

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ» НТУУ «КПІ»
МОН ТА НАН УКРАЇНИ

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО–ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 3

2016

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, проф., д.т.н., Україна

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Т.Л. СААТІ, проф., США

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

Навчально-науковий комплекс

«Інститут прикладного системного аналізу»

НТУУ «КПІ» МОН та НАН України

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах**

• **Теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень**

• **Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL-SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
AT THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE «KPI»
OF MES AND NAS OF UKRAINE

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 3

2016

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Prof., Ukraine

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,
Russia

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

T.L. SAATY, Prof., USA

L. SAKALAUŠKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Educational-Scientific Complex
«Institute for Applied System Analysis» at the
National Technical University of Ukraine «KPI»
of MES and NAS of Ukraine
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support**

• **Methods of optimization, optimum control and theory of games**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «КПІ», директор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНТІ РАН, РІНЦ.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідувач редакцією **С.М. Шевченко**
Редактор **Р.М. Шульженко**
Молодший редактор **Л.О. Тарин**
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Пагіоха**

Підписано до друку 26.09.2016. Формат 70x108/16.

Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

Видавництво та поліграфія ВПК «Політехніка»

ВПІ НТУУ «КПІ»

03056, Київ–56, просп. Перемоги, 37, корп. 15

Dear Readers!

The Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is Rector of the National Technical University of Ukraine «KPI», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

3 • 2016

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

- Мельник І.В., Тугай Б.А., Тугай С.Б.* Моделювання та апроксимація залежності струму електронної гармати високовольтного тліючого розряду від напруги на обмотці електромагнітного натікача як елемента газодинамічної системи керування 7
- Гладун А.Я., Рогушина Ю.В.* Застосування онтологічного аналізу для оцінювання компетентності фахівців з розроблення національних стандартів 19

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

- Yoshio Matsuki, Petro I. Bidiuk* Empirical analysis of Chernobyl nuclear reactor core for 5 seconds before the explosion 33
- Симоненко В.П., Сергиенко А.М.* Динамическое распределение работ по ресурсам в неоднородной системе с ограничениями реального времени 42

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

- Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д., Стефанишин Д.В.* Прийняття рішень у природокористуванні з урахуванням ризику невикористаних можливостей на підставі попарного порівняння альтернатив 51
- Терпіль Є.О., Макаренко О.С.* Аналіз розподілу електоральних полів з використанням мережевих структур 63

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

- Кірік О.Є.* Розв'язання нелінійних оптимізаційних задач розподілу ресурсів у великих блочно-структурованих системах зі зв'язуючими параметрами 72

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

- Гарашенко Ф.Г., Сопронюк О.Л.* Аналіз практичної стійкості та чутливості лінійних динамічних систем зі зміною вимірності фазового простору 86
- Андреев Н.В., Статкевич В.М.* Некоторые задачи управления неоднородными процессами рождения и гибели 101
- Кирилюк В.С., Левчук О.И.* Математическое моделирование контактного взаимодействия жесткой основы с приповерхностной осесимметричной выемкой и электроупругого полупространства 118
- Zrazhevskya N.G., Zrazhevsky A.G.* Classification of methods for risk measures VaR and CVaR calculation and estimation 126
- Реферати 142
- Відомості про авторів 149

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

3 • 2016

CONTENTS

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

Melnyk I.V., Tuhai B.A., Tuhai S.B. Simulation and approximation of dependence of the current of the high voltage glow discharge electron gun from the voltage on the coil of electromagnetic valve as the element of a gas-dynamic control system 7

Gladun A.Ya., Rogushina J.V. Use of ontological analysis for evaluation of expert competences in the domain of national standards development 19

DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS

Yoshio Matsuki, Petro I. Bidyuk Empirical analysis of Chernobyl nuclear reactor core for 5 seconds before the explosion 33

Simonenko V.P., Sergiyenko A.M. Dynamical task scheduling in the heterogeneous system with the real time limitations 42

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING SUPPORT

Stefanyshyna-Gavryliuk Yu.D., Stefanyshyn D.V. Decision-making in natural resources use taking into account the risk of lost opportunities based on pairwise comparison of alternatives 51

Terpil I.O., Makarenko O.S. Analysis of the distribution of electoral fields using network structures 63

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM CONTROL AND THEORY OF GAMES

Kirik O.E. Solving resource distribution nonlinear optimization problems in large block-structured systems with binding parameters 72

MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

Garashenko F.G., Soproniyk O.L. Analysis of the practical stability and sensitivity of linear dynamical systems with change of phase space measurability 86

