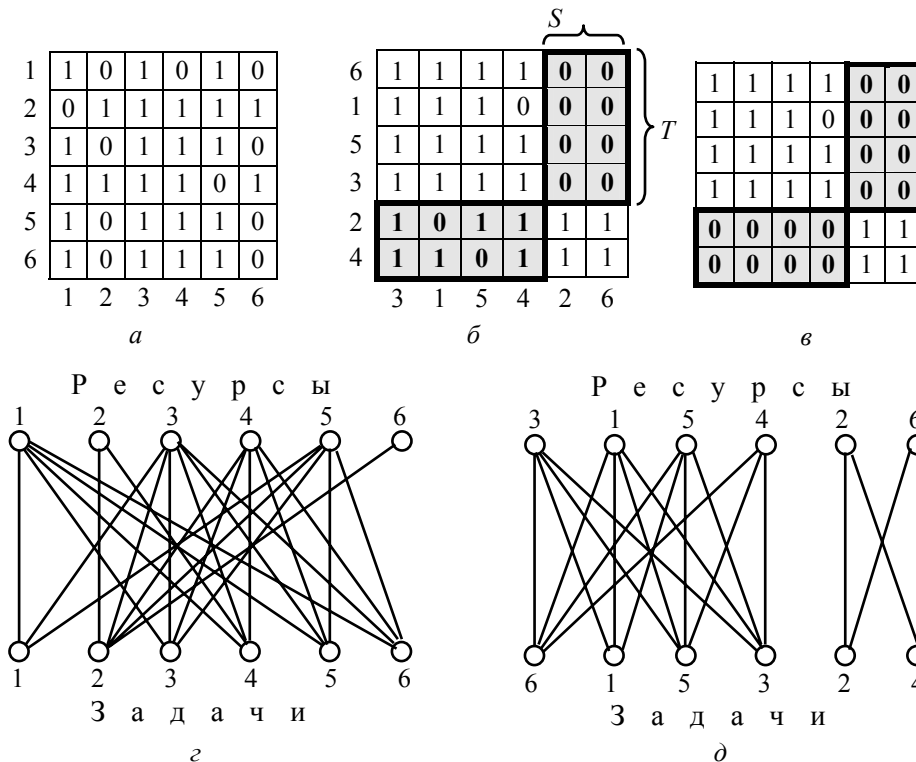


Рис. 4. К теореме 5: исходная МС: а — МС после преобразования; б — МС после коррекции; в — исходный граф; г — граф после редукции

Теорема 6. Если в матрице $C_{MT}[i, j]$ можно выделить несколько подматриц, удовлетворяющих теореме 5, то все соответствующие им подматрицы, симметричные относительно главной диагонали, являются конфликтными и должны быть обнулены (рис. 5, а-д).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5 и справедливо для каждой подматрицы отдельно.

Теорема 7. Если в матрице C_{RJ} существует подматрица C_{MT} такая, что $C_{MT}[k, l] = 0$, $k = 1, \dots, T$, $l = (N - S + 1), \dots, N$, кроме элемента $C_{MT}[T, N - S + 1] = 1$, причем $S + T = N + 1$, тогда назначение $(T, N - S + 1)$ является ключевым и всегда входит в состав одного из вариантов решения.

Доказательство. Из условия теоремы в подматрице C_{MT} можно выделить две подматрицы C_{MN1} и C_{MN2} такие, что

$$C_{MN1}[k, l] = 0, \quad k = 1, \dots, T - 1, \quad l = N - S + 1, \dots, N;$$

$$C_{MN2}[k, l] = 0, \quad k = 1, \dots, T - 1, \quad l = N - S + 2, \dots, N. \quad (3)$$

Применив теорему 6 для этих подматриц, получаем две подматрицы C_{MN1}^* и C_{MN2}^* , симметричные им относительно главной диагонали, которые являются конфликтными и должны быть обнулены. Тогда

$$C_{MN1}^*[k,l]=0, k=T,\dots,N, l=1,\dots,N-S;$$

$$C_{MN2}^*[k,l]=0, k=T+1,\dots,N, l=1,\dots,N-S+1. \tag{4}$$

Рассмотрим строку T и столбец $N-S+1$. Из условия теоремы, а также (3) и (4) имеем: $C_{RJ}[T,N-S+1]=1, C_{RJ}[T,k]=0, k=1,\dots,N$ и $k \neq T, C_{RJ}[k,N-S+1]=0, k=1,\dots,N$ и $k \neq 1$. Но по теореме 1 и следствию 1 теоремы 2 назначение $(T,N-S+1)$ является обязательным и всегда участвует в составе одного из вариантов решения максимального паросочетания.

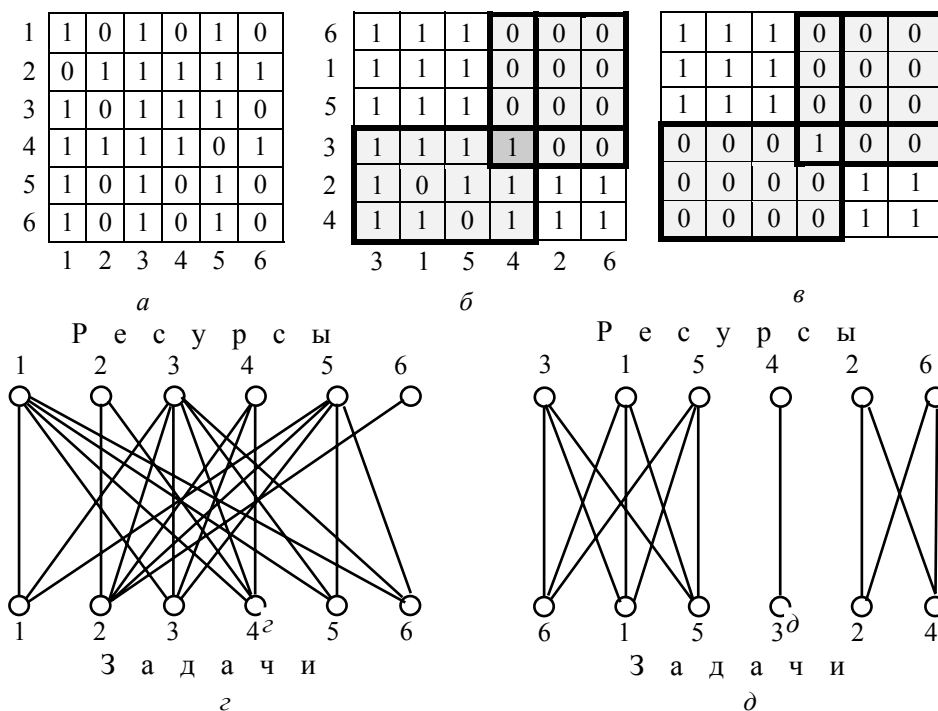


Рис. 5. К теореме 6: a — исходная МС; b — МС после преобразования; c — МС после коррекции; z — исходный граф; d — граф после преобразования и коррекции

Следствие. Если МС представляет собой нижнюю диагональную матрицу, то задача имеет единственное решение, соответствующее единичной главной диагонали (рис. 6, $a-d$). Доказательство следует из теорем 5, 6.

На основе теорем 1–7 и их следствий разработан алгоритм адаптивного мультианализа (АМА), который принадлежит к категории алгоритмов пошагового конструирования решения задачи назначения [13, 14].

ОЦЕНКА ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО ВЕНГЕРСКОГО АЛГОРИТМА

Основой алгоритма направленного поиска решения задачи о назначениях является венгерский метод, имеющий временную сложность $O(n^3)$, где n — количество вершин графа матрицы C_{RJ} заданий-ресурсов. Тради-

ционный АНП основан на методе Карпа–Хопкрофта. Его временная сложность известна из работы [22] и оценивается как $O(n^{0.5}m)$, где m — количество дуг графа. Но с учетом того, что $n \leq m \leq n^2$, алгоритм Карпа–Хопкрофта имеет временную сложность $O(n^{2.5})$. Однако для процедуры поиска максимального паросочетания используется разработанный алгоритм поиска максимального паросочетания вместо традиционного, который был использован в венгерском методе.

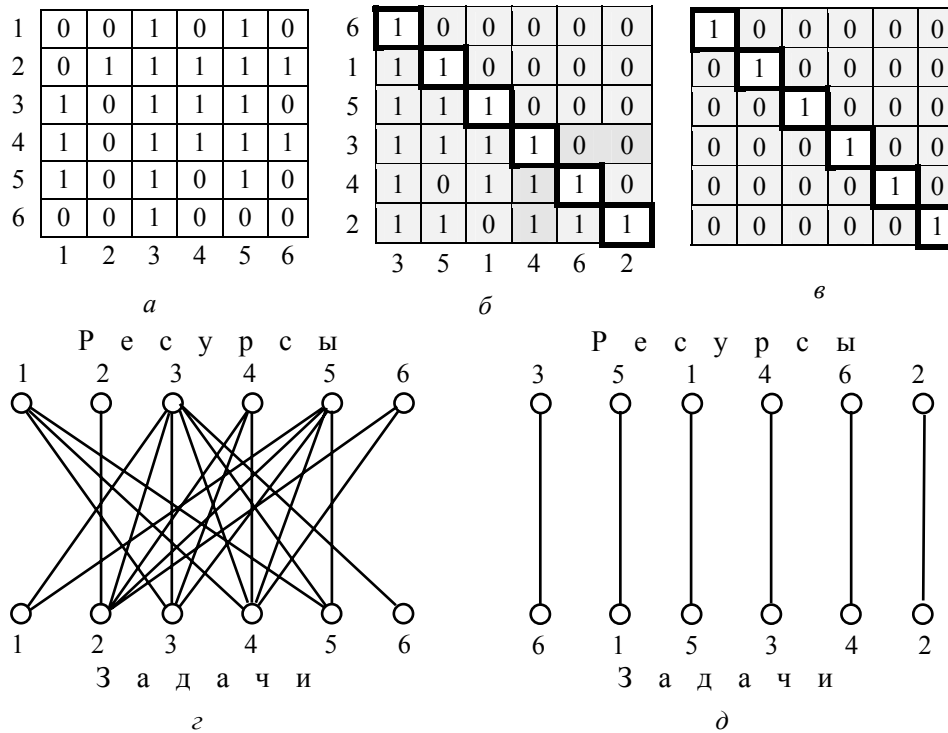


Рис. 6. К теореме 7: а — исходная МС; б — МС после преобразования; в — МС после коррекции; г — исходный граф; д — граф после коррекции

Для оценки временной сложности АНП, т. е., венгерского метода с использованием АМА вместо алгоритма Карпа–Хопкрофта, выполним оценку временной сложности венгерского метода без алгоритма Карпа–Хопкрофта и оценку временной сложности АМА отдельно.

Временная сложность венгерского метода без алгоритма Карпа–Хопкрофта. Алгоритм АНП состоит из 4 главных процедур. Проведем оценку временной сложности для каждой из них:

1. Процедура подготовки данных и поля определения поиска имеет временную сложность $O(E)$ или в худшем случае $O(n^2)$.
2. Процедура определения внешней границы зоны поиска имеет временную сложность $O(2n)$.
3. Процедура ориентированного поиска оптимального расписания в выделенной линии поиска имеет временную сложность $O(X)$, которую определим позже.

4. Процедура определения новой линии поиска имеет временную сложность $O(n + 2n^2)$ для маркировки и $O(3n^2)$ для перестановки. В итоге ее общая временная сложность равна $O(Y)$, где $Y = n + 5n^2$. Для уменьшения временной сложности этой процедуры в АНП формируются дополнительные векторы степеней вершин и линии поиска. В этом случае $Y = n + 2n + 5n^2 = 7n$.

При сравнительной оценке различных алгоритмов процедура формирования исходных данных исключается из рассмотрения, так как ее временная сложность одинакова. При поиске решения имеется цикл из процедур 4 и 3. Допустим что этот цикл выполняется z раз и имеет временную сложность Z . Так как венгерский метод имеет временную сложность $O(n^3)$, то временная сложность процедур внутреннего цикла будет равна $O(n^3)/W$. Поскольку для процедуры 3 используется алгоритм Карпа–Хопкрофта, то $X = O(n^{0,5}m)$ или $X = O(n^{0,5})$, $Y = O(n + 5n^2)$. С другой стороны, временную сложность W можно принять как $W = O(\max(X, Y)) = O(n^{0,5}m)$ или $O(n^{2,5})$. Отсюда $O(n^3)/Z = \max(X, Y)$. Таким образом, $Z = O(n^3)/O(n^{2,5}) = O(n^{0,5})$.

Временная сложность АНП без процедуры 3, т.е. без алгоритма Карпа–Хопкрофта, оценивается как $O(n^2 + 2n + n^{0,5}(n + 5n^2))$, а в общем случае — $O(n^2 + n^{0,5} \max(n^{0,5}m, n))$. Без учета операций подготовки исходной информации временная сложность АНП равна $O(n^{0,5} \max(n^{0,5}m, n))$.

Временная сложность АНП с АМА. Временная сложность алгоритма АНП, реализованного на основе предложенного метода пошагового конструирования, состоит из суммы оценок сложности шагов 1–4. Сложность процедуры подготовки исходной информации и анализа (шаг 1) зависит от количества ребер в исходном графе, а так как при этом выполняются обычные операции по формированию матрицы связности или списков инцидентности, то сложность выполнения этого шага равна $o(m)$.

Ввиду того, что в предлагаемом алгоритме, кроме матрицы связности, формируются еще и векторы степеней вершин графа, то временная сложность этой процедуры увеличивается на $O(2n)$. Тогда общая временная сложность выполнения этой процедуры равна $O(m + 2n)$. При выполнении грубого анализа ищутся изолированные вершины и для этого необходим одноразовый просмотр векторов, что определяет временную сложность выполнения этого шага как $O(n)$.

Выполнение шага 2 для поиска обязательных назначений имеет временную сложность $O(n)$ и в случае каждого обнаружения вершины со степенью 1 граф подвергается редукции с временной сложностью $O(2n)$. В случае единственного решения после выполнения n шагов получается полное решение. Тогда временная сложность нахождения полного решения равна $O(n(n - 1)/2 + m)$. Общая временная сложность этой процедуры равняется $O(n + 2n) = O(3n)$.

Временная сложность выполнения шага 3 определяется выбранным алгоритмом сортировки одномерного массива и сложностью анализа преобразованной МС и ее коррекции и равна $O(2n \log n + m/2)$.

Общая временная сложность АНП $X_{\text{АНП}} = O(3m + 2n(3 + \log n))$. Ввиду того, что на общую оценку сложности алгоритма влияет выполнение шагов 1 и 4, а значение m в худшем случае равно n^2 , то сложностью остальных шагов можно пренебречь. Тогда временная сложность алгоритма АНП равна $O(m + n(3 + \log n))$. Однако анализ алгоритмов, выполняющих поиск максимального паросочетания на основе теоремы Бержа, и примеров [18, 19, 20], с помощью которых обычно иллюстрируется работоспособность предлагаемых алгоритмов, позволяет сделать вывод, что для большинства вариантов не требуется выполнение шага 4 и, следовательно, сложность описанного алгоритма получения решения можно уменьшить для этого вида графов до $O(m)$ при использовании списков инцидентности, а при использовании МС — до $O(n)^2$.

Таким образом, временная сложность венгерского метода в общем случае $O(n^{0.5} \max(X, n))$ или $O(n^{2.5} \max(X, n)/m)$, где $X = X_{\text{АНП}} = O(m + n \log n)$. Тогда временная сложность АНП с АМА равна $O(n^{2.5} \log n)$ при $m = n$, или $O(n^{1.5} \log n)$ при $m = n^2$.

Следует отметить, что временная сложность АНП с АМА определялась для худшего случая, т.е. когда МС является заполненной. Но и в этом случае временная сложность АНП равна $O(n^{1.5} \log n)$, что меньше $O(n^3)$.

Достоверность расчета временной сложности проверялась на программной модели. Результаты статистического исследования представлены на рис. 7. Ввиду того, что АНП является адаптивным алгоритмом, а поиск максимального паросочетания выполнялся в разреженной матрице с коэффициентом заполнения меньше 30%, то статистическая временная сложность АНП меньше $O(n^{1.5} \log n)$ и близка к линейной.

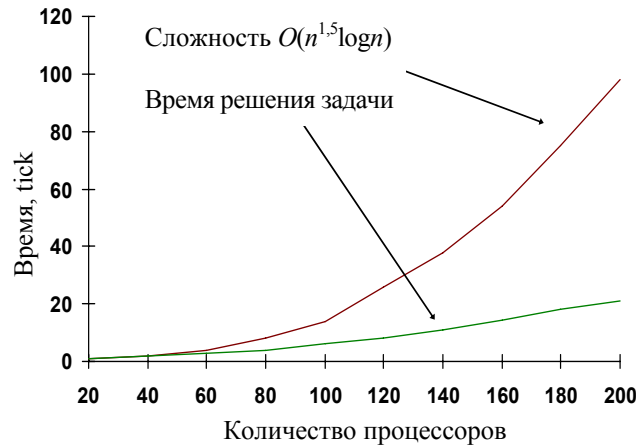


Рис. 7. Сравнение времен решения задачи планирования

ВЫВОДЫ

Анализ наиболее известных подходов решения задач назначения (метод отжига и решение задачи с помощью оценочных функций) показывает, что они не могут быть приняты в качестве базовых для динамического планировщика, так как в первом случае временные параметры процесса поиска решения не удовлетворяют ограничениям по времени планирования, а во втором случае при приемлемом времени планирования качество планирования ухудшается. Наиболее приемлемым является метод направленного поиска, позволяющий осуществить поиск решения наилучшим способом, зависящим от исходной информации.

Венгерский алгоритм поиска максимального паросочетания во взвешенном двудольном графе удовлетворяет предъявленным требованиям, так как обеспечивает направленный поиск решения, соответствует отношению работа–ресурс в предлагаемой модели системы пространственного планирования. Классический венгерский алгоритм в каждой итерации выполняет поиск максимального паросочетания для невзвешенного двудольного графа с использованием алгоритма Карпа–Хопкрофта и имеет временную сложность $O(n^3)$. Она определяется алгоритмом Карпа–Хопкрофта с временной сложностью $O(n^{2.5})$.

Замена алгоритма Карпа–Хопкрофта другим алгоритмом с меньшей временной сложностью позволит снизить общую временную сложность венгерского алгоритма. Элементы теории построения адаптивного поиска максимального паросочетания являются основой этого решения, так как поиск максимального паросочетания для невзвешенного двудольного графа выполняется при степени заполнения МС не более 30%, что позволяет применить предложенные алгоритмы выполнения обязательных назначений и принцип исключающего планирования.

Использование принципа исключающего планирования способствует в значительной степени повысить эффективность системы динамического планирования с сохранением качества решения в заданных пределах.

Предложенные в работе процедуры подготовки исходных данных для планирования в реальном времени позволяют использовать модифицированный венгерский алгоритм в качестве базового для пространственного планировщика нижнего уровня систем реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Douglas T.* Distributed computing in practice: The Condor experience / Т. Douglas, Т. Tannenbaum, М. Livny // *Concurrency and Computation: Practice and Experience*. — 2005. — N 2. — P. 323–356.
2. *Tannenbaum Andrew S.* Distributed Systems: Principles and Paradigms (2nd Edition) / Andrew S. Tanenbaum, Maarten van Steen. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc. — 2006.
3. *Метод опережающего планирования для ГРИД* / В.Н. Коваленко, Е.И. Коваленко, Д.А. Корягин, Э.З. Любимский // Препринт ИПМ. — 2005. — № 112. — http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep112/prep2005_112.html.
4. *Platform LSF 7 Update 6. An Overview of New Features for Platform LSF Administrators.* Официальный сайт компании Platform Computing Corporation — 2009. — http://www.platform.com/workload-management/whatsnew_lsf7u6.pdf.

5. *Microsoft Windows Compute Cluster Server 2003*. Руководство пользователя — 2006. — https://msdb.ru/Downloads/WindowsServer2003/CCS/CCS2003Guide_Rus.pdf.
6. *TORQUE Resource Manager Guide*. Официальный сайт компании Cluster Resources Inc. — 2009. — <http://www.clusterresources.com/products/torque-resource-manager.php>.
7. *PBS Works*. Официальный сайт компании Altair Engineering, Inc. — 2006. — <http://www.pbsworks.com/>.
8. *Ding X.* BWS: balanced work stealing for time-sharing multicores / X. Ding, K. Wang, P.B. Gibbons, X. Zhang // Proceedings of the 7-th ACM European Conference on Computer Systems. — EuroSys '12. — New York, NY, USA: ACM. — 2012. — P. 365–378.
9. *What is Condor?* Официальный сайт продукта Condor. — 2006. — <http://www.cs.wisc.edu/condor/description.html>.
10. *IBM Tivoli Workload Scheduler LoadLeveler*. Официальный сайт компании «Интерфейс» — 2007. — <http://www.interface.ru/home.asp?artId=6283>.
11. *Maui Scheduler Administrator's Guide*. Официальный сайт компании Cluster Resources Inc. — 2008. — <http://www.clusterresources.com/products/maui/docs/index.shtml>.
12. *Moab Workload Manager*. Официальный сайт компании Cluster Resources Inc. — 2008. — <http://www.clusterresources.com/products/moab-cluster-suite/workload-manager.php>.
13. *Симоненко А.В.* Выбор стратегии пространственного планирования в параллельных вычислительных системах / А.В. Симоненко // Информатика, управління та обчислювальна техніка. — К., 2001. — **35**. — С. 104–108.
14. *Симоненко А.В.* Система пространственного распределения заданий в распределённых вычислительных системах / А.В. Симоненко, С.В. Пих, Н.В. Слущкий, В.В. Воробйов // Информатика, управління та обчислювальна техніка. — 2012. — **56**. — С. 170.
15. *Kaufmann A.* Introduction a la combinatorique en vue des applications / A. Kaufmann. — Dunod, Paris. — 1968.
16. *Пападимитриу К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / К. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М.: Мир. — 1985.
17. *Berge C.* Theorie des graphes et ses application / C. Berge. — Dunod, Paris. — 1958.
18. *Casavant T.L.* A taxonomy of scheduling in general-purpose distributed computing systems // IEEE Trans. Softw.Eng.14 ,(1988) / T.L. Casavant, J.G. Kuhl .— P. 141–154.
19. *Blazevicz J.* Scheduling independent multiprocessor tasks on a uniform k-processor system / J. Blazevicz, M. Drozdowski, G. Schmidt, D. De Werra // Parallel Computer. — 1994. — **20**. — P. 15–28.
20. *Elsadek A.A.* Heuristic model for task allocation in a heterogeneous distributed systems / A.A. Elsadek, B.E. Wells // proc. of PDPTA'96, California USA. — 1996. — **2**. — P. 659–671.
21. *Freund R.F.* Generational Scheduling for Heterogeneous Computing Systems / R.F. Freund, B.R. Carter, D. Watson et al. // proc. of PDPTA'96, California USA, —1996. — **2**. — P. 769–778.
22. *Hopcroft J.E.* An $n^{2.5}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs // SIAM J. Comput. 2(4) / J.E. Hopcroft, R.M. Karp. — 1973. — P. 225–231.
23. *Tan M., Antonio J.K, et. al.* Scheduling and data relocation for sequentially executed subtasks in a heterogeneous computing system / M. Tan, J.K. Antonio et. al. // HCW'95. — 1995. — P. 109–120.

Поступила 07.12.2015

AGGRESSIVE AND PEACEFUL BEHAVIOR IN MULTIAGENT SYSTEMS ON CELLULAR SPACE

VALENTINE ZAVERTANYI, ALEKSANDR MAKARENKO

One of the key issues in Multi-Agent simulation approach is a consolidation of great model variety. Many researches govern own unique models that are similar in basic principles but for complex adaptive systems such as Artificial Ecosystems slight difference in architecture and parameters calibration could affect crucially on the emergent properties of the model. As it was denoted by the pioneers of the Artificial Ecosystems modelling Robert Axtell and Robert Axelrod: variety of Multi-Agent models need introduction of methods and technics that allows consolidating of its results. In work we present modification of model similar to classic Artificial Life spatial lattice models and trace the exhibition of aggressive and peaceful behavior depending on the income resource. We consider results of both models' simulation as it was proposed in «docking models» method by Axtell and Axelrod.

INTRODUCTION

The methodology of Multi-Agent simulations are broadly used in the study of ecological complexity. Popularity of multi-agent approach springs from the early researches such as Sugarspace [1], Bugs [2] and Polyworld [3] models. One of the pioneer model of Artificial Ecology is a model of bugs on spatial lattice that was proposed by Norman H. Packard [2] denotes the importance of shift from extrinsic to intrinsic adaptation approaches in modeling of evolutionary processes. Packard proposed to change the point of view on fitness in models of biological systems. He claimed that the extrinsic approach of adaptation such that is defined by a priori fitness function that assumes averaging of environment and individual interactions into it, could inflict limitations on biosphere. As a result of first simulations of his model H. Packard introduced notion of a posteriori fitness function for intrinsic adaptation evolutionary process and demonstrated system features with its help. This change in the concept of adaptation shifts the focus to the emerging characteristics of the system that can be treated as a posteriori fitness function. The examples of such values could be population size over the time, sustainability of emerging community assemblies under different factors such as environmental changes or arm races and other system features. By focusing on a posteriori fitness we should stress the notion of phenotype — the general composition of agent traits that emerge from its genotype. The phenotype could be expressed as a set of the most frequently used responses for particular effectors e.g. running from the predator, wondering searching for food. In particular study phenotype is presented as agent strategy — a set of agent's actions performed in hypothetical model situation.

Michael Burtsev proposed model that resembles pioneer Artificial Life's Polyworld [3] and Bugs [2] models: the agents with simple behavior are acting in a simple space. In [4] author develops latter models introducing kinship and using artificial neural network as basis of agent's actions. In current model no agent was

given a predefined strategy instead they were emerging as phenotype feature from the agent's actions, defined by neural network. By doing this, author achieved great variety of strategies that could take into account kinship of the object they interact with and are constructed from elementary actions as a result of evolution processes. Some of the strategies exposed cooperative behavior, it was shown that in such model emerge strategies corresponded to those in well-known game dove-hawk-bourgeois and moreover two new strategies of cooperative attack and defense emerge [4]. Observing results of artificial life modeling it can be concluded that such approach is not being controversial to game theory but on the contrary is an extension that provides new research horizons [4]. This model captured a general trend of increasing of the aggression level with a rising resource supply in primitive societies [5]. The correlation between population density and frequency of fight action for the case of rich resources in the model is similar to the analogous correlation extracted from ethnographic database [5].

One of the main achievements of this research is that agent speciation i. e. phenotypic grouping and distinction emerges without predefined fitness function [5]. Agents occupy niches that expose predator, prey or even more sophisticated behavior without extrinsic predisposition but as a result of evolutionary adaptation process. There is also continuations of such researches such as novel artificial ecology class model with predator-prey behavior [6], where agents are driven by fuzzy cognitive map. By researching the model Burtsev proposed novel methodology to categorize agents behavior into strategies and to trace population genotype dynamic [7].

OBJECTIVE AND MODEL DESCRIPTION

Many similar models are developed in purpose to study social, ecological, swarming, artificial life and other issues. After several years of enriching innovation, a period of consolidation is necessary [8]. In this work we aim to present modification of existing Artificial Life model, make some comparison of gained results, and observe the similar model behavior patterns.

It should be noted that the test and «docking» of different models written in the direction of artificial life is not new but still quite a few unexplored area. «Docking» is a procedure introduced in [9] that suppose aligning different models to achieve similar emergent behavior. The need to study the results of similar models of identity is a common thing, especially when it comes to the results of the theory using mathematics as a tool [10]. «Docking» models created by different authors and those that essentially cut off from one another, usually requires significant changes. For example, the first models for which the study was conducted in was the model of cultural dissemination by Robert Axelrod [1] and Sugarsapce model of authorship Joshua Epstein and Robert Akstell [10]. In this study the models are not so different, but are written by different authors on different programming platforms.

An Agent-based lattice foraging model with possible predator-prey behavior that resembles classical artificial life models [2, 3, 4] was developed in this work. This model could be considered as modification or replication of Burtsev cellular automata model [5] because of slight difference in their architectures.

Agent's neural architecture is very important factor for such kind of Artificial Life models. The scope of predator-prey behavior considered in this study can be achieved by a simple artificial neuronal network with no hidden layer as it is implemented in the model. More complex behavior such as group hunting and wandering could be simulated using more sophisticated methods of neuroevolution such as, for example, NEAT (neuroevolution of augmented topologies) [11]. In work [11] authors use NEAT algorithm to evolve effective predator group or group of collective foragers. The crucial advantage of NEAT instruments for multi-agent modelling is naturally introduced agents' grouping by genotype affinity that could provide useful insights on agent behavior emergence.

Each agent's sibling inherits neuronal matrix perturbed with some mutations after birth. Each agent is characterized by affinity marker: 3-dimensional vector which coordinates can take possible integer values in $[-2, 2]$ interval. Agents are treated as relatives if Euclidean distance between their markers are less than 0,2 threshold.

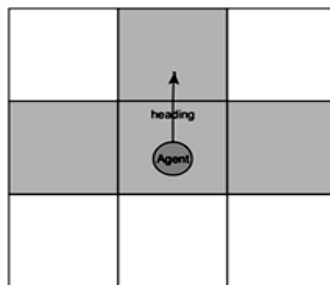


Fig. 1. Agent in cellular environment and his perception

Agent occupies one grid in cellular space (Fig. 1), he is driven by heading that defines a cell in front where could exist object agent interact with. Agents pay some amounts of resources — energy to perform an action, they could refill energy level by consuming vegetation and other agents. Agent percepts certain environmental values that are defined in Table 1.

Table 1. Input signals for agent and values that they take

Input signal	Value
s_0 — bias	rMax
s_1 — resource in current cell	energy of resource is placed agent's cell
s_2 — resource in front	energy of resource is placed in front cell
s_3 — resource in right cell.	energy of resource is placed in right cell
s_4 — resource in left cell	energy of resource is placed in left cell
s_5 — agent in front	rMax, if there is non-relative agent placed in front
s_6 — agent right	rMax, if there is non-relative agent is placed right
s_7 — agent left	rMax, if there is non-relative agent is placed left
s_8 — current resource (r)	current resource value (r)
s_9 — (rMax - r)	(rMax - r)
s_{10} — agent from the back	rMax, if there is an non-relative agent is placed backwards
s_{11} — relative in front	rMax, if in front cell is placed relative agent
s_{12} — relative right	rMax, if relative agent is placed right
s_{13} — relative left	rMax, if relative agent is placed left

In reply to the input signals agent performs the following actions: «rest», «turn», «move», «attack», «escape», «divide», he pays a fee for each of this actions. Maximum energy value that agent can accumulate is r_{max} and equals to 5000. Probability to be succeed in attack is equals to ratio of victim's and attacker's accumulated energy. If agent is attacked, he can ask neighbor relatives in area of his vision for help. If victim agent finds relatives nearby, he will add theirs ratio corrected coefficient (0,3 for all experiments) to defense threshold. If agent wins in combat with the victim he consumes it and gains all of its energy. When agent decides to give a birth to an offspring he places it to nearby empty cell and gives a half of own energy to him.

Agent's actions are categorized and vector of agent strategies is generated using the methodology firstly presented in [4]: to show agent phenotype behavior, each agent was placed in hypothetical situation as if he interacts with other agent under various conditions, i. e. agent's internal energy indicator and agent's relative affinity. Thus, agent is being stressed with six input test vectors and then strategy vector was generated according to his reaction (Table 2). For example, strategy '020202' is so-called crow strategy [4]: regardless of internal agent energy level, he will attack any stranger in his area and make no harm to relatives.

Table 2. Vector of agent's strategies. Where A {0: «rest»; 1: «escape»; 2: «attack»; 3: «divide»}, $i = 1, 2, 3, 4$

Low resource, $r = 0,02r_{max}$		Half of resource, $r = 0,5r_{max}$		Many resources, $r = 0,98r_{max}$	
relative behind	non-relative behind	relative behind	non-relative behind	relative behind	non-relative behind
a_i	a_i	a_i	a_i	a_i	a_i

MODEL COMPARISON

A set of simulations were executed model, they were characterized by various income resources level to environment. The goal of this runs was to validate the model and observe link between its results and behavior of similar original model [4], due to the notion of model «docking» that was mentioned before.

The key differences between current model and its prototype is that only one agent can occupy the cell rather than any agent's quantity and that are no chromosome vector that is the bit string which codes the presence or absence of individual sensory inputs and actions. Considering this, we could stress possibility of successful modification of model into current one and observe similarities and alterations between the features.

Dynamic of agent's population count reliant of resource income from model [4] is depicted in Fig. 2. There are different configurations that define presence of several agent's features such as differ relative and attack other agents; we introduced its analogies in current model:

1. No aggressive behavior, agents do not differ relatives.
2. Agents can attack each other, agents do not differ relatives.
3. Agents can attack each other, agents differ relatives.

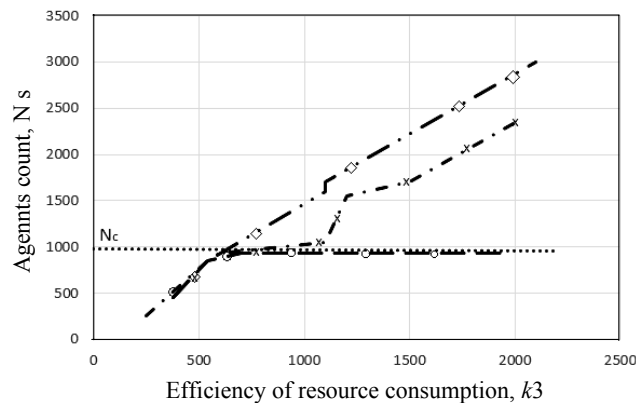


Fig. 2. Dependency of agent count from input resources in original model (plot resembles agents' population dynamic from the research [3])

In Fig. 2 first type of configuration is similar to one tagged with sign « \diamond », « o » responsible for second case, « x » values can be considered in accordance to results of simulations on third case. As follows in Fig. 2 is shown that dynamic of agents count is directly proportional to input resource in case of absence of aggressive behavior [4]. For experiments in second case, results are divided in situations when agent cannot satisfy himself with resource by staying in one cell permanently and when agents fill all space (N_c — count of cells in environment) but cannot share cell resources with anyone other. For results that respond to third configuration agent count dynamic firstly has behavior of second situation in second configuration and then «switches» to behavior of first situation [3].

Experiments under the model developed on research were executed for various values of input resources. Consider now the plot of results of experiments with the model implemented in the study (Fig. 3).

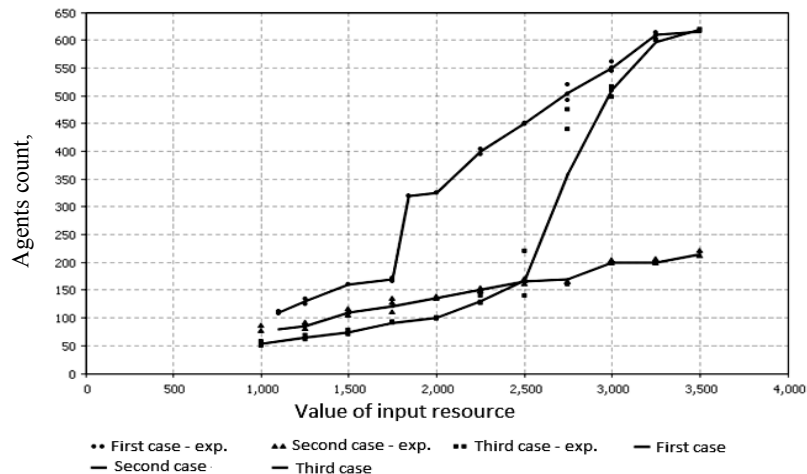


Fig. 3. Plot of population size on the number of resource input. The set of experiments is depicted

Figure 3 shows that the results of the first case of the simulation also lie on a straight line, indicating a proportional relationship between resources and population size. The results are also consistent with the dynamics of population in generic model in second and third cases. Up to a certain value of the resource

plots of second and third cases are similar, while the later dynamics of the number of agents in the third case goes to the level curve of the population for the first case. Considering the results of comparison we can infer that prototype and replica models have similar population count behavior patterns. Following the notion of a posteriori fitness function for intrinsic adaptation evolutionary process firstly introduced by Packard [2] we want to emphasize that population size feature could be treated as such system fitness.

AGGRESSIVE AND PEACEFUL BEHAVIOR

Model is a plausible playground for studies of dependence of aggressive and peaceful behavior from the number of input resources and types of interaction between groups of related agents. We propose to observe simulation results for third case of modeling: agents can attack each other, agents differ relatives and find the references of aggressive behavior occurrences between particular and prototype model. The option of cooperative defense was disabled for observed cases in this chapter.

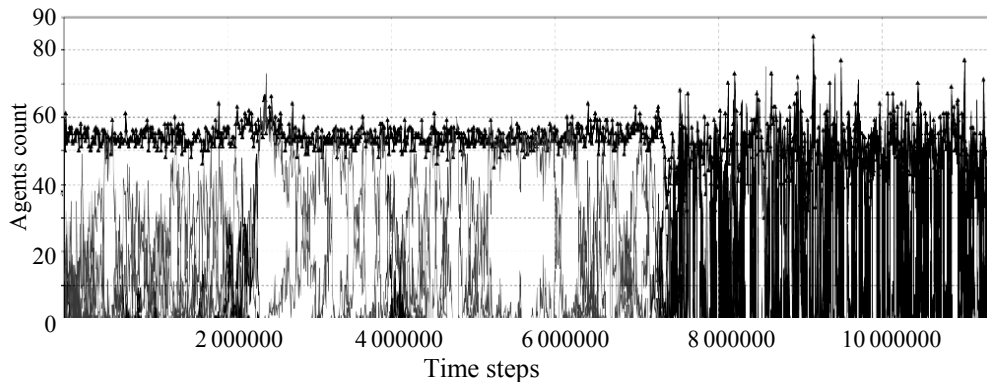


Fig. 4. Example graphics strategies for simulation of resource inputs 1,000 units. Value of each curve point is the count of agents adopted the strategy that corresponds to this curve

The graph (Fig. 4) shows a number of strategies for agents that in some time clock comply with the relevant strategy. If agents choose action attack, the color range of their strategies shifted to black, other action — spectrum shifts to gray. The curve marked by triangles reflects the size of the population of agents.

Thus, we see the dominance on the significant amount of time peaceful strategies aimed mainly search and acquisition of the resource. The behavior of a population over time is divided into two conventional stages: peaceful phase (7,4 million cycles), and aggressive (later 7,4 million cycles). These periods are inherent to the small number of cases for the small resource count that goes on.

Therefore, the low amount of resources one of the most effective strategies are peaceful strategy when agents either do not distinguish between family and prefer to rest (for example, the strategy 000000), either run away from the family in order to avoid competition for resources (eg , strategy 000010) or escape of strangers feeling threatened, and other variations of these strategies. Frequencies of strategies agents that do not distinguish relatives and takes kin affinity into account differences vary slightly toward the predominance of a cooperative strategies. Under the notion cooperative it should is considered strategies that distin-

guish kin and adjust their behavior to benefit from it, such as absence of aggression in kin neighborhood, thus agent can finding protection in the event of a threat or leave area filled with relative, which reduces competition for local resources between them.

For smaller amounts of resources peaceful strategies playing an important role. With an increasing number of resources, almost all strategies show aggression. Peaceful strategies can no longer last such significant periods of time as in the previous cases. Almost all strategies exhibit aggressive behavior and are very volatile. Charts conduct population dynamics of repeated aggressive period that was mentioned in the case of a small number of resources. It should be noted that the vast majority strategies differ relatives in at least one case for the value of the resource in the test vector. Increased value of environment population capacity as in the time interval of 600 thousand – 800 thousand iterations (Fig. 5), usually caused by domination by fully cooperative strategies, that is, those that distinguish relatives in all cases the value of the resource in the test vector strategies: 020202 (a strategy known as «crow» in [4]), 020213 («escape» from relatives to reduce competition for resources), 020203 (action «divide» to ensure the protection from the surroundings relatives).

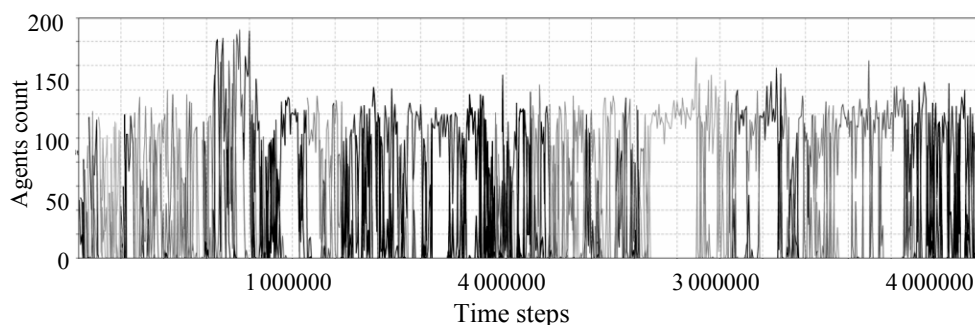


Fig. 5. Strategy for a population the average number of resources. Value of each curve point is the count of agents adopted the strategy that corresponds to this curve

For a large number of resource inputs agents have the ability to completely fill the grid space and competition between strategies becomes sluggish. Thus by the amount of resources when all cells are filled with aggressive agents and peace strategies are stable and rarely changing each other (Fig. 6).

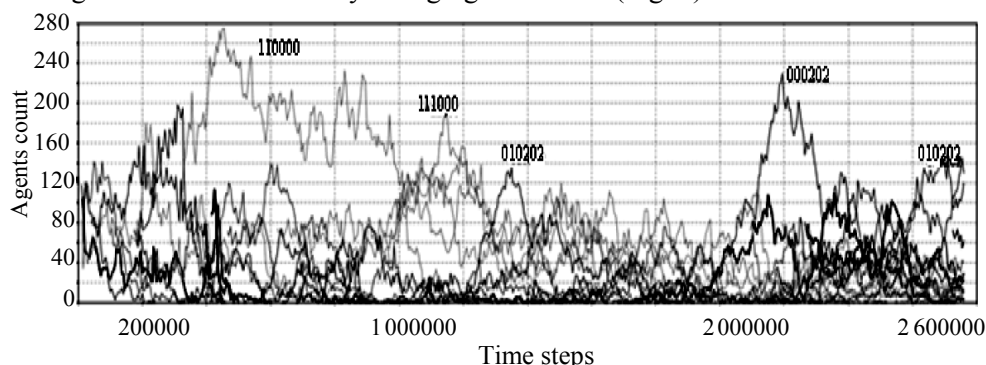


Fig. 6. Agents' strategies for a large number of resource. Value of each curve point is the count of agents adopted the strategy that corresponds to this curve

Considering dependence of aggressive behavior from input resources, we can compare to analogues pattern of prototype model and find the similarities.

That is the dynamic of aggressive strategy frequency corresponds for both models (Fig. 7). Strategy is treated as aggressive if it have at least one «attack» action in its legend.

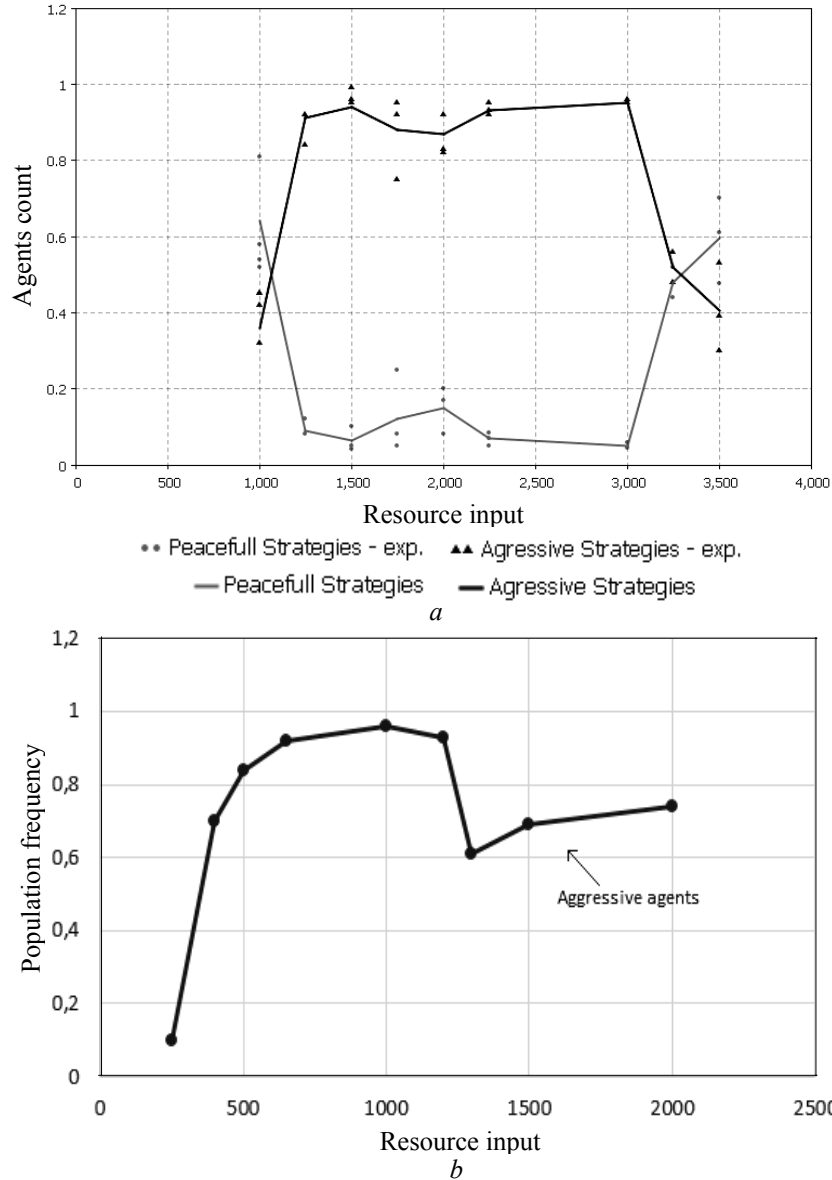


Fig. 7. Dependency of peaceful and aggressive behavior from input resources; *a* — strategy frequency for current model; *b* — frequency of aggressive strategies is population in prototype model. Picture resembles aggressive agent's population frequency dynamic from research [4]

DISCUSSIONS

This work is generally dedicated to the experience of model modification and comparison of behavior patterns between the models. We can conclude successful modification of existing model into one that has slight differences. We observed similar features and extended the horizon of simulations under the model. Peaceful

and aggressive strategies intensity was tested for its dependence on the availability of resource in multi-agent system. The dependency of aggressive and peaceful strategies competition from the number of available resources was illustrated. Simulation results between replicated and prototype models of AL were similar.

As possible further development of the particular model from the family of artificial life, we considered resolving the following issues: overcoming the great computational complexity of the experiments, improving interaction between the agent and the environment, replacing the discrete space type to continuous, introduction new types of interaction between agents and building new tools of analysis of populations of agents.

Software enhancement of model application that allows running it on high computation performance environment would give the possibility to observe long-term trends that provide valuable efforts for understanding of models of such type.

The important issue is introduction and usage of novel analysis method for agent-based complex adaptive systems. For example, Burtsev proposed promising methodology that considers evolving agents' population as a dynamic system in [7].

Open question is the research of agent groups' competition and establishing the intensity of the impact of various factors, such as aggression and phenotype transition strategies, on the success in the competition.

REFERENCES

1. *Epstein* Joshua M. Growing artificial societies: social science from the bottom up / Epstein, Joshua M.; Axtell Robert, Brookings Institution Press, 1996. — 307 p.
2. *Packard N.* Intrinsic adaptation in a simple model for evolution. In: C.G. Langton (ed.): Artificial life, Redwood City, Addison-Wesley, CA, 1989. — P. 141–155.
3. *Burtsev M.S.* Artificial Life Meets Anthropology: A Case of Aggression in Primitive Societies. In: M. Capcarrere et al. (Eds.): ECAL 2005, LNAI, 3630 (2005). — P. 655–664.
4. *Yaeger L.* Computational Genetics, Physiology, Learning, Vision, and Behavior or PolyWord: Life in a New Context. In Langton, C. G. (ed.): Artificial Life III. Addison-Wesley, 1994. — P. 263–298.
5. *Burtsev M., Turchin P.* Evolution of Cooperative Strategies From First Principles. Nature 2006, 440. — P. 1041–1044.
6. *Gras R., Golestani A., Hendry A.P., Cristescu M.E.* (2015) Speciation without Pre-Defined Fitness Functions. PLoS ONE 10(9): e0137838. doi: 10.1371/journal.pone.0137838.
7. *Burtsev M.S.* (2004). Tracking the Trajectories of Evolution. Artificial Life / M.S. Burtsev. — V. 10. 4. — P. 397–411.
8. *Bousquet F., Le Page C.* (2004). Multi-agent simulations and ecosystem management: a review. Ecol. Modelling 176. — P. 313–332.
9. *Axtell R.* Aligning Simulation Models: A Case Study and Results / R. Axtell, R. Axelrod, J. Epstein, M. Cohen // Computational and Mathematical Organization Theory. — 1996. — 1. — P. 123–141.
10. *Axelrod R.* The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization / R. Axelrod // The Journal of Conflict Resolution. — Apr., 1997. — Volume 41, Issue 2. — P. 203–226.
11. *D'Ambrosio D.B.* Generative encoding for multiagent learning. In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference / D.B. D'Ambrosio, K.O. Stanley. — New York: ACM Press: ISBN: 978-1-60558-130-9. doi: 10.1145/1389095.1389256.

Received 18.11.2015

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ІНФОРМАЦІЙНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ОЦІНКИ ВІДПОВІДНОСТІ СТАНУ ЕКОЛОГІЧНОСТІ СИСТЕМНИХ ОБ'ЄКТІВ

Т.В. КОЗУЛЯ, Н.В. ШАРОНОВА, М.О. БІЛОВА, М.М. КОЗУЛЯ

Обґрунтовано необхідність створення нових засад екологічного аналізу в умовах теоретично-практичної реалізації основ сталого розвитку, запровадження синергетичної, ентропійно-інформаційної складових у методичне забезпечення системи комплексного оцінювання екологічності системних об'єктів. Методичне забезпечення комплексного оцінювання якості навколишнього природного середовища подано у вигляді комплексування методик головних компонент і компараторної ідентифікації при багатоплановій вихідній інформації про характеристики системного об'єкта. Практичне застосування поданих пропозицій розглянуто на прикладі дослідження техногенно-навантажених регіональних утворень з використанням моніторингової інформації.

ВСТУП

Актуальність роботи зумовлено розробленням і впровадженням універсально удосконалених підходів до комплексного оцінювання відповідності стану, функцій і зв'язків систем природно-техногенного об'єкта вимогам сталого розвитку і природному їх призначенню [1, 2, 3], визначенням оптимальної моделі прийняття рішення відповідно до мети розв'язання соціально-еколого-економічних завдань.

Результат аналізу особливостей формування знань для еколого-економічних систем, подання інформації про комплексне оцінювання стану навколишнього природного середовища (НПС) показав необхідність звернення до теорії системного аналізу для встановлення положень систем-системних досліджень з урахуванням об'єктивних законів виникнення і функціонування систем, які безпосередньо визначаються складовими теорії термодинамічного аналізу різномірних утворень і синергетики стосовно самоорганізації відношень між системами, формування баз знань «природна система – соціально-економічна система» на рівні досліджень «стан системи – процес – стан змін у системі» [4].

Стійка матеріальна система, що розвивається і еволюціонує, залежить від процесу, який контролює послідовність трьох стадій: 1) початковий стабільний, «незмінний» стан; 2) процес еволюції системи (фізичної, біологічної, соціальної та ін.), що є дробовим, самоподібним перехідним станом-процесом; 3) кінцевий, стійкий, незмінний стан, після якого процес-система зникає. Еволюціонуючі системи визначають як нестійкі, перехідний процес яких є носієм спадкової інформації про систему в цілому. Інформація дозволяє встановити вірогідні шляхи, траєкторії і алгоритм розвитку системи на кожній з траєкторій — від її початку до кінця (виникнення системи, її еволюція і завершення).

Управління системними процесами пов'язано з регулюванням екологічності розвитку соціально-еколого-економічних утворень, визначених як корпоративна екологічна система — концепція корпоративної екологічної системи (структура запропонованої аналітичної системи, заснованої на системно-системному (корпоративному) підході дослідження складних природно-техногенних об'єктів) [5].

Об'єктивна послідовність реалізації складних системних утворень залежить від довільного виникнення відношень між складовими у процесі формування цілісної системи (першочерговість і пріоритетність процесів самоорганізації за законами термодинаміки для будь-якого рівня систем). За визначенням Г. Хакена [6] такі процеси визначають колективні, кооперативні ефекти в системах і належать до нового напрямку наукових досліджень — *синергетики*. Для системного об'єкта соціально-еколого-економічного змісту (різноплановості і високого рівня складності) доцільним є звернення до синергетики, яка передбачає залучення до аналізу значного обсягу знань усіх галузей науки і техніки.

Мета роботи — запровадження синергетичної парадигми в екологічний аналіз і надалі в екологічне управління, передбаченої для об'єктів «соціально-економічна діяльність – природне середовище», «техногенний об'єкт – НПС – людина» [3]. Саме створення нового методологічного забезпечення розв'язання комплексних завдань є метою отримання практичних результатів з визначення дестабілізуючих факторів безпеки і встановлення механізмів регулювання екологічності техногенних систем. У цій роботі розглянуто і вирішено такі питання:

1) обґрунтування необхідності створення нових засад екологічного аналізу в умовах теоретично-практичної реалізації основ сталого розвитку, запровадження синергетичної, ентропійно-інформаційної складової в методичне забезпечення системи комплексного оцінювання екологічності системних об'єктів;

2) визначення системи оцінювання відповідності стану природно-техногенних систем вимогам екологічної безпеки на основі компараторної ідентифікації якості в дослідженнях «стан системи – процес – зміни системи», розроблення алгоритмічно-програмного комплексу розв'язання різнопланових завдань сталого розвитку.

ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ПРАКТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ

Загалом за наявності порушень природного порядку у навколишньому середовищі відбуваються зміни з погіршенням його якості, а створення нової високої якості потребує управління, ефективність якого безпосередньо ґрунтується на знанні про систему. На створення такої ефективної системи управління і спрямовані дослідження ідентифікації ситуації та оцінювання відповідності вимогам якості для об'єкта аналізу «стан системи – процес – трансформаційні зміни – стан системи». За такого підходу зміни визначаються як трансформування будь-яких видів енергії, перетворення її у процесах на молекулярному рівні з відповідними ефектами на макроскопічних формах об'єкта дослідження, що загалом і становить сутність синергетичних процесів.

Об'єктом дослідження за концепцією сталого розвитку є соціально-еколого-економічні утворення будь-якого рівня складності та призначення. Екологічність такого системного об'єкта визначається встановленням відповідності його стану і відсутністю негативних коливань від точки стаціонарності за наявних взаємовпливів із НПС, а саме:

– виділення економічного, екологічного і соціального аспектів аналізу; ідентифікація стану «структура – функціональність – порушення – імовірність процесів – розвиток процесів (виділення довільних неконтрольованих змін, що приводять до самоорганізаційних структур) – стабілізація і відповідність природній функціональності системи»;

– виявлення вагомих стабілізуювальних процесів за оцінкою відповідності.

Проблематичність вирішення етапних завдань полягає в необхідності після декомпозиції на складові звести різнопланові цілеспрямовані системи в єдиний розв'язок, оцінку і задати регулювальну дію для певної стабілізації системи.

Синергетичний підхід у процесі аналізу явищ дозволяє спиратися на новітні наукові дослідження згідно із загальними принципами функціонування матеріальних систем для встановлення дієвих механізмів реалізації критичних (біфуркаційних) процесів. Саме виникнення біфуркаційного стану в елементах і компонентах передумові отримання необхідних знань системою про відповідність навколишньому середовищу [6].

Термін «синергетика», запропонований Г. Хакеном [6], акцентує увагу на узгодженості, когерентності взаємодії частин при утворенні структури цілого, на адитивному ефекті («ціле — більше від частин»). Із переходом від неупорядкованості (хаосу) до впорядкованості в явищах виникають кооперативна поведінка елементів, синергетичний ефект, що становлять кореляцію частин цілого.

Отримана інформація дозволяє розширити систему, яка під впливом негентропійних явищ стабілізується на новому рівні стану і відношень із системами та НПС. Стабілізація і гармонізація досягаються зі встановленням рівноваги в систем-системному утворенні завдяки їх певній відповідності вимогам самоорганізації до природної функціональності в системному утворенні або гармонізації «об'єкт впливу – процес – об'єкт змін – процес – об'єкт нового рівня». Збереження стійкості і здатності пристосовуватися до НПС за положеннями синергетики має оцінну функцію ентропії як міри порядку і відповідності, використаної для встановлення умов змін у системі і вивчення перебігу процесів, істотними з яких є стабілізуювальні за відсутності порушень стану об'єкта $\Delta S \rightarrow 0$ (рис. 1).

Для кожного стану A досліджуваної системи, тобто для кожного об'єкта в категорії \mathcal{Q} вводиться величина, названа узагальненою ентропією стану A :

$$S(A) = \ln \frac{\tilde{I}(A)}{I(A)}, \quad (1)$$

де $\tilde{I}(A)$ — потужність множини $S_{\overline{\mathcal{Q}}}(A, A)$ морфізмів категорії $\overline{\mathcal{Q}}$ з A у саму себе; $I(A)$ — потужність множини $S_{\mathcal{Q}}(A, A)$, для якої $S_{\mathcal{Q}}(A, A) \neq \emptyset$ за визначенням поняття категорії, оскільки містить хоча б один одиничний морфізм.

Ентропію (1) пропонується розглядати як цільову функцію оцінювання відповідності, що інтерпретується як міра структурованості стану A , тобто міра структури стану A відносно його безструктурного аналога. Ентропія (1) визначається як кількість інформації про структуру системи [7]:

$$\frac{1}{n} S(\bar{n}) = - \sum_{i=1}^w \frac{n_i}{n} \log \frac{n_i}{n}, \quad n = \sum_{i=1}^w n_i,$$

застосовуваної як індекс різноманітності видової структури співтовариств, або ступінь складності системи.

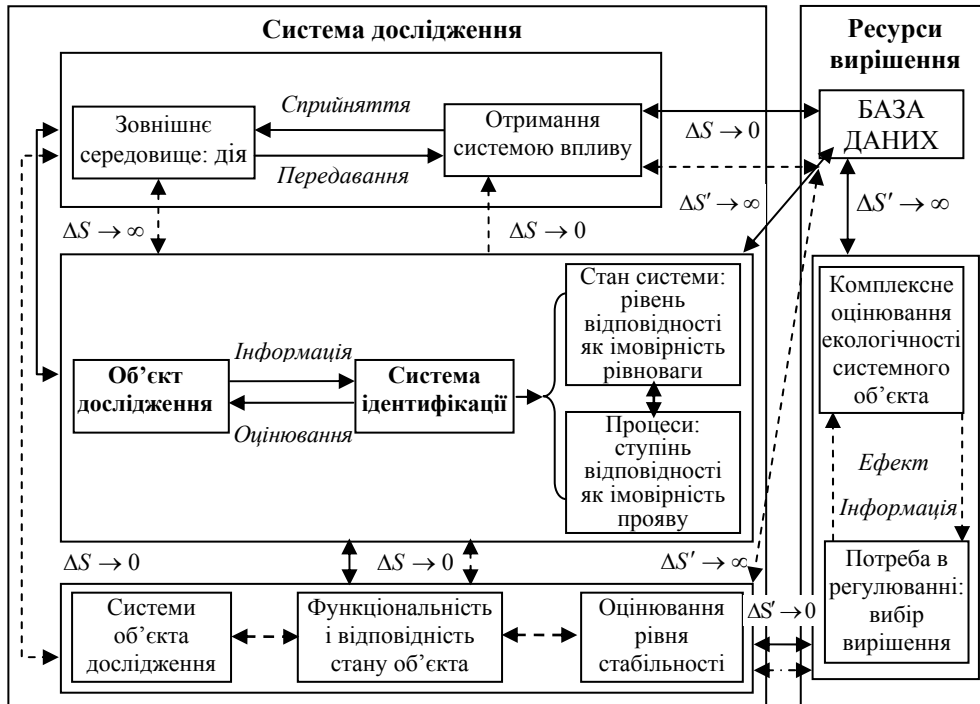


Рис. 1. Імітаційна модель матеріально-інформаційного забезпечення оцінки екологічності системних об'єктів: $\Delta S, \Delta S' \rightarrow 0$ — стан рівноваги при відповідності цільовій взаємодії «система – навколишнє середовище» за умови різниці між результатом впливу і стабілізуювальним станом об'єкта (ΔS) і різниці між результатом і вимогами відповідності ($\Delta S'$); $\Delta S, \Delta S' \rightarrow \infty$ — стан стаціонарності нескінченного розвитку системи за умови відповідності цільовій рівновазі

Основою для такої інтерпретації ентропії є теорема стратифікації: увесь простір ресурсних факторів функціональності системи (об'єкта) розподіляється (стратифікується) на непересічні страти, кожна з яких відповідає одній з підмножин споживаних системою (об'єктом) ресурсів. У страті N^J з непорожньою підмножиною ресурсів $J \{1, 2, \dots, m\}$ виконуються умови:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r p_i \ln p_i \rightarrow \max; \quad \frac{M}{N} = \sum_{i=1}^r p_i m_i; \\ \sum_{i=1}^r p_i = 1. \end{cases}$$

де $p_i = \frac{e^{-\beta m_i}}{\sum_{i=1}^r e^{-\beta m_i}}$; β — множник Лагранжа відповідно до границі та

інтегрування $p_i \rightarrow p(m)dm, \Delta m \rightarrow dm$.

Звідси визначаємо відповідну поведінку змін ентропії при встановленні стану і перебігу процесів в об'єкті або системі, що для ΔS є:

- додатною — хаотичне збільшення системи і її розвиток, відсутність натепер умов довільних процесів упорядкування, структуризації;
- нульовою — стаціонарність стану, підтримання процесів функціональності, розвиток відтворюваності структури без розширення системи;
- від'ємною, менше нуля — розвиток системи за рахунок довільних процесів упорядкування на новому рівні складності, досягнення максимуму стаціонарності в самоорганізації підтримання стану системи.

Для опису стану системного об'єкта потрібна комплексна математична модель, яка враховуватиме еволюцію в часі всієї системи, її окремих елементів, що дозволить описати процес її функціонування, оцінити якість і ризики, визначити шлях самоорганізації і переходу системи в стан самовідновлення. Умовна схема такої моделі відображає три важливі етапи еволюції від простої структури в певний момент часу до оптимально структурованої певної складності системи, що пристосована до зовнішніх умов і відповідає вимогам якості (рис. 2).

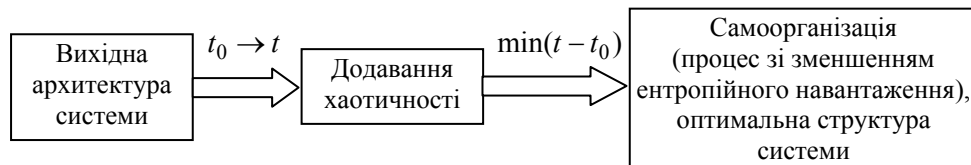


Рис. 2. Структурна еволюція архітектури системи

В описі моделі архітектури системи необхідно знайти відповідність реального простору, де вона функціонує, віртуальному суцільному середовищу — абстрактний об'єкт, що враховує три важливі властивості середовища:

- 1) функціонування у фазовому просторі із системою координат (q, p) , де q — узагальнена координата; p — узагальнений імпульс віртуального середовища;
- 2) еволюцію в часі t ;
- 3) матричну форму щільності станів $\rho = \rho(q, p, t)$ з визначенням системи в певний момент часу, структуру взаємодії між елементами системи [8].

Для встановлення стану віртуального середовища використовується поняття ентропії у вигляді інтегрального співвідношення

$$S_p = - \int_{\Omega} \rho \ln \rho d\Omega, \quad (2)$$

де інтегрування виконується по всьому фазовому простору Ω .

Важливою властивістю віртуального суцільного середовища є також інформаційне поле — синхронізувальний фактор віртуального та реального середовищ, характеристика функціональності НПС.

Фундаментальна властивість віртуального суцільного середовища відповідає принципу максимуму ентропії [9]: $S_p^* = \max(S_p)$, тобто ентропія системи зберігає своє значення, що справедливо для стаціонарних режимів хаотичної динаміки.

Перетворення ентропійного виразу (2) з урахуванням принципу максимуму визначає фундаментальну властивість:

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = 1,$$

тобто у віртуальному суцільному середовищі, що задовольняє принцип максимуму ентропії, враховані всі можливі стани системи і жодних невизначеностей, за винятком наявних у системі, немає.

Фазовий простір вигляду $\Omega = \Omega_q \Omega_p$ характеризується ентропійною мірою:

$$S_p = S_q S_p,$$

де S_q — структурна ентропія; S_p — ентропія імпульсу (випадковому вектору відповідає своя ентропія).

Подвійність ентропійного змісту визначає дві важливі властивості ентропії:

- 1) інваріантність фізичних властивостей віртуального суцільного середовища не є фізичною характеристикою;
- 2) геометрична інтерпретація функціонально значущих систем об'єкта в обраному просторі і відображення їх геометрії зв'язків.

Таким чином, ентропійний підхід до опису структури і динаміки системних утворень потребує визначення щільності (у математичному змісті) складної системи і її елементів, еволюційний розвиток у часі яких описується оператором Гамільтона (H -гамільтоніан). Оператор визначає геометрію, структуру, внутрішні зв'язки системи і повністю описує її динаміку та функціонування. Поводження системи відображається рівнянням Ліувілля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [\rho, H], \quad (3)$$

де $[\rho, H] = \rho H - H\rho$ — дужки Пуассона.

Рівняння (3) є фундаментальним рівнянням для опису складних процесів і станів систем об'єкта еколого-економічного аналізу, що враховує структуру взаємодії, потоки інформації всередині систем, дисипацію, випадкову складову взаємодії. Універсальною компонентою рівняння для опису процесу є оператор H .

Урахування початкових і граничних умов, знайдене значення гамільтоніана дозволяють розв'язати рівняння (3) для визначення стаціонарної динаміки процесу. Універсальною числовою характеристикою якості або ризиків для оцінювання стану систем є величина ентропії відповідно до співвідношення (2).

Тісна взаємозалежність показників якості, ризиків і знань для складних систем реалізується за допомогою ентропії, що повністю дозволяє описати якість, знання і ризики, а, отже, більш коректно змодельовати як конкретний процес, так і систему взаємодійних процесів. Така модель ентропійних функцій стану S складається з елементів матриці щільності ρ (рис. 3).

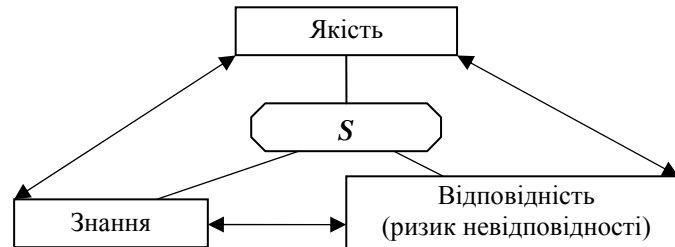


Рис. 3. Схематичне зображення співвідношення характеристик оцінювання якості

Стан системи стабілізується шляхом зменшення ентропії за допомогою інформації, що надходить ззовні. Інформація в процесі розглядається як кінетична енергія системи, що зумовлює її продуктивну дію. У випадку замкненої системи кінетична енергія швидко вичерпується, і тільки відкриті системи завдяки енергії ззовні розбудовуються і продукуються [8, 10].

За наявності еволюційного рівняння (3) стану процесу важливо знати не лише його динаміку, можливі режими існування, але і стійкість цих режимів, тобто чи будуть нехтовно малі збурювання наростати згодом, що в кінцевому підсумку призведе до збільшення ентропії та руйнування системи.

За допомогою розв'язання диференціального рівняння шляхом поелементного додавання до елементів матриці щільності ρ й оператора H (у дисипативному випадку) малих додатків $\Delta\rho$ і ΔH аналізується стійкість рівняння (3) [11]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [\Delta\rho H] + [\rho \Delta H]. \quad (4)$$

Рівняння (4) описує динаміку малих збурень за часом t з урахуванням поточного стану системи. У процесі дослідження стійкості системи необхідно враховувати не тільки фактичну її структуру, а і стан, використовуючи числові методи аналізу складних систем. Метод Ляпунова для розв'язання рівняння (4) передбачає надання $\Delta\rho$ і ΔH вигляду:

$$\Delta\rho \rightarrow \Delta\rho_1 e^{\lambda t}, \quad \Delta H \rightarrow \Delta H_1 e^{\lambda t}. \quad (5)$$

Підставляючи рівняння (5) у рівняння (4), отримуємо лінійне алгебричне рівняння для власних значень:

$$\lambda \Delta\rho_1 = [\Delta\rho_1 H] + [\rho \Delta H_1]. \quad (6)$$

Таким чином, якщо всі власні значення λ додатні, то малі збурення щільності не наростатимуть згодом, а, отже, стан (процес) буде стійким. У випадку наявності хоча б одного додатного власного значення система

буде демонструвати нестійке поведіння. Втрата стійкості є реакцією системи на зовнішній вплив НПС, вихід стабільного розвитку динамічного процесу за граничні умови, межі критеріїв стійкості.

На практиці в системі комплексного оцінювання стану об'єктів природно-техногенного походження як критерії стійкості розглядаються правила, що дозволяють досліджувати стійкість системи без безпосереднього знаходження коренів характеристичного рівняння. Під час розроблення методичного забезпечення в оцінюванні якості складних системних об'єктів враховано, що стійкість визначається порушеннями упорядкованості системи (1)–(6) і її кінцевим синергетичним станом, що відповідає вимогам якості (рис. 3).

Для комплексного оцінювання екологічності територіально-об'єктових систем упроваджено компараторну ідентифікацію у вигляді функції відповідності як кількісне визначення за двома параметрами — 0 і 1, що дозволяє поєднати зміни у стані систем і об'єкта та ймовірності порушення зв'язків у середовищі [12, 13]. За результатами ідентифікації стану систем і відповідності умовам стійкості процесів, що відбуваються в об'єктах дослідження, за методом компаратора екологічності надається узагальнена характеристика об'єкта на основі ризик-аналізу. На останньому етапі реалізації комплексного оцінювання визначається стан усіх трьох складових сталого розвитку, виділяються процеси стабілізації і дестабілізації в аналізованих об'єктах навколишнього середовища.

Реалізацію методики комплексного оцінювання якості НПС розглянуто на прикладі дослідження техногенно-навантажених регіональних утворень з використанням моніторингової інформації. Для отримання адекватних результатів унаслідок оброблення такої інформації важливим є усунення інформаційного шуму, що супроводжує вихідні дані розрахунку екологічності [14]. У цій роботі пропонується запровадити метод головних компонент для виокремлення потрібної для вирішення поставленого завдання інформації з усього доступного набору даних зі збереження його інформативності, подання її у більш компактній і вагомій формі для оброблення та аналізу отриманих результатів [15]. Значення головних компонент за розрахунками в Statistica 6.0 [16] дозволяє використати вагомий параметри управління для стабілізації стану в системі.

Алгоритмічне забезпечення оцінювання екологічності природно-техногенних об'єктів у зв'язку з комплексуванням методик головних компонент і компараторної ідентифікації при багатоплановій вихідній інформації визначає послідовність усунення інформаційного шуму, установлення узагальненої оцінки якості системного об'єкта (рис. 4).

Для визначення групувань для шкали сталості систем до ризику на основі невідповідності вимогам сталості, де під невідповідністю розуміється результат «0» на виході компаратора, пропонується застосувати методи статистичної теорії. Зокрема, для визначення кількості інтервалів шкали у цій роботі використано формулу Стержеса [17]:

$$n = 1 + 3,322 \lg N ,$$

де n — кількість інтервалів; N — загальна кількість досліджуваних параметрів.

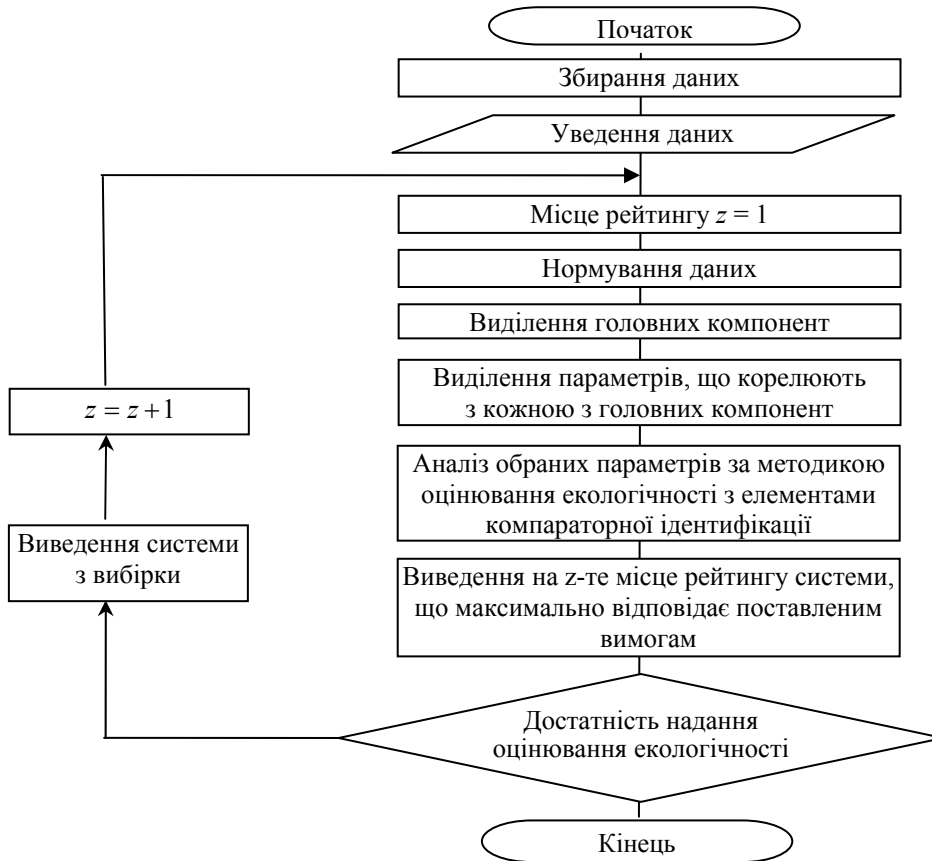


Рис. 4. Схема алгоритму комплексного оцінювання екологічності об'єкта

Оскільки для кожного розрізу дослідження згідно з поставленим завданням встановлено, що достатньою є загальна кількість $N = 20$, то $n = 5,32$, тобто кількість інтервалів дорівнює 5. Пропонується виокремити такі інтервали: дуже високий, високий, середній, низький, дуже низький.

Для визначення межі кожного інтервалу було взято за основу емпіричну шкалу ризиків [18], у якій виділено 6 інтервалів:

- 0–0,1 — дуже високий рівень якості сфери;
- 0,1–0,3 — високий рівень якості сфери;
- 0,3–0,4 — середній рівень якості сфери;
- 0,4–0,6 — низький рівень якості сфери;
- 0,6–1 — дуже низький рівень якості сфери.

Таке групування визначається як первинне, однак воно не задовольняє мету дослідження щодо кількості груп [19]. Для усунення цього недоліку проводиться вторинне групування, що полягає в зміні інтервалів первинного групування для багатоаспектного аналізу статичних даних [19].

Запропоновану методику протестовано для оцінювання стану 25 регіонів України (ураховуючи АР Крим) за 60 параметрами, де параметри 1–20 характеризують екологічний, 21–40 — економічний, 41–60 — соціальний стани регіону. У результаті використання методу головних компонент (рис. 5 і 6) виділено 20 головних компонент, які корелюють з 53 параметрами сукупності вхідних даних, які і було долучено до подальшого аналізу.

Eigenvalues of correlation matrix, and related statistics (Spread Active variables only)				
Value number	Eigenvalue	% Total variance	Cumulative Eigenvalue	Cumulative %
1	31,56848	52,61414	31,56848	52,6141
2	4,70684	7,84473	36,27532	60,4589
3	3,63972	6,06620	39,91504	66,5251
4	3,10532	5,17554	43,02036	71,7006
5	2,86223	4,77038	45,88259	76,4710
6	2,58079	4,30132	48,46338	80,7723
7	2,14451	3,57418	50,60789	84,3465
8	1,48396	2,47327	52,09185	86,8198
9	1,41375	2,35625	53,50560	89,1760
10	1,15326	1,92210	54,65886	91,0981
11	0,98343	1,63904	55,64229	92,7371
12	0,88394	1,47324	56,52623	94,2104

Рис. 5. Фрагмент визначення головних компонент параметрів оцінювання сталості

Factor coordinates of the variables, based on correlations (Spreadsheet1 in Workbook1)										
Variable	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4	Factor 5	Factor 6	Factor 7	Factor 8	Factor 9	Fact.10
Var1	-0,899538	0,346580	-0,225284	0,070310	-0,091003	0,033836	-0,016440	0,010395	-0,017917	-0,003672
Var2	-0,907985	-0,111004	0,096439	-0,210526	0,232340	-0,009412	0,031555	-0,081403	0,062914	-0,010977
Var3	-0,837347	-0,257297	-0,136669	-0,129717	-0,022259	-0,197771	0,100043	-0,163093	-0,122736	0,143272
Var4	-0,945125	0,213439	-0,067415	0,135365	-0,101076	0,113203	-0,009159	0,032692	-0,009189	-0,037359
Var5	-0,910935	0,307364	-0,061504	0,033724	-0,028569	-0,113126	-0,098291	-0,008902	0,097352	-0,018685
Var6	-0,928166	0,163922	-0,058919	-0,267603	-0,055321	-0,008186	0,076299	-0,006991	-0,013665	-0,051599
Var7	-0,807929	0,145329	0,204660	-0,306518	-0,254749	-0,196944	0,081128	-0,102629	0,132969	0,004313
Var8	-0,425450	-0,163575	0,364817	0,105000	-0,288104	-0,194810	-0,181143	-0,196281	-0,286282	0,196898
Var9	-0,642228	0,198467	-0,127898	-0,223395	0,168285	-0,426895	-0,368351	0,289235	0,057795	0,005231
Var10	-0,472613	0,212883	0,233900	-0,006940	-0,433273	0,125307	0,337732	0,014783	-0,178205	-0,462314
Var11	-0,694143	0,232723	-0,124342	-0,190986	0,132078	-0,365320	-0,391350	0,292503	0,047465	0,003094
Var12	-0,569182	-0,061060	0,268887	-0,591539	-0,226030	-0,191840	0,254141	0,041052	-0,047391	-0,080681
Var13	-0,938963	-0,136434	0,044933	0,016221	0,141637	-0,120834	-0,099871	-0,090121	0,082277	-0,096850
Var14	-0,917282	0,277037	-0,222322	0,074009	-0,061971	0,044881	-0,036343	0,008624	-0,022440	0,066273

Рис. 6. Фрагмент таблиці факторних координат параметрів відповідно до кореляції

Для прийняття рішень щодо підвищення екологічної якості та загальної сталості функціонування природно-техногенних систем пропонується аналізувати вихідні характеристики об'єкта за трьома напрямками: екологічним, економічним та соціальним, тобто поділити параметри на три групи (див. таблицю).

Рейтинг регіонів з екологічної якості порівняно з результатами оцінювання стану екологічної безпеки областей України (АР Крим) за значенням інтегрального показника ризику і відповідністю їх трьом класам небезпеки [20]. Аналіз показав, що на перші 11 місць отриманого рейтингу припадає низький рівень небезпеки, на місця 12–20 — низький та середній рівні небезпеки, на місця 21–25 — високий рівень небезпеки. Отже, практичну здатність такого підходу підтверджено відповідністю отриманих даних результатам досліджень за іншими методиками визначення рівня екологічної якості територіальних об'єктів.

Кінцеві рейтинги регіонів

Рейтинг регіонів за станом екологічної сфери		Рейтинг регіонів за станом економічної сфери		Рейтинг регіонів за станом соціальної сфери	
№ з/п	Назва	№ з/п	Назва	№ з/п	Назва
1	Чернівецька	1	Донецька	1	Закарпатська
2	Волинська	2	Дніпропетровська	2	Харківська
3	Тернопільська	3	Харківська	3	Волинська
4	Закарпатська	4	Одеська	4	Івано-Франківська
5	Рівненська	5	Київська	5	Кіровоградська
6	Сумська	6	Луганська	6	Одеська
7	Чернігівська	7	Полтавська	7	Донецька
8	Житомирська	8	Львівська	8	Дніпропетровська
9	Хмельницька	9	Запорізька	9	Львівська
10	Кіровоградська	10	АР Крим	10	АР Крим
11	Миколаївська	11	Вінницька	11	Київська
12	Івано-Франківська	12	Черкаська	12	Луганська
13	Вінницька	13	Миколаївська	13	Рівненська
14	Черкаська	14	Хмельницька	14	Запорізька
15	Херсонська	15	Івано-Франківська	15	Полтавська
16	Львівська	16	Житомирська	16	Чернівецька
17	АР Крим	17	Сумська	17	Вінницька
18	Полтавська	18	Кіровоградська	18	Миколаївська
19	Одеська	19	Рівненська	19	Хмельницька
20	Харківська	20	Чернігівська	20	Черкаська
21	Запорізька	21	Херсонська	21	Сумська
22	Луганська	22	Закарпатська	22	Тернопільська
23	Київська	23	Волинська	23	Чернігівська
24	Дніпропетровська	24	Тернопільська	24	Херсонська
25	Донецька	25	Чернівецька	25	Житомирська

Для автоматизації проведеного оцінювання та виділення природно-техногенних комплексів, що відповідають певному рівню стану досліджуваної сфери розроблено програмний комплекс для операційної системи Android (рис. 7).



Рис. 7. Принцип роботи програмного продукту

Вибір системи програмування зумовлено потребою в оперативному управлінні для середнього та нижнього організаційних рівнів системи. Автоматизована система реагування на зміни дає змогу швидко обробляти дані і відповідно регулювати ситуацію (рис. 8).

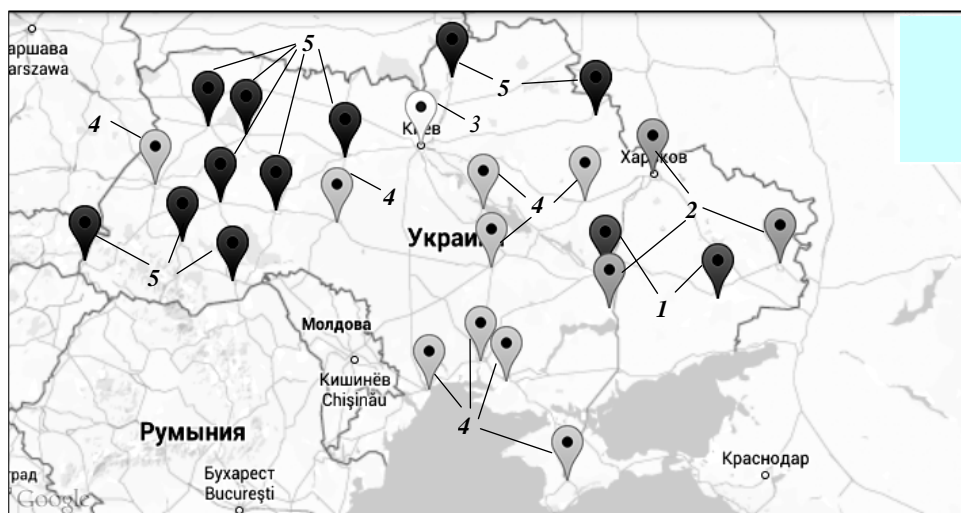


Рис. 8. Результати роботи програми для аналізу екологічності регіонів України; рівні небезпеки: 1 — дуже низький, 2 — низький, 3 — середній, 4 — високий, 5 — дуже високий

Таким чином, у роботі обґрунтовано доцільність комплексного оцінювання рівня екологічності природно-техногенних об'єктів за характеристикою їх стану і процесів у них для виявлення факторів дестабілізації систем і визначення ризик-ситуації з метою подальшого прийняття рішень щодо її стабілізації. Запропоновано програмну реалізацію застосовуваного підходу до дослідження складних об'єктів з метою автоматизації комплексного оброблення вхідної інформації та отримання знань про стан системи і її складових, основні фактори стабільного розвитку або дестабілізації системи.

ВИСНОВКИ

Надано алгоритмічне забезпечення запропонованої методики для кінцевого оцінювання з відокремленням характеристик, що становлять інформаційний шум. Розроблена методика оцінювання стану природно-техногенних об'єктів (див. рис. 4) дозволила отримати такі науково-практичні результати:

1) упровадження елементів синергетичного аналізу в систему оцінювання стану складних об'єктів техногенно-природного походження (див. рис. 1, рівняння (1) – (6));

2) визначення основних елементів методичного забезпечення комплексного оцінювання відповідності рівню екологічної безпеки природно-техногенних систем на основі компараторної ідентифікації (див. рис. 4) ;

3) розроблення алгоритмічно-програмного комплексу розв'язання різнопланових задач оцінювання якості складних регіональних утворень (див. рис. 7 і 8).