Andreev N.V., Statkevych V.M. Some control problems for non-homogeneous birth-death processes 101

Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. Mathematical modeling of contact interaction of rigid base with surface axially-symmetric groove and electroelastic half-space 118

Zrazhevskaya N.G., Zrazhevsky A.G. Classification of methods for risk measures VaR and CVaR calculation and estimation 126

References 142

Information about the authors 149

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ
СТРУМУ ЕЛЕКТРОННОЇ ГАРМАТИ ВИСОКОВОЛЬТНОГО
ТЛЮЧОГО РОЗРЯДУ ВІД НАПРУГИ НА ОБМОТЦІ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО НАТІКАЧА ЯК ЕЛЕМЕНТА
ГАЗОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ**

І.В. МЕЛЬНИК, Б.А. ТУГАЙ, С.Б. ТУГАЙ

Анотація. Розглянуто спосіб числового розрахунку залежності струму електронної гармати високовольтного тліючого розряду від параметрів електромагнітного натікача як елемента газодинамічної системи керування. Знайдено аналітичне співвідношення, за допомогою якого можна з високою точністю апроксимувати залежність струму гармати від напруги на обмотці електромагнітного натікача. Отримані результати становлять інтерес для проектувальників електронно-променевого технологічного обладнання.

Ключові слова: електронна гармата високовольтного тліючого розряду, газодинамічна система керування струмом розряду, електромагнітний натікач, дозுவальний пристрій.

ВСТУП

Сучасні електронно-променеві технології, які широко застосовуються в електроніці, приладобудуванні, машинобудуванні та в металургії, потребують розроблення та впровадження нових типів джерел електронів. До таких джерел електронів належать джерела електронів високовольтного тліючого розряду (ВТР), які вирізняються відносною простотою, низькою вартістю, а також високою надійністю та стабільністю роботи в різному газовому середовищі, зокрема в середовищі інертних та активних технологічних газів [1–5]. Фізичні основи функціонування джерел електронів ВТР полягають у тому, що під дією бомбардування прискореними іонами з поверхні катода емітуються вільні електрони, які прискорюються в електричному полі катодного падіння потенціалу. Головною фізичною особливістю існування ВТР є наявність об'єму анодної плазми, яка є квазінейтральною і має яскраво виражену межу [1]. Сформований та сфокусований електронний пучок виводиться в технологічну камеру, де він використовується для термічного оброблення виробів. Принцип роботи джерел електронів ВТР наочно проілюстровано на рис. 1 [1, 2].

Незважаючи на відносно невисоку питому потужність електронного пучка, який формується у ВТР, газорозрядні джерела електронів мають певні переваги перед джерелами електронів із розжарюваними катодами, які зазвичай використовуються у промисловості. Зокрема, джерела електронів ВТР забезпечують формування електронних пучків зі складною геометричною формою, мають великий термін роботи холодних катодів, які, до речі, легко замінюються, можуть стабільно працювати у широкому діапазоні тиску та в різному газовому середовищі. Використання джерел електронів ВТР дозволяє також значною мірою спростити технологічне електронно-променеове обладнання [1 – 5].

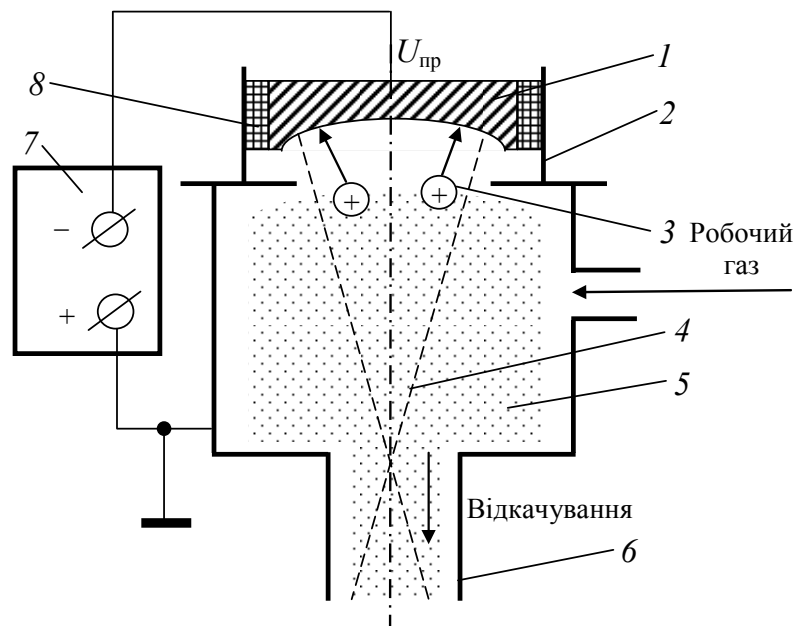


Рис. 1. Ілюстрація принципу формування електронного пучка в гарматах ВТР: 1 — катод; 2 — анод; 3 — іонний потік; 4 — електронний пучок; 5 — анодна плазма; 6 — променепровід; 7 — високовольтне джерело живлення; 8 — ізолятор