Запропонована методика дозволила отримати порівнянні результати на регіональному рівні досліджень при багатоаспектному аналізі визначеного об'єкта дослідження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Козуля Т.В. Моделирование структуры и идентификация состояния корпоративной экологической системы (КЭС) / Т.В. Козуля, Н.В. Шаронова // Проблемы інформаційних технологій. — 2007. — № 01 (001). — С. 178–187.
2. Sharonova N.V. Entropy as Substratum of identifying the Corporative Ecological system (CES) condition / N.V. Sharonova, T.V. Kozulia // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та. — 2008. — № 2 (31). — С. 518–527.
3. Козуля Т.В. Процеси екологічного регулювання. Концепція корпоративної екологічної системи: моногр. / Т.В. Козуля. — Х.: НТУ «ХПИ», 2010. — 588 с.
4. Козуля Т.В. Методичне забезпечення комплексної оцінки екологічності системних об'єктів методом компараторної ідентифікації / Т.В. Козуля, М.О. Білова // Системний аналіз і інформаційні технології: матеріали 16-й Міжнарод. науч.-техн. конф. SAIT 2014 (Київ, 2014) / УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ». — К.: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2014. — С. 107–108.
5. Kozulia T.V. Teoretiko-prakticheskie osnovy metodologii kompleksnoj ocenki jekologichnosti territorial'nyh i ob'ektovyh sistem. Monografija / T.V. Kozulia. — Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2014. — 298 s.
6. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен; пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 423 с.
7. Levich A.P. Category-functor modelling of natural systems / A.P. Levich, A.V. Solov'yov // Cybernetics and Systems. — 1999. — № 30 (6). — P. 571–585.
8. Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации / Г. Николис, И. Пригожин. — М.: Мир, 1979. — 512 с.
9. Панченков А.Н. Энтропия / А.Н. Панченков. — Н.Новгород: Интерсервис, 1999. — 592 с.
10. Пригожин И.Р. Порядок из хаоса / И.Р. Пригожин, И. Стенгерс. — М.: Наука, 1986. — 432 с.
11. Климентович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем / Ю.Л. Климентович. — М.: Янус, 2001. — 305 с.
12. Козуля Т.В. Процеси екологічного регулювання. Концепція корпоративної екологічної системи: моногр. / Т.В. Козуля. — Х.: НТУ «ХПИ», 2010. — 588 с.
13. Козуля Т.В. Информационно программное обеспечение оценки качества и безопасности объектов исследования мониторинговых систем / Т.В. Козуля, Н.В. Шаронова, М.М. Козуля, Я.В. Святкин // International Periodical Scientific Journal "Intelecti" – Tbilisi, 2015. – 3(53). – P.67–72.
14. Козуля Т.В. Обоснование методики компараторной идентификации для системы экологического мониторинга на региональном уровне исследования / Т.В. Козуля, М.О. Білова // Проблемы інформаційних технологій. — №02(014). — 2013. — С. 45–49.
15. Российское хемометрическое общество. Метод главных компонент [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://chemometrics.ru/materials/textbooks/pca.htm>
16. STATISTICA. Версия 6.1. Системный подход к анализу данных [Электронный ресурс]. — StatSoft Russia. — Режим доступа: <http://www.statsoft.ru>.
17. Sturges H. The choice of a class-interval / H. Sturges // Journal of the American Statistical Association. — 1926. — N 153. — P. 65–66.
18. Машина Н.І. Економічний ризик і методи його вимірювання / Н.І. Машина. — К.: Центр навч. літ-ри, 2003. — 188 с.
19. Аладьев В.З. Курс общей теории статистики / В.З. Аладьев, В.Н. Харитонов. — М.: Fultrus Book, 2006. — 250 с.
20. Качинський А.Б. Екологічна безпека України: системний аналіз перспектив покращення / А.Б. Качинський. — К.: Екологічна безпека, 2001. — 251 с.

Надійшла 02.07.2015

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ LEF-ПЛАСТАХ

О.М. ГЛАДКА

На основі синтезу методів комплексного аналізу і числово-аналітичних методів сумарних зображень розроблено конструктивний системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів для три- та чотиризв'язних криволінійних LEF-областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Вирішено проблему неоднозначності побудови області комплексного квазіпотенціалу для багатозв'язних LEF-областей, що моделюють взаємодію нагнітальних та експлуатаційних свердловин у нафтогазових пластах. Запропоновано таку класифікацію випадків формування течії, що дозволяє уніфікувати формулювання задач на обернення квазіконформних відображень і їх різниці аналогів. Побудовано алгоритм розв'язання задачі, за яким автоматично будуються динамічні сітки, знаходяться невідомі лінії розділу течії і точки «призупинення» потоку, обчислюються фільтраційні витрати тощо. Наведено числові розрахунки для одного з варіантів формування течії.

ВСТУП

У працях [1–4] на основі синтезу числових методів комплексного аналізу (конформних і квазіконформних відображень) [5], числово-аналітичних методів сумарних зображень Г.М. Положого [6] і декомпозиції області за альтернувальним методом Шварца розроблено конструктивний підхід до математичного опису складних фільтраційних процесів, зокрема процесів витіснення у техногенно-деформованих нафтогазових чи сланцевих пластах, що моделюються спеціальними структурами — LEF-пластами [7]. Проте у випадках багатозв'язних криволінійних LEF-пластів, що моделюють взаємодію кількох нагнітальних та експлуатаційних свердловин у продуктивному пласті, складність застосування цього підходу полягає у неповній визначеності вигляду області комплексного квазіпотенціалу, що залежить від впливу багатьох чинників: конфігурації фізичної області, зокрема, взаємного розміщення свердловин, способів проведення умовних розрізів з метою зведення багатозв'язної області до однозв'язної, співвідношення між значеннями граничних потенціалів тощо.

У працях А.Я. Бомби та його учнів [8–9] запропоновано методику моделювання фільтраційних процесів для тризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями (двома свердловинами та зовнішнім контуром живлення), а також для чотиризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями (три свердловини у горизонтальному пласті) та лініями течії (які визначаються шуканими точками «призупинення» на зовнішньому непроникному контурі), з використанням математичного апарату комплексного аналізу. Також у цих працях на підставі евристичних міркувань з наступним логічним обґрунтуванням встановлено можливі випадки формування течії залежно від співвідношення значень граничних потенціалів і розробле-

но процедури автоматизованого вибору відповідного випадку. Запропоновано алгоритм розв'язання таких задач, що дають змогу будувати динамічні сітки, знаходити лінії розділу течії і обчислювати значення швидкості та величини різного роду перетікань, який апробовано для окремих проміжних та ключових випадків. Такий підхід зумовлює необхідність для кожного з випадків окремо будувати алгоритм числового розв'язання відповідної задачі, виконавши перед тим «алгоритм вибору випадку», що полягає у розв'язанні двох допоміжних задач.

У роботі пропонується така класифікація випадків формування течії, що дозволяє уніфікувати формулювання задач на обернення квазіконформних відображень, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання, а також використати поєднання методів квазіконформних відображень з методами сумарних зображень. Не зважаючи на неоднозначність квазіконформних відображень багатозв'язних LEF-областей, у більшості випадків формування течії область комплексного квазіпотенціалу шляхом спеціального проведення умовних розрізів фізичної області може бути зведена до багатокутника, сторони якого паралельні осям координат і який розглядається як сукупність певним чином «склеєних» між собою прямокутників. Це дозволяє повною мірою використати переваги числово-аналітичного методу сумарних зображень для знаходження розв'язків відповідних підзадач і, зокрема, розпаралелити обчислювальний процес.

Якщо сформулювати цю задачу як задачу математичної фізики, то отримаємо істотно нелінійну інтегро-диференціальну крайову задачу (адже функція течії, що характеризує локальні витрати, визначається через квазіпотенціал за допомогою криволінійних інтегралів). Натомість перехід до оберненого квазіконформного відображення і використання теорії комплексного потенціалу дозволяють локалізувати нелінійність.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У роботі методика математичного моделювання квазіідеальних полів, що базується на синтезі числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень [1, 4], поширена на випадки три- та чотиризв'язної криволінійної LEF-області, що моделюють роботу відповідно двох чи трьох свердловин у пласті. Нелінійна крайова задача, що виникає при цьому, зводиться до обернення квазіконформного відображення даної області з умовними розрізами вздовж деяких ліній течії (ліній розділу течії, які знаходяться у процесі розв'язання задачі) на відповідну область комплексного квазіпотенціалу, побудова якої, загалом, є неоднозначною. Цю проблему вирішено спеціальним проведенням умовних розрізів і поданням області комплексного квазіпотенціалу як об'єднання чотирьох суміжних прямокутників.

Розглядається криволінійна LEF-область G_z ($z = x + iy$), яка є тризв'язною, обмеженою замкнутими еквіпотенціальними лініями — двома внутрішніми контурами свердловин L_1 , L_2 і зовнішнім контуром живлення L_3 (випадок тризв'язної області), чи чотиризв'язною, обмеженою трьома еквіпотенціальними лініями (контурами свердловин) L_s , $s = 1, 2, 3$ ($L_s = \{z : f_s(x, y) = 0\}$) та непроникним контуром $L = \{z : f(x, y) = 0\}$ (випадок чотиризв'язної області), із заданими на еквіпотенціалах відповідними граничними потенціалами: $\varphi|_{L_s} = \Phi_s$, $s = 1, 2, 3$. Процес витіснення опису-

ється рівняннями [2–4]: $\bar{v} = \kappa_f \text{grad } \phi$ і $\text{div } \bar{v} = 0$, де $\bar{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ — швидкість фільтрації; $\kappa_f = \kappa/\mu_n$ — коефіцієнт фільтрації; κ — коефіцієнт проникності пласта; μ_n — динамічна в'язкість нафти у пластових умовах.

Якщо у випадках одно- чи двозв'язної LEF-області відповідна область комплексного квазіпотенціалу є прямокутником з невідомою висотою і однозначно визначається шуканим значенням повної фільтраційної витрати (потоків через відповідну екіпотенціальну лінію L_*) $Q = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$, то для заданої криволінійної області з трьома екіпотенціалами відповідна область комплексного квазіпотенціалу набуває різної геометричної конфігурації залежно від співвідношення між граничними потенціалами $\Phi_s, s = \overline{1,3}$. Проте у всіх цих випадках існує квазіконформне відображення, за якого відповідна область комплексного квазіпотенціалу являє собою багатокутник, «складений» з прямокутників, набір варіантів формування потоків є аналогічним і однозначний вибір такого варіанта (а отже, і єдиність відповідного квазіконформного відображення) визначається значеннями витрат (потоків чи перетікань) через екіпотенціали $L_s: Q_s = \int_{L_s} -v_y dx + v_x dy$ ($s = \overline{1,3}$) і невідомий потенціал ϕ_H точки H , через яку проходять лінії розділу течії (випадок трив'язної області, рис. 1), додатково потенціали ϕ_{H^*}, ϕ_{H^*} точок

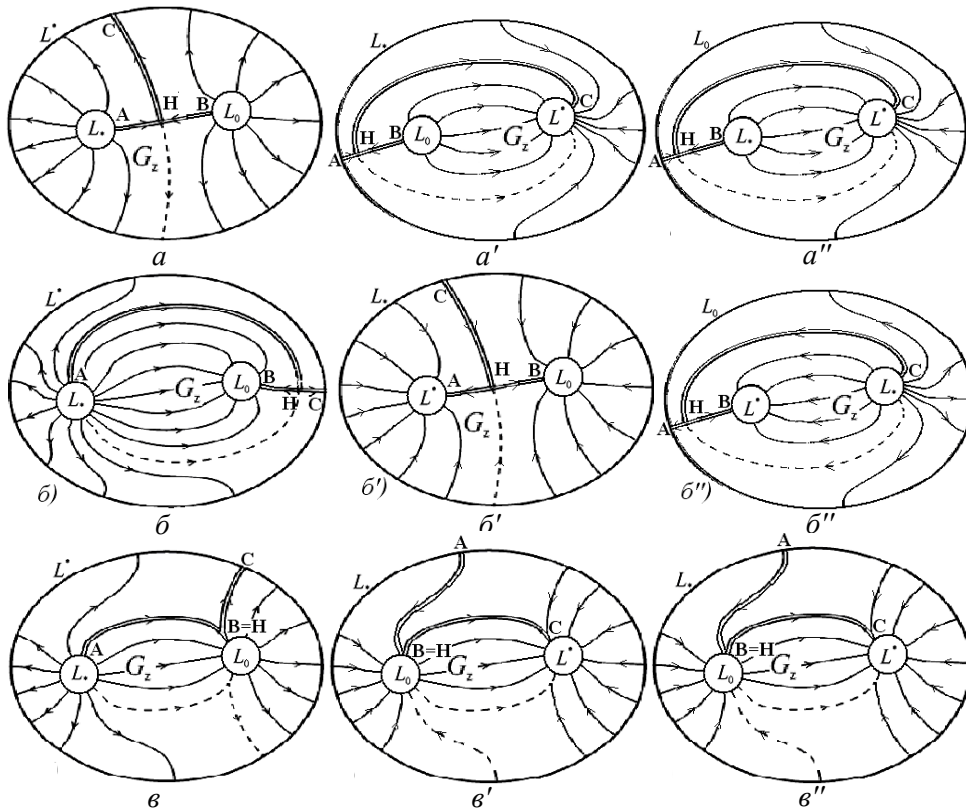


Рис. 1. Схеми формування течії для трив'язної LEF-області у випадках: 1) $Q^0 = 0$ (a, a', a''), 2) $Q_0^* = 0$ (b, b', b''), 3) $Q^* > 0, Q_0^* > 0$ (v, v', v'')

«призупинення» потоку H_* і H^* відповідно на контурі L (випадок чотири-вз'язної області).

Виконавши умовний розріз $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ уздовж невідомих ліній розділу течії, що проходять через шукану точку H (випадок тризв'язної області) та точки H_* , H^* (випадок чотиризв'язної області), і отримавши однозв'язну область $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$ та ввівши аналогічно праці [5] функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, квазіконформно спряжену до φ , приходимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z^Γ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу. При цьому вигляд області комплексного квазіпотенціалу відрізняється для різних випадків формування течії, що залежать від співвідношень між граничними потенціалами (наприклад, у праці [9] наведено 9 таких випадків за умов, що $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \Phi_3$; у праці [8] — 23 випадки за умов $\Phi_1 < \Phi_3$, а Φ_2 — довільний і т.д.). Проте, якщо «перепозначити» граничні потенціали, упорядкувавши їх, і подати область комплексного квазіпотенціалу як об'єднання чотирьох суміжних прямокутників, то всі випадки формування течії зводяться до трьох ситуаційних станів, що принципово відрізняються між собою і не обмежуються співвідношенням між граничними потенціалами.

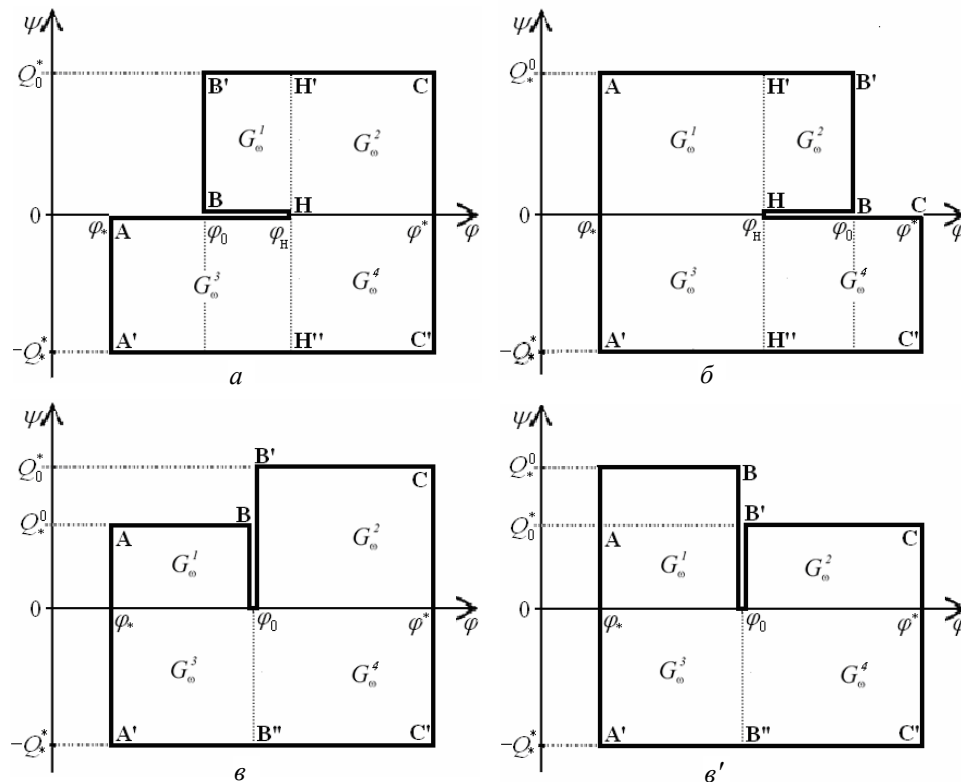


Рис. 2. Конфігурації області комплексного квазіпотенціалу для тризв'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_*^0 = 0$ (а), 2) $Q_0^0 = 0$ (б), 3) $Q_0^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$ (в, в')

Позначимо: $\varphi_* = \min_s \Phi_s$, $\varphi^* = \max_s \Phi_s$ ($s = \overline{1,3}$), $\varphi_0 = \sum_{s=1}^3 \Phi_s - (\varphi_* + \varphi^*)$; L_*, L^*, L_0 — відповідні цим потенціалам контури L_s ; Q_*, Q_0^*, Q_0^* — величини потоків Q_s через контури L_*, L^*, L_0 відповідно. Тоді маємо три різні конфігурації області комплексного квазіпотенціалу, що відповідають таким випадкам: 1) $Q_0^* = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ — відсутність перетікань між контурами L_*, L_0 (рис. 2, а, 3, а'); 2) $Q_0^* = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ — відсутність перетікань між контурами L^*, L_0 (рис. 2, б, 3, б'); 3) $Q_0^* > 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$ — наявність перетікань між усіма контурами (рис. 2, в, в', 3, в', в''). При цьому єдиність розв'язань відповідних задач забезпечується визначенням для тризв'язної області трьох невідомих параметрів: двох значень витрат і значення потенціалу φ_H точки розділу течії (для випадків 1 і 3) або трьох значень витрат (для випадку 2), а для чотиризв'язної області — додатково ще двох значень потенціалів φ_{H^*} , φ_{H^*} точок «призупинення» потоку H_* і H^* на контурі L .

На рис. 1 показано схеми формування течії, що відповідають цим випадкам (1 — рис. 1, а, а', а''; 2 — рис. 1, б, б', б''; 3 — рис. 1, в, в', в'') і моделюють ситуації, коли є дві нагнітальні свердловини (рис. 1, а, б), дві експлуатаційні свердловини (рис. 1, б', в') і нагнітальна та експлуатаційна свердловини (рис. 1, а', а'', б'', в, в'').

Такий підхід до класифікації способів формування течії та задання області комплексного потенціалу є істотно іншим, ніж у працях [8–9], і дозволяє уніфікувати постановки задач, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання.

Загалом область комплексного квазіпотенціалу має вигляд:

$$G_\omega = \bigcup_{k=1}^4 G_\omega^k, \quad G_\omega^k = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_*^{(k)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(k)}, 0 \leq \psi \leq Q^{(k)}\},$$

де

$$\varphi^{*(1)} = \varphi_*^{(2)} = \varphi^{*(3)} = \varphi_*^{(4)} = \varphi_H, \quad \varphi_*^{(3)} = \varphi_*, \quad \varphi^{*(4)} = \varphi^*,$$

$$\varphi_*^{(1)} = \begin{cases} \varphi_*, & Q_*^0 \neq 0, \\ \varphi_0, & Q_*^0 = 0, \end{cases} \quad \varphi^{*(2)} = \begin{cases} \varphi^*, & Q_0^* \neq 0, \\ \varphi_0, & Q_0^* = 0, \end{cases}$$

$$Q^{(1)} = \begin{cases} Q_*^0, & Q_*^0 \neq 0, \\ Q_0^*, & Q_*^0 = 0, \end{cases} \quad Q^{(2)} = \begin{cases} Q_0^*, & Q_0^* \neq 0, \\ Q_*^0, & Q_0^* = 0, \end{cases}$$

$$Q^{(3)} = Q^{(4)} = Q_*^* \text{ (рис. 2, рис. 3, а', б', в', в'').}$$

Такий опис області комплексного квазіпотенціалу є неоднозначним, оскільки не відомі величини потоків Q_*, Q_0^*, Q_0^* , але, враховуючи монотонно-зростаючу залежність Q_s від потенціалів Φ_s і знаючи граничні потенціала

ли, можна припустити у більшості випадків, яким буде співвідношення перетікань між контурами ще до числового розв'язання задач.

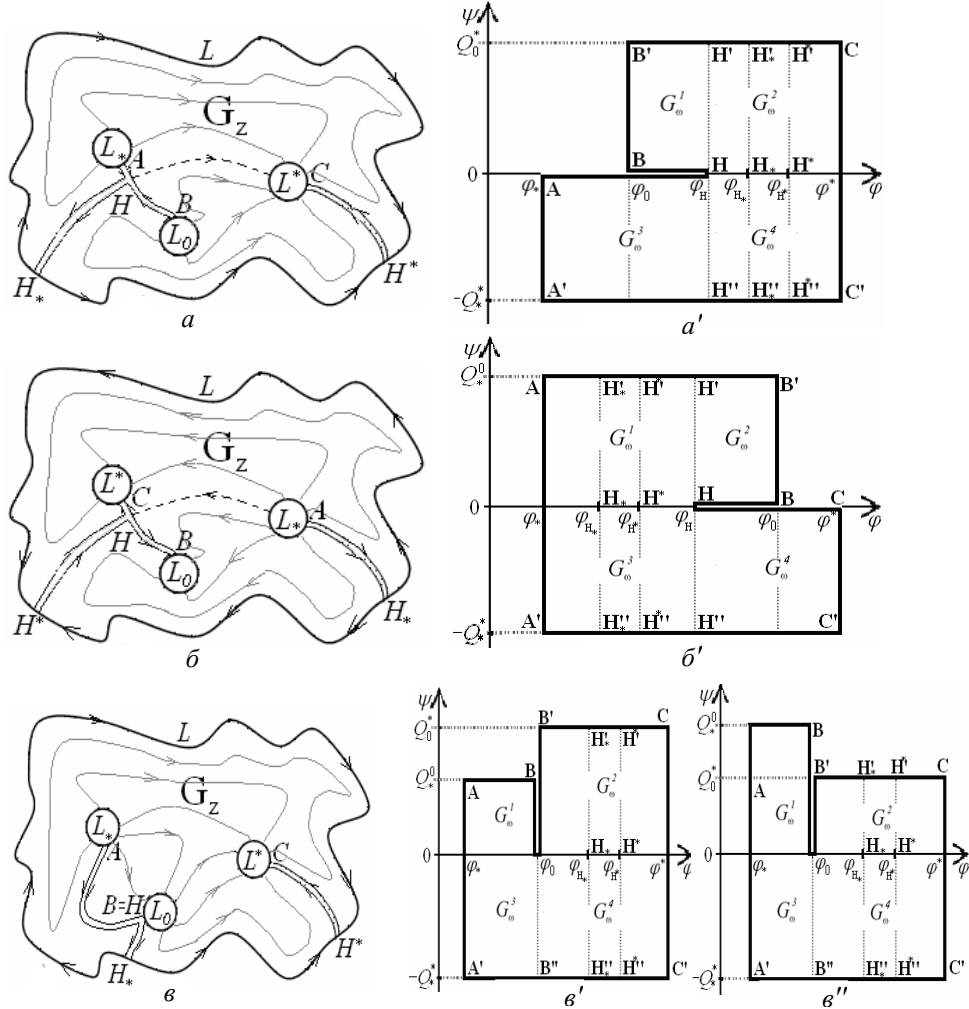


Рис. 3. Конфігурації області комплексного квазіпотенціалу для трив'язної LEF-області у випадках: 1) $Q_*^0 = 0$ (а), 2) $Q_0^* = 0$ (б), 3) $Q_*^0 > 0$, $Q_0^* > 0$ (в, в')

Відповідні задачі у підобластях G_ω^k ($k = \overline{1,4}$) на обернене квазіконформне відображення області G_ω на G_z^Γ зводяться до розв'язання крайових задач для системи рівнянь [2–3]:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^k,$$

$$\Xi(\varphi_{H_*}, 0) = \Xi(\varphi_{H_*}, Q) = \Xi(\varphi_{H^*}, 0) = \Xi(\varphi_{H^*}, Q) = 0,$$

$$Q = \int_0^Q \frac{\kappa_f}{J(\varphi, \psi)} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi,$$

де $\Xi(\varphi, \psi) = \frac{\kappa_f}{J(\varphi, \psi)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2}$; $J(\varphi, \psi) = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ — якобіан переходу.

Крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сітки до межі (що забезпечують комплексну спряженість шуканих гармонічних функцій [5]) та умови «роздвоєння» і періодичності на розрізах мають вигляд:

$$f_*(x(\varphi_*^{(3)}, \psi), y(\varphi_*^{(3)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(3)},$$

$$f^*(x(\varphi_*^{(4)}, \psi), y(\varphi_*^{(4)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(4)},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_s} = 0, \quad s = \overline{1,3};$$

у випадку 1 ($Q_0^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$):

$$f_0(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)},$$

$$f^*(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)},$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q^{(1)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(1)}), \quad \varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(1)},$$

$$x(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} = x(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}},$$

$$y(\varphi_*^{(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} = y(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}},$$

$$x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}},$$

$$x(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(2)}} = x(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(4)}},$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q^{(3)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(3)}), \quad \varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{(3)},$$

$$x(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}},$$

$$y(\varphi_*^{(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} = y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}};$$

у випадку 2 ($Q_0^0 = 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$f_*(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
 f_0(x(\varphi^{*(2)}, \psi), y(\varphi^{*(2)}, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
 x(\varphi^{*(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} &= x(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \\
 y(\varphi^{*(1)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(1)}} &= y(\varphi_*^{(2)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(2)}}, \\
 x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 y(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= y(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi^{*(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} &= x(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \\
 y(\varphi^{*(3)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(3)}} &= y(\varphi_*^{(4)}, \psi) \Big|_{0 \leq \psi \leq Q^{(4)}}, \\
 x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(2)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(2)}), \quad \varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}, \\
 x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q^{(4)}), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q^{(4)}), \quad \varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)};
 \end{aligned}$$

у випадку 3 ($Q_*^0 > 0$, $Q_*^1 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$\begin{aligned}
 f_*(x(\varphi_*^{(1)}, \psi), y(\varphi_*^{(1)}, \psi)) &= 0, \quad f_0(x(\varphi^{*(1)}, \psi), y(\varphi^{*(1)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(1)}, \\
 f_0(x(\varphi_*^{(2)}, \psi), y(\varphi_*^{(2)}, \psi)) &= 0, \quad f^*(x(\varphi^{*(2)}, \psi), y(\varphi^{*(2)}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^{(2)}, \\
 x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \quad y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} = y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= x(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 y(\varphi, Q^{(1)}) \Big|_{\varphi_*^{(1)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(1)}} &= y(\varphi, Q^{(3)}) \Big|_{\varphi_*^{(3)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(3)}}, \\
 x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}} &= x(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)}}, \\
 y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}} &= y(\varphi, 0) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)}}, \\
 x(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(2)}} &= x(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(4)}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(\varphi, Q^{(2)}) \Big|_{\varphi_*^{(2)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{*(2)}} &= y(\varphi, Q^{(4)}) \Big|_{\varphi_*^{(4)} \leq \varphi \leq \varphi_*^{*(4)}}, \\
 x(\varphi_*^{*(3)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(3)}} &= x(\varphi_*^{(4)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(4)}}, \\
 y(\varphi_*^{*(3)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(3)}} &= y(\varphi_*^{(4)}, \Psi) \Big|_{0 \leq \Psi \leq Q^{(4)}}.
 \end{aligned}$$

Тут $f_* = f_s$, якщо $\varphi_* = \varphi_s$, $f^* = f_s$, якщо $\varphi^* = \varphi_s$, $f_0 = f_s$, якщо $\varphi_0 = \varphi_s$ ($s = 1, 2, 3$).

РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ

В області G_ω визначимо ортогональну сітку $G_\omega^Y = \{(\varphi_i, \Psi_j)\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_*^{(1)} + i\Delta_{\varphi 1}, & i = \overline{0, m_1}, \\ \varphi_*^{(2)} + (i - m_1)\Delta_{\varphi 2}, & i = \overline{m_1 + 1, m + 1}, \\ \varphi_*^{(3)} + i\Delta_{\varphi 3}, & i = \overline{0, m_3}, \\ \varphi_*^{(4)} + (i - m_2)\Delta_{\varphi 4}, & i = \overline{m_3 + 1, m + 1}, \end{cases} \quad \Psi_j = \begin{cases} j\Delta_{\Psi 1}, & j = \overline{0, n_1 + 1}, \\ j\Delta_{\Psi 2}, & j = \overline{0, n_2 + 1}, \\ j\Delta_{\Psi 3}, & j = \overline{0, n_3 + 1}, \\ j\Delta_{\Psi 4}, & j = \overline{0, n_4 + 1}, \end{cases}$$

$$m_2 = m - m_1, \quad m_4 = m - m_3, \quad 2n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4, \quad \Delta_{\varphi k} = \frac{\varphi_*^{*(k)} - \varphi_*^{(k)}}{m_k + 1},$$

$$\Delta_{\Psi k} = \frac{Q^{(k)}}{n_k + 1}, \quad \gamma_k = \frac{\Delta_{\varphi k}}{\Delta_{\Psi k}}, \quad m, m_1, m_3, n, n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N}, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Різницеві аналоги диференціальних рівнянь при $\kappa_f = \text{const}$ запишемо аналогічно [1, 4]:

$$\gamma x_{i,j} \equiv x_{i+1,j} - 2(1 + \gamma_k^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma_k^2(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) = 0,$$

$$\gamma y_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, m_k}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k = \overline{1, 4}$$

($x_{i,j} = x(\varphi_i, \Psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \Psi_j)$), а їх розв'язки подано формулами сумарних зображень [4, 6]:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j} &= \sum_{l=1}^n p_{j,l} \left(\mu_l^i a_l + \nu_l^i b_l + \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{\nu_l^{|i-t|}}{\mu_l - \nu_l} (p_{1,l} x_{t,0} + p_{n_k,l} x_{t,n_k+1}) \right), \\
 y_{i,j} &= \sum_{l=1}^n p_{j,l} \left(\mu_l^i c_l + \nu_l^i d_l + \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{\nu_l^{|i-t|}}{\mu_l - \nu_l} (p_{1,l} y_{t,0} + p_{n_k,l} y_{t,n_k+1}) \right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$i = \overline{1, m_k}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k = \overline{1, 4},$$

де елементи матриці P -трансформацій $P = [p_{j,i}]_{j,l=1}^{n_k}$ обчислюємо як

$$p_{j,l} = \frac{2}{\sqrt{2n_k + 1}} \sin \frac{j l \pi}{n_k + 1}, \quad \text{елементи діагональних матриць } \mu^i = [\mu_j^i]_{j=1}^{n_k},$$

$$v^i = [v_j^i]_{j=1}^{n_k} \quad \text{визначаємо за формулами: } \mu_j = v_j^{-1} = \eta_j + \sqrt{\eta_j^2 - 1},$$

$$\eta_j = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{j \pi}{n_k + 1} \right), \quad \text{а сталі } a_j, b_j, c_j, d_j \text{ знаходимо із систем рівнянь}$$

(що розв'язуються явно):

$$\begin{cases} a_j + b_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* x_{0,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^t}{\mu_j - v_j} (p_{1,j} x_{t,0} + p_{n_k,j} x_{t,n_k+1}), \\ \mu_j^{m_k+1} a_j + v_j^{m_k+1} b_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* x_{m_k+1,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^{m_k+1-t}}{\mu_j - v_j} (p_{1,j}^{(1)} x_{t,0} + p_{n_k,j}^{(1)} x_{t,n_k+1}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_j + d_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* y_{0,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^t}{\mu_j - v_j} (p_{1,j} y_{t,0} + p_{n_k,j} y_{t,n_k+1}), \\ \mu_j^{m_k+1} c_j + v_j^{m_k+1} d_j = \sum_{l=1}^{n_k} p_{l,j}^* y_{m_k+1,l} - \gamma_k^2 \sum_{t=1}^{m_k} \frac{v_j^{m_k+1-t}}{\mu_j - v_j} (p_{1,j} y_{t,0} + p_{n_k,j} y_{t,n_k+1}) \end{cases}$$

($p_{j,l}^*$ — елементи матриці, оберненої до P , $j, l = \overline{1, n_k}$).

Різницеві аналоги крайових умов, умов ортогональності ліній динамічної сітки до межі та умов «роздвоєння» і періодичності на розрізах мають вигляд у випадку 1 ($Q_*^0 = 0$, $Q_*^* > 0$, $Q_0^* > 0$):

$$\begin{aligned} f_0(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f'_{0x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - \\ - f'_{0y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \end{aligned}$$

$$x_{m_1+1,j}^{(1)} = x_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad y_{m_1+1,j}^{(1)} = y_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, \min(n_1, n_2)},$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,n_1+1}^{(1)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,n_1+1}^{(1)}, \quad i = \overline{1, m_1},$$

$$f_x^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i,n_2}^{(2)} = x_{i,n_4}^{(4)}, \quad y_{i,n_2}^{(2)} = y_{i,n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m},$$

$$f_*(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) -$$

$$\begin{aligned}
 & -f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3}, \\
 & x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)}, \\
 & x_{i,0}^{(3)} = x_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(3)} = y_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad i = \overline{1, m_3}, \\
 & f_x^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \\
 & f^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2}, \\
 & x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i, n_2}^{(2)} = x_{i, n_4}^{(4)}, \quad y_{i, n_2}^{(2)} = y_{i, n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m}, \\
 & f_* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - \\
 & - f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3}, \\
 & x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)}, \\
 & x_{i,0}^{(3)} = x_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(3)} = y_{i, n_3+1}^{(3)}, \quad i = \overline{1, m_3}, \\
 & f_x^{*'} (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^{*'} (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \\
 & f^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4};
 \end{aligned}$$

у випадку 2 ($Q_0^* = 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$):

$$\begin{aligned}
 & f_* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, f'_{*x}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f'_{*y}(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \\
 & x_{m_1+1,j}^{(1)} = x_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad y_{m_1+1,j}^{(1)} = y_{m_1+1,j}^{(2)}, \quad j = \overline{1, \min(n_1, n_2)}, \\
 & x_{i,0}^{(1)} = x_{i,0}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,0}^{(3)}, \quad x_{i, n_1}^{(1)} = x_{i, n_3}^{(3)}, \quad y_{i, n_1}^{(1)} = y_{i, n_3}^{(3)}, \quad i = \overline{1, \min(m_1, m_3)}, \\
 & f'_{0x}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f'_{0y}(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \\
 & f_0 (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2}, \\
 & x_{i,0}^{(2)} = x_{i, n_2+1}^{(2)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i, n_2+1}^{(2)}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \\
 & f_* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, f'_{*x}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) - f'_{*y}(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3}, \\
 & x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},
 \end{aligned}$$

$$x_{i,0}^{(4)} = x_{i,n_4+1}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(4)} = y_{i,n_4+1}^{(4)}, \quad i = \overline{m_3+1, m},$$

$$f_x^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4};$$

у випадку 3 ($Q_*^0 > 0$, $Q_*^0 > 0$, $Q_*^* > 0$):

$$f_*^* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad f_{*x}^* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(y_{1,j}^{(1)} - y_{0,j}^{(1)}) - f_{*y}^* (x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)})(x_{1,j}^{(1)} - x_{0,j}^{(1)}) = 0,$$

$$f'_{0x} (x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)})(y_{m_1,j}^{(1)} - y_{m_1+1,j}^{(1)}) - f'_{0y} (x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)})(x_{m_1,j}^{(1)} - x_{m_1+1,j}^{(1)}) = 0,$$

$$f_0 (x_{m_1+1,j}^{(1)}, y_{m_1+1,j}^{(1)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_1},$$

$$x_{i,0}^{(1)} = x_{i,0}^{(3)}, \quad y_{i,0}^{(1)} = y_{i,0}^{(3)}, \quad x_{i,n_1}^{(1)} = x_{i,n_3}^{(3)}, \quad y_{i,n_1}^{(1)} = y_{i,n_3}^{(3)}, \quad i = \overline{1, \min(m_1, m_3)},$$

$$f'_{0x} (x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)})(y_{m_1,j}^{(2)} - y_{m_1+1,j}^{(2)}) - f'_{0y} (x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)})(x_{m_1,j}^{(2)} - x_{m_1+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_x^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(y_{m,j}^{(2)} - y_{m+1,j}^{(2)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)})(x_{m,j}^{(2)} - x_{m+1,j}^{(2)}) = 0,$$

$$f_0 (x_{m_1+1,j}^{(2)}, y_{m_1+1,j}^{(2)}) = 0, \quad f^* (x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$x_{i,0}^{(2)} = x_{i,0}^{(4)}, \quad y_{i,0}^{(2)} = y_{i,0}^{(4)}, \quad x_{i,n_2}^{(2)} = x_{i,n_4}^{(4)}, \quad y_{i,n_2}^{(2)} = y_{i,n_4}^{(4)}, \quad i = \overline{\max(m_1, m_3) + 1, m},$$

$$f_*^* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad f_{*x}^* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(y_{1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)}) -$$

$$- f_{*y}^* (x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)})(x_{1,j}^{(3)} - x_{0,j}^{(3)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_3},$$

$$x_{m_3+1,j}^{(3)} = x_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad y_{m_3+1,j}^{(3)} = y_{m_3+1,j}^{(4)}, \quad j = \overline{1, \min(n_3, n_4)},$$

$$f_x^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(y_{m,j}^{(4)} - y_{m+1,j}^{(4)}) - f_y^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)})(x_{m,j}^{(4)} - x_{m+1,j}^{(4)}) = 0,$$

$$f^* (x_{m+1,j}^{(4)}, y_{m+1,j}^{(4)}) = 0, \quad j = \overline{1, n_4}, \quad (2)$$

де $x_{i,j}^{(k)} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(k)} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{\gamma(k)}$, $k = \overline{1, 4}$.

Формули для знаходження невідомих величин γ_k , $Q^{(k)}$, $k = \overline{1, 4}$ та φ_H отримуємо на підставі умов «конформної подібності в малому» елементарних сіткових чотирикутників фізичної області та відповідних їм в області комплексного квазіпотенціалу [5]:

$$\gamma_k = \frac{1}{(m_k + 1)(n_k + 1)} \sum_{i,j=0}^{m_k, n_k} \gamma_{i,j}^{(k)}, \quad Q^{(k)} = \Delta_{\varphi k} \frac{n_k + 1}{\gamma_k}, \quad \varphi_H = \varphi_* + (m_1 + 1)\Delta_{\varphi 1}, \quad (3)$$

$$\gamma_{i,j}^{(k)} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(k)} - x_{i,j+1}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(k)} - y_{i,j+1}^{(k)})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j}^{(k)})^2 + (y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j}^{(k)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{(k)} - x_{i+1,j}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{(k)} - y_{i+1,j}^{(k)})^2}}.$$

АЛГОРИТМ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Алгоритм розв'язування ґрунтується на ідеї почергової параметризації координат межових та внутрішніх вузлів динамічної сітки, параметрів конформності [1] і в загальному вигляді може бути описаний таким чином.

Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , значення граничних потенціалів Φ_s , $s = \overline{1,3}$ і визначаємо φ_* , φ^* , φ_0 . Далі за співвідношеннями між граничними потенціалами слід визначити характер формування течії і вигляд (конфігурацію) області комплексного квазіпотенціалу. Таких варіантів (алгоритмічно різних) три: 1) $Q_*^0 = 0$, що означає відсутність перетікань між контурами L_* і L_0 ; 2) $Q_*^0 > 0$, $Q_0^* > 0$ і $Q_*^* > 0$; 3) $Q_0^* = 0$ — відсутність потоку від L_0 до L^* . У працях [8, 9] з цією метою запропоновано «алгоритм вибору», що передбачав розв'язання двох допоміжних ключових задач (обернених задач з ідентифікації «керувального» потенціалу) для визначення двох критичних потенціалів, що мажорують φ_0 . Тут пропонується, не встановлюючи точно на початковому етапі варіанта формування потоків (перетікань), відразу розв'язувати задачу за уніфікованим для всіх варіантів алгоритмом.

У більшості випадків за співвідношеннями між граничними потенціалами чи з деяких інших (технічних) міркувань можна досить достовірно зробити припущення про можливий спосіб формування потоку і співвідношення між величинами потоків. У комп'ютерній програмі, яка реалізовує відповідні розрахунки, для таких очевидних випадків передбачено модуль-перемикач, що дозволяє «вручну» вибрати потрібний варіант, що відразу значно оптимізує обчислення.

Задаємо кількість вузлів $m, m_1, m_3, n_1, n_2, n_3, n_4$ розбиття сіткової області G_ω^γ , параметри ε , ε_Q , що характеризують точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, та бажаний рівень конформності відображення δ_* [1]. Задаємо також нульове наближення невідомих величин γ_k , $k = \overline{1,4}$ (або шуканих витрат $Q^{(k)}$) та початкові наближення значень функцій x і y у межових вузлах (координати межових вузлів динамічної сітки) так, щоб виконувались умови (2).

Обчислюємо за формулами сумарних зображень (1) початкові наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки), знаходимо значення γ_k , $Q^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$, та φ_H за

формулами (3). Перевіряємо виконання умов $Q^{(k)} < \varepsilon_Q$, $k = \overline{1,2}$ і коригуємо, у разі потреби, випадок формування потоку.

Далі уточнюємо координати межових вузлів за формулами ортогональності ліній течії до межі області та належності вузла до межі з урахуванням періодичності (2) і обчислюємо нове наближення координат внутрішніх вузлів за формулами (1); знаходимо γ_k , $Q^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$, та φ_H за формулою (3).

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат межових вузлів [1] і оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область [1, 5] та приймаємо рішення про продовження чи припинення роботи алгоритму [1, 5].

Розроблений алгоритм виглядає дещо громіздким, а відповідні комп'ютерні процедури є більш складними, ніж з використанням, наприклад, методу скінченних елементів, але саме застосування числово-аналітичного підходу дозволяє уникнути розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з погано обумовленими матрицями великої розмірності, скоротити час роботи комп'ютера і за прийнятний час отримати задовільний результат.

ПРИКЛАД ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Для ілюстрації роботи описаного алгоритму виконано обчислення для одного з варіантів формування потоку у тризв'язній LEF-області (рис. 4), що обмежена трьома еквіпотенціалами — двома контурами експлуатаційних свердловин L_* , L_0 з потенціалами φ_* , φ_0 і еліптичним контуром їх живлення $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos(t), y = 6 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалом $\varphi^* = 1$.

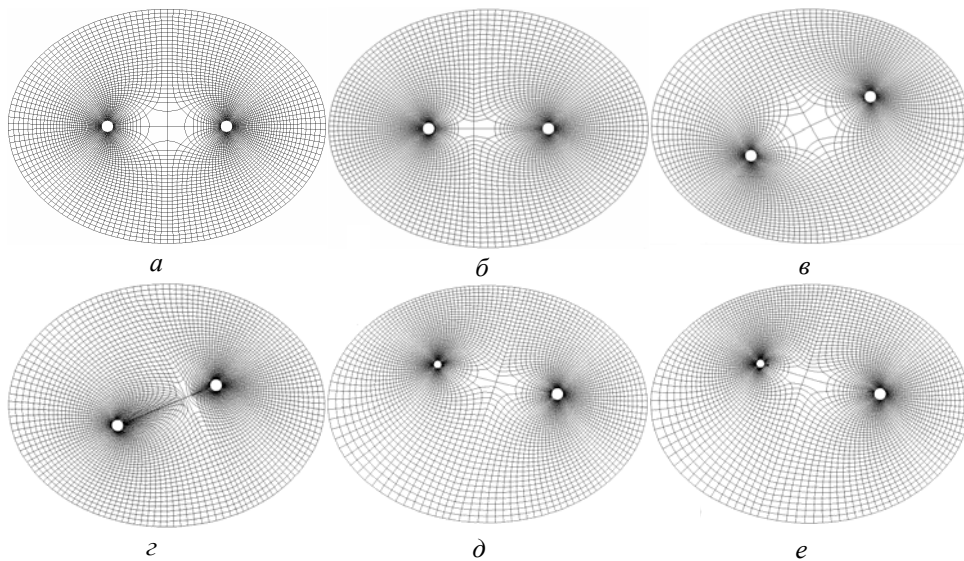


Рис. 4. Розраховані динамічні сітки

На рис. 4, а, б зображено розраховані динамічні сітки за наявності двох симетрично розміщених свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) - 3, y = 0,3 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 3, y = 0,3 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ у випадках з однаковими потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (рис. 4, а) і різними потенціалами $\varphi_* = 0$, $\varphi_0 = 0,2$ (рис. 4, б). Розраховані витрати свердловин становлять $Q_*^* = Q_0^* = 1,90504$ і $Q_*^* = 1,94942$, $Q_0^* = 1,08008$ відповідно. На рис. 4, в зображено динамічну сітку для свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) - 3, y = 0,3 \sin(t) - 1,5, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 3, y = 0,3 \sin(t) + 1,5, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (отримано $Q_*^* = Q_0^* = 1,99013$), на рис. 4, г — динамічну сітку для свердловин $L_* = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) - 2,5, y = 0,3 \sin(t) - 1, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 2,5, y = 0,3 \sin(t) + 1, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = 0,3$, $\varphi_0 = 0$ (отримано $Q_*^* = 0,59339$, $Q_0^* = 1,7718$). На рис. 4, е, е маємо випадки несиметричного розміщення свердловин різних діаметрів: $L_* = \{x + iy : x = 0,2 \cos(t) - 2,5, y = 0,2 \sin(t) + 2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = 0,3 \cos(t) + 3,5, y = 0,3 \sin(t) + 0,5, 0 \leq t < 2\pi\}$ з потенціалами $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ (рис. 4, з) і $\varphi_* = 0$, $\varphi_0 = 0,2$ (рис. 4, е). Отримані витрати становлять $Q_*^* = Q_0^* = 1,84901$ і $Q_*^* = 1,98889$, $Q_0^* = 0,98397$ відповідно.

ВИСНОВКИ

Розвинуто методику моделювання фільтраційних процесів для багатозв'язних криволінійних LEF-областей на основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень і запропоновано підхід до вирішення проблеми неоднозначності побудови відповідної області комплексного квазіпотенціалу. Використання методів сумарних зображень як компонентів методики на базі комплексного аналізу дозволило істотно удосконалити існуючі підходи до розв'язання такого класу задач, підвищити ефективність (швидкість збіжності) відповідного ітераційного процесу, оскільки уможливило відшукування необхідної точності початкового наближення шуканих функцій, дало змогу в комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не лише навколишніх, а й усіх крайових та внутрішніх вузлів динамічної сітки, а тому значно пришвидшило досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. — 2012. — № 2. — С. 87–94.
2. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains

- / O. Hladka, A. Bomba // Journal of Mathematics and System Science (USA). — 2014. — 4, № 7 (Ser. N. 29). — P. 514–521.
3. *Бомба А.Я.* Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2013. — № 18. — С. 32–42.
 4. *Бомба А.Я.* Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Обчислювальна та прикладна математика. — № 1 (111). — К., 2013. — С. 35–45.
 5. *Бомба А.Я.* Методи комплексного аналізу: моногр. / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. — Рівне: НУВГП, 2013. — 415 с.
 6. *Ляшко И.И.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. — К.: Наук. думка, 1973. — 264 с.
 7. *Гладка О.М.* Моделювання нелінійних фільтраційних процесів у техногенно-деформованих пластах методами комплексного аналізу та сумарних зображень: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук; ТНТУ ім. І. Пулюя / О.М. Гладка. — Тернопіль, 2015. — 20 с.
 8. *Бомба А.Я.* Крайові задачі на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький // Доповіді НАН України. — 2004. — № 4. — С. 57–63.
 9. *Бомба А.Я.* Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А.Я. Бомба, В.В. Скопецкий, С.В. Ярошак // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 4. — С. 64–72.

Надійшла 26.11.2015

Примітка. Рисунки подано у виконанні автора.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ МІЖ ПІДПРИЄМСТВАМИ

А.П. ЯКОВЛЕВА, І.О. КУРДУП

Розглянуто задачу розподілу ресурсів між підприємствами різних галузей у складі одного економічного конгломерату. Наведено різні способи постановки задачі та введення вихідних даних з урахуванням можливості побудови власних функцій віддачі, керувальної дії та часу. Ключовим методом розв'язання задачі є апарат динамічного програмування Беллмана [1]. Досліджено альтернативну формалізацію задачі, у якій фазові і керувальні змінні можуть набувати нескінченної кількості значень, що унеможливають застосування стандартних для динамічного програмування таблиць, що призводить до необхідності аналітичних розрахунків. Запропоновано обмеження, які зводять функції віддачі до вигляду, що задовольняє умови виробничих функцій.

ВСТУП

Апарат динамічного програмування Беллмана був створений для доповнення класичного аналізу та варіаційного числення в умовах широкого використання комп'ютерів. Він дозволяв отримувати оптимальну стратегію дій, а не тактичний розв'язок статичних задач, хоча широкі класи динамічних задач можна звести до однокрокових досить великої розмірності. Задача розподілу ресурсів, як і будь-яка інша задача динамічного програмування, є багатоетапною. Тобто вона поділяється на ряд послідовно розв'язуваних задач з меншою кількістю змінних. Отримані розв'язки підзадач використовуються для побудови розв'язку основної задачі. Для задач цього типу важливим є виконання умов відсутності післядії та адитивності цільової функції. Оптимальна стратегія за принципом оптимальності Беллмана полягає в тому, що якими б не були початкові умови і початковий стан, подальші розв'язки повинні становити оптимальну поведінку щодо стану, отриманого в результаті першочергового розв'язку [1]. Математично цей принцип описується таким чином:

$$B_{N-l}(S_l) = \underset{U_{l+1}}{\text{optimum}} [R_{l+1}(S_l, U_{l+1}) + B_{N-(l+1)}(S_{l+1})], \quad (l = \overline{0, N-1}), \quad (1)$$

де U_l — керування, обране на l -му кроці; S_l — стан системи на l -му кроці; R_l — безпосередній ефект, досягнутий на l -му кроці; B_{N-l} — оптимальне

значення ефекту, що досягається за $N-l$ кроків; N — загальна кількість кроків.

Мета роботи — розроблення ефективного розподілу ресурсів між економічними підприємствами, який ґрунтується на застосуванні апарату динамічного програмування до задачі оптимізації за умов різних способів задання вихідних даних.

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ. ТАБЛИЧНА ПОСТАНОВКА

Нехай у складі певного конгломерату є $N=4$ підприємств, які використовують один ресурс деякими цілими порціями v_1, v_2, \dots , а початкова сума становить $V=100\,000$. По закінченні робочого терміну вони повертають прибуток за певним правилом $P_n(x)$, відображеним у табл. 1. Потрібно знайти оптимальну стратегію розподілу ресурсів, тобто визначити кількість ресурсів, яку необхідно виділити кожному підприємству для отримання максимального сумарного прибутку.

Таблиця 1. Умова задачі

Ресурси	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

У такій формалізації на n -му кроці розв’язання задачі для n -го підприємства і кожного можливого виділеного йому обсягу ресурсів v визначається його прибуток $P_n(v)$. Функціональне рівняння Беллмана має вигляд

$$B_n(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [P_n(x) + B_{n-1}(c-x)],$$

де c — кількість ресурсів, яка розподіляється між усіма підприємствами, що розглядаються на поточному кроці; x — поточна змінна, у якій зберігаються можливі значення наданих підприємствам ресурсів.

Розраховуємо максимальний прибуток для кожної кількості виділених підприємству ресурсів (табл. 2–4). Причому в табл. 2 кількість ресурсів c розподіляється між двома підприємствами, у табл. 3 — між трьома, а в табл. 4 — результуюча. Часто можливу кількість ресурсів подають дискретною вибіркою, що робить можливим використання таблиць для розв’язання задачі. На відміну від більшості задач динамічного програмування послідовність етапів розв’язання в цьому випадку установлюємо спочатку для першого підприємства, тому $B_1(x) = P_1(x)$. По завершенні останнього етапу значення функції Беллмана дорівнюватиме максимальному прибутку об’єднання підприємств. Обраний розподіл ресурсів буде оптимальним керуванням.

Таблиця 2. Результати першого кроку

c	x						f ₂ (c)	x ₂ (c)
	0	20	40	60	80	100		
20	0+10	12+0					12	20
40	0+31	12+10	26+0				31	0
60	0+42	12+31	26+10	36+0			43	20
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0		62	0
100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0	78	100

Таблиця 3. Результати другого кроку

c	x						f ₃ (c)	x ₃ (c)
	0	20	40	60	80	100		
20	0+12	11+0					12	0
40	0+31	11+12	36+0				36	40
60	0+43	11+31	23+12	45+0			48	40
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+0		67	40
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+0	79	40

Таблиця 4. Результуюча таблиця

c	x ₁ (c)	f ₁ (c)	x ₂ (c)	f ₂ (c)	x ₃ (c)	f ₃ (c)	x ₄ (c)	f ₄ (c)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	20	12	0	12	20	16
40	40	31	0	31	40	36	40	37
60	60	42	20	43	40	48	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
100	100	76	100	78	40	79	40	85

Тобто оптимальний прибуток становить $B_4(100) = 85$, що відповідає керуванню $x_4(100) = 40$, $x_3(60) = 40$, $x_2(20) = 20$, $x_1(0) = 0$.

Функції $P_n(v)$ можуть бути різної природи, тобто виражатися не лише дискретною вибіркою залежно від керувальної функції v , а й набувати лінійних, експоненційних, тригонометричних чи інших залежностей. Керувальний вплив діяння v може набувати більш складних форм. Зокрема, його можна подати у вигляді $v = as + bt$, де s — грошові ресурси; t — час; a, b — нормувальні коефіцієнти. Подібна функція потрібна у випадку, якщо час виконання роботи підприємством є важливим, проте весь процес відбувається лише за один часовий етап.

ДВОЕТАПНА ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Створювати часові етапи роботи підприємств і оптимізувати розподіл ресурсів можна на кожному етапі. У цьому випадку на кожному етапі із загальної суми ресурсів виділяється частина і розподіляється між підприємствами. Проте необхідно виконувати для кожного етапу умовну

оптимізацію [2], у процесі якої обчислюються функції Беллмана та умовно-оптимальні керування.

Для спрощення формалізації введемо такі припущення. Будемо розглядати виробниче об'єднання, у яке входять два підприємства і яке планує роботу на період два роки. У процесі діяльності підприємства отримують прибуток, витрачаючи певні ресурси, які виділяються їм на початку кожного року. Наприкінці року невитрачені ресурси перерозподіляються між підприємствами. Вважатимемо, що початковий обсяг ресурсів об'єднання дорівнює V і він повністю розподілений між підприємствами. Якщо надані підприємствам ресурси v , вони повертають прибуток у розмірі $P_1(v) \geq 0$ і $P_2(v) \geq 0$, витрачаючи при цьому ресурси в обсязі $0 \leq Q_1(v) \leq v$ і $0 \leq Q_2(v) \leq v$. Сумарний обсяг ресурсів, що залишається у виробничому об'єднанні по закінченні першого і другого років роботи позначимо відповідно через x_1 і x_2 , які є фазовими змінними. Початковий стан системи характеризується значенням $x_0 = V$. Керувальною змінною u_i вважатимемо обсяг ресурсів, що виділяється першому підприємству на i -му кроці процесу. Тобто на початку першого року першому підприємству дістанеться u_1 ресурсів, а другому — $x_0 - u_1$. Відповідно на початку другого року підприємства матимуть u_2 і $x_1 - u_2$. Функція процесу $x_i = f_i(x_{i-1}, u_i)$, що визначає закон зміни стану виробничого об'єднання, набуває вигляду $x_i = x_{i-1} - (Q_1(u_i) + Q_2(x_{i-1} - u_i))$ і має такий сенс: щороку сумарний обсяг ресурсів зменшується на величину їх затрат на обох підприємствах. А оскільки затрати невід'ємні, він постійно зменшується. Економічний ефект на кроці i визначається у такий спосіб: $z_i = P_1(u_i) + P_2(x_{i-1} - u_i)$. За такої формалізації задачі фазові і керувальні змінні можуть набувати нескінченної кількості значень, що робить неможливим використання таблиць, як і в більшості задач динамічного керування Беллмана, зумовлюючи необхідність аналітичних розрахунків [3].

На етапі умовної оптимізації для $i = 2, 1$, використовуючи принцип оптимальності (1), виконуємо розрахунок функцій Беллмана $B_i(x_i)$ і умовно-оптимальних керувань $\bar{u}_i(x_{i-1})$ [4]. Розрахунки почнемо з умови $B_2(x_2) = 0$.

На початку кроку $i = 2$ загальний обсяг ресурсів виробничого об'єднання становить ще невідоме значення $x_1 \geq 0$. Для цього кроку основне функціональне рівняння Беллмана набуває вигляду

$$B_1(x_1) = \max_{u_2} \{z_2(x_1, u_2) + B_2(x_2) \mid x_2 = f_2(x_1, u_2)\} \text{ де } 0 \leq u_2 \leq x_1.$$

Ураховуючи умову $B_2(x_2) = 0$, явний вигляд функції $z_2(x_1, u_2)$ і область значень змінної u_2 , отримуємо: $B_1(x_1) = \max_{0 \leq u_2 \leq x_1} \{P_1(u_2) + P_2(x_1 - u_2)\}$.

Конкретизуємо вигляд функцій прибутку: $P_1(v) = K_1 \sqrt{v}$, $P_2(v) = K_2 \sqrt{v}$, де K_1, K_2 — деякі додатні коефіцієнти продуктивності. Функцію квадратного кореня вибрано не випадково — вона задовольняє властивості виробничих функцій:

- \sqrt{v} визначена на $v \geq 0$, тобто обсяги ресурсів не можуть набувати від'ємних значень;
- \sqrt{v} додатна і дорівнює 0 при $v = 0$. Підприємство не дає прибутку за відсутності ресурсів і забезпечує певну віддачу за їх наявності;
- \sqrt{v} монотонно зростає;
- похідна $(\sqrt{v})' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$ монотонно спадає. Ця властивість в економічній

теорії називається законом спадної ефективності і добре підтверджується на практиці.

Розглянемо функцію $G_2(u_2) = K_1\sqrt{u_2} + K_2\sqrt{x_1 - u_2}$. Розв'язком рівняння $G_2'(u_2) = 0$ є $\bar{u}_2(x_1) = \frac{K_1^2}{K_1^2 + K_2^2}x_1$, тоді функція Беллмана

$B_1(x_1) = \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)x_1}$. Варто зазначити, що функція Беллмана не залежить від затрат ресурсів на підприємствах, що логічно для останнього кроку [5], а виділення всіх ресурсів матиме гірший результат, ніж розподілення ресурсів.

Крок $i = 1$. На початку цього кроку обсяг ресурсів об'єднання $x_0 = V$. На підставі функцій $f_1(x_0, u_1)$ і $z_1(x_0, u_1)$ побудуємо основне функціональне рівняння Беллмана:

$$B_0(x_0) = \max_{0 \leq u_1 \leq x_0} \{P_1(u_1) + P_2(x_0 - u_1) + B_1(x_1)\}, \quad x_1 = x_0 - Q_1(u_1) - Q_2(x_0 - u_1).$$

Конкретизуємо функції: $Q_1(v) = a_1v$, $Q_2(v) = a_2v$, де коефіцієнти a_1, a_2 — певні коефіцієнти використання ресурсів з інтервалу $(0, 1)$. У результаті

$$B_0(x_0) = \max_{0 \leq u_1 \leq x_0} \{K_1\sqrt{u_1} + K_2\sqrt{x_0 - u_1} + \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)((1 - a_2)x_0 + (a_2 - a_1)u_1)}\}.$$

Пошук максимуму цієї функції можна звести до знаходження коренів багаточлена 4-го степеня, проте через його громіздкість і складність будемо вважати, що на першому кроці ресурси поділено порівну між підприємствами, тобто рівняння $G_1'(u_1) = 0$ має корінь $u_1 = \frac{x_0}{2}$, що породжує умову

$$\frac{K_1 - K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2 - (a_1 + a_2)}}, \quad (2)$$

а функція Беллмана набуває вигляду

$$B_0(x_0) = (K_1 + K_2 + \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)(2 - a_2 - a_1)})\sqrt{\frac{x_0}{2}}.$$

Важливим є той факт, що на кожному етапі функція Беллмана стає дедалі складнішою, що потребує обчислень за допомогою комп'ютерів.

Подальший етап безумовної оптимізації за відомих коефіцієнтів K та a поверне необхідне керування на кожному кроці та отриманий результат. Нехай $K_1 = 3$, $K_2 = 4$, $a_1 = 0,4$, $a_2 = 0,6$. Ці значення задовольняють умову (2). Тепер задачу можна звести до числового розв'язку: першого року першому підприємству виділено половину ресурсів, а другого — 0,36 від залишку ресурсів. Усіх ресурсів після першого року залишилась половина, а після другого — 0,236 від початкової їх кількості V . Розмір оптимального прибутку виражається функцією Беллмана $B_0(V) = 6\sqrt{2V}$.

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК І ПОРІВНЯННЯ МОДЕЛЕЙ

Розглянемо тепер задачу розподілу ресурсів у табличній та двоетапній постановках і порівняємо їх, визначаючи можливі похибки та складність переходу з однієї моделі до іншої. З цією метою створено програмний продукт, який дозволяє проводити обчислювальні експерименти і отримувати точні дані для порівняння у випадку зведення двоетапної задачі до табличного вигляду.

Для цього функції віддачі підприємств дискретизуються на певну, задану користувачем, кількість дискрет, і задача розв'язується в табличному вигляді. Залежність похибок від їх кількості між отриманою функцією Беллмана експериментально і точною для трьох наборів вхідних даних K_1, K_2, a_1, a_2 (відображених у табл. 5) наведено в табл. 6 і 7.

Таблиця 5. Тестові набори

Набори	K_1	K_2	a_1	a_2
Набір 1	3	4	0,4	0,6
Набір 2	2	1	0,9	0,576
Набір 3	6	5	0,532	0,4

Таблиця 6. Залежність похибок від кількості дискрет при $V = 1000000$

Кількість дискрет	Набір 1	Набір 2	Набір 3
10	3,002	1,064	0,286
30	0,429	0,143	0,038
50	0,065	0,061	0,017
100	0,016	0,003	7,93E-05
1000	0,0001	3,547E-05	7,959E-07
Результат	8485,281374	3265,872658	13485,53826

Таблиця 7. Залежність похибок від кількості дискрет при $V = 1000$

Кількість дискрет	Набір 1	Набір 2	Набір 3
10	0,095	0,033	0,032
30	0,002	0,0045	0,009
50	0,00175	0,0017	0,00335
100	0,000456	0,000438	0,000347
1000	4,74E-06	4,51E-06	1,10E-05
Результат	268,3281573	103,2759615	426,4501637

Як бачимо, похибка обчислень дуже залежить від набору вхідних даних, проте стрімко зменшується зі збільшенням кількості дискрет. Подальше дослідження ускладнюється тим, що комп'ютери уже при 10000 дискретах не в змозі розв'язувати задачу за прийнятний час.

У разі зворотного переходу апроксимація табличних даних поліномами старших порядків не забезпечує потрібної точності. Похибка результуючої функції Беллмана виявляється того ж порядку, що і сама функція незалежно від кількості дискрет, тому цей випадок тут не розглядається.

ВИСНОВКИ

У роботі подано постановки економічної задачі та основні ідеї підходів застосування до її розв'язання методом динамічного програмування.

Розглянуто задачу розподілу ресурсів між підприємствами та побудовано різні варіанти формалізації: табличне задання дискретних функцій віддачі підприємств залежно від наданих їм ресурсів, створення функціональної залежності віддачі підприємств об'єднання залежно від наданих їм ресурсів за можливості двокритеріальної оптимізації в межах даної задачі з урахуванням часу. Побудовано модель її розв'язання за деяких припущень.

Подано перехід дворічної моделі до табличної форми та розглянуто виникаючі при цьому похибки.

У випадку більш широкого розгляду задачі, зняття обмежень з цільових функцій та застосування більш ефективних виробничих функцій значно підвищується складність їх обчислення і це може стати предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беллман Річард. Динамічне програмування / Річард Беллман. — М.: Иностран. лит-ра, 1960. — 400 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. — М.: Наука, 1980. — 208 с.
3. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. — 7-е изд.; пер. с англ. — М., 2005. — 912 с.
4. King Ian. A Simple Introduction to Dynamic Programming in Macroeconomic Models / Ian King // The University of Auckland, 2002. — 30 p.
5. Giegerich R. A Discipline of Dynamic Programming over Sequence Data / R. Giegerich, C. Meyer, P. Steffen // Faculty of Technology. — Bielefeld University, 2004. — 53 p.
6. Альсевич В.В. Методы оптимизации: упражнения и задания / В.В. Альсевич, В.В. Крахотко. — Мн.: БГУ, 2005. — 405 с.
7. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн; под ред. И.В. Красикова. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.

Надійшла 01. 12. 2015

ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУВАННЯ РОЗПОДІЛУ ЗАВДАНЬ І ТРАНСПОРТУВАННЯ ПАКЕТІВ ДАНИХ У РОЗПОДІЛЕНІЙ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МЕРЕЖІ

Р.П. КРАСНЮК, Г.Г. ЦЕГЕЛИК

Розглянуто задачі об'ємно-календарного планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних у розподіленій обчислювальній мережі. Виконано математичну постановку, сформульовано ефективні обчислювальні алгоритми та отримано наближені розв'язки цих задач. Показано ефективність запропонованих обчислювальних алгоритмів щодо побудови наближеного розв'язку одно- та багатокритеріальних задач оптимізації на основі порівняльного аналізу застосування цих алгоритмів на тестових прикладах. Зроблено висновок про обчислювальну ефективність запропонованих алгоритмів зі збільшенням розмірностей задач.

ВСТУП

Інтеграція інформаційних та обчислювальних ресурсів в єдине середовище та організація ефективного доступу до них є одним з основних напрямів розвитку сучасних інформаційних технологій. Першочерговою стає проблема ефективного використання обчислювальних ресурсів кожного вузла мережі для вирішення складних наукових, виробничих і технологічних завдань. Тому одним з актуальних завдань сьогодення є ефективне керування обчислювальними ресурсами у розподіленому середовищі. Зростання кількості ресурсних центрів, що становлять розподілену інфраструктуру, за відсутності або низької ефективності підсистеми планування, яка забезпечує керування потоком задач, не тільки знижує продуктивність використання усієї розподіленої інфраструктури, але й може зробити беззмістовним її створення. Крім того, розподілені системи характеризуються динамічним розвитком, що унеможливує вирішення завдань продуктивного керування ресурсами у статичному середовищі без використання методів та підходів, які розроблялися для динамічних задач.

Упровадження більш дійових алгоритмів керування розподіленим середовищем у безпосередньо вже створеній розподіленій інфраструктурі ускладнено і зумовлено додатковими витратами та недостатнім завантаженням ресурсних центрів, а через масштабність ресурсного середовища взагалі неможливе. Тому актуальним завданням є створення систем моделювання розподіленої комп'ютерної інфраструктури й ефективних моделей та методів оптимізації, які дозволяють адекватно оцінити поведінку мережі за змінюваних умов і на підставі цього покращити стратегії керування потоками завдань.

Мета роботи — дослідити проблему планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних у розподіленій обчислювальній мережі. Для досягнення поставленої мети вирішено такі завдання:

- сформульовано та досліджено математичні моделі оптимального планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних;
- розроблено ефективні обчислювальні алгоритми пошуку наближеного розв'язку одно- та двокритеріальних оптимізаційних задач;
- досліджено ефективність сформульованих алгоритмів за результатами числових експериментів на тестових прикладах та порівняно з точними розв'язками.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

Актуальність досліджень оптимізації розподілу завдань у комп'ютерних мережах зумовила появу значної кількості публікацій, присвячених цій тематиці. Зокрема, у праці [1] побудовано та досліджено математичні моделі розподілу потоків обмежених ресурсів у енергетичних системах. Розроблено методи розв'язання задач розподілу потоків, що базуються на поєднанні екстремальних підходів до розрахунку мереж. Оптимізація упорядкування передавання повідомлень у вузлах комп'ютерних мереж з урахуванням динаміки трафіку досліджено у праці [2]. Для розв'язання задачі запропоновано критерій максимальної тривалості доставлення пакета, що мінімізується. З використанням імітаційної моделі вузла мережі проведено числові експерименти оптимізації упорядкування передавання повідомлень у вузлах мережі для різної кількості черг. Числові методи отримання парето-оптимальних точок, що ґрунтуються на зведенні багатокритеріальних задач до «скаляризованих» задач оптимізації зі спеціальними цільовими функціями, розглянуто у праці [3]. Сформовано алгоритм, згідно з яким вихідна задача зі знаходження ефективної точки зводиться до послідовного розв'язання задач квадратичного програмування.

У фундаментальній праці [4] проаналізовано ефективні архітектури систем розподілених обчислень, наведено моделі та технології їх функціонування. Моделюванню та оптимізації доступу до інформаційних файлів баз даних для одно- та багатопроекторних систем присвячено працю [5], у якій розглянуто групу нових та ефективних математичних моделей оптимізації розподілу завдань у системах розподілених обчислень. У монографії [6] висвітлюється питання моделювання бізнес-процесів за допомогою розподілених систем обчислень. Досліджено методи прийняття рішень щодо оптимізації за заданим критерієм.

ЗАДАЧА КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНУВАННЯ РОЗПОДІЛУ ЗАВДАНЬ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МЕРЕЖІ

Розглянемо обчислювальну систему, що складається з деякої множини вузлів, у якій розподіляються пакети завдань, які необхідно виконати за період планування. Відома максимальна кількість завдань, яка може бути виконана у вузлах на кожному кроці планування; мінімально допустима кількість завдань, яка має бути виконана у вузлах за кожним пакетом; максимальний обсяг завдань, який може бути виконаний у вузлах на кожному кроці планування; мінімально допустима і максимально необхідна кількість завдань, що

повинна бути виконана у вузлах для кожного пакета. Необхідно визначити на заданий період планування програму виконання пакетів завдань, що забезпечує ефективне функціонування обчислювальної мережі таку, яка задовольняє обмеження можливих обсягів роботи.

Нехай I — множина вузлів обчислювальної мережі, J — множина пакетів, T — множина кроків планування. Позначимо через A_t максимальну сумарну кількість завдань, які можуть бути виконані в обчислювальній мережі за всіма пакетами на кроці планування t ; B_j — мінімально допустиму кількість завдань, які мають бути виконані у вузлі за пакетом j протягом усього часу планування; C_{it} — максимальну кількість завдань, які можуть бути виконані у вузлі i на кроці планування t ; D_{ij}^- , D_{ij}^+ — мінімально допустиму і максимально необхідну кількість завдань, які повинні бути виконані у вузлі i для пакета j , $i \in I$, $j \in J$, $t \in T$.

Позначимо через x_{ijt} цілочислову кількість завдань, які виконуються на кроці t для пакета j у вузлі i , $i \in I$, $j \in J$, $t \in T$. Тоді математична модель календарного планування складається з такої системи обмежень:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijt} \leq A_t, \quad t \in T, \quad (1)$$

(загальна кількість задач на кожному кроці планування не повинна перевищувати максимально допустиму кількість);

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijt} \geq B_j, \quad j \in J, \quad (2)$$

(загальна кількість задач за кожним із пакетів має бути не меншою за мінімальну допустиму кількість);

$$\sum_{j \in J} x_{ijt} \leq C_{it}, \quad i \in I, \quad t \in T, \quad (3)$$

(загальна кількість задач для кожного вузла на кожному кроці планування не може перевищувати максимально допустиму кількість);

$$D_{ij}^- \leq \sum_{t \in T} x_{ijt} \leq D_{ij}^+, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad (4)$$

(обмеження мінімально допустимої та максимально необхідної кількості завдань у кожному вузлі за кожним пакетом);

$$0 \leq x_{ijt}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T, \quad (5)$$

(природні обмеження на змінні).

Критерії оптимальності можуть залежати від різних показників необхідної програми виконання завдань, наприклад, від кількості виконуваних завдань за пакетами та кількості завдань у вузлах обчислювальної мережі.

Тоді досліджувана задача календарного планування полягатиме у визначенні такої програми виконання завдань, для якої виконуються обмеження (1)–(5) і набувають екстремальних значень критерії:

$$f_j \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijt}, B_j \right), j \in J, \Theta_{it} \left(\sum_{j \in J} x_{ijt}, C_{it} \right), i \in I, t \in T,$$

що визначають умови ефективного виконання завдань за пакетами та ефективності функціонування вузлів обчислювальної мережі.

ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ТРАНСПОРТУВАННЯ ПАКЕТІВ ЗАВДАНЬ

Розглядається складна розподілена обчислювальна система, основними елементами якої є:

- вузли, які генерують пакети завдань;
- вузли, які ретранслюють пакети завдань;
- комунікаційні зв'язки між вузлами обчислювальної системи.

Схема функціонування процесу транспортування пакетів завдань включає в себе формування пакетів у вузлах, що обмежують обсяги ресурсів пам'яті; транспортування пакетів за різними комунікаційними зв'язками, які обмежують пропускну здатність та проходження пакетів завдань через ретрансляційні вузли, кожен з яких, у свою чергу, має обмежену «потужність» (пропускну здатність) ретрансляції.

Актуальною для подібних систем є така задача планування: за заданих обмежень обсягів пакетів, які формуються, обмежень пропускну здатності комунікаційних ліній зв'язку та відомих «потужностей» ретрансляційних вузлів необхідно на заданий період планування за «стандартних» умов визначити максимально можливі обсяги транспортування пакетів у наявній системі за мінімальних видатків на її обслуговування. У постановці цієї задачі передбачаються «стандартними» умови як умови безаварійної роботи, за яких довільно задані для елементів системи характеристики можуть бути досягнуті.

Нехай $i = \overline{1, m}$ — номери ретранслюючих вузлів; $j = \overline{1, q_{ik}}$ — номери комунікаційних зв'язків, які сполучають вузол з номером i з вузлом з номером k ; $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$; W_{jik} — максимально можлива пропускну здатність лінії зв'язку з номером j , що сполучає вузол i з вузлом k ; $j = \overline{1, q_{ik}}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$; G_{jik} — максимальна «потужність» ретрансляції вузла i , що обслуговує j -у лінію зв'язку, яка сполучає ретранслюючі вузли з номерами i та k ; $j = \overline{1, q_{ik}}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$; Q_i — пропускну «потужність» вузла з номером i ; $i = \overline{1, m}$; c_{ijk} — витрати на транспортування одиниці пакета даних у вузлі i , що обслуговує j -у комунікаційну лінію від i -го до k -го вузла; $j = \overline{1, q_{ik}}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$; V_i — обсяг пакетів даних, який може надходити у вузол з номером i , $V_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$. У випадку, якщо вузол здійснює тільки ретрансляцію пакетів, то $V_i = 0$, $i = \overline{1, m}$. Будемо вважати, що про-

пускна здатність комунікаційних ліній зв'язку та «потужність» ретранслюючих вузлів вимірюються в одних і тих самих одиницях.

Позначимо через x_{ijk} обсяг даних, який буде переданий по комунікаційній лінії зв'язку з номером j від вузла i до вузла k , $j = \overline{1, q_{ik}}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$. Тоді можна сформулювати обмеження математичної моделі:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{q_{ik}} x_{jik} \leq Q_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (6)$$

(обсяг даних, що передається від вузла з номером i , не повинен перевищувати його «потужності»);

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{q_{ik}} x_{jik} = V_i + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{q_{ik}} x_{jik}, \quad i = \overline{1, m} \quad (7)$$

(рівняння балансу — обсяг даних, який передається від ретрансляційного вузла з номером i , дорівнює обсягу даних, сформованого у вузлі i , і той обсяг даних, що надходить транзитом у вузол з номером i);

$$x_{jik} \leq \min(G_{jik}, W_{jik}), \quad j = \overline{1, q_{ik}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m} \quad (8)$$

(обсяг даних, який передається комунікаційною лінією зв'язку j , не повинен перевищувати максимальну «потужність» вузла, що обслуговує цю лінію зв'язку, і пропускну здатність j -ї комунікаційної лінії зв'язку, що сполучає i -й та k -й вузли);

$$x_{jik} \geq 0, \quad j = \overline{1, q_{ik}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m} \quad (9)$$

(природні умови на змінні).

Наведена загальна математична модель планування транспортування пакетів даних (6)–(9) становить систему лінійних обмежень транспортного типу. Критерії оптимальності задачі планування можна сформулювати як

$$F(X) = \min_{i=1, m} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{q_{ik}} x_{jik} \right) \rightarrow \max, \quad (10)$$

(сумарний обсяг даних, що передається у розподіленій обчислювальній мережі, має бути максимально можливим);

$$Q(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{q_{ik}} c_{jik} x_{jik} \rightarrow \min \quad (11)$$

(сумарні видатки на транспортування пакетів даних мають бути мінімальними).

Задача (6)–(11) є двокритеріальною задачею оптимального планування за критеріями максимізації обсягу транспортування пакетів даних та мінімізації видатків на їх транспортування.

ФОРМУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ

Застосування точних методів до побудови розв'язків задач оптимізації може ускладнюватися для розв'язання задач великої розмірності через значні часові витрати. Загалом задовільні для практичного використання результати можна отримати, застосувавши евристичні алгоритми, такі як «жадібні» та генетичні алгоритми, що дають наближений розв'язок поставленої задачі [7, 8].

Відповідно до «жадібного» методу розв'язок задачі розмірності n шукаємо у вигляді вектора $X = [x_1, \dots, x_n]$. Початковий розв'язок може бути будь-яким, наприклад нульовим: $X = [0, \dots, 0]$. На кожному кроці вибирається x_i з умов задач: зокрема для задачі (1)–(5) — це умова ефективного виконання завдань за пакетами, для задачі (6)–(9) — умови (10)–(11). Крім того, значення x_i має бути таким, щоб розв'язок задачі задовольняв додаткові обмеження, які накладаються при формулюванні оптимізаційної задачі.

Точність розв'язку задач з використанням «жадібного» алгоритму оцінюється за формулою

$$W = \frac{Z_a \cdot 100}{Z_g}, \quad (12)$$

де Z_a — екстремальне значення цільової функції, знайдене з використанням наближеного методу; Z_g — екстремальне значення цільової функції, отримане точним методом.

Оцінку точності (табл. 1) отримано для оптимізаційних задач (1)–(5) і (6)–(11), розв'язок яких знайдено з використанням «жадібного» алгоритму. Оцінка розрахована як середнє значення за ста розв'язками поставлених задач оптимізації, вхідні дані для яких задавалися випадковим чином.

Таблиця 1. Оцінка точності використання «жадібного» алгоритму в задачах планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних

Задача	Середній коефіцієнт точності $W, \%$	Кількість задач, розв'язків для яких не знайдено
(1)–(5)	87,0	12
(6)–(11)	71,5	15

Іншим ефективним методом побудови наближеного розв'язку є використання генетичних алгоритмів [8]. Вхідними даними для реалізованих у роботі генетичних алгоритмів є два початкові розв'язки, батьківські хромосоми, $X = [x_1, \dots, x_n]$ та $Y = [y_1, \dots, y_n]$; X і Y можуть визначатися випадково чи бути результатом попереднього розв'язку задачі іншим оптимізаційним методом, наприклад, з використанням «жадібних» алгоритмів. Необхідна умова для X і Y — задоволення додаткових обмежень, які накладаються при формулюванні оптимізаційної задачі.

Після задання X і Y відбувається схрещування, тобто взаємний обмін елементами (генами) векторів X і Y , що містяться на однакових позиціях.

У реалізованому в роботі програмному додатку обмінюються два елементи. Елементи для обміну вибираються випадково. Наприклад, за розмірності задачі, яка дорівнює трьом, із батьківських хромосом $X = [x_1, x_2, x_3]$ і $Y = [y_1, y_2, y_3]$ після визначення випадковим чином генів, що підлягають взаємному обміну, зокрема першого і третього, проявляють дві дочірні хромосоми: $YX1 = [y_1, x_2, y_3]$ і $YX2 = [x_1, y_2, x_3]$.

Після схрещування відбувається мутація хромосом, тобто заміна значення генів, які обираються випадково. У реалізованих у роботі генетичних алгоритмах до мутації схильні дочірні і батьківські хромосоми і змінюється значення єдиного гена. Імовірність того, що мутація відбудеться, у реалізованих алгоритмах можна змінювати, задаючи значення відповідного коефіцієнта. Для розглянутого прикладу, після обрання випадковим чином генів, які можуть бути змінені в усіх хромосомах, наприклад, перший ген у X , другий ген в $YX1$, третій ген в $YX2$, а Y не піддалася мутації, отримуємо такий набір хромосом:

батьківські: $X = [\overline{x_1}, x_2, x_3]$ та $Y = [y_1, y_2, y_3]$;

дочірні: $YX1 = [y_1, \overline{x_2}, y_3]$ та $YX2 = [x_1, y_2, \overline{x_3}]$,

коли верхні риси позначають логічне заперечення. Після мутації відбувається селекція, тобто з чотирьох розв'язків X , Y , $YX1$, $YX2$ залишаються тільки два, для яких значення *fitness*-функції є максимальним. *Fitness*-функція може задаватися довільно [8].

Після селекції генетичний алгоритм запускається з початку: два отримані за селекції розв'язки використовуються як батьківські хромосоми, оскільки генетичні алгоритми належать до типу рекурсивних. Процес може повторюватися задану кількість разів (покоління) або зупинитися з настанням певної події, наприклад, отримання розв'язку, що забезпечує додаткові обмеження оптимального значення цільової функції.

Для числового експерименту обрано побудову наближеного розв'язку задачі (6)–(11) з використанням генетичного алгоритму, коли при схрещуванні обмінюються два гени; мутації застосовувалися як до дочірних, так і до батьківських хромосом; за випадкової мутації відбувалася зміна одного гена і ймовірність мутації хромосом обрано рівною 0,5. Для порівняння *fitness*-функція $F(X)$ визначалася чотирма залежностями: 1) $F(X) = \frac{1000 f_1(X)}{f_2(X)}$; 2) $F(X) = \frac{e^{f_1(X)}}{f_2(X)}$; 3) $F(X) = \frac{f_1(X)}{f_2(X)}$; 4) $F(X) = \frac{f_1(X)}{e^{f_2(X)}}$, коли X — розв'язок оптимізаційної задачі («хромосоми»); $f_1(X)$ і $f_2(X)$ — цільові функції у формулах (10), (11).

Умовою припинення обчислень у реалізації генетичного алгоритму стало отримання в наборі хромосом, що пройшли селекцію, при цьому кількість поколінь має бути більшою за тисячу. Із досягненням кількості поколінь десять тисяч та за відсутності в наборі хромосом, що пройшли селекцію, алгоритм припиняє виконання з видачею повідомлення про відсутність розв'язку. Для чотирьох, наведених вище варіантів *fitness*-функції $F(X)$, виконано оцінку точності розрахунку за формулою (12) (табл. 2). Оцінку розраховано як середнє значення тисячі розв'язків поставленої задачі оптимізації, вхідні дані для якої задавалися випадково.

Таблиця 2. Оцінка точності використання генетичного алгоритму в задачі (6)–(11) оптимізації транспортування пакетів даних у розподіленій обчислювальній мережі

<i>Fitness</i> -функція $F(x)$	Середній коефіцієнт точності $W, \%$	Кількість задач, розв'язків для яких не знайдено за десятьма тисячами поколінь
1	76,1	5
2	77,3	22
3	68,6	10
4	82,7	137

Ще одним ефективним методом побудови наближеного розв'язку двокритеріальної оптимізаційної задачі є застосування методу мінімального відхилення від ідеальної точки. Цей метод є різновидом загального методу згортання цільової функції [9], але істотно відрізняється від нього за характером інтерпритації отриманого результату. Основна ідея методу полягає в попередньому відшуканні ідеальної точки задачі багатокритеріальної оптимізації і розв'язанні деякої нової задачі однокритеріальної оптимізації. У цьому випадку як нову задачу оптимізації розглядають задачу мінімізації відхилення від знайденої ідеальної точки в деякій визначеній метриці [9]. Отриманий розв'язок беруть за остаточний розв'язок вихідної задачі багатокритеріальної оптимізації. Ідеальною точкою задачі (6)–(11) багатокритеріальної оптимізації є сукупність значень $x_{ijk} = x_{ijk}^*$, для якої виконується умова

$$f_l(x_{ijk}^*) = \min_{x_{ijk}} f_l(x_{ijk}) = f_l^*, \quad l = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, q_{ik}; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Як метрику, що використовується для розрахунку відхилення від ідеальної точки, вибирають метрику

$$\rho_s(f_l(x_{ijk}), f_l^*) = \left[\sum_{l=1}^2 |f_l(x_{ijk}) - f_l^*|^s \right]^{\frac{1}{s}}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Коли $s = 1$, отримаємо

$$\rho_1(f_l(x_{ijk}), f_l^*) = \sum_{l=1}^2 |f_l(x_{ijk}) - f_l^*|.$$

За умови $s = 2$, отримаємо евклідову метрику:

$$\rho_2(f_l(x_{ijk}), f_l^*) = \left[\sum_{l=1}^2 |f_l(x_{ijk}) - f_l^*|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

а за умови $s = \infty$ — рівномірну метрику

$$\rho_\infty(f_l(x_{ijk}), f_l^*) = \max_l |f_l(x_{ijk}) - f_l^*|, \quad l = 1, 2.$$

Як наслідок розв'язок багатокритеріальної задачі можна звести до розв'язку однокритеріальної задачі оптимізації

$$\rho_s(f_l(x_{ijk}), f_l^*) \rightarrow \min_{x_{ijk}} \quad (14)$$

за умов (6)–(9).