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Однією із головних проблем використання джерел електронів ВТР у промисловому технологічному обладнанні є необхідність стабілізації потужності електронного пучка. За умови постійної напруги горіння розряду ця проблема зводиться до стабілізації його струму. Зазвичай для вирішення цієї проблеми використовують газодинамічні системи керування струмом розряду, принцип дії яких полягає у стабілізації струму розряду через зміну тиску в розрядному проміжку, що реалізується шляхом регулювання вхідного потоку газу в камеру джерела електронів [6 – 8]. Проте сьогодні проблема розроблення газорозрядних систем керування струмом ВТР полягає в тому, що досі немає точних та адекватних математичних моделей, які пов'язували б значення струму ВТР із параметрами регулювального елемента, що змінює газовий потік. Розроблення такої моделі є метою цієї роботи.

ФУНКЦІОНАЛЬНА МОДЕЛЬ ГАЗОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ СТРУМОМ РОЗРЯДУ

Вольт-амперна характеристика джерел електронів ВТР описується аналітичним співвідношенням [1, 6]

$$I_{\Gamma} = ap_{\Gamma}^m U_{\text{пр}}^n, \quad (1)$$

де I_{Γ} — струм джерела електронів; p_{Γ} — тиск у камері джерела електронів; $U_{\text{пр}}$ — прискорювальна напруга; a , m , n — напівемпіричні сталі, які залежать від роду газу, матеріалу катода та від геометрії електродної системи. Коефіцієнти m та n у співвідношенні (1) зазвичай змінюються в діапазоні 2 – 4 [1, 6].

Газодинамічний спосіб керування струмом газорозрядних джерел електронів полягає в тому, що струм розряду змінюється через регулювання вхідного газового потоку в камеру електронної гармати за умови її неперервного відкачування. Цей спосіб регулювання зумовлений ступеневою залежністю струму розряду від тиску газу, яка визначається співвідношенням (1).

Кероване натікання газу в камеру електронної гармати здійснюється за допомогою натікачів, які можуть працювати як у ручному, так і в автоматичному режимі роботи [7, 8]. Проте вимоги до стабільності більшості технологічних процесів електронно-променевої технології потребують застосування автоматичних систем керування з малою сталою часу [7, 8].

Схему функціональної моделі типової газодинамічної системи автоматичного керування струмом ВТР з електромагнітним натікачем показано на рис. 2 [7, 8].

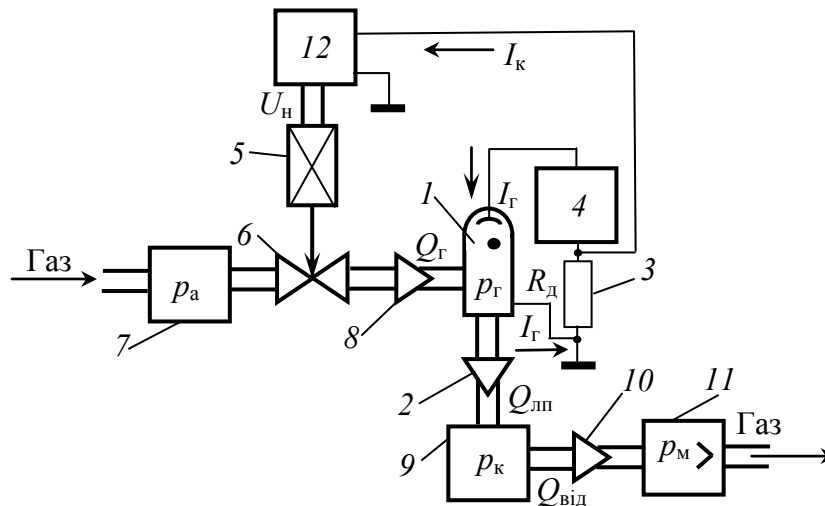


Рис. 2. Функціональна модель системи автоматичного керування струмом електронної гармати ВТР: 1 — електронна гармата; 2 — променепровід; 3 — датчик струму гармати; 4 — електронний регулятор; 5 — натікач газу з електромагнітним приводом; 6 — дозувальний пристрій натікача; 7 — газова камера натікача; 8 — канал для напускання газу в електронну гармату; 9 — вакуумна камера; 10 — вакуумопровід; 11 — вакуумний насос; 12 — система керування