Алгоритм методу мінімального відхилення від ідеальної точки, що орієнтований на розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації у постановці (14), (6)–(9), має ітеративний характер і полягає у виконанні таких кроків:

Крок 1. Попереднє знаходження ідеальної точки. Одним з можливих методів (наприклад, «жадібним» чи генетичним алгоритмом) розв'язати сукупність однокритеріальних задач оптимізації (6)–(11). Будуть розраховані оптимальні значення f_l^* для кожної цільової функції.

Крок 2. Формування нової цільової функції. Як нову функцію цілі розглядати, наприклад, вираз (13).

Крок 3. Розв'язок нової оптимізаційної задачі. Одним з методів (як і раніше, «жадібним» чи генетичним) побудувати розв'язок нової однокритеріальної задачі оптимізації (14), (6)–(9), тобто знайти сукупність значень $x_{ijk} = x_{ijk}^*$, для яких обчислити значення функції цілі $f_l(x_{ijk}^*) = f_l^{**}$. Скориставшись формулою для метрики, аналогічною до тієї, яка використовувалася для формування нової цільової функції на кроці 2, сформулюємо умову припинення обчислень. Наприклад, для випадку $s = 2$ отримаємо

$$\varphi(f_l^*, f_l^{**}) = \left[\sum_{l=1}^2 |f_l^* - f_l^{**}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad (15)$$

де ε — похибка обчислень. Якщо умова (15) виконується, то результатом розв'язання багатокритеріальної задачі є сукупність значень $x_{ijk} = x_{ijk}^*$, а оптимальні значення цільових функцій становлять $f_l(x_{ijk}^*) = f_l^{**}$. У випадку порушення умови (15) переписуються $f_l^* = f_l^{**}$, $l = 1, 2$ і відбувається повернення до кроку 2.

Для трьох варіантів метрик, наведених вище, виконано оцінку середньої кількості кроків розрахунку розв'язку задачі (14), (6)–(9) за ста варіантами вхідних даних, які задавалися випадково (табл. 3).

Таблиця 3. Оцінка кількості кроків у методі відхилення від ідеальної точки за побудови розв'язку оптимізаційної задачі (6)–(11)

Степінь метрики	Середнє значення кількості кроків алгоритму за умов $\varepsilon = 10^{-5}$, $m = 10$
$s = 1$	50
$s = 2$	27
$s = \infty$	34

Для побудови розв'язків однокритеріальних оптимізаційних задач використовувалися модифіковані «жадібні» та генетичні алгоритми. Як показав аналіз отриманих результатів, ефективним варіантом є використання «жадібного» алгоритму внаслідок меншої кількості ітерацій для досягнення необхідної точності наближеного розв'язку. У середньому кількість ітерацій з використанням «жадібного» алгоритму складала 30, коли розрахунок генетичним алгоритмом відповідно становив 42 ітерації за умов $\varepsilon = 10^{-5}$, $m = 10$ та вибору метрики (13).

ВИСНОВКИ

Переважає більшість практичних задач оптимального керування у розподілених обчислювальних мережах не мають аналітичного розв'язку у формі розрахункових формул. Тому стає актуальним формування, дослідження та вибір обчислювальних методів для практичного розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації. На вибір методів і засобів впливає характер математичної моделі та математичні властивості множини допустимих альтернатив. У першому випадку клас задач, до якого належить розглядувана математична модель, як правило, визначає вибір методу та алгоритму розв'язання відповідної задачі оптимізації. У другому випадку така характеристика множини допустимих альтернатив, як, наприклад, розмірність вихідних даних, істотно впливає на можливість отримання точного чи наближеного розв'язку.

Виходячи з аналізу досліджених у роботі математичних моделей оптимізації планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних у розподіленій обчислювальній мережі та розуміння великої розмірності вихідних даних, що впливає з розгляду архітектури розподіленої мережі, виконано побудову, аналіз, адаптацію та практичну перевірку наближених методів розв'язання задач оптимізації: «жадібних», генетичних та відхилення від ідеальної точки алгоритмів. Застосування цих алгоритмів показало ефективність побудови наближеного розв'язку. Наведено відповідні алгоритми та виконано порівняльний аналіз ефективності застосування методів у тестових прикладах, вихідні дані для яких задавались випадково, оцінено обчислювальну точність алгоритмів відносно точних розв'язків задач. У випадку розрахунків за алгоритмом методу відхилення від ідеальної точки проведено низку числових експериментів за умови вибору метрики, що дозволило зробити висновок про обчислювальну ефективність евклідової метрики зі збільшенням розмірності задач.

Проведений аналіз дозволяє використовувати адаптовані алгоритми як самостійно для отримання розв'язків із задовільною для практичного застосування точністю результатів, так і як основу для розроблення комплексних алгоритмів у комбінації з іншими методами.

Сформульовані та досліджені математичні моделі оптимізації розподілу ресурсів та адаптовані до цих моделей наближені методи розв'язання задач оптимізації можуть бути покладені в основу створення програмних комплексів керування розподіленою комп'ютерною інфраструктурою, що і є предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кірік О.Є.* Розподіл ресурсів у розподільчих системах з оптимальним перерозподілом навантаження постачальників продукту / О.Є. Кірік // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 4. — С. 38–51.
2. *Пустовойтов П.Е.* Оптимизация порядка передачи сообщений в узлах компьютерных сетей с учетом динамики трафика / П.Е. Пустовойтов, Л.Г. Раскин // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 3. — С. 53–57.
3. *Александрова В.М.* Деякі методи знаходження ефективних точок багатокритеріальної задачі оптимізації / В.М. Александрова, Л.О. Соболенко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 4. — С. 100–110.
4. *Куссиль Н.Н.* Grid-системы для задач исследования Земли. Архитектура, модели и технологи / Н.Н. Куссиль, А.Ю. Шелестов. — К.: Наук. думка. — 2008. — 452 с.
5. *Цегелик Г.Г.* Моделювання та оптимізація доступу до інформації файлів баз даних для однопроцесорних та багатопроцесорних систем / Г.Г. Цегелик. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка. — 2010. — 192 с.
6. *Томашевський О.М.* Інформаційні технології та моделювання бізнес-процесів: навч. посіб. / О.М. Томашевський, Г.Г. Цегелик, М.Б. Вітер, В.І. Дубук. — К.: Вид-во «Центр учбової літератури». — 2012. — 296 с.
7. *Ахо А.В.* Структуры данных и алгоритмы / А.В. Ахо, Д.Э. Хонкрофт, Д.Д. Ульман. — М.: Издат. дом «Вильямс», 2003. — 426 с.
8. *Сигал И.Х.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные методы / И.Х. Сигал, А.П. Иванова. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с.
9. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. — СПб.: Питер, 2011. — 526 с.

Надійшла 20.09.15

ЗАСТОСУВАННЯ ЕПІПОЛЯРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ СТЕРЕОСКОПІЧНОГО АНАЛІЗУ КОРОНАЛЬНОЇ ХВИЛІ

Ю.Р. ПАВЛЮК, О.В. ПОДЛАДЧІКОВА, В.М. ПОДЛАДЧІКОВ

Досліджено EUV хвилі за допомогою епіполярної геометрії. EUV хвиля ще досі вивчається і щодо неї існує чимало гіпотез. Відновлення просторової структури EUV хвилі дало б змогу пояснити її походження, фізичну природу та оцінити кінематичні характеристики. Запропоновано підхід, що ґрунтується на епіполярній геометрії для ідентифікації та узгодження об'єктів за стереозображеннями з космічних апаратів і визначення висоти хвилі. Показано, що є сегменти фронту хвилі, для яких задача встановлення відповідності стає некоректною і вироджується.

ВСТУП

Корональні викиди маси (КВМ) являють собою гігантські об'єми сонячної речовини, що викидаються в міжпланетний простір з атмосфери Сонця в результаті активних процесів, що відбуваються у ньому. Корональні викиди маси — найбільш великомасштабні явища сонячної активності, які відіграють важливу роль у багатьох сонячних, міжпланетних і геофізичних подіях. Досягаючи Землі, КВМ впливають на її магнітосферу, викликаючи різні ефекти космічної погоди: полярне сяйво, магнітні бурі, порушення в роботі електрообладнання, погіршення умов поширення радіохвиль.

Корональні викиди маси складаються в основному з електронів та протонів і супроводжуються великомасштабним збуренням магнітного поля Сонця, яке найбільш яскраво проявляється у вигляді так званих димінгів і корональних хвиль.

Димінги являють собою області зниженої інтенсивності м'якого рентгенівського і крайнього УФ-випромінювання з часом життя від декількох до десятків годин, які формуються услід за КВМ біля еруптивного центра. Корональні хвилі спостерігаються у вигляді фронтів підвищеної яскравості, що поширюються під час КВМ перед димінгами.

Супутникові спостереження процесів, що відбуваються на сонячному диску, мають велике значення для вивчення КВМ, пошуку відповідей на такі актуальні питання фізики Сонця, як механізм КВМ, природа димінгів і корональних (EUV) хвиль.

26 жовтня 2006 р. NASA були запущені два космічні апарати STEREO (Solar Terrestrial Relations Observatory) з метою отримання стереоскопічних спостережень Сонця з навколоземної орбіти.

Обертаючись по геліоцентричній орбіті, супутник STEREO Behind відстає від Землі, а STEREO Ahead, навпаки, обганяє її. Оскільки вони мають різні орбіти, то кутова відстань між STEREO A і STEREO B збільшується зі швидкістю приблизно 45° за рік. На обох космічних апаратах встановлено фотодатчики EUV Imager, які спостерігають за сонячним диском.

Часовий ряд спостережень SECCHI забезпечив уявлення про EUV хвилю з різних кутів зору. Таким чином, існує геометричне співвідношення між точками простору та їх проекцією на площину зображення. Завдяки отриманим даним стало доступним стереобачення.

Основні принципи стереоскопії для STEREO були описані Інхестером [1]. У цьому дослідженні зосереджено увагу на проблемі ідентифікації та відповідності об'єктів для відновлення елементів стереозображень як одній з найбільш складних проблем і показано, що вирішення проблеми відповідності часто дуже залежить від об'єкта спостереження.

Фізична природа EUV хвиль, великомасштабних яскравих фронтів, що супроводжують KBM і поширюються в сонячній короні, залишається предметом постійних досліджень.

Кінематика і структура EUV хвилі мають важливе значення для розуміння її фізичної природи. Оцінка швидкості хвилі, як правило, визначається вимірюванням положення пікової інтенсивності для кожного фронту хвилі, що поширюється в обраних напрямках. Як зазначається у праці [2], навіть мала висота EUV хвилі може істотно впливати на результати. Зміни зовнішніх меж і ширини EUV хвилі були вивчені в праці [4] у 2015 р.

Надійно оцінити значення висоти EUV хвилі надто складно, оскільки EUV хвиля розглядається як коливання корони, що, як правило, виникає як дифузне світіння, яке поширюється на Сонці. Фронт хвилі не має гладкої поверхні з чіткими краями меж яскравості, кольору і текстури, а характеризується поширенням інтенсивності пікселів. Проведено лише невелику кількість досліджень просторової структури EUV хвилі через складність зіставлення дифузійних об'єктів за допомогою пари стереозображень.

Автори праці [5] оцінили висоту EUV хвилі з безпрецедентних спостережень квадратури STEREO 13 лютого 2009 р., коли хвиля спостерігалася одночасно в центрі диска на зображеннях із STEREO B і на лімбі Сонця на зображеннях із STEREO A. За таких оптимальних умов для спостережень отримано значення висоти хвилі в діапазоні 80–100 Мм.

Оцінку висоти за більш складних умов (7 грудня 2007 р.), коли кут між космічними апаратами становив 45° і з апаратів STEREO A та STEREO B можна було спостерігати різні грані хвилі, отримано Петсоракосом та Вурлидасом [6]. Оскільки триангуляцію виконано без обгрунтованого розв'язання проблеми відповідності вершини EUV хвилі на зображеннях з обох космічних апаратів, то це могло призвести до отримання неточного значення оцінки висоти.

У роботі проблема відповідності розв'язується на основі методів епіпольярної геометрії стереобачення. Досліджуються умови, коли проблема відповідності стає погано обумовленою і вироджується. У такому випадку навіть незначні помилки можуть призвести до спотворення рішення. В умовах надійного розв'язання проблеми відповідності визначається висота EUV хвилі, що супроводжувала корональний викид маси на Сонці 7 грудня 2007 р.

АНАЛІЗ EUV СПОСТЕРЕЖЕННЯ ПОДІЙ З КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ STEREO 7 ГРУДНЯ 2007 Р.

EUVI / STEREO 195 А зображення повного Сонця були отримані 7 грудня 2007 р. з двох космічних апаратів STEREO з інтервалами 10 хв, коли EUV хвиля і KBM спостерігались в активній області 10977.

Динамічні сонячні явища, що супроводжують KBM, такі як EUV хвилі та димінги, вивчаються на основі формування різницевого зображень двох типів. Послідовні різницеві зображення отримуються, коли з кожної поточної геліограми віднімається попередня. Під час формування фіксованих різницевого зображень одне й те саме зображення перед подією віднімається з усіх наступних зображень. На таких різницевих зображеннях димінги проявляються як темні утворення зниженої інтенсивності, а корональні хвилі — у вигляді яскравого фронту, що поширюється вздовж сонячного диска [7].

Для просторового аналізу структури корональних подій сформовано фіксовані EUVI різницеві зображення для обох апаратів STEREO з урахуванням особливостей обертання Сонця. Послідовні різницеві зображення, отримані відніманням попереднього зображення від поточного, хоча і показують більший контраст фронту хвилі, але тут не використовуються, адже їх важче інтерпретувати. Деякі випадки збільшення випромінювання і потемніння, що спостерігаються на послідовних різницевих зображеннях, мають методологічне походження [7].

Фіксовані різницеві зображення, що формуються відніманням еталонного зображення, отриманого до настання події, з кожного наступного зображення показують більш точну геометричну структуру димінгів, внутрішні межі хвильового фронту та фізичні властивості області між затемненням і фронтом хвилі.

Розглянемо EUV спостереження подій з космічних апаратів STEREO 7 грудня 2007 р. з 4:25 UT до 5:05 UT на сонячному диску. Рис. 1 ілюструє ділянки виверження на фіксованих різницевих зображеннях о 4:25 UT – 5:05 UT відносно зображення о 4:15 UT, що йому передує в полі зору STEREO А (рис. 1, а) і STEREO В (рис. 1, б).

Зображення EUV хвилі о 4:25 UT (рис. 1, а, б) та о 4:35 UT (рис. 1, в, г) істотно відрізняються, оскільки кожен із супутників STEREO А і В бачить різні грані хвилі та різні ділянки затемнення (димінгів). Із супутника А видно зовнішню частину західного фронту хвилі, внутрішню частину східного фронту хвилі, а також східну частину димінга. Інша частина димінга, що міститься між еруптивним центром і східним фронтом хвилі, залишається невидимою через високий східний гребінь хвилі.

Із супутника В видно зовнішню частину східного фронту хвилі, внутрішню частину західного фронту хвилі і західну частину диммінга. Високий гребінь західної частини фронту хвилі маскує західну частину диммінга. Найімовірніше права (ліва) межа зовнішньої частини східного (західного) фронту хвилі, якщо дивитися із STEREO В (STEREO А), є проекцією високого гребеня східного (західного) фронту хвилі, що більш чітко видно із STEREO А (STEREO В).

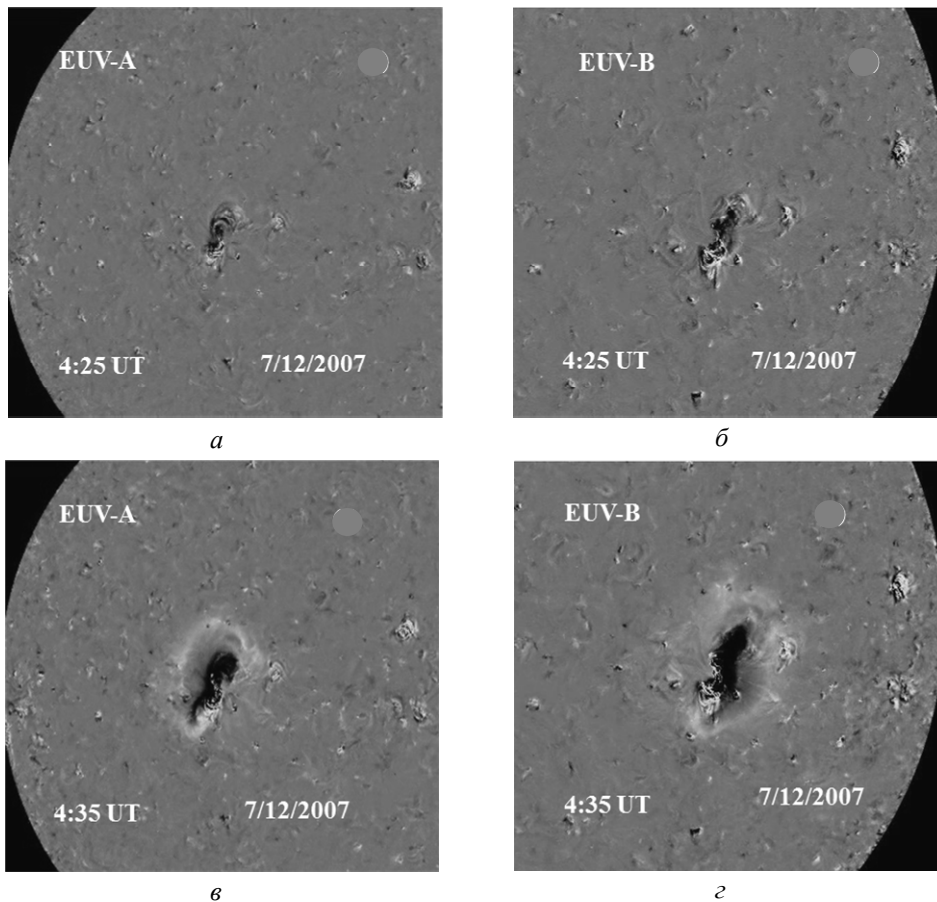


Рис. 1. Зображення з космічних апаратів STEREO А і STEREO В

ВИЗНАЧЕННЯ ВИСОТИ КОРОНАЛЬНОЇ ХВИЛІ

Використання епіполярної геометрії для визначення структури хвилі

Спостереження сонячного диска з різних кутів дає змогу оцінити висоту фронту від поверхні на ранній стадії явища, коли висота хвилі досягає максимальних значень, і зображення з обох космічних апаратів STEREO істотно відрізняються: різні грані хвилі, різні ділянки диммінгів (рис. 1, а, г).

Схематичне зображення космічних апаратів А і В відносно Сонця та EUV хвилі показано на рис. 2. Східна частина затемнення (диммінга) і внутрішня частина фронту східної хвилі спостерігаються з точки А. Однак ця ділянка невидима з точки В. Проте найвища точка гребеня (як, наприклад, точка Е) є доступною для спостереження з обох космічних апаратів.

Пряма, що сполучає точки B і E , перетинається зі сферою в точці D , а продовження прямої AE перетинається зі сферою в точці C . Точка C є проекцією точки E на сферу вздовж лінії AE , а точка D — проекцією точки E на сферу вздовж прямої BE . Для космічного апарата B пряма BE стає точкою, оскільки вона збігається з лінією видимості для STEREO B. Однак зі STEREO A видно частину цієї прямої як епіполярну лінію на своїй площині зображення.

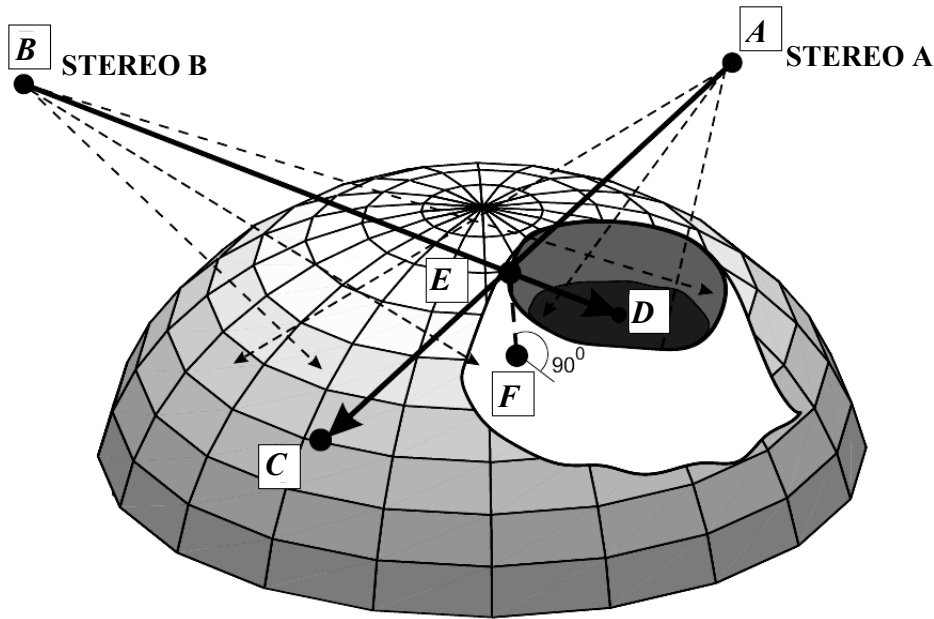


Рис. 2. Схематичне зображення космічних апаратів A і B відносно Сонця та EUV хвилі

Аналогічно пряма AE перетворюється в точку, якщо дивитись із STEREO A, і являє собою епіполярну лінію для STEREO B. Тому точки E , A і B утворюють епіполярну площину. Висота хвилі визначається довжиною фрагмента прямої EF , де F — ортогональна проекція точки E на поверхню (точка перетину зі сферою відрізка, що з'єднує точку E із центром сфери). Відстань між точками C і D і відстань між еруптивним центром та гребнем хвилі збільшуються зі зростанням відстані від точки E до поверхні. Якщо точка E міститься на поверхні, то точки C і D збігаються. Якщо точка E розміщується вище від поверхні, то точка C переміщується вліво відносно точки D .

Якщо точки D і C обрані правильно, то прямі BD і AC у просторі перетинаються точно в точці E . Помилка у виборі прямих BD і AD може призвести до похибки у визначенні координат точок D і C . У такому випадку прямі BD і AC не будуть перетинатися в просторі.

О 4:25 UT та 4:35 UT високий східний гребінь хвилі (рис. 1, *a*, із STEREO A) та західний гребінь (рис. 1, *б*, із STEREO B) істотно відрізняються від внутрішньої частини фронту хвилі за кольором, яскравістю і текстурою. Межа гребеня хвилі характеризується різким стрибком яскравості та неоднорідністю текстури. Яскраві краї вздовж цієї межі

належать до гребеня хвилі. У такому випадку можна реалізувати реконструкцію лише тоді, якщо ці краї можуть бути ідентифіковані за зображеннями. Проблема відповідності полягає у правильному визначенні цих точок за двома стереозображеннями.

Епіполярна лінія — це лінія перетину епіполярної площини, що визначається двома центрами спостереження і точкою об'єкта спостереження, та площини зображення. Тобто проекція епіполярної площини на зображення, отримані з центрів спостереження, утворює епіполярну лінію.

Щоб відновити просторову структуру EUV хвилі, спочатку вибираємо за допомогою курсору точку на гребені хвилі на одному зображенні із STEREO B, як показано хрестиком на рис. 3, б, і в такий спосіб визначаємо координати точки D . Проводимо епіполярну лінію на зображенні від STEREO A як відрізок прямої BD (лінія на рис. 3, а). Далі знаходимо точку перетину епіполярної лінії і гребеня хвилі (хрестик на рис. 3, а), тобто координати точки перетину прямої AE зі сферою. Аналогічно визначаємо точку D для супутника STEREO B.

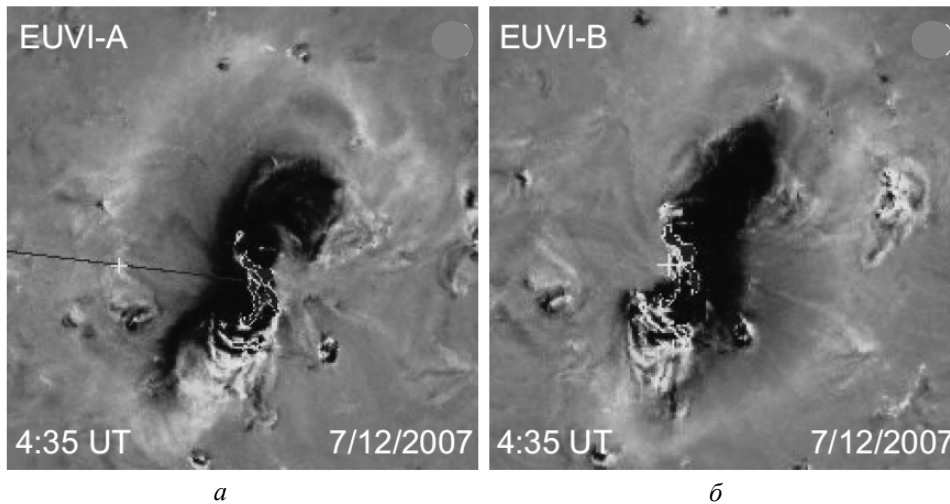


Рис. 3. Знаходження точки перетину епіполярної лінії і гребеня хвилі

ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВИМІРНИХ КООРДИНАТ ТОЧОК ЗА ЗОБРАЖЕННЯМИ

Супутники STEREO спостерігають за сонячним диском з різних точок однієї орбіти, формують зображення відносно своєї системи координат. Отримані координати точок належать до геліоцентричних систем координат відповідних супутників (рис. 4), у яких початок координат відповідає центру Сонця, вісь X напрямлена на центр маси супутника, піввісь $+Z$ напрямлена від Землі, на площині $X-Z$ містяться супутник, Сонце і Земля.

Оскільки осі супутників STEREO A і STEREO B різнонапрямлені, то для подальшого оброблення даних необхідно перетворити координати точок з геліоцентричних систем координат супутників у спільну систему координат; як таку використаємо геліоцентричну земну екваторіальну систему (Helio-centric Earth equatorial — HEEQ).

Система координат НЕЕQ або Стоніхерстська геліографічна система координат (рис. 5) утворюється перетином сонячного екватора і центрального меридіана з боку Землі. Отже, система координат зафіксована відносно Землі у той час, як Сонце обертається. Кути задаються у градусах, які збільшуються до північного полюса і західного лімба. Відтань r — це фізична відстань у метрах або відстань відносно сонячного фотосферичного діаметра $R = 6,96 \cdot 10^8$ м.

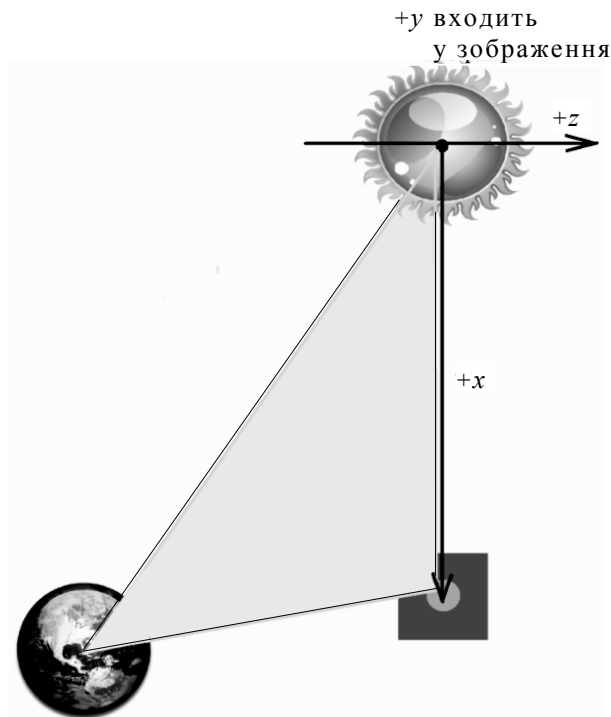


Рис. 4. Геліоцентрична система координат супутника STEREO

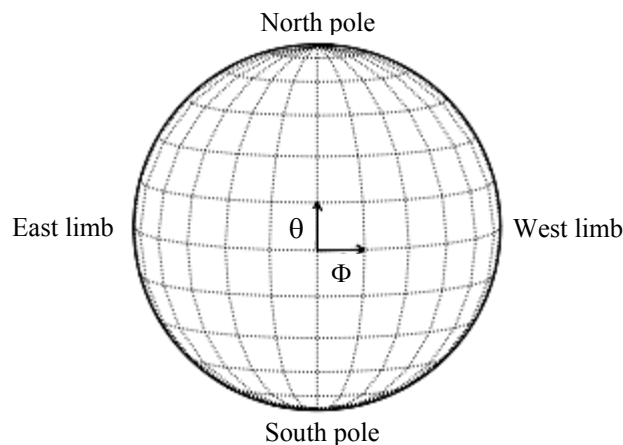


Рис. 5. Геліоцентрична земна екваторіальна система координат

Запишемо взаємозв'язок між координатами (r, θ, Φ) і $(X_{\text{HEEQ}}, Y_{\text{HEEQ}}, Z_{\text{HEEQ}})$:

$$r = \sqrt{X_{\text{HEEQ}}^2 + Y_{\text{HEEQ}}^2 + Z_{\text{HEEQ}}^2},$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{Z_{\text{HEEQ}}}{\sqrt{X_{\text{HEEQ}}^2 + Y_{\text{HEEQ}}^2}} \right)$$

$$\Phi = \arg (X_{\text{HEEQ}}, Y_{\text{HEEQ}}),$$

$$X_{\text{HEEQ}} = r \cos \theta \cos \Phi,$$

$$Y_{\text{HEEQ}} = r \cos \theta \sin \Phi,$$

$$Z_{\text{HEEQ}} = r \sin \theta \sin \Phi.$$

У системі HEEQ вісь Z паралельна сонячній осі обертання і напрямлена в бік північного полюса Сонця, а вісь X утворюється перетином сонячного екватора та сонячного центрального меридіана з боку Землі.

Спочатку знайдемо координати точки A в геліоцентричній системі координат супутника STEREO A з віссю Ox , що проходить уздовж променя OA .

Декартові координати точки A в системі супутника A матимуть такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} X_{A\text{STA}} \\ Y_{A\text{STA}} \\ Z_{A\text{STA}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,967A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де AU — астрономічна одиниця, що дорівнює 149 597 870 700 м; 0,967 AU — геліографічна відстань від супутника A станом на 7 грудня 2009 р.

Декартові координати точки B у системі супутника B такі:

$$\begin{pmatrix} X_{B\text{STA}} \\ Y_{B\text{STA}} \\ Z_{B\text{STA}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,03A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де 1,03 AU — геліографічна відстань від супутника B станом на 7 грудня 2009 р.

Переведемо координати точок A і B у систему HEEQ. Виконаємо процедуру перетворення для точки A .

На першому кроці повернемо систему координат навколо осі Oy_a на кут dT_a , що відповідає широті точки A , до суміщення осі $x'_{A\text{STA}}$ з екваторіальною площиною:

$$x'_{A\text{STA}} = x_{A\text{STA}} \cos dT_a,$$

$$z'_{A\text{STA}} = z_{A\text{STA}} \sin dT_a.$$

На другому кроці здійснимо поворот навколо осі Oz_E на кут dF_a , що відповідає довготі точки A :

$$x_{A_{\text{HEEQ}}} = x_{A_{\text{STA}}} \cos dT_a \sin dF_a ,$$

$$y_{A_{\text{HEEQ}}} = x_{A_{\text{STA}}} \cos dT_a \cos dF_a ,$$

$$z_{A_{\text{HEEQ}}} = x_{A_{\text{STA}}} \sin dT_a .$$

Для точки B отримуємо такий результат:

$$x_{B_{\text{HEEQ}}} = x_{B_{\text{STB}}} \cos dT_b \sin dF_b ,$$

$$y_{B_{\text{HEEQ}}} = x_{B_{\text{STB}}} \cos dT_b \cos dF_b ,$$

$$z_{B_{\text{HEEQ}}} = x_{B_{\text{STB}}} \sin dT_b .$$

Нехай $(x_{C_{\text{STA}}}, y_{C_{\text{STA}}}, z_{C_{\text{STA}}})$ — декартові координати точки C у системі супутника A ; $F_c > 0$, $\theta_c < 0$ — довгота і широта точки C . Знайдемо координати точки в системі HEEQ.

Спочатку здійснимо поворот навколо осі Oy_a на кут θ_c :

$$x'_{C_{\text{STA}}} = x_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c - z_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c ,$$

$$z_{C_{\text{HEEQ}}} = x_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c + z_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c ,$$

$$y'_{C_{\text{STA}}} = y_{C_{\text{STA}}} ,$$

потім навколо осі Oz_E на кут F_c , отримаємо

$$x_{C_{\text{HEEQ}}} = x'_{C_{\text{STA}}} \cos F_c - y'_{C_{\text{STA}}} \sin F_c =$$

$$= (x_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c - z_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c) \cos F_c - y_{C_{\text{STA}}} \sin F_c ,$$

$$y_{C_{\text{HEEQ}}} = x'_{C_{\text{STA}}} \sin F_c + y'_{C_{\text{STA}}} \cos F_c =$$

$$= (x_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c - z_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c) \sin F_c + y_{C_{\text{STA}}} \cos F_c .$$

У результаті маємо шукані координати точки C у системі HEEQ:

$$x_{C_{\text{HEEQ}}} = x_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c \cos F_c - y_{C_{\text{STA}}} \sin F_c - z_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c \cos F_c ,$$

$$y_{C_{\text{HEEQ}}} = x_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c \sin F_c + y_{C_{\text{STA}}} \cos F_c - z_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c \sin F_c ,$$

$$z_{C_{\text{HEEQ}}} = x_{C_{\text{STA}}} \sin \theta_c + z_{C_{\text{STA}}} \cos \theta_c .$$

Аналогічно знаходимо координати точки D у системі HEEQ за умови $F_d < 0$, $\theta_d > 0$:

$$x_{D_{\text{HEEQ}}} = x_{D_{\text{STA}}} \cos \theta_d \cos F_d - y_{D_{\text{STA}}} \sin F_d - z_{D_{\text{STA}}} \sin \theta_d \cos F_d ,$$

$$y_{D_{\text{HEEQ}}} = x_{D_{\text{STA}}} \cos \theta_d \sin F_d + y_{D_{\text{STA}}} \cos F_d - z_{D_{\text{STA}}} \sin \theta_d \sin F_d ,$$

$$z_{D_{\text{HEEQ}}} = x_{D_{\text{STA}}} \sin \theta_d + z_{D_{\text{STA}}} \cos \theta_d.$$

Знаходимо точку E як точку перетину двох прямих AC і BD . Висоту хвилі (довжина відрізка EF) визначаємо як різницю відстаней від точки E до центра Сонця і його радіуса.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Вибір точки перетину епіполярної лінії з гребенем хвилі є обгрунтованим, але не унікальним, оскільки гребінь хвилі має деяку ширину. Похибка візуального вибору цієї точки залежить від ширини гребеня. Вибір точки перетину зовнішньої (внутрішньої) межі гребеня хвилі з епіполярною лінією дозволяє визначити верхню (нижню) межу оцінки висоти хвилі. Висота точки, вказаної на рис. 3, становить 98879 км. Верхня і нижня межі дорівнюють 103 400 км і 94 364 км відповідно. Таким чином, у цьому випадку похибка при визначенні висоти не перевищує 5%.

Визначаючи точку перетину гребеня хвилі з епіполярною лінією, графічно знаходимо розв'язок системи двох рівнянь, одне з яких характеризує межу гребеня хвилі, а друге описує епіполярну лінію. Як показано на рис. 3, a , епіполярна лінія і межа гребеня хвилі взаємно перпендикулярні. Це забезпечує хорошу обумовленість системи, розв'язком якої є координати точки (відміченої жовтим хрестиком) на зображення зі STEREO B (рис. 3, b), і, отже, мінімальний вплив похибок на розв'язок. Якщо кут між цими лініями прямує до нуля, то система стає некоректною і вироджується, якщо кут дорівнює нулю. Навіть незначні похибки можуть призвести до хибного розв'язку. Отже, не варто очікувати, що буде знайдено надійний розв'язок для північних і південних точок фронту хвилі.

Тому визначаємо множину точок C вздовж західної і східної ділянок гребеня хвилі, якщо дивитися з космічного апарата A , і відповідні точки D , якщо дивитися з космічного апарата B у двох східних і західних секторах, у яких кут між епіполярною лінією і гребенем хвилі близький до прямого кута. Після вибору відповідних точок C , визначених із зображень STEREO A і точок D , визначених із зображень STEREO B, розрахуємо просторові координати і висоту. Для всіх вибраних точок визначаємо також відстань від точки C і точки D до еруптивного центра та відстань від ортогональних проєкцій F до еруптивного центра. Ці характеристики наведено в табл. 1 і 2.

Таблиця 1. Характеристики обраних точок E на гребені хвилі о 4:25 UT

Східний фронт хвилі				Західний фронт хвилі			
Точки	Висота E-F	Відстань C-F	EE1	Точки	Висота E-F	Відстань D-F	EE1
1	13745	4327	330	5	41548	23315	136
2	18972	5997	1266	6	38757	21834	457
3	21019	6507	234	7	31327	17727	545
4	18115	5601	734	8	39477	22025	1093
–	–	–	–	9	29617	16443	657
–	–	–	–	10	32458	17972	1152
СЗ	17963	5608	641	СЗ	35530	19886	673
СКП	3065	931	470	СКП	4986	2839	389

Примітка: СКП — середньоквадратична похибка

Таблиця 2. Характеристики точок E на гребені хвилі о 4:35 UT

Східний фронт хвилі				Західний фронт хвилі			
Точки	Висота E-F	Відстань C-F	EE1	Точки	Висота E-F	Відстань D-F	EE1
1	98882	36361	0	12	122810	74893	777
2	96218	35363	711	13	116658	71198	1007
3	100537	37083	1	14	120944	74753	811
4	98484	36336	814	15	114921	71074	825
5	99806	36752	315	16	113891	70651	110
6	89931	33407	906	17	120290	74576	400
7	103436	38974	942	18	110790	68236	40
8	105461	38633	942	19	112226	68898	36
9*	84118	30558	902	20	111174	67334	1493
10*	83904	30630	836	21	94566	55464	867
11*	62501	22639	944	22*	86673	49685	832
–	–	–	–	23*	69782	41185	965
C3	93025	34249	665	C3	107894	65662	680
СКП	12424	4776	375	СКП	16031	10915	445

*Точки, що належать фрагменту фронту хвилі, який поширюється в бік малих активних ділянок.

Як видно з табл. 1 і 2, EUV хвиля виникає з початковою висотою понад 18–36 Мм, висота фронту протягом інтервалу часу 4:25–4:35 UT різко збільшується до 93–109 Мм. Висота точок, що належать фрагменту фронту хвилі, який поширюється в напрямку малих активних ділянок, досягає лише 63–87 Мм о 4:35 UT, у той час, як висота ділянок, що простягаються по спокійному Сонці, зростає до 90–123 Мм над поверхнею (табл. 1, 2). Можна зробити висновок, що висхідний рух хвилі сповільнюється в результаті взаємодії з іншими малими активними ділянками.

О 4:25 UT висота західного гребеня хвилі становила 36 Мм і збільшилася до 109 Мм над поверхнею о 4:35 UT, а о 4:25 UT східний гребінь хвилі був досить низько (18 Мм над поверхнею). Однак він поширюється над поверхнею протягом інтервалу 4:25–4:35 UT з більшою швидкістю, що близька до швидкості західного гребеня хвилі, визначеної раніше. Висота східного гребеня хвилі збільшилася на 75 Мм (з 18 до 93 Мм) протягом інтервалу 4:25–4:35 UT і стала вдвічі меншою за його дальність поширення по диску Сонця. Тому стає очевидним, що висхідний рух гребеня хвилі на ранній стадії набагато інтенсивніший, ніж його поширення по диску Сонця.

ВИСНОВКИ

Розроблено метод відновлення просторової структури EUV хвилі, що супроводжує корональний викид маси на Сонці. Відповідно до стереоскопічних спостережень Сонця в інтервалі часу 4:25–5:05 UT 7 грудня 2007 р. двома космічними апаратами STEREO Ahead і STEREO Behind, що дають уявлення про EUV хвилю з різних кутів зору, визначено висоту хвилі на ранній стадії розвитку події.

Висоту піка EUV хвилі, коли два космічні апарати бачили різні аспекти хвилі і різні ділянки затемнення, визначено з урахуванням того, що внутрішня частина хвилі, яку видно з одного космічного корабля, закривається високим гребенем хвилі для другого космічного апарата. Ідентифікацію та відповідність між точками гребеня хвилі на обох зображеннях встановлено з використанням епіполярної геометрії. Показано, що існують сегменти фронту хвилі, у яких проблема відповідності стає некоректною і вироджується. Ідентифікація цих сегментів з обох зображень призводить до отримання неправильних оцінок. Тому було встановлено відповідність тільки між точками на обох зображеннях, у яких ця проблема є добре обумовленою і похибка визначення висоти не перевищує 5 %.

Під час дослідження просторової структури EUV хвилі отримано такі результати:

- висота EUV хвилі на ранніх етапах розвитку KBM становить від 18–36 Мм о 4:25 UT до 60–120 Мм о 4:35 UT;
- висхідний рух хвилі сповільнюється унаслідок взаємодії з іншими малими активними ділянками;
- на ранній стадії висхідний рух гребеня хвилі набагато інтенсивніший, ніж його поширення по диску Сонця.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Inhester B.* Stereoscopy basics for the STEREO mission / B. Inhester // ArXiv Astrophysics e-prints. — 2006.
2. *Ma S.* A New View of Coronal Waves from STEREO / S. Ma, M.J. Wills-Davey, J. Lin et al. // The Astrophysical Journal. — 2009. — № 707. — P. 503–509.
3. *Veronig A.M.* First Observations of a Dome-shaped Large-scale Coronal Extreme-ultraviolet Wave / A.M. Veronig, N. Muhr, I.W. Kienreich et al. // The Astrophysical Journal. — 2010. — № 716. — P. 57–62.
4. *Podladchikova O.* Automated Detection of EIT-waves and Dimmings / O. Podladchikova, D. Berghmans // Solar Physics. — 2005. — № 228. — P. 265–284.
5. *Kienreich I.W.* STEREO Quadrature Observations of the Three-Dimensional Structure and Driver of a Global Coronal Wave / I.W. Kienreich, M. Temmer, A.M. Veronig // The Astrophysical Journal. — 2009. — № 703. — P. 118–122.
6. *Patsourakos S.* Extreme Ultraviolet Waves are Waves: First Quadrature Observations of an Extreme Ultraviolet Wave from STEREO / S. Patsourakos, A. Vourlidas // The Astrophysical Journal. — 2009. — № 700. — P. 182–186.
7. *Черток И.М.* Крупномасштабные канализированные димминги, вызываемые корональными выбросами массы на солнце / И.М. Черток, В.В. Гречнев // Астрономический журнал. — 2003. — № 80. — С. 162–174.

Надійшла 06.10.2015

ВИЯВЛЕННЯ ТА ОБРОБЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У ФОРМІ НЕПОВНИХ ДАНИХ МЕТОДАМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Н.В. КУЗНЕЦОВА

Розглянуто методи оброблення пропущених даних і запропоновано їх класифікацію з урахуванням видів вхідних даних, типів та форматів даних, причин пропусків, зумовлених проявом впливу невизначеностей навколишнього світу і об'єкта моделювання. Досліджено спільні ознаки та відмінності існуючих методів оброблення, визначено особливості їх застосування для дозаповнення пропущених даних залежно від характеру невизначеностей. Показано, що традиційний підхід до заповнення пропусків середнім значенням не дозволяє отримати достовірні прогнози у багатьох випадках через зміну характеру вибірки. Запропоновано використання методів інтелектуального аналізу даних для оброблення пропущених значень та наведено приклад заповнення пропусків даних методами регресійного аналізу, зокрема за допомогою оцінок прогнозів.

ВСТУП

Невизначеності навколишнього світу та об'єктів, що у ньому функціонують, безпосередньо або опосередковано впливають на діяльність людини, потребують урахування під час прогнозування розвитку множини супутніх процесів. Очікувані результати від застосування тих чи інших засобів можуть бути незадовільними або зовсім непередбачуваними внаслідок дії випадкових зовнішніх факторів. Коли ж зовнішні фактори строго визначені або хоча б відомі, то невизначеність природи та обмежень може бути врахована і, відповідно, можна запропонувати методи їх оброблення. Так, у задачах системного аналізу [1, 2] у загальному випадку розрізняють три основні види невизначеностей: невизначеність цілей; ситуаційну і природну невизначеність (невизначеність знань про можливі ситуації у процесі функціонування складних систем); інформаційну невизначеність (невизначеність поведінки навколишнього середовища та дій реального партнера чи супротивника).

Розв'язування задачі розкриття концептуальної невизначеності щодо системного аналізу потребує розкриття множини різномірних невизначеностей на підставі єдиних принципів, прийомів і критеріїв [3]. На практиці розв'язуються задачі дослідження невизначеності цілей розроблення і перспектив конкурентоспроможності виробу, аналізуються невизначеність динаміки ринків попиту та пропозиції і невизначеність активної протидії конкурентів, невизначеність динаміки розроблення, виробництва, збуту та експлуатації певного виробу тощо.

Одним з проявів інформаційної невизначеності є невизначеність, зумовлена пропусками даних. Об'єктивні характеристики певних процесів можуть бути змінені або навіть спотворені внаслідок втрати частини даних під час

їх отримання, передавання чи зберігання. Постає потреба у відновленні таких пропущених даних і, що важливо, у підбиранні тих алгоритмів, за якими вони будуть відновлюватись, оскільки неправильне або недостатньо достовірне відновлення може завдати більше шкоди, ніж самі пропуски даних.

Роботу присвячено аналізу інформаційної невизначеності у формі пропусків статистичних даних та методів заповнення наявних пропусків з метою підвищення адекватності математичних моделей та оцінок прогнозів, які обчислюються за цими моделями.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Мета дослідження — аналіз та класифікація методів оброблення пропусків даних для узгодження даних різних типів та форматів, зумовлених проявом впливу невизначеностей навколишнього світу й об'єкта моделювання; розроблення рекомендацій для розроблення коректного підходу до оброблення неповних даних, які дадуть змогу підвищити прогнозну якість моделей, побудованих на відновлених за цією методикою пропущених даних. Зокрема, це завдання є важливим для оброблення вибірок невеликих розмірів, коли некоректне оцінювання пропущених змінних є вкрай небажаним і може спричинити похибки подальшого прогнозування поведінки системи і побудови прогнозних моделей. У роботі будуть проаналізовані спільні ознаки та відмінності існуючих методів та особливості алгоритмічних засобів оброблення пропущених значень.

НЕПОВНОТА ДАНИХ ЯК РЕАЛІЗАЦІЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Неповнота даних зумовлюється такими причинами: пропусками, неуважністю під час уведення інформації; браком інформації з об'єктивних причин; незнанням; некомпетентними відповідями на поставлені запитання, зокрема, через зумисне приховування інформації [4]. Залежно від причини пропуски можуть істотно впливати на результати та спричиняти значні збитки організації, яка вчасно не отримала необхідну інформацію.

Невизначеності насправді трапляються у повсякденному житті. Потреба у моделюванні та прогнозуванні за неповними даними виникає у різних сферах: фінансах, транспорті, виробництві, сільському господарстві, логістиці, фізиці, соціології тощо.

Поглиблене вивчення процесів за допомогою математичних моделей дозволяє дослідити кількісні зв'язки між вхідними та вихідними змінними, а також фактори, які впливають на вихідні змінні при варіації вхідних у широкому діапазоні, і розглянути поведінку процесів на будь-яких часових інтервалах у прийнятному масштабі часу. Математична модель, що будується для цієї мети, може бути надскладною і трудомісткою, оскільки вона має враховувати тонкощі взаємодії кількісних і якісних змінних із можливим урахуванням реального часу, тобто з використанням імітаційного моделювання. За допомогою математичних моделей можна виявити ефекти і явища, які недоступні безпосереднім спостереженням за допомогою приладів. Крім цього, під час проектування нових систем у різних галузях можна швидко змінювати варіанти реалізації системи завдяки можливості її швидкого

дослідження на моделі, виявити вплив початкових умов та обмежень на ключові змінні.

Прогнозування значень змінних виконується, як правило, на основі набагато простіших моделей ніж поглиблене вивчення процесів. Таке спрощення моделі також може внести додаткову інформаційну невизначеність.

Поняття структури моделі охоплює такі параметри: порядок, вимірність моделі, наявність нелінійностей і їх характер, час запізнення (для часових рядів), тип збурень тощо.

Вибір структури моделі, що адекватна процесу, є непростою задачею, що розв'язується в інтерактивному режимі. Спочатку структуру моделі оцінюють наближено на підставі дослідження закономірностей перебігу процесу, аналізу кореляційних функцій, візуального аналізу даних. При цьому вибирають декілька найбільш імовірних структур (кандидатів). Потім обчислюють оцінки параметрів моделей-кандидатів і вибирають оптимальну з них, використовуючи відповідні статистичні характеристики якості моделей.

Якщо жодна з моделей-кандидатів не може вважатися адекватною для конкретного застосування, то необхідно досліджувати на інформативність експериментальні дані, які можуть бути недостатньо інформативними для оцінювання моделі. У такому випадку потрібно буде повторно чи додатково збирати експериментальні дані (якщо це взагалі можливо) і коригувати структуру моделі.

Наприклад, розглянемо задачу визначення місця розташування транспортних засобів для контролю комунального транспорту системою EasyWay у разі неповних даних від GPS і маршруту складної форми. Інформація про місце розташування необхідна для прогнозування часу прибуття транспорту на зупинку. Щоб його розрахувати, можна використати найпростішу структуру моделі, що враховує відстань S і швидкість руху транспорту v : $t = \frac{S}{v}$.

Така модель не враховує нерівномірність руху транспорту, наявність перешкод на шляху, особливості дорожнього покриття, погодні умови тощо. І навіть уточнена модель не може врахувати всі фактори, зокрема кількість пасажирів та час їх посадки на кожній зупинці. Прогнозований час можна показувати на сайтах, мобільних додатках та інформаційних табло на зупинках, що є важливим і зручним для пасажирів, зменшує час очікування і робить рух транспорту більш передбачуваним. У випадку, коли транспорт перебуває там, де сигнал GPS слабкий або його немає, постає питання прогнозування неповних даних (пропущених даних сигналу GPS) для уточнення місцеперебування та прогнозування орієнтовного часу. Тут може бути і невизначеність стану природи, зумовлена ситуаційною невизначеністю — можливим випаданням опадів, створенням складностей проїзду, аварійних ситуацій тощо. Для прогнозування неповних даних можуть застосовуватись різні методи і підходи залежно від причин появи таких невизначеностей, установлених існуючих і відомих закономірностей.

Поняття «розширена невизначеність» виникає під час оброблення результатів вимірювання у фізиці, метрології, географії, військовій справі. *Розширена невизначеність* (expanded uncertainty) — це величина, що визначає довірчий інтервал для результату вимірювання, у межах якого ймовірно міс-

титься більша частина розподілу значень, які обґрунтовано можуть бути приписані вимірюваній величині.

Таким чином, розширена невизначеність визначає межі *інтервалу невизначеності* для результату вимірювання y . Права межа цього інтервалу: $y + U$, а ліва: $y - U$. Величина розширеної невизначеності, а отже, і ширина цього інтервалу, залежать від обраного під час розрахунку рівня довіри p , який менший або дорівнює одиниці [5].

Значення рівня довіри повинно бути досить великим, щоб була висока впевненість у тому, що інтервал невизначеності містить істинне значення. Водночас із підвищенням p ширина інтервалу збільшується, що ускладнює його практичне використання для прийняття рішень за результатами вимірювань. Тому доводиться вибирати у певному розумінні «компромісне» значення рівня довіри. У більшості випадків значення p припускають рівним 0,95. Це означає, що інтервал невизначеності включатиме 95% усіх значень, які можуть бути результатом вимірювання, або з імовірністю 0,95 покриватиме істинне значення вимірюваної фізичної величини. Разом з тим під час особливо відповідальних вимірювань, які мають великий вплив на життя чи здоров'я людей, значення рівня довіри може досягати 0,99 і більше.

Інформаційна невизначеність часто виникає у задачах оброблення статистичних даних і пов'язана з недоотриманням, запізненням або втратою частини інформації з будь-яких причин. Це притаманно фінансовій, економічній і соціологічній галузях. Аналіз таких причин може дати додаткове розуміння суті пропусків і допомогти у виборі моделі їх заповнення.

ІСНУЮЧІ МЕТОДИ ЗАПОВНЕННЯ ПРОПУСКІВ ДАНИХ

Існує багато засобів заповнення пропусків уже після етапу збирання даних: заповнення середнім значенням, пропорційне розміщення спостережень з пропущеними даними за вже існуючими градаціями шкали, розрахунок можливого значення за допомогою регресійної моделі тощо.

Зрозуміло, що використання будь-яких засобів заповнення пропусків може змістити структуру вибірки, яка буде отримана на основі існуючих неповних даних, у бік структури неповних даних, що може спотворити реальний розподіл спостережень у вибірці і зменшити фактичну значущість отриманих результатів.

Обираючи конкретний алгоритм для заповнення пропусків, варто враховувати, що можливість його застосування істотно залежить від методу аналізу даних, який передбачається використати надалі.

Сьогодні існують алгоритми, які дають змогу обробляти пропуски необхідною інформацією, такі як метод Hot Deck, метод Барлета, алгоритми Resampling, Zet, Zetbraid, EM-оцінювання, регресійне моделювання та прогнозування значень [6–9]. Особливістю цих алгоритмів є заповнення пропусків значеннями, які підбираються самим алгоритмом.

Метод Hot Deck. Цей метод використовує підстановку замість пропущеного значення найближчого інформаційного об'єкта. Пропущені дані можна підбирати як з усієї сукупності повних спостережень, так і з деякої

підгрупи — кластера, до якого належить цільовий об'єкт. Для заповнення пропуску за обраною характеристикою цільового об'єкта використовується значення цієї характеристики в об'єкта, найближчого до цільового. Тип функції відстані для визначення спостереження, найближчого до цільового (з пропуском), вибирається виходячи з типу досліджуваних даних, уявлень про характер зв'язку між змінними і завдання конкретного дослідження.

Метод Барлета. Цей метод складається з двох етапів: підстановки замість пропуску початкових згенерованих значень на першому етапі; проведення на другому етапі коваріаційного аналізу цільової змінної і побудова дихотомічного індикатора повноти спостережень за цільовою змінною. Індикатор повноти спостережень завжди дорівнює 0, за винятком одного єдиного випадку: i -е значення — це цільова змінна і воно є пропущеним, тоді індикатор набуває значення 1 [8].

Алгоритм ZET. Суть цього алгоритму полягає у підборі кожного значення для заповнення пропуску не за всією сукупністю спостережень, а з деякої її частини, яка називається компонентною матрицею, що складається з компонентних рядків і стовпців. Компонентність деякого рядка являє собою величину, обернено пропорційну декартовій відстані за цільовим рядком (неповного спостереження з пропуском) у просторі, осями якого задані змінні — характеристики об'єктів [7, 9].

За даними компонентної матриці надалі будується функціональна залежність прогнозного значення від відповідного значення у компонентній матриці, на основі якої потім прогнозується значення пропуску.

Алгоритм ZetBraid. Основна відмінність цього методу від попереднього полягає у тому, що в цьому алгоритмі закладено механізм об'єктивного відбору розмірності компетентної матриці. При роботі алгоритму відбувається послідовний почерговий відбір компетентних рядків та стовпців і щоразу формується нова компетентна матриця. Потім за заданим критерієм визначається її ефективність при прогнозуванні пропусків [7].

Resampling. Це ітеративний метод, який передбачає зміну рядків з пропущеними даними випадково вибраними рядками з матриці повних спостережень, а далі будується регресійне рівняння для прогнозування пропущеного значення. Процедуре регресійного моделювання повторюють декілька разів, після чого значення отриманих регресійних коефіцієнтів усереднюють і отримують кінцеве значення, яке дає максимальну точність прогнозу пропущеного значення [8].

Множинна вставка. Метод розроблений у 1970-х рр. XX ст. Дональдом Рубінім [10]. Технологія множинної вставки пропусків передбачає підстановку одразу кількох значень замість кожного пропущеного. Значна розбіжність цих значень означає невизначеність моделі і не дозволяє зробити висновки про їх типи і причини появи. Дані, що містять набір заповнених пропусків, зберігаються в окремих масивах, кожен з яких потім аналізується як такий, що містить повні спостереження без пропусків.

Наразі цей метод вважається доволі перспективним і реалізований у більшості комерційних програмних додатків.

ЕМ-оцінювання [11]. Метод максимізації математичного сподівання (EM — expectation maximization) або ЕМ-оцінювання надає можливість не лише відтворювати пропущені значення з використанням двоетапного іте-

ративного алгоритму, але й оцінювати середнє значення, коваріаційні та кореляційні матриці для кількісних змінних. EM-алгоритм у загальному випадку являє собою ітераційну процедуру, призначену для розв'язання задач оптимізації деякого функціонала через аналітичний пошук екстремуму функції.

На E-кроці обчислюється очікуване значення (expectation) вектора прихованих змінних G за поточним наближенням вектора параметрів Θ . На M-кроці розв'язується задача максимізації правдоподібності і обчислюється наступне наближення вектора Θ за поточними значеннями векторів G і Θ .

Ідею реалізації EM-алгоритму можна подати так:

– обчислити початкове наближення вектора параметрів Θ ;

– повторювати:

$$G = ESTEP(\Theta),$$

$$\Theta = MSTEP(G, G);$$

– поки G і Θ не стабілізуються (настає збіжність до усталених значень).

У класичному варіанті алгоритму формально задачу максимізації очікування можна виразити таким чином: $Q^{m+1} = \arg \max_{\Theta} Q(\Theta; \Theta^m)$. Тут Θ

означає розраховане очікуване умовне значення пропущеної характеристики для певного спостереження.

Регресійне моделювання [12]. Пропущені значення за допомогою регресійних моделей відновлюються за два етапи.

1. На першому етапі за сукупністю повних спостережень будується регресійна модель і оцінюються коефіцієнти рівняння, де залежною змінною є цільова змінна — пропущене значення, яке необхідно відновити.

2. За отриманим на попередньому етапі рівнянням, у яке підставляються відомі значення незалежних змінних (предикторів), для кожного цільового об'єкта розраховується пропущене значення за залежною цільовою змінною. У випадку інтервальних та абсолютних змінних розраховується конкретне значення, а для порядкових і номінальних значень з деякою ймовірністю передбачається категорія, до якої має бути віднесений об'єкт.

Вибір типу регресійної моделі для розрахунку пропущених значень змінної визначається кількістю вимірювань цільової залежної змінної (значення якої необхідно відновити) і незалежних змінних, за якими передбачаються пропущені значення.

У праці [13] розглядаються можливості оцінювання пропусків даних за допомогою *байєсівського компонентного аналізу та локального методу найменших квадратів* і порівнюються можливості їх сукупного використання. Також показано, що спільне використання обох методів дає змогу отримати вищу якість прогнозів пропущених значень, але при цьому істотно збільшуються обчислювальні витрати.

Для оцінювання і відновлення пропущених значень надзвичайно важливою є оцінка втрат інформації через неповноту спостережень і якість оцінок пропущених значень залежно від типу цільової змінної та частки пропусків початкових даних.

Зрозуміло, що коректність і ефективність роботи цих алгоритмів визначаються підбиранням найбільш подібного значення до пропуску, а для цього необхідно враховувати причину пропуску даних. Сучасні комп'ютерні аналітичні системи, такі як SPSS, GeNIe, SAS Enterprise Miner, ґрунтуються на використанні логічних дерев для умовного обчислення значень та їх заміни на середні величини або медіани. Зокрема, для розроблення скорингових карт рекомендуються методи підстановки [14], що враховують інші характеристики даних. Однак присвоєння найбільш часто вживаних значень або середніх значень спричинить так звані «сплески», що спотворить реальну ситуацію з розподілом груп у вибірках і призведе до втрати надзвичайно важливої інформації. Тому пропонується виносити пропущені дані в окрему групу, замінюючи пропущені значення певним спеціальним значенням поза нормальними значеннями і включати їх в аналіз як окрему категорію.

Багато аналітиків мають переконання, що пропущені значення не потрібно взагалі включати в аналіз і вилучити їх цілком з початкової вибірки даних. Такий метод корисний, якщо аналітики не схильні накладати додаткові ризики того, що пропущені значення будуть відновлені некоректно і таким чином можуть збільшити ризик віднесення таких випадків до нормальної категорії. Однак цей метод нераціональний у випадку, коли обсяг навчальної вибірки надзвичайно малий і видалення таких даних є критичним, або коли необхідно побудувати скорингові моделі, що відображають реальні, а не «ідеальні» дані і містять пропущені значення. Такі дані необхідно додатково обробляти до прийняття рішення.

Загальну класифікацію методів заповнення пропусків, що використовуються в різних інструментальних засобах інтелектуального аналізу даних, показано на рисунку. Для детального аналізу обрано середовище SAS Enterprise Miner, у якому реалізовано різні методи заміни пропущених значень, а також передбачено відсутність обов'язкової заміни. У SAS Enterprise Miner окремо передбачено можливість вставки для вхідних вузлів та цільових змінних, а також є можливість такого заповнення не на всій вибірці даних, а спочатку на навчальній вибірці, і у випадку отримання задовільних результатів — поширити таку заміну і на перевірку вибірку. Розглянемо детальніше різні методи заповнення пропусків залежно від типу змінних (категоріальні або неперервні).

Категоріальні змінні

Якщо як пропущені спостереження обрати дані за категоріальною змінною, то можливі такі методи заміщення:

Count — заміна пропущеного значення для категоріальної змінної найчастішим значенням спостереження.

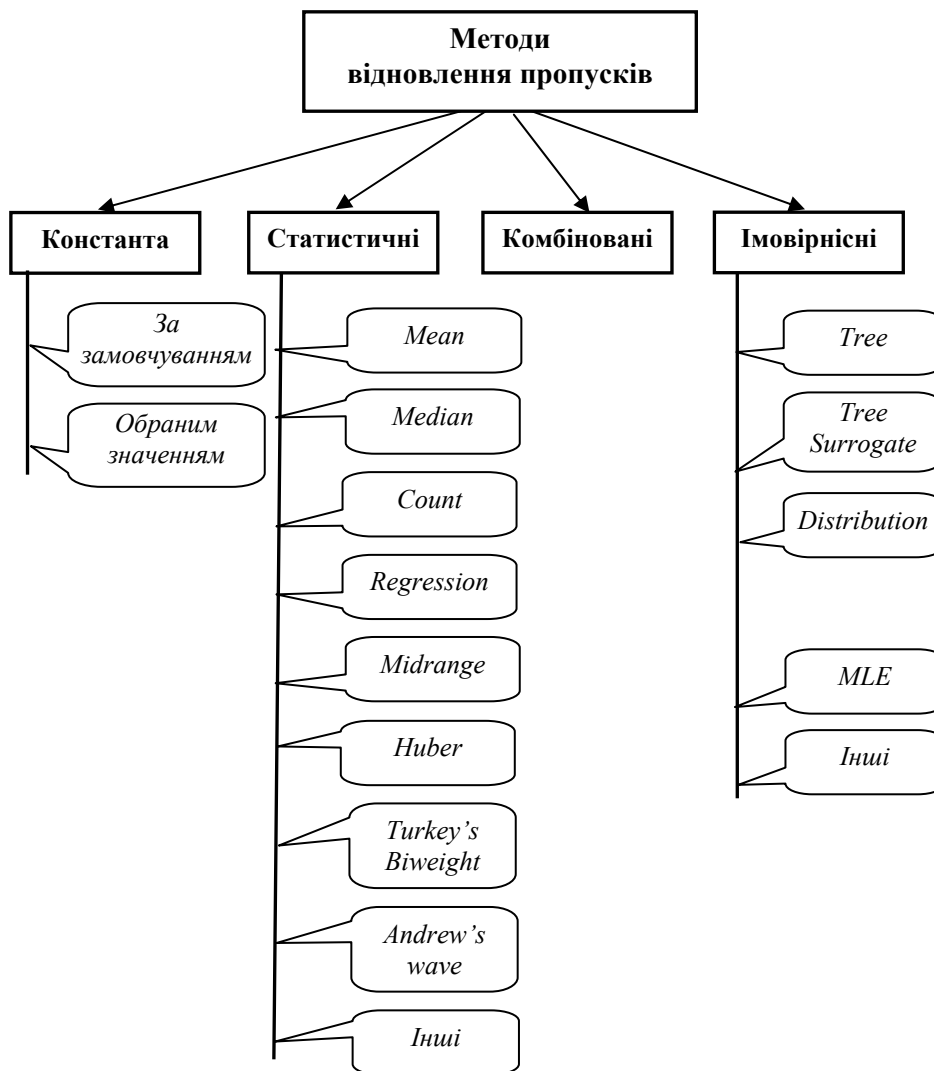
Default Constant Value — заміна введеним вручну значенням для категоріальної змінної.

Distribution — заміна значенням, розрахованим за ймовірнісним розподілом для наявних спостережень. Такий спосіб не спотворює розподіл вибірки.

Tree — заміна пропуску оціненим у результаті цільового аналізу значенням. Вхідні і відбраковані змінні використовуються як предиктори. Змінні, які важливі для моделі як цільові, не можуть бути використані для

заповнення. Оскільки відновлені значення для кожної змінної з пропусками ґрунтуються на інших вхідних змінних, то такий метод має бути точнішим.

Tree surrogate — використовується попередній метод дерева щеплення з наступною модифікацією правил щеплення. Правило заміни є зворотним до головного правила щеплення дерева. Коли правило щеплення діє на змінну, яка має пропуски, застосовується правило заміни. Якщо пропущені значення запобігають головному правилу виконати щеплення і всім правилам заміни спостережень, то головне правило призначає спостереження у гілці, що приведе до отримання відсутніх значень.



Класифікація методів заповнення пропущених даних

Неперервні (статистичні) змінні

Mean — заміна пропущених інтервальних значень середнім арифметичним. Це незміщена оцінка середнього популяції. *Mean* є найпоширенішою статисти-

стикою для заміни пропущених значень, якщо значення змінної мають приблизно симетричний розподіл (наприклад, дзвоноподібний нормальний розподіл). Цей метод використовують за замовчуванням для неперервних змінних з пропущеними значеннями.

Median – використовується певне середнє, установлене для заміни пропущеного інтервального значення 50-го перцентилу, яке є середнім значенням або середнім арифметичним двох середніх значень для множини чисел, розміщених у порядку зростання. Середнє і медіана однакові для симетричного розподілу. Медіана менш чутлива до екстремальних значень, ніж середнє або півсума крайніх значень. Таким чином, медіана підходить краще для заміни відсутніх значень для змінних, які мають спотворені розподіли. Медіана також використовується для порядкових даних.

Midrange — використовується параметр півсуми крайніх значень (середній діапазон) для заміни відсутніх неперервних значень змінної значенням суми максимального значення для змінної плюс мінімального значення для змінної, поділеної на два. *Midrange* є швидше відображенням тенденції; його легко розрахувати.

Методи *Distribution, Tree, Tree Surrogate* реалізуються аналогічно тому, як це виконується для категоріальних змінних.

Mid-minimum Spacing — використовується середній мінімальний інтервал, застосовується числова константа для визначення пропорції даних, що включаються в інтервал.

Huber — метод, у якому для заміни пропущеного значення використовується оцінка, описана нижче [15]. У разі, коли лінійна регресійна функція втрат, визначена як $l(r) = \sum_i r_i^2$, швидко зростає зі збільшенням значень залишків, тоді альтернативним є використанням абсолютного значення функції втрат замість квадрата залишків, тобто $l(r) = \sum_i |r_i|$.

Елегантним компромісом між цими двома функціями втрат стала запропонована Пітером Хубером у 1964 р. така функція [15]:

$$l(r) = \sum_i \rho(r_i), \text{ де } \rho(r_i) = \begin{cases} r_i^2, & \text{if } |r_i| \leq c, \\ c(2|r_i| - c), & \text{if } |r_i| > c. \end{cases}$$

Хубер вважав, що правильним вибором є значення $c = 1,345$, і показав, що асимптотично це 95%-й інтервал. Цей метод так само ефективний як і метод найменших квадратів, якщо реальний розподіл близький до нормального (і набагато ефективніший у багатьох інших випадках).

Tukey's Biweight — метод, у якому оцінка для функції втрат визначається за критерієм *Tukey's Biweight* (відомим також як *Tukey's bisquare*) [15, 16]:

$$\rho'(r_i) = \begin{cases} r_i \left(1 - \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 \right), & \text{if } |r_i| \leq c, \\ 0, & \text{if } |r_i| > c. \end{cases}$$

Для цієї функції втрат зазвичай використовується значення $c = 4,685$; воно забезпечує асимптотичну ефективність на рівні 95%, так само, як і лінійна регресія для нормального розподілу.

Andrew's wave – метод, згідно з яким оцінка визначається так:

$$w(r_i) = \begin{cases} \frac{c}{\pi r_i} \sin\left(\frac{\pi r_i}{c}\right), & \text{if } |r_i| \leq c, \\ 0, & \text{if } |r_i| > c. \end{cases}$$

За замовчуванням $c = 1,34\pi$.

Default Constant — пропуск замінюється визначеним уведеним символом.

ПРИКЛАД ЗАПОВНЕННЯ ПРОПУСКІВ ОЦІНКАМИ ПРОГНОЗІВ

Для заповнення невеликої кількості пропусків можна скористатись моделлю авторегресії першого порядку АР:

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k), \quad E[\varepsilon(k)] = 0. \quad (1)$$

Збільшимо незалежну змінну, час на одиницю і запишемо рівняння знову:

$$y(k+1) = a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1).$$

Якщо коефіцієнти a_0 , a_1 відомі, то можна знайти умовне математичне сподівання на основі відомої інформації до моменту k включно:

$$\begin{aligned} E_k[y(k+1)] &= E_k[y(k+1) | y(k), y(k-1), \dots, \varepsilon(k), \varepsilon(k-1), \dots)] = \\ &= a_0 + a_1 E_k[y(k)] = a_0 + a_1 y(k), \end{aligned}$$

оскільки $y(k)$ у момент k є відомою константою. За аналогією запишемо рівняння (1) для моменту $k+2$

$$y(k+2) = a_0 + a_1 y(k+1) + \varepsilon(k+2)$$

і знайдемо умовне математичне сподівання:

$$\begin{aligned} E_k[y(k+2)] &= a_0 + a_1 E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 E_k[a_0 + a_1 y(k)] = \\ &= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 y(k). \end{aligned}$$

Для наступного моменту часу маємо:

$$E_k[y(k+3)] = a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 y(k).$$

Таким чином, для загального випадку прогнозування на s кроків можна записати:

$$\hat{y}(k+s) = E_s[y(k+s)] = a_0 \left(\sum_{i=0}^{s-1} a_1^i \right) + a_1^s y(k) = a_0 \sum_{i=0}^{s-1} a_1^i + a_1^s y(k). \quad (2)$$

Рівняння (2) називають функцією прогнозування на довільну кількість кроків s . Прогноз являє собою збіжний процес, якщо $|a_1| < 1$, тобто

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_k[y(k+s)] = \frac{a_0}{1-a_1}, \quad |a_1| < 1, \quad (3)$$

де a_1 — знаменник геометричної прогресії. Вираз (3) свідчить про те, що для будь-якого стаціонарного процесу АР чи АРКС оцінка умовного прогнозу асимптотично при $s \rightarrow \infty$ збігається до безумовного середнього.

Виконаний порівняльний аналіз різних методів заповнення пропущених значень показав, що поняття «найкращого» методу для заміни пропущених є некоректним. Вибір методу може істотно залежати не лише від конкретної предметної галузі, у якій ці пропущені значення трапляються, а й від припущень аналітика щодо типу розподілу реальних (пропущених) даних. Найчастіше аналітики застосовують метод середнього для заміни пропущених значень, а це означає, що робиться припущення про належність даних до нормального розподілу (а це швидше виняток з правил). Заміна пропущених значень середнім, медіаною або іншою оцінкою є звичайно більш простим способом, однак це може істотно спотворити істинний розподіл вибірки. Тобто такі заміни можливі лише у випадку мінімального впливу на характер вибірки.

ВИСНОВКИ

У реальних задачах оброблення статистичних даних найбільшою складністю залишається необхідність класифікації невизначеностей різних типів і зумовлених ними пропусків, утрат і неточних значень. Для кожної предметної галузі, виходячи з особливостей даних, з якими доводиться працювати, час від часу фіксуються одноманітні помилки, похибки, пропуски, а тому через певний час можна вибрати ефективні алгоритми опрацювання таких невизначеностей та пов'язаних з ними пропущених значень, характерних саме для цієї галузі. Обрані методи можуть бути використані для оброблення даних в інших галузях і навіть бути високоефективними у задачах іншої специфіки. Основною метою роботи аналітиків є саме виявлення і напрацювання таких рекомендацій для конкретних сфер застосування, які можуть бути типовими для розв'язання різноманітних фінансово-економічних завдань, задач логістики, прогнозування продажів, маркетингових досліджень тощо.

Поетапне розв'язання задачі заповнення пропущених даних передбачає аналіз суті процесу, що описується певною послідовністю даних, підбір структури моделі заповнення пропусків, вибір адекватних методів інтелектуального аналізу даних для заповнення пропущених даних, реалізація цих методів сучасними інструментальними засобами.

Перспективою для подальших досліджень автори вважають виконання на початковому етапі ґрунтовного аналізу причин появи пропусків та екстремальних значень. Доцільно також застосовувати комбінації методів різних типів — імовірнісних, статистичних та інтелектуального аналізу даних з метою збереження особливостей вхідної вибірки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Згуровский М.З. Системный анализ: Проблемы. Методология. Приложения. / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова; НАН Украины. Ин-т приклад. систем. анализа. — К.: Наук. думка, 2005. — 743 с.
2. Згуровський М.З. Основи системного аналізу: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. — К.: Вид. група ВНУ, 2007. — 543 с.
3. Панкратова Н.Д. Рациональный компромисс в системной задаче концептуальной неопределенности / Н.Д. Панкратова // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 4. — С. 162–180.
4. Кузнецова Н.В. Практичні підходи до визначення та урахування невизначеностей, що формують фінансові ризики / Н.В. Кузнецова // Тр. Одес. політехн. ун-та. — Одесса, 2014. — Вып. 2(44). — С. 160–170.
5. Вікіпедія [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org>.
6. Зангиева И.К. Решение проблемы неполноты данных массовых опросов / Российская социология завтрашнего дня: сб. студ. работ / И.К. Зангиева. — М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2008. — Вып. 3. — С. 84–95.
7. Снитюк В.Е. Эволюционный метод восстановления пропусков в данных / В.Е. Снитюк // Интеллектуальный анализ информации. — К., 2006. — С. 262–271.
8. Злоба Е. Статистические методы восстановления пропущенных данных / Е. Злоба, И. Яцкив // Computer Modelling & New Technologies. — 2002. — 6, № 1. — P. 51–61.
9. Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение / Н.Г. Загоруйко. — М.: Сов. радио, 1972. — 216 с.
10. Rubin D.B. An Overview of Multiple Imputation / D.B. Rubin // Proc. Survey Research Methods Section of the American Statistical Association. — 1988. — P. 79–84.
11. Dempster A.P. Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm / A.P. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). — 1977. — 39, N 1. — P. 1–38.
12. Бідюк П.І. Моделі і методи прикладної статистики / П.І. Бідюк, Л.О. Коршевніюк, Н.В. Кузнецова. — К.: НУТУ «КПІ», 2014. — 722 с.
13. Shi F. Missing Value Estimation for Microarray Data by Bayesian Principal Component Analysis and Iterative Local Least Squares / F. Shi, D. Zhang, J. Chen, H.R. Karimi // Mathematical Problems in Engineering. Article ID 162938. — 2013. — P. 17.
14. Siddiqi N. Credit Risk Scorecards: Developing and Implementing Intelligent Credit Scoring / N. Siddiqi. — 2005. — 196 p.
15. Owen M. Tukey's Biweight Correlation and the Breakdown [Електронний ресурс] / М. Owen. — 2005. — Режим доступу: <http://pages.pomona.edu/~jsh04747/Student%20Theses/MaryOwen10.pdf>
16. Breheny P. Robust regression [Електронний ресурс] / P. Breheny. — Режим доступу: <http://web.as.uky.edu/statistics/users/pbreheny/764-F11/notes/12-1.pdf>.

Надійшла 18.06.2015

СЦЕНАРНИЙ ПІДХІД ТА МЕТОД БАЙЄСА ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ СИСТЕМНИХ АВАРІЙ НА ГІДРОВУЗЛАХ

К.Г. РОМАНЧУК, Д.В. СТЕФАНИШИН

У межах сценарного підходу до прогнозування техногенних аварій застосовано метод Байєса для оцінювання ризиків системних аварій на гідровузлах. Сформульовано означення і твердження щодо оцінювання ризиків техногенних аварій та здійснено загальну постановку задачі кількісної оцінки ризиків аварій на гідровузлах у межах сценарного підходу з використанням байєсівського перетворення ймовірностей аварійних подій. Показано, що сценарний підхід з використанням байєсівського перетворення ймовірностей дозволяє оцінити повний (сумарний) ризик системної аварії на гідровузлі, яка може відбутися з довільних, у тому числі і сумісних, аварійних подій з різними наслідками, за деякими модельними, несумісними сценаріями її виникнення й перебігу, що формують повну групу подій.

ВСТУП

Гідровузли — інженерні об'єкти, що мають у своєму складі гідротехнічні споруди різного типу і призначення (греблі, водосховища, водоскиди, гідроелектростанції, шлюзи та ін.), які поєднані територіально й функціонально, являють собою складні природно-технічні системи, аварії на яких можуть мати катастрофічні наслідки. У багатьох випадках потенційна небезпека для населення, яке проживає в зонах аварійних впливів гідровузлів, може бути не меншою, ніж для людей, котрі мешкають біля атомних чи хімічних виробництв, з якими спеціалісти і громадськість зазвичай пов'язують проблеми техногенної безпеки [1, 2].

Ураховуючи значний аварійний потенціал гідровузлів, проблемам їх безпечної експлуатації в усьому світі приділяють особливу увагу [3, 4]. Відповідні дослідження ведуться і в Україні [5, 6]. Більшість з цих досліджень, як у світі, так і в Україні, розвиваються в двох основних напрямках, які можна охарактеризувати як традиційний та ризик-орієнтований.

Традиційний напрям досліджень техногенної безпеки гідровузлів орієнтується на глибокий, системний аналіз природних і техногенних чинників аварійності гідроспоруд як технічних систем і об'єктів, виявлення строгих (логічних, функціональних) причинно-наслідкових зв'язків між різними процесами, явищами, подіями, що визначають надійність і безпеку гідроспоруд як у межах детерміністичного (динамічного) підходу, в тому числі і з використанням оригінальних методів індуктивного моделювання, математичної теорії катастроф тощо, так і в межах імовірнісного підходу з використанням методів і моделей стохастичної динаміки, математичної теорії надійності, логіко-імовірнісних методів аналізу надійності і безпеки структурно-складних систем, методів рандомізації детерміністичних моделей гідроспоруд, їх конструкцій та основ [1, 5, 7–14].

Класичні рішення традиційного напрямку досліджень техногенної безпеки складних технічних систем та об'єктів наведено в працях В.В. Болотіна [1]. Найбільше акцентовано ці підходи, у тому числі і щодо гідроспоруд різного типу та призначення, у працях О.І. Вайнберга, М.З. Згуровського, А.Г. Івахненка, Н.Д. Панкратової, А.В. Перельмутера, О.М. Трофимчука, Г.І. Черного, Г. Аугусті та А. Баратта, Х. Кумамото, Ц.Є. Мірцхулави, А.М. Половка, І.О. Рябініна, Е. Дж. Хенлі, С.Г. Шульмана та ін.

Ризик-орієнтований напрям досліджень у галузі техногенної безпеки, що набув поширення останнім часом, розвивається в межах як квазідетерміністичного підходу, так і ймовірнісного підходу з різною інтерпретацією аварійних подій: 1) як статистичних фактів; 2) як подій-припущень з використанням поняття суб'єктивної ймовірності з побудовою і дослідженням різних формальних і неформальних моделей ризику [2–4, 6, 15–17]. Цей напрям, зокрема стосовно напірних гідроспоруд, знайшов розвиток у працях О.Ф. Балацького, В.В. Бегуна, М.М. Биченка, А.Б. Качинського, Г.В. Лисиченка, у публікаціях [6; 18–20], а також Дж. Бехера, А. Бірка, С. Віка, Й.К. Врийлінга, Г. Кройцера, Д. Хартфорда та ін.

Традиційні підходи до аналізу й оцінювання техногенної безпеки дозволяють отримувати фундаментальні рішення, однак через брак інформації та неналежний рівень її достовірності їх досить складно реалізовувати на практиці. У ризик-орієнтованих підходах до аналізу й оцінювання техногенної безпеки враховується як часткова детермінованість явищ та процесів, що визначають стан об'єктів, так і фактори ризику, зумовлені невизначеністю причин і наслідків аварій. При цьому невизначеність інформації про поведінку гідроспоруд і стан навколишнього середовища не є перешкодою для моделювання безпеки і прийняття рішень щодо безпеки гідровузла, де власне ризик в його кількісному вираженні і використовується як кількісна міра надійності та безпеки гідровузла. Однак головною проблемою реалізації ризик-орієнтованого підходу залишається проблема кількісної оцінки ризику аварії на гідровузлі, а саме — проблема коректності цієї оцінки.

СЦЕНАРНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ АВАРІЙ НА ГІДРОВУЗЛАХ

Гідровузли, які складаються з гідроспоруд різного призначення, з різними конструкціями і основами, конструктивними елементами, протифільтраційними і дренажними пристроями, механічним устаткуванням та гідроенергетичним обладнанням, автоматичними засобами контролю, керування та регулювання, являють собою складні (синергетичні) системи, розвиток яких відбувається під впливом надзвичайно великої кількості різноманітних факторів — як зовнішніх (навколишнього середовища), так і внутрішніх (системних зв'язків) [2].

Як складні синергетичні системи гідровузли та окремі гідроспоруди у їх складі можуть поєднувати в собі велику кількість різнорідних структурно-функціональних системних одиниць, від працездатності і справності кожної з яких тією чи іншою мірою залежать надійність і безпека гідроспоруди та гідровузла в цілому. При цьому моделювання окремих гідроспоруд і гідровузлів як систем та аварій на них викликає значні труднощі, оскільки ці об'єкти не мають чітко вираженої мережевої структури і окремі структурні одиниці можуть допускати різні ступені формалізації задачі системно-

го моделювання і потребувати різних підходів до її розв'язання. Унікальність гідровузлів як природно-технічних систем, складність їх системної організації, синергізм, невизначеність, різноманітність факторів аварійності — усе це ускладнює моделювання і прогнозування аварій та кількісну оцінку ризику аварій на гідровузлах.

Практика показує, що аварії на гідровузлах мають системний характер і можуть виникати і розвиватися за різними сценаріями [6] навіть у випадках, коли вихідні причини аварій, тип і конструкція споруди, обладнання, вид основи тощо були схожими. Серед основних факторів, що можуть визначати складну поведінку різних об'єктів у складі гідровузлів як систем та умови для реалізації різних сценаріїв аварій на гідровузлах слід виокремити такі [2]:

1) багатофункціональність; гідровузли в цілому, гідроспоруди, їх конструкції, устаткування і обладнання та їх складові частини одночасно можуть виконувати кілька функцій, причому деякі з функцій є сталими, інші — виконуються у разі потреби у випадкові періоди часу;

2) мінливий характер навантажень на гідроспоруди та відповідно функціональних запитів до споруд, устаткування і обладнання, що можуть змінюватися від деяких мінімальних до максимальних розрахункових; при цьому з точки зору системної організації при максимальних розрахункових навантаженнях і функціональних запитах гідровузли та окремі гідроспоруди зазвичай являють собою функціонально не надмірні, не зарезервовані системи, а в цілому діапазон можливих навантажень і функціональних запитів на гідроспорудах є таким, що гідровузли і окремі гідроспоруди можуть мати значну надмірність.