У цій схемі датчиком струму електронної гармати є низькоомний опір 3, який послідовно підключений у низьковольтну ділянку живлення. Електромагнітний натікач має прямоходовий електромагнітний привід, який жорстко з'єднаний з рухомою частиною дозувального пристрою. Натікач працює в аналоговому режимі, що забезпечує високу стабільність та надійність його роботи. Відкачування електронної гармати разом з технологічною камерою здійснюється безперервно. Конструктивну схему дозувального пристрою натікача зображено на рис. 3.

У процесі роботи гармати сигнал з датчика струму надходить в електронний блок керування 4. Тут вхідний сигнал порівнюється із заданою опорною напругою, підсилюється і сформований різницевий сигнал надходить на обмотку електромагнітного натікача. Таким чином, залежно від величини сигналу керувальної дії натікач змінює потік газу в камеру електронної гармати, яка безперервно відкачується. Тобто в результаті роботи газодинамічної системи керування у камері електронної гармати встановлюється такий тиск, який відповідає наперед заданому значенню струму гармати.

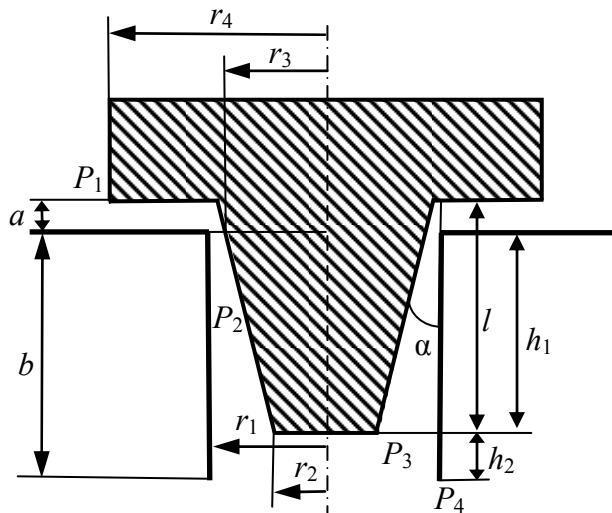


Рис. 3. Конструктивна схема дозувального пристрою та його головні геометричні розміри

Незважаючи на уявну простоту розглянутого способу керування через інерційність газодинамічних процесів протікання газу та приводів виконавальних пристроїв, помітно знижується швидкість регулювання струму розряду, що обмежує динамічні характеристики системи і збільшує сталу часу керування [7, 8]. Складність розроблення ефективних систем керування значною мірою стримує впровадження у промисловість перспективних електронних гармат ВТР, незважаючи на істотні їх переваги.

Поліпшити характеристики газодинамічних систем керування можна вибором оптимальних значень параметрів системи відкачування та напускання газу, параметрів налаштування електронного регулятора, а також розроблення електромагнітних натікачів із відповідними газодинамічними та електромеханічними характеристиками. Вирішення цієї складної науково-технічної проблеми відчутно спрощується з використанням засобів комп'ютерного моделювання [7, 8]. Проте існуючі математичні моделі газодинамічних систем керування не враховують нелінійність залежності струму ВТР від напруги на вході натікача, що значно ускладнює можливості аналізу роботи системи керування у динамічному режимі. Пошук таких залежностей є предметом дослідження цієї роботи.

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ КЕРУВАННЯ СТРУМОМ ЕЛЕКТРОННОЇ ГАРМАТИ ВИСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЮЧОГО РОЗРЯДУ

Під час формування математичної моделі системи керування, зображеної на рис. 2, газодинамічна система відкачування та напускання газу розглядалась як система із зосередженими параметрами, а об'єми променепроводів та виділення газу з робочих поверхонь не враховувались. Також передбачалось, що швидкодія вакуумного насоса 11 є сталою величиною в широкому діапазоні робочих тисків, що взагалі характерно для вакуумного обладнання, яке використовується у сучасному електронно-променевому устаткуванні. Узагальнену математичну модель газодинамічної системи автоматичного керування струмом електронних гармат ВТР можна записати у вигляді системи наступних алгебро-диференціальних рівнянь [7, 8]:

- 1) рівняння електротехніки, які описують баланс струму на обмотці натікача;
- 2) рівняння механіки, які описують динаміку приводу натікача;
- 3) рівняння газодинаміки, які описують газодинамічні властивості дозувального пристрою натікача залежно від його геометричних параметрів, наведених на рис. 3;
- 4) рівняння вакуумної техніки, які описують баланс газових потоків у вакуумній системі.