Причинно-наслідкові відношення між різними подіями і станами, що призводили до аварій на гідровузлах, часто виявлялися надто складними, щоб їх розглядати як статистичні факти в сукупності подібних випадкових подій або явищ, які можна аналізувати в межах однієї моделі. І ретроспективний аналіз аварій, які вже відбувалися на гідровузлах, і прогнозування можливих аварій потребують аналізу індивідуалізованих сценаріїв їх виникнення і розвитку у формі певних логічних побудов та суб'єктивних припущень.

Сценарний підхід, у тому числі з використанням евристичних прийомів причинно-наслідкового аналізу, методів системно-структурного і абстрактно-логічного аналізу, дозволяє здійснити декомпозицію складної задачі системного моделювання [2, 6, 18, 19, 21–23]. У результаті сценарного моделювання неструктурована або «слабоструктурована» задача моделювання і прогнозування аварії на гідровузлі може бути зведена до кількох (за кількістю гіпотетичних сценаріїв) «більш структурованих» задач, що можуть описуватися простішими математичними моделями з меншою кількістю визначальних факторів та параметрів і т. ін.

У межах сценарного моделювання і прогнозування аварій на гідровузлах для оцінювання ймовірностей різних аварійних подій, зокрема ймовірнісних розрахунків стійкості та міцності гідроспоруд, їх конструкцій та основ, працездатності устаткування тощо, можуть використовуватися різні підходи, методи й моделі: статистичні методи; методи параметричної та системної теорій надійності; методи рандомізації традиційних детерміністичних моделей та розрахункових схем; логіко-ймовірнісні методи. Сценарний підхід дозволяє поєднати можливості різних методів для оцінювання ймовірностей аварійних подій залежно від наявних даних.

Мета роботи — презентація застосування методу Байєса та байєсівського перетворення ймовірностей аварійних подій у межах сценарного підходу до оцінювання ризиків системних аварій на гідровузлах, що, як буде показано, дозволяє здійснювати формалізоване узагальнення (синтез) ризику системної аварії з урахуванням різних можливих (модельних) сценаріїв її реалізації.

Об'єкт дослідження — сумарні (повні, узагальнені за різними наслідками) ризики системних аварій на гідровузлах. **Предметом дослідження** є методи оцінювання ризиків системних аварій на гідровузлах з урахуванням можливості різних наслідків аварії залежно від різних сценаріїв її реалізації.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ: ОЗНАЧЕННЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ

Означення 1. Сценарієм A_i системної аварії A назвемо деяку ідеалізовану аварійну подію-припущення, несумісну з іншими визначеними відповідним чином як k -х модельних сценаріїв системної аварії ідеалізованими аварійними подіями-припущеннями, що формують повну групу подій:

$$P(A_i) = P(A_i | A)P(A);$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = P(A), \sum_{i=1}^n P(A | A_i) = 1; (A | A_i) \wedge (A | A_k) = \emptyset; i \neq k; i, k = \overline{1, n},$$

$$P(A_i | A) = \frac{P(A | A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A | A_i)P(A_i)}, \quad (1)$$

де $P(A_i)$ — повна (апостеріорна) ймовірність реалізації сценарію A_i за умови, що сталася системна аварія A ; $P(A_i | A)$ — умовна (байєсівська) ймовірність системної аварії A за сценарієм A_i ; $P(A)$ — повна ймовірність виникнення системної аварії; $P(A | A_i)$ — умовна ймовірність системної аварії за умови реалізації сценарію A_i .

Означення 2. Повний (сумарний) ризик збитків $R(D, A)$ від системної аварії A з урахуванням різних сценаріїв її реалізації $A_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{1, n}$, визначатимемо як

$$R(D, A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)D(A_i),$$

де $P(A_i)$ — ймовірність реалізації сценарію A_i за умови, що сталася системна аварія A ; $D(A_i)$ — збиток, якщо системна аварія A відбувається за сценарієм A_i .

Нехай аварія в системі \mathbf{S} може виникнути з будь-якої з можливих довільних подій-причин $E_j \in \mathbf{E}$, $j = \overline{1, m}$, і відбуватиметься як подія-наслідок у вигляді однієї з можливих форм $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$.

Ймовірності $P(F_i)$ подій-наслідків $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$, та ймовірність $P(A)$ системної аварії A залежно від складу, особливостей структури, функціонування гідровузла як системи визначатимемо за допомогою відповідних структурних функцій надійності (безпеки) [2, 6, 11, 12, 19, 23]:

$$\Psi(\mathbf{S} | F_i) : \mathbf{E} \rightarrow F_i, i = \overline{1, n}; \Psi(\mathbf{S}) : \mathbf{E} \rightarrow A. \quad (2)$$

Для кожного зі сценаріїв аварій, $i = \overline{1, n}$, згідно з однією з фундаментальних теорем теорії ймовірностей [24] можна записати:

$$P(A | A_i)P(A_i) = P(A_i | A)P(A). \quad (3)$$

Визначимо ймовірність $P(A | A_i)$ як «вагу» відповідного збитку (наслідку, форми системної аварії) F_i за ймовірністю його реалізації $P(F_i)$:

$$P(A | A_i) = \frac{P(F_i)}{\sum_{i=1}^n P(F_i)}, \quad (4)$$

де використання імовірнісної міри щодо «ваг» (3) можна виправдати тим, що будь-яка нормалізована система від'ємних величин підкоряється аксіомам теорії ймовірностей [25].

Тоді з урахуванням виразу (4) у формулах (1) і (2) імовірність $P(A_i)$ може прийматися рівною $P(F_i)$, звідки

$$P(A_i) = \frac{P^2(F_i) / \sum_{i=1}^n P(F_i)}{\sum_{i=1}^n \left(P^2(F_i) / \sum_{i=1}^n P(F_i) \right)} P(A).$$

Твердження 1. Якщо хоча б одна з n аварійних подій-наслідків $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$, з якими пов'язуються різні збитки $D(A_i)$ в результаті системної аварії за відповідними сценаріями A_i має «відносну вагу» $P(A | A_i) = \frac{P(F_i)}{\sum_{i=1}^n P(F_i)}$ збитку з імовірністю його виникнення, відмінну від відповідних

«відносних ваг» $P(A | A_k) = \frac{P(F_k)}{\sum_{i=1}^n P(F_k)}$ збитків за іншими сценаріями для

$\forall F_k \in \mathbf{F}, k = \overline{1, n}, k \neq i$, то при $P(F_i) > P(F_k)$ та $D(A_i) < D(A_k)$ сумарний (узагальнений) ризик збитків $R(D, A)$ за сценаріями $A_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{1, n}$, системної аварії становитиме:

$$R(D, A) < \sum_{i=1}^n P(F_i) D(A_i).$$

Твердження 2. Якщо аварійні події-наслідки $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$, з якими пов'язуються різні збитки $D(A_i)$ в результаті системної аварії за відповідними сценаріями A_i , $i = \overline{1, n}$, є однаково ймовірними і їх імовірності $P(F_i) = P(F)$, $i = \overline{1, n}$, то сумарний ризик збитків $R(D, A)$ за сценаріями $A_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{1, n}$, системної аварії буде дорівнювати добутку ймовірності $P(F)$ на суму збитків $D(A_i)$:

$$R(D, A) = P(F) \sum_{i=1}^n D(A_i).$$

Твердження 3. Якщо з різними аварійними подіями-наслідками $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$, і відповідними сценаріями аварії A_i , $i = \overline{1, n}$, пов'язуються однакові збитки $D(A_i) = D(A)$, $i = \overline{1, n}$, то сумарний ризик збитків $R(D, A)$ за аварійними подіями-наслідками $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$, і відповідними сценаріями A_i , $i = \overline{1, n}$, дорівнюватиме добутку повної ймовірності системної аварії $P(A)$ та збитку $D(A)$:

$$R(D, A) = P(A)D(A).$$

УТОЧНЕННЯ УМОВНИХ ІМОВІРНСТЕЙ $P(A | A_i)$

Аварійні події вигляду $(A | A_i)$, $i = \overline{1, n}$ — це складні аварійні події («виходи»), які загалом є більш невизначеними, ніж відповідні їм «входи» $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$, що пов'язуються з формами та видами аварій на гідропорудах тощо. На практиці ймовірності «виходів» $(A | A_i)$, $i = \overline{1, n}$, можуть бути отримані лише опосередковано, наприклад, як імовірності реалізації деяких подій-припущень (порушення критеріїв міцності, стійкості гідропоруд в аварійних ситуаціях і т. ін.), які своєю чергою досить часто також є довільними (сумісними) подіями.

У практичних розрахунках, окрім прямого «зважування» подій за ймовірністю у вигляді виразу (4), найпростіша залежність між ймовірностями $P(A | A_i)$ і $P(F_i)$ може встановлюватися згідно з відомим правилом Фішберна, яке зазвичай використовується для системи невизначених показників, що не є ймовірностями:

$$P(F_i) = \frac{2(n-i+1)}{(n+1)n},$$

де $P(F_i)$ — «вага» упорядкованої згідно з її рангом за спаданням значущості аварійної події $F_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, n}$.

Формувати повні групи подій серед аварійних подій-умов перебігу аварій з метою реалізації методу Байєса з урахуванням більше ніж двох подій однієї й тієї ж природи, які характеризуються різними ймовірностями перевищення розрахункових характеристик, можна такими трьома способами.

Перший спосіб — імовірності перевищення розрахункових характеристик подій-умов визначаються з точністю, яка не викликає сумнівів у їх однаковій достовірності.

Другий спосіб — ураховується статистична достовірність гіпотези, наприклад щодо закону розподілу, за яким визначаються ймовірності перевищення розрахункових характеристик подій-умов. Нехай ця достовірність $v(\chi^2)$ устанавлюється за результатами перевірки гіпотез за критерієм χ^2 К. Пірсона.

Третій спосіб — кожній з подій-умов приписується певна «вага» і при нормуванні ймовірність перевищення кожної аварійної події-умови має оцінюватися з урахуванням деякого «вагового» коефіцієнта γ_w .

Уведення коефіцієнта γ_w тут можна пояснювати тим, що, по-перше, з менш імовірними подіями порівняно з більш імовірними подіями може пов'язуватися більша небезпека, по-друге, характеристики менш імовірних екстраординарних подій можуть оцінюватися з більшою похибкою.

Нехай є J довільних аварійних подій-умов $C_j, j = \overline{1, J}$, що мають включатися в повну групу.

Виконаємо ранжування та нумерацію подій згідно з правилом

$$P(C_1) < P(C_2) < \dots < P(C_j) < \dots < P(C_{j-1}) < P(C_j), \quad (5)$$

де $P(C_j)$ — імовірності перевищення j -х подій, $j = \overline{1, J}$.

Згідно з першим способом нормовані значення відповідних імовірностей $P(C_1), P(C_2), P(C_j), P(C_j)$ будуть такими:

$$P_i(C_1) = P(C_1); P_i(C_2) = P(C_2) - P(C_1); \dots; P_i(C_j) = P(C_j) - P(C_{j-1}).$$

Згідно з другим і третім способами нормування виконується за формулою

$$P_n(C_j) = \frac{\mu P^*(C_j)}{\sum_{j=1}^J P^*(C_j)},$$

де ймовірності $P^*(C_j)$:

$$P^*(C_j) = (P(C_j) - P(C_{j-1})) (2 - v(\chi^2));$$

$$P^*(C_j) = P(C_j) \gamma_{w,j} - P(C_{j-1}) \gamma_{w,j-1},$$

$P(C_j), P(C_{j-1})$ — імовірності перевищення j -ї та $j-1$ -ї подій-умов, імовірності перевищення характеристик яких нормуються, $j = \overline{1, J}$; J — загальна кількість подій-умов, що включаються в повну групу подій; μ — міра нормування, яка у випадку, якщо $\sum_{j=1}^J P^*(C_j) \leq 1$, береться такою, що дорів-

нює $\sum_{j=1}^J P^*(C_j)$, якщо $\sum_{j=1}^J P^*(C_j) > 1$, то дорівнює одиниці або 100 %;

$\nu(\chi^2)$ — статистична достовірність закону розподілу, за яким визначаються ймовірності перевищення розрахункових характеристик подій-умов, яка встановлюється за результатами перевірки гіпотез згідно з критерієм χ^2 К. Пірсона; $\gamma_{w,j}$ — «ваговий» коефіцієнт, який для ранжованих згідно з правилом (5) подій може визначатися за формулою

$$\gamma_{w,j} = 1 + \lg \left(\frac{P(C_{j+1})}{P(C_j)} \right), \quad j = \overline{1, J}.$$

Більш імовірним «входам» (формам, видам аварії) надаватиметься нелінійно зростаюча «вага» (більший пріоритет) при визначенні «виходів» — модельних сценаріїв системної аварії на гідровузлі.

ВИСНОВКИ

Оцінювання ризику системних аварій на гідровузлах є складними, неструктурованими (або «слабоструктурованими») задачами, обтяженими як параметричною, так і структурною невизначеністю. Коректне розв'язання задач кількісної оцінки ризику системних аварій на гідровузлах з урахуванням різних факторів, як природних, так і техногенних, можливе в межах сценарного підходу з використанням байєсівського перетворення ймовірностей аварійних подій-причин. Сценарне моделювання в поєднанні з методом Байєса дає змогу поєднувати можливості різних методів та моделей, виконувати формальну кількісну оцінку ризиків системної аварії, отриманих за різними модельними сценаріями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций / В.В. Болотин. — М.: Машиностроение, 1990. — 448 с.
2. Векслер А.Б. Надежность, социальная и экологическая безопасность гидротехнических объектов: оценка риска и принятие решений / А.Б. Векслер, Д.А. Ивашинцов, Д.В. Стефанишин. — СПб.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2002. — 591 с.
3. *The use of risk analysis to support dam safety decisions and management.* Trans. of the 20-th Int. Congress on Large Dams. Vol. 1. Q. 76. Beijing-China, 2000. — 896 p.
4. Hartford D.N.D. Risk and Uncertainty in Dam Safety / D.N.D. Hartford, G.B. Vaecher // Published by Thomas Telford, 2004. — 401 p.
5. Вайнберг А.И. Надежность и безопасность гидротехнических сооружений. Избранные проблемы / А.И. Вайнберг. — Х.: Тяжпромавтоматика, 2008. — 304 с.
6. Стефанишин Д.В. Прогнозування аварій на греблях в задачах оцінки й забезпечення їх надійності та безпеки / Д.В. Стефанишин // Гідроенергетика України. — 2011. — № 3–4 — С. 52–60.
7. Згуровский М.З. Информационный подход к анализу и управлению проектными рисками / М.З. Згуровский, И.И. Коваленко, К. Кондрак, Э. Кондрак // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 4. — С. 148–156.

8. *Мирицхулава Ц.Е.* Опасности и риски на некоторых водных и других системах. Виды, анализ, оценка / Ц.Е. Мирицхулава. — Тбилиси: Мецниереба («Наука»), 2003. — 538 с.
9. *Панкратова Н.Д.* Оцінювання багатofакторних ризиків в умовах концептуальної невизначеності / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 72–82.
10. *Перельмутер А.В.* Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций / А.В. Перельмутер. — М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2007. — 255 с.
11. *Половко А.М.* Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. — 2-е изд. перераб. и доп. — СПб: БХВ-Петербург, 2006. — 704 с.
12. *Рябинин И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. — СПб.: Изд-во С-Петербург. ун-та, 2007. — 276 с.
13. *Трофимчук А.Н.* Надёжность систем сооружение – грунтовое основание в сложных инженерно-геологических условиях / А.Н. Трофимчук, В.Г. Черный, Г.И. Черный. — К.: ПолграфКонсалтинг, 2006. — 248 с.
14. *Kumamoto H.* Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists / H. Kumamoto, E.J. Henley. — New York: IEEE Press, 1996. — 597 p.
15. *Бегун В.В.* Метод решения проблемы расчета техногенных рисков / В.В. Бегун, С. А. Вахнин // Управляющие системы и машины. — 2014. — № 3. — С. 3–9.
16. *Качинський А.Б.* Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи: моногр. / А.Б. Качинський; Ін-т проблем нац. безпеки. Нац. акад. служби безпеки України. — К.: [б. н.], 2004. — 470 с.
17. *Лисиченко Г.В.* Природний, техногенний та екологічний ризики: аналіз, оцінка, управління / Г.В. Лисиченко, О.Л. Забулонов, Г.А. Хміль. — К.: Наук. думка, 2008. — 544 с.
18. *Романчук К.Г.* Імовірнісне моделювання сценаріїв двох нетипових аварій на гідроенергетичних об'єктах / К.Г. Романчук, Д.В. Стефанишин // Гідроенергетика України. — 2014. — № 2–3. — С. 20–25.
19. *Стефанишин Д.В.* Логіко-імовірнісна оцінка ризику збитків від аварійного виливу води з басейну добового регулювання Зарамагської ГЕС-1 / Д.В. Стефанишин, К.Г. Романчук // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 3. — С. 130–141.
20. *Stefanyshyn D.V.* Use of the Bayes' approach for assessment of damage risks of system failures / D.V. Stefanyshyn, K.G. Romanchuk // Proc. of Int. Scientific School «Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems». — July 7–11, 2009. — Saint-Petersburg, Russia. — P. 165–169.
21. *Загірська І.О.* Методика побудови сценарного аналізу із використанням байєсівських методів / І.О. Загірська, П.І. Бідюк // Електротехнічні та комп'ютерні системи. Інформаційні системи та технології. — 2012. — № 8 (84). — С. 137–142.
22. *Панкратова Н.Д.* Моделювання альтернатив сценаріїв процесу технологічного передбачення / Н.Д. Панкратова, В.В. Савастьянов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2009. — № 1. — С. 22–35.
23. *Стефанишин Д.В.* Сценарний підхід к оценке вероятностей аварий на плотинах / Д.В. Стефанишин // Мониторинг. Наука и безопасность. Устойчивость зданий и сооружений. — 2013. — № 1 (9). — С. 26–33.
24. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа [Пер. с англ. И.А. Вайнштейна]. — М.: Наука, 1975. — 462 с.
25. *Райфа Г.* Прикладная теория статистических решений / Г. Райфа, Р. Шлейфер [Пер. с англ. А.К. Звонкина, З.Г. Маймина и Б.Л. Розовского; под ред. и с пред. Ю.Н. Благовещенского]. — М.: Статистика, 1977. — 360 с.

Надійшла 20.05.2016

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА С НЕЧЕТКИМ КОМПЛЕКСНЫМ АРГУМЕНТОМ

И.Я. СПЕКТОРСКИЙ

Рассмотрены функциональные последовательности $f_n(A)$ комплексных аналитических функций с нечетким комплексным числом A в качестве аргумента; предполагается сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ как равномерная на каждом круге внутри $\text{supp } A$. Вследствие аналитичности выполняются требования поточечной сходимости производных, а также конечности числа решений уравнения $f(z) = w$ относительно z для каждого w на каждом круге внутри $\text{supp } A$. Предложены достаточные условия сходимости $f_n(A)$ как поточечной сходимости последовательности функций принадлежности $\mu_{f_n(A)}(w)$: доказана сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ в точках $w \in \mathbb{C}$, кроме таких $w = f(z)$, что z — точка разрыва $\mu_A(z)$, либо $f'(z) = 0$. Как частный случай последовательности $f_n(A)$ рассмотрено обобщение конструкции ряда Тейлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$ для аналитической функции $f(z)$ для случая нечеткого комплексного аргумента $z = A$. Сходимость ряда рассмотрена как поточечная сходимость последовательности функций принадлежности частичных сумм $\mu_{S_n(A)}(w)$, где

$$S_n(z) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i.$$

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие числа как частный случай нечетких множеств представляют мощное средство математического моделирования в условиях неполной информации об исходных объектах. Так, в работах [1, 2] описывается применение аппарата нечетких множеств (в частности, нечетких чисел) для разработки экспертных систем, решения задачи распознавания образов, представления знаний в системах искусственного интеллекта. Активно развивается теория нечетких систем управления [3].

Принцип обобщения, сформулированный Л.А. Заде для произвольных нечетких множеств [1, 8], определяет действие произвольной числовой функции конечного числа аргументов на нечеткие числа. В частности, для случая нечетких чисел можно обобщить стандартные арифметические операции «+», «·», «-» и «/». В работах [8, 9] вводится понятие нечеткого комплексного числа.

Для нечетких чисел, включая комплексный случай, сохраняются законы коммутативности и ассоциативности операций «+» и «·», однако в общем случае не выполняется дистрибутивность «·» относительно «+» (алгебраические свойства нечетких чисел изложены в работах [5–7]).

Наличие ассоциативности «+» и «·» позволяет рассматривать степенные ряды с нечетким аргументом, трактуя сходимость конечных сумм ряда как сходимость последовательности функций принадлежности. В частности, это касается рядов Тейлора с нечетким аргументом и сходимости такого ряда (в определенном смысле) к значению исходной функции над заданным нечетким аргументом. Так, в работе [10] рассматриваются ряды Тейлора с нечетким аргументом с компактным носителем; сходимость таких рядов трактуется как сходимость множеств уровня функций принадлежности частичных сумм по метрике Хаусдорфа. Однако анализ поточечной сходимости последовательности функций принадлежности в ряде случаев может оказаться существенно проще, чем анализ сходимости соответствующих множеств уровня по метрике Хаусдорфа (см. работу [1]) для случая действительного нечеткого аргумента).

Цель работы — представить достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким комплексным аргументом в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности и применить полученный результат к сходимости частичных сумм ряда Тейлора с нечетким комплексным аргументом. Полученные результаты могут помочь аппроксимировать сложные нечеткие модели более простыми с возможностью предельного перехода в топологии поточечной сходимости.

В работе приводятся в основном известные сведения из теории нечетких комплексных чисел, необходимые для изложения основного результата, а также анализируется возможность предельного перехода в последовательности отображений с нечетким комплексным аргументом, рассматривается сходимость рядов Тейлора с нечетким комплексным аргументом как поточечной сходимости функций принадлежности для частичных сумм.

ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ВЫПУКЛЫЕ НЕЧЕТКИЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Нечеткое комплексное число A является частным случаем нечеткого множества и определяется своей *функцией принадлежности* $\mu_A : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$. *Носителем* нечеткого комплексного числа A называют множество $\text{supp } A = \{z \in \mathbb{C} : \mu_A(z) > 0\}$. Для заданного $\alpha \in (0; 1]$ рассматривают *множество уровня* $[A]_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \mu_A(z) \geq \alpha\}$. Очевидно соотношение $\text{supp } A = \bigcup_{\alpha > 0} [A]_\alpha$. Легко понять, что совокупность множеств уровня одно-

значно определяет функцию принадлежности μ_A (а значит и само нечеткое комплексное число A), так как $\mu_A^{-1}(\alpha_0) = \{z \in \mathbb{C} : \mu_A(z) = \alpha_0\} = [A]_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{\alpha > \alpha_0} [A]_{\alpha}$ для всех $0 < \alpha_0 \leq 1$.

Нечеткое комплексное число A называют *нормальным*, если $\mu_A(z) = 1$ для некоторого $z \in \mathbb{C}$. Так, нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu(z) = \begin{cases} 1 - |z|, & |z| \leq 1; \\ 0, & |z| > 1 \end{cases}$ является нормальным. Также нормально нечеткое комплексное число с функцией принадлежности $\mu(z) = 1$ ($z \in \mathbb{C}$), однако нечеткое комплексное число с функцией принадлежности $\mu(z) = 0$ ($z \in \mathbb{C}$) не является нормальным. Заметим, что нормальность иногда требуется при определении нечеткого числа как действительного, так и комплексного, например, [8–10].

Важный класс представляют нечеткие комплексные числа с полунепрерывной сверху функцией принадлежности¹. Полунепрерывность функции μ_A , которая определяется условием

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \right) \Rightarrow \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_A(z_n) \leq \mu_A(z) \right),$$

можно охарактеризовать в терминах множеств уровня нечеткого комплексного числа A .

Лемма 1. Функция принадлежности нечеткого комплексного числа A полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда все множества уровня $[A]_{\alpha}$ ($\alpha \in (0;1)$) замкнуты.

Утверждение леммы (в эквивалентной формулировке) доказано, например, в работе [12, с. 385–388], а в [13] приведено в виде упражнения.

Следствие. Пусть функция принадлежности нечеткого комплексного числа A полунепрерывна сверху. Тогда компактность множества уровня $[A]_{\alpha}$ при $0 < \alpha \leq 1$ эквивалентна ограниченности $[A]_{\alpha}$.

Пример 1. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} |z|, & |z| < 0,3; \\ |z| + 0,2; & 0,3 \leq |z| \leq 0,8; \\ 1, & z > 0,8. \end{cases}$

Очевидно, что $\mu_A(z)$ полунепрерывна сверху, и все множества уровня $[A]_{\alpha}$ ($\alpha \in (0;1)$) замкнуты. Так, замкнутым является $[A]_{0,4} = \{z : |z| \geq 0,3\}$.

Пример 2. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = e^{-|z|^2}$. Функция $\mu_A(z)$ полунепрерывна сверху (и даже непрерывна), все множества уровня $[A]_{\alpha}$ ($\alpha \in (0;1)$) ограничены и в силу следствия из леммы 1 компактны. Отметим, что носитель $\text{supp } A = \mathbb{C}$ при этом неограничен.

¹ Здесь и далее под непрерывностью и полунепрерывностью сверху подразумеваем непрерывность (полунепрерывность сверху) на \mathbb{C} .

Заметим, что при определении нечеткого комплексного числа, наряду с нормальностью, иногда требуется полунепрерывность сверху для функции принадлежности, а также накладываются условия связности для множеств уровня [8, 9].

ОТОБРАЖЕНИЯ НЕЧЕТКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть $f: \mathbb{C}^n \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ — функция с областью определения $D_f \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ ². В соответствии с принципом обобщения Заде [1–10] образ набора нечетких комплексных чисел A_1, A_2, \dots, A_n при отображении f определяется как нечеткое комплексное число $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ с функцией принадлежности

$$\mu_B(w) = \begin{cases} \sup_{\substack{(z_1, \dots, z_n) \in D_f: \\ f(z_1, \dots, z_n) = w}} \min(\mu_{A_1}(z_1), \dots, \mu_{A_n}(z_n)), & \text{если} \\ & \exists (z_1, \dots, z_n) \in D_f : f(z_1, \dots, z_n) = w; \\ 0, & \text{если} \\ & \forall (z_1, \dots, z_n) \in D_f : f(z_1, \dots, z_n) \neq w. \end{cases} \quad (1)$$

Пример 3. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = -z$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольного нечеткого комплексного числа A получаем функцию принадлежности для нечеткого комплексного числа $-A$: $\mu_{-A}(w) = \mu_A(-w)$ ($w \in \mathbb{C}$).

Пример 4. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольного нечеткого комплексного числа A получаем функцию принадлежности для A^2 : $\mu_{A^2}(w) = \max(\mu_A(\sqrt{w}), \mu_A(-\sqrt{w}))$ ($w \in \mathbb{C}$).

Пример 5. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольного нечеткого комплексного числа A получаем функцию μ_{e^A} :

$$\mu_{e^A}(w) = \begin{cases} \sup \{ \mu_A(\ln r + i(\varphi + 2\pi k)) : k \in \mathbb{Z} \}, & w \neq 0; \\ 0, & w = 0, \end{cases}$$

где $w = re^{i\varphi}$, $r \geq 0$, $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Пример 6. Пусть $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$. Тогда в соответствии с равенством (1) для произвольных нечетких комплексных чисел A_1, A_2 получаем функцию принадлежности для $A_1 + A_2$: $\mu_{A_1 + A_2}(w) = \sup_{\substack{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: \\ z_1 + z_2 = w}} \min(\mu_{A_1}(z_1), \mu_{A_2}(z_2))$.

² Здесь и далее символы « \subset » и « \supset » допускают равенство множеств.

Из примеров 3–6 видно, что при использовании равенства (1) необходимо решать уравнение $f(z_1, \dots, z_n) = w$ для каждого $w \in \mathbb{C}$. Если это уравнение имеет небольшое количество решений (примеры 3 и 4), равенство (1) немедленно дает значение $\mu_B(w)$. Но прямое использование равенства (1) весьма проблематично, если уравнение $f(z_1, \dots, z_n) = w$ имеет бесконечно много решений (примеры 5 и 6), что особенно типично при $n \geq 2$ (пример 6). Приводимая ниже теорема 1 (с предварительной технической леммой) позволяет вычислять множества уровня нечеткого комплексного числа B непосредственно по множествам уровня A_1, A_2, \dots, A_n , минуя прямое использование равенства (1).

Лемма 2. Пусть все множества уровня нечетких комплексных чисел A_1, A_2, \dots, A_n компактны и функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на \mathbb{C}^n . Тогда равенство (1) можно записать в виде

$$\mu_B(w) = \begin{cases} \max_{\substack{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: \\ f(z_1, \dots, z_n) = w}} \min(\mu_{A_1}(z_1), \dots, \mu_{A_n}(z_n)), & \text{если} \\ & \exists (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : f(z_1, \dots, z_n) = w; \\ 0, & \text{если} \\ & \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : f(z_1, \dots, z_n) \neq w. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Необходимо доказать, что супремум в правой части равенства (1) достигается и поэтому может быть заменен на максимум.

Пусть $\min(\mu_{A_1}(z_1), \dots, \mu_{A_n}(z_n)) = 0$ для любого набора $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ такого, что $f(z_1, \dots, z_n) = w$. Тогда $\mu_B(w) = 0$ и утверждение леммы справедливо. Аналогично, если $f(z_1, \dots, z_n) \neq w$ для любого набора $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, также имеем $\mu_B(w) = 0$ и утверждение леммы справедливо.

Наконец, пусть $\min(\mu_{A_1}(z_1), \dots, \mu_{A_n}(z_n)) = \alpha > 0$ и $f(z_1, \dots, z_n) = w$ для некоторого набора $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Тогда равенство (1) можно записать в виде

$$\mu_B(w) = \sup_{\substack{(z_1, \dots, z_n) \in ([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha): \\ f(z_1, \dots, z_n) = w}} \min(\mu_{A_1}(z_1), \dots, \mu_{A_n}(z_n)).$$

Поскольку множество $X_\alpha = [A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha$ компактно в \mathbb{C}^n , а множество $f^{-1}(w) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : f(z_1, \dots, z_n) = w\}$ замкнуто вследствие непрерывности f , получаем ограниченность и замкнутость (а значит и компактность³) множества $X_\alpha \cap f^{-1}(w)$. Наконец, функция $\min(\mu_{A_1}(z_1), \dots$

³ В конечномерном пространстве, в частности в \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n , компактность множества эквивалентна его ограниченности и замкнутости, однако в бесконечномерных метрических пространствах ограниченность и замкнутость являются лишь необходимыми, но не достаточными условиями компактности.

$\dots, \mu_{A_n}(z_n))$ полунепрерывна сверху на \mathbb{C}^n и аналогично теореме Вейерштрасса [12, 13] достигает максимума на компакте $X_\alpha \cap f^{-1}(w)$. \square

Теорема 1. Пусть все множества уровня нечетких комплексных чисел A_1, A_2, \dots, A_n компактны и $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на \mathbb{C}^n . Тогда при $0 < \alpha \leq 1$ множества уровня $[B]_\alpha$ равно образу множеств уровня $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha$:

$$\begin{aligned} [B]_\alpha &= f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha) = \\ &= \{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in ([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Зафиксируем $0 < \alpha \leq 1$. Поскольку условия леммы 2 выполнены, можем, воспользовавшись равенством (2), записать эквивалентность

$$\begin{aligned} (w \in [B]_\alpha) &\Leftrightarrow \left(\exists (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \begin{cases} f(z_1, \dots, z_n) = w; \\ \mu_{A_1}(z_1) \geq \alpha; \\ \vdots \\ \mu_{A_n}(z_n) \geq \alpha. \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (w \in f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha)), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы. \square

Пример 7. Рассмотрим нечеткие комплексные числа A_1 и A_2 с функциями принадлежности

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(z_1) &= \begin{cases} 1 - \frac{|z_1 - c_1|}{\delta_1}, & |z_1 - c_1| \leq \delta_1; \\ 0, & |z_1 - c_1| > \delta_1, \end{cases} \\ \mu_{A_2}(z_2) &= \begin{cases} 1 - \frac{|z_2 - c_2|}{\delta_2}, & |z_2 - c_2| \leq \delta_2; \\ 0, & |z_2 - c_2| > \delta_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $\delta_i > 0$ ($i \in \{1; 2\}$). Поскольку все множества уровня A_1 и A_2 компактны, а отображение $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ непрерывно на \mathbb{C}^2 , для вычисления множеств уровня нечеткого комплексного числа $B = A_1 + A_2$ можем использовать теорему 1. Для A_1 и A_2 имеем $[A_i]_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z - c_i| \leq \delta_i\}$ ($i \in \{1; 2\}$) и для B получаем:

$$[B]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z - (c_1 + c_2)| \leq \delta_1 + \delta_2\},$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Теперь по виду $[B]_\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) легко определить функцию принадлежности нечеткого комплексного числа $B = A_1 + A_2$:

$$\mu_{A_1 + A_2}(w) = \begin{cases} 1 - \frac{|w - (c_1 + c_2)|}{\delta_1 + \delta_2}, & |w - (c_1 + c_2)| \leq \delta_1 + \delta_2; \\ 0, & |w - (c_1 + c_2)| > \delta_1 + \delta_2. \end{cases}$$

Пример 8. Рассмотрим нечеткие комплексные числа A_1 и A_2 с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(z_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_1+1}, & x_1 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0, \end{cases} \quad \mu_{A_2}(z_2) = \begin{cases} \frac{x_2}{x_2-1}, & x_2 \leq 0; \\ 0, & x_2 > 0, \end{cases}$$

$$x_i = \operatorname{Re} z_i > 0 \quad (i \in \{1; 2\}).$$

Поскольку множества уровня нечетких комплексных чисел A_1 и A_2 неограничены (а значит и некомпактны), условия теоремы 1 (как и леммы 2) не выполнены. Применяя формулу (1) (см. также пример 6), получаем:

$$\mu_{A_1+A_2}(w) = \sup_{\substack{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: \\ z_1+z_2=w}} \min(\mu_{A_1}(z_1), \mu_{A_2}(z_2)) = \sup_{x_1 \geq \max(0, u)} \min\left(\frac{x_1}{x_1+1}, \frac{u-x_1}{u-x_1-1}\right) = 1$$

для всех $w \in \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} w$. Заметим, что равенство $[A_1 + A_2]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha$, постулируемое теоремой 1, выполняется для всех $\alpha \in (0; 1)$, однако не выполняется для $\alpha = 1$: $[A_1 + A_2]_1 = \mathbb{C}$, $[A_1]_1 + [A_2]_1 = \emptyset$.

Важным фактом для нечетких комплексных чисел является сохранение полунепрерывности сверху для их функций принадлежности при непрерывном отображении. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 2. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — нечеткие комплексные числа с полунепрерывными сверху функциями принадлежности, все множества уровня A_1, A_2, \dots, A_n ограничены, функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на \mathbb{C}^n и $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Тогда μ_B также полунепрерывна сверху.

Доказательство. Пусть функции $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \dots, \mu_{A_n}$ полунепрерывны сверху. Тогда в соответствии с леммой 1 множества уровня $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha$ замкнуты для любого $\alpha \in (0; 1]$. По теореме 1 для произвольного $0 < \alpha \leq 1$ имеем равенство $[B]_\alpha = f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha)$, откуда вследствие непрерывности f и компактности множеств $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha$ множество $[B]_\alpha$ также компактно (а значит и замкнуто). Таким образом, все множества уровня нечеткого комплексного числа B замкнуты, и в соответствии с леммой 1 функция μ_B полунепрерывна сверху. \square

Аналог теоремы 1 доказан в работе [10] для действительных нечетких чисел и непрерывной унарной функции $f(x)$, сохранение выпуклости при операциях «+», «-» и «·» доказано, например, в работе [5].

Пример 9. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{\delta}, & |z| \leq \delta; \\ 0, & |z| > \delta. \end{cases}$

Непосредственно из равенства (1) (см. также пример 4) найдем $\mu_{|A|}(z)$:

$$\mu_{|A|}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\delta}, & z \in [0; \delta); \\ 0, & z \notin [0; \delta). \end{cases}$$

Отметим, что функция $\mu_{|A|}(z)$ полунепрерывна сверху, но не непрерывна при непрерывной функции $\mu_A(z)$ и непрерывном отображении $f(z) = |z|$.

Пример 10. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu(z) = 1$ ($z \in \mathbb{C}$). Тогда функция $\mu_{e^A}(z) = \begin{cases} 1, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ не полунепрерывна сверху; теорема 2 не применима, так как множества уровня нечеткого комплексного числа A неограничены.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 легко обобщить на случай, когда f непрерывна на $\text{supp } A_1 \times \text{supp } A_2 \times \dots \times \text{supp } A_n$. Так, если функции принадлежности нечетких комплексных чисел A_1 и A_2 полунепрерывны сверху и $0 \notin \text{supp } A_2$, то функция $\mu_{\frac{A_1}{A_2}}$ также полунепрерывна сверху.

Замечание 2. Очевидно, что свойство нормальности сохраняется при произвольном отображении: если нечеткие комплексные числа A_1, A_2, \dots, A_n нормальны и $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ определено на \mathbb{C}^n , то $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ также нормально.

Замечание 3. В отличие от действительного случая [5, 10, 11] выпуклость множеств уровня нечетких комплексных чисел при произвольном непрерывном отображении может не сохраняться. Так, для нечеткого комплексного числа с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} 1, & z = 1 + it, t \in [0; 2\pi); \\ 0, & \text{Re } z \neq 1 \text{ или } \text{Im } z \notin [0; 2\pi) \end{cases}$ все множества уровня имеют вид $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = 1, \text{Im } z \in [0; 2\pi)\}$, т.е. выпуклы, однако для нечеткого комплексного числа $\mu_{e^A}(z) = \begin{cases} 1, & z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi); \\ 0, & |z| \neq 1 \end{cases}$ все множества уровня являются окружностью $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, т.е. не выпуклы.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕЧЕТКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Вспомогательные утверждения

Докажем несколько утверждений, обобщающих известные факты из действительного анализа на комплексный случай. Здесь все аналитические функции предполагаются однозначными.

Длина кривой в \mathbb{C}^2 , заданной аналитической функцией. Пусть функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$. Тогда кривую в \mathbb{C}^2 $\gamma: t \mapsto (z(t), f(z(t)))$, $z(t) \in D$, $t \in [t_1; t_2]$ можно рассматривать как кривую в \mathbb{R}^4 : $t \mapsto (x(t), y(t), u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)))$, где $x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$, $u = \text{Re } f$, $v = \text{Im } f$. Обозначим через $|\gamma|$ длину кривой γ .

Лемма 3. Пусть $z(t)$ дифференцируема для $t \in [t_1; t_2]$. Тогда

$$|\gamma| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + |f'(z(t))|^2} |z'(t)| dt.$$

Доказательство. Используя формулу для длины кривой в \mathbb{R}^n , запишем:

$$|\gamma| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{A(t)} dt, \text{ где } A(t) = (u'_x(x(t), y(t))x'(t))^2 + (u'_y(x(t), y(t))y'(t))^2 + \\ + (v'_x(x(t), y(t))x'(t))^2 + (v'_y(x(t), y(t))y'(t))^2 + (x'(t))^2 + (y'(t))^2.$$

Из условий Коши–Римана аналитичности f [14, 15] получаем

$$A(t) = ((u'_x(x(t), y(t)))^2 + (v'_x(x(t), y(t)))^2 + 1)((x'(t))^2 + (y'(t))^2).$$

Наконец, учитывая равенство $f' = u'_x + iv'_x$ [14, 15], окончательно получаем

$$A(t) = (1 + |f'(z(t))|^2) |z'(t)|^2,$$

что доказывает утверждение леммы. \square

Область определения обратной функции. Известно, что функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, аналитичная на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$, обратима в некоторой окрестности точки $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$. При этом, в отличие от функций на \mathbb{R} , комплексная функция может не быть обратимой на всей окрестности z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$. Так, функция $f(z) = e^z$ аналитична на \mathbb{C} и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$, однако f^{-1} определена не на всем \mathbb{C} вследствие периодичности исходной функции: $f(z) = f(z + 2\pi i)$.

Пусть $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$. Для оценки области определения f^{-1} , пользуясь непрерывностью $f(z)$ в D , выберем такое $r > 0$, что $f(z) \neq 0$ при $0 < |z - z_0| \leq r$, и согласно теореме Вейерштрасса о функции, непрерывной на компакте, можем ввести $\mu = \min\{|f(z) - f(z_0)| : |z - z_0| = r\} > 0$.

Лемма 4. Функция f^{-1} определена в круге $F = \{w : |w - f(z_0)| < \mu\}$ и $f^{-1}(F) \subset E = \{z : |z - z_0| < r\}$.

Доказательство (основано на идее из работы [14, с. 210–213]). Функция $f(z) - f(z_0)$ имеет в E лишь один нуль: $z = z_0$. Зафиксируем $\xi \in F$ и рассмотрим функцию $\tilde{f}(z) = f(z) - \xi$. Поскольку $|f(z_0) - \xi| < \mu \leq |f(z) - f(z_0)|$ для $|z - z_0| = r$, к функции $\tilde{f}(z) = (f(z) - f(z_0)) + (f(z_0) - \xi)$ применима теорема Руше: $\tilde{f}(z)$ и $f(z) - f(z_0)$ имеют одинаковое количество нулей (ровно один нуль) внутри круга E . Таким образом, $f(z)$ принимает каждое значение $\xi \in F$ в точности для одного $z \in E$ и $f^{-1}(w)$ определена для каждого $w \in F$, причем $f^{-1}(w) \in E$.

Сходимость последовательности обратных функций

Рассмотрим последовательность функций $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 1$), аналитических на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$. Также предполагаем сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ для всех $z \in D$, где функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична на

$D \subset \mathbb{C}$. Зафиксировав $z_0 \in D$, введем $\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ и $\varphi_n(z) = \frac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0}$ ($n \geq 1$), доопределив $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ и $\varphi_n(z_0) = f'_n(z_0)$ ($n \geq 1$).

Лемма 5. Пусть $r > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$, причем сходимость равномерна на $\bar{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) = f'(z_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$, причем сходимость $\varphi_n(z)$ ($n \geq 1$) равномерна на \bar{E} .

Доказательство. Сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) = f'(z_0)$ легко получить, применяя формулу Коши для производных [14, 15] и учитывая равномерную на \bar{E} сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$: $f'_n(z_0) - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, где контур $\gamma = \{z : |z - z_0| = \frac{1}{2}r\}$ ориентирован против часовой стрелки.

Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ для всех $z \in \bar{E}$, причем сходимость равномерна в любом кольце $0 < \delta < |z - z_0| \leq r$. Равномерную на \bar{E} сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ в малой окрестности z_0 можно доказать, рассмотрев разложение в ряд Тейлора $f_n(z) = f_n(z_0) + \frac{1}{k!} \sum_{k=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < \delta$

при достаточно малом $\delta \in (0; r]$. Тогда $\varphi_n(z) = f'_n(z_0) + \frac{1}{k!} \sum_{k=2}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{k-1}$ и, используя неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора [14, 15], $|\varphi_n(z) - f'_n(z_0)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} M_n(\delta)(z - z_0)^{k-1}$, где $M_n(\delta) = \max_{|z - z_0| = \delta} |f_n(z)|$. Поскольку сходимость f_n ($n \geq 1$) на \bar{E} равномерная, существует конечное $M(\delta) = \sup_{n \geq 1} M_n(\delta)$. Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ можем выбрать $0 < \delta_0 < \delta$ так, чтобы $|\varphi_n(z) - f'_n(z_0)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ при $|z - z_0| \leq \delta_0$ для всех $n \geq 1$, и такое $N \geq 1$, что $|f'(z) - f'_n(z_0)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ при $|z - z_0| \leq \delta_0$ и $n \geq N$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ ($z \in \bar{E}$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) =$

$= f'(z_0)$, переходим в неравенстве $|\varphi_n(z) - f'_n(z_0)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ к пределу по $n \rightarrow \infty$, получая $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ при $|z - z_0| \leq \delta_0$. Окончательно

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \leq |\varphi_n(z) - f'_n(z_0)| + |f'_n(z_0) - f'(z_0)| + |f'(z_0) - \varphi(z)| \leq \varepsilon$$

при $|z - z_0| \leq \delta_0$ и $n \geq N$, что завершает доказательство леммы. \square

Лемма 6. Пусть $f'(z_0) \neq 0$, $r > 0$, сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ равномерна на $\bar{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in \bar{E}$. Тогда найдется такое

$N \geq 1$, что $W = \bigcap_{n=N}^{\infty} f_n(\bar{E})$ содержит некоторую окрестность W_0 точки $f(z_0)$, определены $f_n^{-1} : W_0 \rightarrow E = \{z : |z - z_0| < r\}$ ($n \geq 1$), причем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(w) = f^{-1}(w)$ для всех $w \in W_0$.

Доказательство. В соответствии с леммой 4 функция f^{-1} определена в круге $F = \{w : |w - f(z_0)| < \mu\}$, где $\mu = \min\{|f(z) - f(z_0)| : |z - z_0| = r\} > 0$, причем $f^{-1}(w) \in E$ для всех $w \in F$. Вследствие компактности \bar{E} и непрерывности $\varphi(z)$ и $f'(z)$ на \bar{E} существует $\delta = \min(\{|\varphi(z)|, |f'(z)| : z \in \bar{E}\}) > 0$ и (в соответствии с леммой 5) равномерной на \bar{E} сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$ и сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) = f'(z_0)$ можем выбрать такое $N_1 \geq 1$, что $|\varphi_n(z)| \geq \delta/2 > 0$ и $|f'_n(z)| \geq \delta/2 > 0$ для всех $n \geq N_1$ при $z \in \bar{E}$.

Учитывая равномерную на \bar{E} сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$, можем выбрать $N_2 \geq N_1$ так, что $\min\{|f_n(z) - f_n(z_0)| : |z - z_0| = r\} \geq \frac{2}{3}\mu > 0$ для всех $n \geq N_2$. Наконец выберем $N \geq N_2$ так, что $|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \frac{1}{3}\mu$ для всех $n \geq N$. Теперь в соответствии с леммой 4 каждая f_n^{-1} ($n \geq N$) определена в круге $F_n = \{w : |w - f_n(z_0)| < \frac{2}{3}\mu\}$ и можно выбрать $W_0 = \{w : |w - f(z_0)| < \frac{1}{3}\mu\}$, при этом $W_0 \subset F_n \subset F$ для всех $n \geq N$.

Введя $\hat{w} \in W_0$, $\hat{z} = f^{-1}(\hat{w})$, $z_n = f_n^{-1}(\hat{w})$ и $w_n = f_n(\hat{z})$, для $n \geq N$ получаем

$$\begin{aligned} |f_n^{-1}(\hat{w}) - f^{-1}(\hat{w})| &= |(z_n, \hat{w}) - (\hat{z}, \hat{w})| = \\ &= |(z_n, \hat{w}) - (\hat{z}, \hat{w}) + (\hat{z}, w_n) - (\hat{z}, w_n)| \leq |(z_n, \hat{w}) - (\hat{z}, w_n)| + |w_n - \hat{w}|, \end{aligned}$$

причем расстояние $|(z_n, w_0) - (z_0, w_n)|$ в \mathbb{C}^2 можно, применяя лемму 3 для функции $f^{-1}(w)$, ограничить длиной кривой $\gamma : t \mapsto (f_n^{-1}(w_0 + t(w_n - w_0)), w_0 + t(w_n - w_0))$, $t \in [0; 1]$, соединяющей точки $(z_n, \hat{w}) = (f_n^{-1}(\hat{w}), \hat{w})$ и $(\hat{z}, w_n) = (f_n^{-1}(w_n), w_n)$:

$$\begin{aligned} |(z_n, \hat{w}) - (\hat{z}, w_n)| &= \left| \int_0^1 \sqrt{1 + ((f_n^{-1})'(\hat{w} + t(w_n - \hat{w})))^2} |(w_n - \hat{w})| dt \right| \leq \\ &\leq \sqrt{1 + \frac{4}{\delta^2}} |w_n - \hat{w}|. \end{aligned}$$

Таким образом, для $n \geq N$ окончательно имеем

$$|f_n^{-1}(\hat{w}) - f^{-1}(\hat{w})| \leq \left(1 + \frac{4}{\delta^2}\right) |w_n - \hat{w}| + |w_n - \hat{w}| = \left(2 + \frac{4}{\delta^2}\right) |f_n(\hat{z}) - f(\hat{z})|,$$

что, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\hat{z}) = f(\hat{z})$, доказывает сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(\hat{w}) = f^{-1}(\hat{w})$. \square

Сходимость функций принадлежности

Для функции $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, аналитической на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$, и нечеткого комплексного числа A с носителем $\text{supp } A \subset D$ введем обозначения:

$$X_{f, \text{supp } A} = \{z \in \text{supp } A : f'(z) = 0\};$$

$$X_{A, \text{supp } A} = \{z \in \text{supp } A : z \text{ — точка разрыва функции } \mu_A(z)\}.$$

Для нечеткого комплексного числа A с полунепрерывной сверху функцией принадлежности и ограниченными множествами уровня и последовательности аналитических функций $f_m: D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 1$) получаем согласно теореме 2 последовательность нечетких комплексных чисел $A_n = f_m(A)$ ($n \geq 1$), функции принадлежности которых полунепрерывны сверху.

Теорема 3. Пусть A — нечеткое комплексное число, все множества уровня которого компактны; $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 1$) — последовательность функций, аналитичных на $D \supset \text{supp } A$; $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, аналитичная на $D \supset \text{supp } A$, и для любого компакта $K \subset \text{supp } A$ выполнены условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \text{ причем сходимость равномерна на } K;$$

для всех $w \in \mathbb{C}$ множество $f^{-1}(w) \cap K = \{z \in K : f(z) = w\}$ конечно.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ для любого $w \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f, \text{supp } A} \cup X_{A, \text{supp } A})$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f, \text{supp } A} \cup X_{A, \text{supp } A})$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $f^{-1}(w_0) \cap \text{supp } A \neq \emptyset$, тогда $f^{-1}(w_0) \cap [A]_{\alpha_0} \neq \emptyset$ для некоторого $0 < \alpha_0 \leq 1$. По условию $X_0 = f^{-1}(w_0) \cap [A]_{\alpha_0}$ конечно;

пусть $X_0 = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ и $X_{0, \delta} = \bigcup_{j=1}^k \{z : |z - z_j| \leq \delta\}$ для $\delta > 0$. Поскольку $\mu_A(z)$ и $f'(z)$ непрерывны в каждой точке $z_j \in X_0$, $\mu_A(z_j) > 0$ и $|f'(z_j)| > 0$, можем выбрать такое $\delta_0 > 0$, что $\mu_A(z) > 0$, $|\mu_A(z_j) - \mu_A(z)| \leq \varepsilon$ и $|f'(z)| > 0$ для любого $z \in X_{0, \delta_0}$.

Положим $X_j = \{z : |z_j - z| \leq \delta_0\}$, $W_j = f(X_j)$ для $z_j \in X_0$. Тогда в соответствии с леммой 6 найдутся $W_0 \subset \bigcap_{j=1}^k W_j$ и $N_1 \geq 1$, что для всех $n \geq N_1$ определена $f_n^{-1,j} : W_0 \rightarrow X_j$, причем $w_0 \in W_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1,j}(w) = f^{-1,j}(w)$ для всех $w \in W_0$; подчеркнем, что $f^{-1,j}$ и $f_n^{-1,j}$ ($n \geq 1$) – обратные функции к сужениям f и f_n на X_j . Поскольку $\tilde{X}_0 = [A]_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{j=1}^k \{z : |z - z_j| < \delta_0\}$ компактно, $|f(z) - w_0| > 0$ для $z \in \tilde{X}_0$, а сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ равномерна на \tilde{X}_0 , выберем $N_2 \geq N_1$ так, что $|f_n(z) - w_0| \geq \frac{1}{2} \min\{|f(z) - w_0| : z \in \tilde{X}_0\} > 0$ для всех $z \in \tilde{X}_0$ и $n \geq N_2$. Итак, каждое уравнение $f_n(z) = w_0$ относительно z при $n \geq N_2$ имеет на $[A]_{\alpha_0}$ ровно k корней: $f_n^{-1,j}(w_0)$ ($1 \leq j \leq k$). Из равенства (1) получаем:

$$\mu_{f_n(A)}(w_0) = \max_{1 \leq j \leq k} \mu_A(f_n^{-1,j}(w_0)) \text{ при } n \geq N_2,$$

$$\mu_{f(A)}(w_0) = \max_{1 \leq j \leq k} \mu_A(f^{-1,j}(w_0)).$$

Выбрав $N \geq N_2$ так, что $\max_{1 \leq j \leq k} |f_n^{-1,j}(w_0) - f^{-1,j}(w_0)| \leq \delta_0$ при $n \geq N$, получаем: $|\mu_{f_n(A)}(w_0) - \mu_{f(A)}(w_0)| \leq \varepsilon$ для $n \geq N$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(w_0) = \mu_{f(A)}(w_0)$.

Наконец, при $f^{-1}(w_0) \cap \text{supp } A = \emptyset$ имеем, очевидно, $\mu_{f(A)}(w_0) = 0$. Для произвольного $0 < \alpha_0 \leq 1$ вследствие компактности $[A]_{\alpha_0}$ существует $\varepsilon = \min_{z \in [A]_{\alpha_0}} |f(z) - w_0| > 0$ и с учетом равномерной сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ на $[A]_{\alpha_0}$ можем выбрать N так, что $|f_n(z) - w_0| \geq \frac{1}{2} \varepsilon > 0$ для всех $z \in [A]_{\alpha_0}$ и $n \geq N$. Таким образом, при $n \geq N$ $f_n^{-1}(w_0) \cap [A]_{\alpha_0} = \emptyset$ и из равенства (2) $\mu_{f_n(A)}(w_0) < \alpha_0$. Вследствие произвольности $0 < \alpha_0 \leq 1$ получаем, что $\mu_{f_n(A)}(w_0) = 0$ при $n \geq N$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(w_0) = \mu_{f(A)}(w_0) = 0$.

Теорема полностью доказана. \square

Пример 11. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{2\delta}, & |z| \leq \delta; \\ 0, & |z| > \delta, \end{cases}$ где $\delta > 0$ — фиксированная константа.

Рассмотрим последовательность функций $f_n(z) = z + \frac{i^n}{n}$ ($n \geq 1$). Очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) = z$ равномерно на $\text{supp } A = \{z : |z| < \delta\}$. Непосредственно из равенства (1) для $n > \frac{1}{\delta}$ получаем

$$\mu_{f_n(A)}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| z + \frac{i^n}{n} \right|}{2\delta}, & \left| z + \frac{i^n}{n} \right| \leq \delta; \\ 0, & \left| z + \frac{i^n}{n} \right| > \delta. \end{cases}$$

Поскольку $X_{f, \text{supp } A} = \emptyset$ и $X_{A, \text{supp } A} = \{z : |z| = \delta\}$, теорема 3 гарантирует сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(z) = \mu_{f(A)}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, кроме $f(z) = z$ при $|z| = \delta$. Заметим, что при $|z| = \delta$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(z)$ не существует.

РЯД ТЕЙЛОРА С НЕЧЕТКИМ КОМПЛЕКСНЫМ АРГУМЕНТОМ: СХОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, аналитическая на непустом открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного $z_0 \in D$ получаем разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad (3)$$

причем ряд (3) сходится равномерно в любом круге $\bar{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$.

Лемма 7. Пусть $c \in \mathbb{C}$ и уравнение $f(z) = c$ имеет бесконечно много корней на $\bar{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$. Тогда $f(z) = c$ для всех $z \in \bar{E}$.

Доказательство. Вследствие компактности \bar{E} множество корней уравнения $f(z) = c$ имеет на \bar{E} предельную точку. Теперь, применяя теорему о единственности [14, 15], получаем: $f(z) = c$ для всех $z \in \bar{E}$. \square

Пусть $S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$ ($n \geq 0$) — частичные суммы ряда в равенстве (3). Ясно, что равенство (3) означает сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z)$.

Теорема 4. Пусть A — нечеткое комплексное число, все множества уровня которого компактны, а носитель линейно связный; функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична на непустом открытом множестве $D \supset \text{supp } A$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{S_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ для любого $w \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f, \text{supp } A} \cup X_{A, \text{supp } A})$.

Доказательство. Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(z) = f'(z)$, причем обе сходимости равномерны в любом круге $\bar{E} = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset$

$\subset \text{supp } A$. Пусть для некоторого $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f, \text{supp } A} \cup X_{A, \text{supp } A})$ и $\bar{E} \subset \text{supp } A$ множество $f^{-1}(w_0) \cap \bar{E}$ бесконечно. Тогда по лемме 7 имеем $f(z) = c$ для всех $z \in \bar{E}$, а в силу единственности аналитического продолжения – для всех $z \in \text{supp } A$, и утверждение теоремы очевидно. Если же множество $f^{-1}(w_0) \cap \bar{E}$ конечно для всех $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(X_{f, \text{supp } A} \cup X_{A, \text{supp } A})$ и $\bar{E} \subset \text{supp } A$, выполнены все условия теоремы 3, откуда следует требуемое равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{S_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$. Теорема полностью доказана. \square

Пример 12. Рассмотрим нечеткое комплексное число A с функцией принадлежности $\mu_A(z) = \begin{cases} 1 - |z|, & |z| \leq 1; \\ 0, & |z| > 1, \end{cases}$ и функцию $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Непосред-

ственно из равенства (1) найдем $\mu_{f(A)}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z-1|}{|z|}, & \text{Re } z \geq \frac{1}{2}; \\ 0, & -\infty \leq \text{Re } z < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Область аналитичности $f(z)$ включает $\text{supp } A = \{z : |z| < 1\}$ и разложение в ряд Тейлора при $z_0 = 0$ имеет вид $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i$; ряд сходится при

$|z| < 1$. Частичные суммы $S_n(z) = \sum_{i=0}^n z^i$ при $z \neq 1$ представимы в виде

$S_n(x) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Так как $\mu_A(z)$ непрерывна на \mathbb{C} и $f'(z) \neq 0$ для $z \in \text{supp } A$ (и даже для $z \in \mathbb{C}$), теорема 4 гарантирует сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{S_n(A)}(z) = \mu_{\frac{1}{1-A}}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Следует отметить, что $(0; 0,5] \subset \text{supp } S_n(A)$ по крайней мере для всех $n = 2k + 1$ ($k \geq 0$), хотя $\text{supp } f(A) = \{z : \text{Re } z > 0,5\}$.

В таблице приведен ряд значений $\mu_{S_n}(0,5)$, демонстрирующий сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{S_n(A)}(0,5) = 0$.

Значения $\mu_{S_n}(0,5)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu_{S_n}(0,5)$	0,50	0,00	0,35	0,00	0,28	0,00	0,24	0,00	0,20	0,00	0,18	0,00	0,16	0,00	0,15	0,00	0,14	0,00	0,13	0,00

ВЫВОДЫ

1. Для функциональной комплекснозначной последовательности $f_n(z)$, сходящейся к $f(z)$, и нечеткого комплексного аргумента A представлены достаточные условия сходимости функций $\mu_{f_n(A)}(z)$ во всех точках, кроме образов точек разрыва $\mu_A(z)$ и нулей $f'(z)$. Принципиальным

является условие конечности количества решений уравнения $f(z) = w$ относительно z для всех $w \in \mathbb{C}$ в любом круге $\{z : |z - z_0| \subset \text{supp } A\}$.

2. Для аналитической функции $f(z)$ представлены достаточные условия сходимости функций $\mu_{S_n(A)}(z)$, где $S_n(z)$ — частичные суммы ряда Тейлора для $f(z)$. При этом для любой нетривиальной аналитической $f(z)$ уравнение $f(z) = w$ относительно z для всех $w \in \mathbb{C}$ в любом круге $\{z : |z - z_0| \subset \text{supp } A\}$ всегда имеет лишь конечное количество решений.

3. Темой дальнейшего исследования предполагается возможность восстановления $\mu_{f(A)}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ с использованием полунепрерывности $\mu_{f(A)}(z)$ сверху.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
2. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др., под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 312 с.
3. Passino Kevin M. Fuzzy Control / Kevin M. Passino, Stephen Yurkovich. — Addison Wesley Longman, Menlo Park, CA, 1998. — 522 p.
4. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. — М.: Мир, 1976. — 176 с.
5. Mizumoto M. Algebraic Properties of Fuzzy Numbers / M. Mizumoto, K. Tanaka // Proceedings of IEEE International Conference on Cybernetics and Society. — 1976. — P. 559–563.
6. Delgado M. Fuzzy Numbers, Definitions and Properties / M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila // Mathware & Soft Computing 1. — 1994. — N 1 (1). — P. 31–43.
7. Dubois D. Fuzzy Real Algebra: Some Results / D. Dubois, H. Prade // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — N 4 (2). — P. 327–348.
8. Buckley J.J. Fuzzy Complex Numbers / J.J. Buckley // Fuzzy Sets and Systems. — 1989. — N 33. — P. 333–345.
9. Dong Qiu. Notes on fuzzy complex analysis / Dong Qiu, LanShu, Zhi-WenMo // Fuzzy Sets and Systems. — 2009. — N 160. — P. 1578–1589.
10. Inaida J. Taylor Series on the Fuzzy Number Space / J. Inaida // Special Issue on Biometrics And Its Applications. — 2010. — N 16 (1). — P. 15–25.
11. 1. Спекторский И.Я. Последовательности функций и ряды Тейлора с нечетким аргументом / И.Я. Спекторский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 2. — С. 125–140.
12. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — 3 изд. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
13. Кадец В.М. Курс функционального анализа / В.М. Кадец. — Х.: Харьк. нац. ун-т им. В.Н. Каразина, 2006. — 607 с.
14. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1985. — Ч. 1. — 336 с.
15. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. — М.: Наука, 1978. — 416 с.

Поступила 03.02.2016

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 519.711.7+519.6

Зв'язок мереж Петрі з бездужковим польським записом / Статкевич В.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 7–13.

Розглянуто мережі Петрі, які породжують мови бездужкового польського запису та оберненого польського запису для пропозиційних формул та арифметичних виразів. Пропозиційні формули можуть містити задану кількість змінних, а арифметичні вирази — змінних та констант. Запропоновано також інгібіторні мережі Петрі для вказаних мов, які дозволяють формувати дійсні числа у двійковому записі з фіксованою точкою у арифметичних виразах. Метод побудови мереж дозволяє використовувати довільні функції заданої арності. Запропоновано кольорову мережу Петрі для обчислення пропозиційних формул в оберненому польському записі. Метод побудови мережі дозволяє застосовувати довільні функції заданої арності з використанням таблиці правдивості відповідної функції. Рис.: 6. Бібліогр.: 8.

UDC 519.711.7+519.6

Connection between Petri nets and Polish notation / Statkevych V.M. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 7–13.

We propose Petri nets that produce languages of Polish notation and reverse Polish notation for propositional formulas and mathematical expressions. Propositional formulas can contain a given number of variables and mathematical expressions. Arithmetic expressions can contain a given number of variables and constants. We also propose inhibitor nets that produce the fixed-point binary numbers in mathematical expressions for above-mentioned languages. The technique of the nets construction allows to use arbitrary functions with a given arity. We also propose a coloured Petri net for calculating values of propositional formulas in reverse Polish notation. The technique of the net construction allows to use arbitrary functions with a given arity using a truth table of a corresponding function. Fig.: 6. Refs.: 8 titles.

УДК 004.7, 004.05

Генетичний алгоритм захисту SDN від мережевих атак / Забелін С.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 14–19.

Розглянуто проблеми виявлення та блокування мережевих атак за допомогою SDN. Це завдання сформульовано як задачу знаходження «правильного» вектора і являє собою задачу бінарного цілочислового програмування. Як мережева атака розглядається DDoS-атака. Побудовано математичну модель задачі та розроблено її алгоритм, що дозволяє виявити множини атакуючих хостів за зареєстрованими даними в мережі. У разі виявлення множини завдання зводиться до запобігання атаці, тобто блокування за IP-адресами. Для оцінювання ефективності запропонованого алгоритму оперативного керування трафіком і виявлення мережевих атак проведено експериментальні дослідження. Для моделювання SDN мереж використовувався емулятор мереж Mininet. Розв'язано задачу бінарного цілочислового програмування. Аналіз результатів підтверджує, що, використовуючи переваги SDN, а саме централізацію керування, гнучкість, удалося реалізувати генетичний алгоритм, що захищає мережу від однієї з найпоширеніших мережевих атак — DDoS. Рис.: 3. Бібліогр.: 6 назв.

UDC 004.7, 004.05

Genetic algorithm for SDN protection against network attacks / Zabielin S.I. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 14–19.

This paper examines the problem of detecting and blocking network attacks using SDN. This problem is formulated as the problem of finding the «correct» vector, in fact, it

is the task of the binary integer programming. The DDoS-attack is used as a network attack. A mathematical model of the problem and algorithm to identify sets of attacking hosts from the recorded data is developed. Upon detection of the set, the problem is reduced to the problem of preventing the attack, which means blocking IP-addresses. To evaluate the effectiveness of the proposed algorithm of intrusion detection, experimental studies have been conducted. To simulate SDN networks, Mininet network emulator was used. The task of the binary integer programming was solved. The analysis of results confirms that using SDN advantages, namely, centralized management and flexibility, we were able to implement a genetic algorithm, which protected the network from one of the most common network attacks — DDoS. Fig.: 3. Refs.: 6 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND
SOCIAL SYSTEMS

УДК 004.383

Покращений алгоритм призначення для планувальників завдань в неоднорідних розподілених обчислювальних системах / Сергієнко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 20–35.

Розглянуто основи проектування просторових планувальників для глобальних, неоднорідних, розподілених обчислювальних систем. Подано теореми, що дають змогу для двочасткових графів, які відображають претендування заявок на ресурси, зменшити кількість варіантів розв'язків, що розглядаються, видаливши з матриці зв'язності безперспективні елементи. Це дозволило зменшити часову складність угорського алгоритму з $O(n^3)$ до $O(n^{1.5} \log n)$. Підхід застосовується в алгоритмі адаптивного мультианалізу, який полягає у попередньому аналізі та коригуванні графу паросполучень. У разі його застосування до матриць графів, які мають коефіцієнт заповнення менший за 30%, алгоритм має статистичну часову складність, яка близька до лінійної. Рис.: 7. Бібліогр.: 23 назв.

UDC 004.383

An enhanced scheduling algorithm for task planners in heterogeneous distributed computing systems / Sergiyenko A.M., Simonenko V. P., Simonenko A.V. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 20–35.

The basics of designing the spatial schedulers are considered which are used in global heterogeneous GRID-systems. Several theorems are proven, which consider the bipartite graphs of task requests and resource relations. These theorems help to reduce the number of decision options by removing the unpromising elements in the adjacency matrix. This reduces the time complexity of the Hungarian algorithm from $O(n^3)$ to $O(n^{1.5} \log n)$. This approach is used in the adaptive multianalysis algorithm, which is based on a preliminary analysis and correction of the bipartite graph matrix. Its application to the matrices, which are filled to less than 30% of their volume, the scheduling algorithm has the statistical time complexity, which is close to linear. Fig.: 7. Refs.: 23 titles.

УДК 518.58:519.2:504

Агресивна та мирна поведінка в багатоагентних системах у клітинному середовищі / Завертиний В.В., Макарєнко О.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 36–44.

В агентно-орієнтованому підході виділено консолідацію великої різноманітності моделей. Розроблені моделі багатьох дослідників є однотипними за основними ознаками, проте у сфері складних адаптивних систем таких, як штучні екосистеми незначна відмінність в архітектурі чи різниця значень параметрів можуть відчутно впливати на емерджентні характеристики моделі. Першовідкривачами агентного підходу до штучних екосистем Робертом Акстелом і Робертом Аксельродом зазна-

чено, що наявна множина багатоагентних моделей потребує впровадження технік та методик, що дозволять узагальнити їх результати. Подано модель, що є реплікацією уже існуючої і подібної до класичних моделей штучного життя у клітинному просторі. Досліджено залежність агресивної та мирної поведінки від кількості ресурсу, що надходить до системи. Порівняно результати поточної моделі-реплікації та її прототипу, запропонованого Акстелом та Аксельродом у методі «стикування моделей». Рис.:7. Табл.: 2. Бібліогр.:11.

УДК 518.58:519.2:504

Агрессивное и мирное поведение в многоагентных системах в клеточной среде / Завертаний В.В., Макаренко А.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 36–44.

В агентно-ориентированном подходе выделена консолидация большого разнообразия моделей. Разработанные модели многих исследователей являются однотипными по основным признакам, однако в сфере сложных адаптивных систем таких, как искусственные экологии незначительное отличие в архитектуре или разница значений параметров могут иметь достаточно большое влияние на эмерджентные характеристики модели. Первооткрывателями агентного подхода в искусственных экосистемах Робертом Акстелом и Робертом Аксельродом отмечено, что имеющееся множество многоагентных моделей требует внедрения техник и методик, которые позволят обобщить их результаты. Представлена модель, которая является репликацией уже существующей и подобна классическим моделям искусственной жизни в клеточном пространстве. Исследована зависимость агрессивного и мирного поведения в зависимости от количества ресурса, поступающего в систему. Проведено сравнение результатов текущей модели-репликации и ее прототипа, предложенного Акстелом и Аксельродом в методе «стыковка моделей». Рис.:7. Табл.: 2. Библиогр.:11.

УДК 519.713: 504.064

Информационные особенности оценивания соответствия состояния экологичности системных объектов / Козуля Т.В., Шаронова Н.В., Белова М.А., Козуля М.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 45–57.

Обоснована необходимость создания новых основ экологического анализа в условиях теоретически-практической реализации основ устойчивого развития, внедрения синергетической, энтропийно-информационной составляющих в методическое обеспечение системы комплексного оценивания экологичности системных объектов. Методическое обеспечение комплексного оценивания качества окружающей природной среды предоставлено в виде комплексирования методик главных компонент и компараторной идентификации при многоплановой исходной информации о характеристиках системного объекта. Практическое применение предоставленных предложений рассмотрено на примере исследования техногенно-нагруженных региональных образований с использованием мониторинговой информации. Рис.: 7. Табл.: 1. Библиогр.: 20 назв.

UDC 519.713: 504.064

Information characteristics of an assessment of the compliance status of environmental friendliness of system objects / Kozulia T.V., Sharonova N.V., Belova M.O., Kozulia M.M. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 45–57.

In this paper, the necessity for creating new ecological principles in terms of the theoretical analysis and practical implementation of the foundations of sustainable development, implementing a synergetic, entropy-information component in the methodological support of integrated environmental assessment system objects was justified. Supportive comprehensive assessment of environmental quality is provided in the form of

integration methods of principal components and comparing identification when using diverse initial information on the characteristics of the system object. A practical application of presented proposals is considered using as an example the study of technologically loaded regional structures using monitoring information. Fig.: 7. Tabl.: 1. Refs.: 20 titles.

УДК 519.63.001.57

Системный подход к математическому моделированию фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных LEF-пластах / Гладкая Е.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 58–73.

На основе синтеза методов комплексного анализа и численно-аналитических методов суммарных представлений разработан конструктивный системный подход к математическому моделированию фильтрационных процессов для трех- и четырехсвязных криволинейных LEF-областей, ограниченных эквипотенциальными линиями. Решена проблема неоднозначности построения области комплексного квазипотенциала для многосвязных LEF-областей, моделирующих взаимодействие нагнетательных и эксплуатационных скважин в нефтегазовых пластах. Предложена классификация вариантов формирования течения, позволяющая унифицировать постановки задач на обращение квазиконформных отображений и их разностные аналоги. Построен алгоритм решения задачи, по которому автоматически строятся динамические сетки, находятся неизвестные линии раздела течения и точки «приостановки» потока, исчисляются фильтрационные расходы и т. д. Приведены числовые расчеты для одного из вариантов формирования течения. Рис.: 4. Библиогр.: 9 назв.

UDC 519.63.001.57

Systematic approach to mathematical modeling of filtration processes in multiply-connected curvilinear LEF-layers / Hladka O.M. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 58–73.

The constructive systematic approach to mathematical modeling of filtration processes for the three- and four-connected curvilinear LEF-domains bounded equipotential lines was developed on the basis of synthesis of methods of complex analysis and numerical-analytical methods of summary representations. The problem of ambiguity of constructing the domain of the complex quasi-potential for multiply-connected LEF-domains that model the interaction of injection and production wells in oil and gas reservoirs was solved. The classification of cases of the flow forming, that allows to unify the formulation of problems of inversion of quasiconformal mappings and their difference analogues. The algorithm for solving the problem was constructed that automatically constructs the dynamic grids, finds unknown separation lines and points of “suspension” of the flow, calculates the total flow, and so on. The numerical calculations for one of the variants of the flow formation are presented. Fig.: 4. Refs.: 9 titles.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ
УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM
CONTROL AND THEORY OF GAMES

УДК 519.85

Исследование задач нахождения оптимального распределения между предприятиями / Яковлева А.П., Курдуп И.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 74–80.

Рассмотрена задача о распределении ресурсов между предприятиями разных отраслей в составе одного экономического конгломерата. Приведены различные способы постановки задачи и ввода исходных данных с учетом возможности построения собственных функций отдачи, управляющего действия и времени. Ключевым методом решения задачи является аппарат динамического программирования Беллмана[1]. Исследована альтернативная формализация задачи, в которой фазовые и управляющие переменные могут принимать бесконечное количество значе-

ний, что делает невозможным применение стандартных для динамического программирования таблиц и приводит к необходимости аналитических расчетов. Предложен ряд ограничений, что сводят функции отдачи к виду, который удовлетворяет условиям производственных функций. Табл.: 7. Библиогр.: 7 назв.

UDC 519.85

Investigation of the problems of the allocation of resources among enterprises / Iakovleva A.P., Kurdup I.O. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 74–80.

The problem of the allocation of resources among enterprises from different industries as parts of the economic conglomerate is considered. The different ways of stating the problem and inputting the data, taking into account the possibility of building their own functions of return, control action, and time are presented. The key method of solving the problem is the dynamic programming [1]. Also, we investigated an alternative formalization of the problem in which the phase and control variables may take an infinite number of values, which made it impossible to use standard tables for dynamic programming and lead to analytical calculations. In the latter case, we provide a number of limitations, which convert the function of return to the form that satisfies the conditions of production functions. Tabl.: 7. Refs.: 7 titles.

УДК 519.7, 519.8

Оптимизация планирования распределения заданий и транспортировки пакетов данных в распределенной вычислительной сети / Краснюк Р.П., Цегелик Г.Г. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 81–91.

Рассмотрены задачи объёмно-календарного планирования распределения заданий и транспортировки пакетов данных в распределенной вычислительной сети. Выполнена математическая постановка, сформулированы эффективные вычислительные алгоритмы и получены приближенные решения этих задач. Показана эффективность предложенных вычислительных алгоритмов при построении приближенного решения одно- и многокритериальных задач оптимизации на основании сравнительного анализа использования этих алгоритмов на тестовых примерах. Сделан вывод относительно вычислительной эффективности предложенных алгоритмов с увеличением размерности задач. Табл.: 3. Библиогр.: 9 назв.

UDC 519.7, 519.8

The planning optimization of tasks distribution and data packets transportation in a distributed computer network / Krasniuk R.P., Tsegelyk G.G. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 81–91.

The problems of volume-scheduling of distribution tasks and transportation of data packets in a distributed computing network were studied. The mathematical statement was made, effective computational algorithms were developed, and approximate solutions of these problems were obtained. The efficiency was shown of the proposed computational algorithms to build an approximate solution for single- and multi optimization problems on the basis of a comparative analysis of the application of these algorithms using test examples. The conclusion was made about the time complexity of proposed algorithms. Tabl.: 3. Refs.: 9 titles.

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ
СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND
CONTROL IN CONDITIONS OF RISK AND
UNCERTAINTY CONDITIONS

УДК 004.932

Применение эпиполярной геометрии для стереоскопического анализа корональной волны / Павлюк Ю.Р., Подладчикова Е.В., Подладчиков В.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 92–103.

Исследована EUV волна с помощью эпиполярной геометрии. EUV волна до сих пор изучается, и относительно ее существует много гипотез. Восстановление структуры EUV волны позволило бы объяснить ее происхождение, физическую природу и оценить кинематические характеристики. Предложен подход, основанный на эпиполярной геометрии для решения проблемы идентификации и согласования объектов со стереоизображениями космических аппаратов и определения высоты волны. Показано, что существуют сегменты фронта волны, для которой задача установления соответствия становится некорректной и вырождается. Рис.: 5. Табл.: 2. Библиогр.: 7 назв.

UDC 004.932

Application of epipolar geometry for the stereoscopic analysis of coronal waves / Pavliuk Y.R., Podladchikova O.V., Podladchikov V.M. // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 2. — P. 92–103.

The purpose of this paper is to study the EUV waves using epipolar geometry. EUV wave is still investigated and remains a subject of continuous research. The recovery of spatial structure of EUV wave would allow to explain its origin, and to assess the physical nature of the kinematic characteristics. An approach was proposed based on epipolar geometry to solve the problem of identification and matching of objects in stereo images from a spacecraft and determine the height of the wave. Also, conditions were investigated when the matching problem becomes ill conditioned and degenerate. Fig.: 5. Tabl.: 2. Refs.: 7 titles.

УДК 519.816

Выявление и обработка неопределенностей в форме неполных данных методами интеллектуального анализа / Кузнецова Н.В. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 2. — С. 104–115.

Рассмотрены методы обработки пропущенных данных и предложена их классификация с учетом видов входных данных, типов и форматов данных, причин пропусков, обусловленных проявлением влияния неопределенности внешнего мира и объекта моделирования. Исследованы общие черты и отличия существующих методов обработки, определены особенности их использования для заполнения пропущенных данных в зависимости от характера неопределенностей. Показано, что традиционный подход заполнения пропусков средним значением не позволяет получить достоверные прогнозы во многих случаях из-за изменения характера выборки. Предложено использование методов интеллектуального анализа данных для обработки пропущенных значений и приведен пример заполнения пропусков данных методами регрессионного анализа, в частности с помощью оценок прогнозов. Рис.: 1. Библиогр.: 16 назв.

UDC 519.816

Identification and dealing with uncertainties in the form of incomplete data by data mining methods / Kuznietsova N.V. // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 2. — P. 104–115.

In this paper, the methods for processing missing data are reviewed. The classification of methods depending on input data, data types and formats, and causes of data incompleteness associated with influence of uncertainties of the outside world and modeling object is proposed. The commonalities and differences between existing methods are investigated. The application peculiarities of these methods for filling missing data depending on properties of uncertainties are determined. It is shown that the traditional approach for filling the missing data by average values does not allow obtaining correct forecasts in many cases due to changes in sample's properties. The usage of data mining methods technologies for dealing with missing data is proposed. An example of using regression methods is shown for filling missing data, in particular, using the forecast evaluation. Fig.: 1. Refs.: 16 titles.

УДК 519.22:626/627

Сценарний підхід і метод Байеса при оцінці ризиків системних аварій на гідроузлах / Романчук Е.Г., Стефанишин Д.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 116–124.

В рамках сценарного підходу к прогнозуванню техногенних аварій применен метод Байеса для оцінки ризиків системних аварій на гідроузлах. Сформульовані визначення і твердження, що стосуються оцінки ризиків техногенних аварій і здійснено загальну постановку задачі кількісної оцінки ризиків аварій на гідроузлах в рамках сценарного підходу з використанням байєсовського перетворення ймовірностей аварійних подій. Показано, що сценарний підхід з використанням байєсовського перетворення ймовірностей дозволяє оцінити повний (суммарний) ризик системної аварії на гідроузлі, яка може статися через довільні, в тому числі і сумісні, аварійні події з різними наслідками, за певними модельними, несумісними сценаріями її виникнення і протікання, що формують повну групу подій. Библиогр.: 25 назв.

UDC 519.22:626/627

The scenario approach and the Bayesian method in assessing the risks of system accidents at hydraulic structures / Romanchuk K.G., Stefanyshyn D.V. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 116–124.

Within the scenario approach to forecasting technogenic accidents, the Bayesian method was used to assess the risks of system failures at hydraulic structures. The definitions and assertions relating to the risk of technogenic accidents within the scenario approach were formulated, and a general statement of the problem to quantify the risk of accidents at hydraulic structures within the scenario approach using Bayesian transformation of probabilities of emergency events was performed. It is shown that the scenario approach that uses Bayesian transformation of probabilities allows assessing the total (summary) risk of a system accident at hydraulic structures that can occur due to arbitrary events, including simultaneous, emergency events with different consequences, according to certain model incompatible scenarios of the origin and course of the accident, which form a complete group of events. Refs.: 25 titles.

НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ,
ІНФОРМАЦІЇ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER
SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING

УДК 519.6

Послідовності функцій і ряди Тейлора з нечітким комплексним аргументом / Спекторський І.Я. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 125–140.

Розглянуто функціональні послідовності $f_n(A)$ комплексних аналітичних функцій з нечітким комплексним числом A як аргументом; припускається збіжність $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ як рівномірна на кожному крузі всередині $\text{supp } A$. Унаслідок аналітичності виконуються умови поточної збіжності похідних, а також скінченності кількості розв'язків рівняння $f(z) = w$ відносно z для кожного w на кожному крузі всередині $\text{supp } A$. Запропоновано достатні умови збіжності $f_n(A)$ як поточної збіжності послідовності функцій належності: доведено збіжність $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ у точках $w \in \mathbb{C}$, окрім таких $w = f(z)$, що z — точка розриву $\mu_A(z)$, або $f'(z) = 0$. Як окремий випадок послідовності $f_n(A)$ розглянуто узагальнення конструкції ряду Тейлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$ для аналітичної функції $f(z)$ на випадок нечіткого аргумента $z = A$. Збіжність ряду розгля-

нуто як поточкову збіжність послідовності функцій належності часткових сум $\mu_{S_n(A)}(w)$, де $S_n(z) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$. Табл.: 1. Бібліогр.: 15 назв.

UDC 519/6

Functional sequences and Taylor series with a fuzzy complex number as an argument / Spectorsky I.Ya. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 2. — P. 125–140.

This article considers functional sequences $f_n(A)$ with fuzzy complex number A for an argument. The convergences $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ are assumed to be uniform inside each circle $\text{supp } A$. Due to analyticity, the conditions of point-wise convergence of derivatives and finiteness of the number of solutions for equation $f(z) = w$ with respect to z for each w inside each circle $\text{supp } A$ are satisfied. The paper proposes the sufficient conditions for the convergence $f_n(A)$ in the sense that the sequence of membership functions $\mu_{f_n(A)}(w)$ converges point-wise. The convergence $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(w) = \mu_{f(A)}(w)$ is proved for all points $w \in \mathbb{C}$, except such $w = f(z)$, that z is a discontinuity point of $\mu_A(z)$, or $f'(z) = 0$. As a particular case of a sequence $f_n(A)$, the generalization of Taylor series $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$ is considered for an analytical function $f(z)$ for the case of fuzzy complex argument $z = A$. The convergence of the series is considered in the sense of point-wise convergence of the partial sum $\mu_{S_n(A)}(w)$, where $S_n(z) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$. Табл.: 1. Refs.: 15 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Білова Марія Олексіївна,

аспірантка кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Гладка Олена Миколаївна,

кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Національного університету водного господарства та природокористування, Україна, Рівне

Забєлін Станіслав Ігорович,

студент Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Завертаний Валентин Вікторович,

аспірант Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Козуля Марія Михайлівна,

аспірантка кафедри інтелектуальних комп'ютерних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Козуля Тетяна Володимирівна,

доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Краснюк Роман Петрович,

аспірант факультету прикладної математики на інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка, Україна, Львів

Кузнєцова Наталія Володимирівна,

кандидат технічних наук, старший викладач Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Курдуп Іван Олександрович,

студент Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Макаренко Олександр Сергійович,

професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу прикладного нелінійного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Романчук Катерина Геннадіївна,

аспірантка Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

Павлюк Юлія Русланівна,

студентка Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Подладчіков Володимир Миколайович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Подладчікова Олена Володимирівна,

доктор наук, старший науковий співробітник Бельгійської королівської обсерваторії, Бельгія, Брюссель

Сергієнко Анатолій Михайлович,

старший науковий співробітник, доктор технічних наук, старший науковий співробітник кафедри обчислювальної техніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Сімоненко Андрій Валерійович,

асистент кафедри обчислювальної техніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Сімоненко Валерій Павлович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри обчислювальної техніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Спекторський Ігор Якович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Статкевич Віталій Михайлович,

кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник відділу прикладного нелінійного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Стефанишин Дмитро Володимирович,

доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

Цегелик Григорій Григорович,

професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів Львівського національного університету імені Івана Франка, Україна, Львів

Шаронова Наталія Валеріївна,

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри інтелектуальних комп'ютерних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Яковлева Алла Петрівна,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