Для формованої системи диференціальних рівнянь вхідним параметром моделі має бути керувальна напруга на натікачі U_n , а вихідним параметром — струм гармати I_f (див. рис. 2).

Динаміка електромагнітного приводу натікача із прямим рухом визначається системою із двох алгебро-диференціальних рівнянь, а саме: рівнянням балансу напруги у колі живлення електромагніта та умовою механічної рівноваги підпруженого штока натікача. За умови малих відхилень положення штока ці рівняння записуються таким чином [7, 8]:

$$\begin{aligned} R_n \Delta I_n + L_n \frac{d\Delta I_n}{dt} &= \Delta U_n; \\ m_n \frac{d^2 \Delta l_n}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \Delta F_e - \Delta F_p - \Delta F_T, \end{aligned} \quad (2)$$

де R_n , L_n — активний опір та індуктивність обмотки натікача; I_n , U_n — струм та напруга на його обмотці; m_n — маса рухомої частини штока натікача; l_n — координата, яка визначає положення якоря зі штоком відносно сидла клапана (рис. 3); F_e — тягова сила електромагніта; F_p — сила пружності пружини; F_T — сила тертя. Величини ΔF_e , ΔF_p та ΔF_T розраховуються із співвідношень [7, 8]:

$$\Delta F_e = C_e \Delta I_n, \quad \Delta F_p = C_p \Delta l_n, \quad \Delta F_T = C_k \frac{dl_n}{dt}, \quad (3)$$

де C_e — крутизна тягової характеристики електромагніта; C_p — коефіцієнт жорсткості пружини; C_k — коефіцієнт тертя.

Як видно із рис. 3, дозувальний пристрій натікача являє собою клапан, пропускна здатність якого залежить від положення якоря l_n та від значень тиску на вході елементів дозувального пристрою P_1 , P_2 , P_3 і P_4 . Відповідна

математична модель будується на основі рівнянь вакуумної техніки [9–12] (наведена у наступному підрозділі роботи).

Математичну модель газодинамічної системи гармати із системою відкачування можна записати у вигляді системи диференціальних рівнянь, які описують умови балансу газових потоків у розрядній камері гармати та у технологічній камері електронно-променевого устаткування. Як видно із рис. 2, основними потоками, які визначають тиск у розрядній камері гармати, є регульований потік газу Q_r , що надходить у гармату через натікач та вакуумопровід, та потік газу Q_l , який відповідає відкачуванню газу із гармати через променепровід. Тоді рівняння балансу газових потоків у розрядній камері гармати можна записати у вигляді [9 – 12]:

$$V_r \frac{dp_r}{dt} = Q_r - Q_l, \quad (4)$$

де V_r — об'єм розрядної камери гармати; p_r — тиск у розрядній камері.

Регульований потік газу в розрядну камеру Q_r визначається згідно з основним рівнянням вакуумної техніки через провідність каналу S_r , по якому надходить газ, та через різницю тисків P_1 і P_4 (рис. 3), тобто [9–12]:

$$Q_r = S_r (P_1 - P_4) = S_r (p_a - p_r), \quad (5)$$

де P_a — атмосферний тиск; p_r — тиск камер гармати.

Відповідно потік газу, який відкачується із гармати через променепровід, визначається через провідність променепроводу та різницю тисків у електронній гарматі та у вакуумній камері електронно-променевої установки, а саме [9 – 12]:

$$Q_l = S_{пр} (p_r - p_k), \quad (6)$$

де p_k — тиск у технологічній камері.

Розглянемо основні газові потоки, які є складовими частинами рівнянь (5), (6) і через які визначається тиск у вакуумній камері технологічної установки. Згідно із рис. 2, такими потоками є потік, який надходить із гармати до вакуумної камери $Q_{пр}$, і потік Q_0 , який відповідає відкачуванню газу із камери за допомогою вакуумного насоса. Рівняння балансу газових потоків у вакуумній камері технологічної установки можна подати у вигляді [9–12]:

$$V_k \frac{dp_k}{dt} = Q_l - Q_0, \quad (7)$$

де V_k — об'єм вакуумної камери.

Потік газу Q_0 , який відповідає відкачуванню газу із камери, є пропорційним швидкості відкачування S_0 і тиску в камері p_k [9 – 12]:

$$Q_0 = S_0 p_k, \quad (8)$$

а швидкість відкачування S_0 визначається через швидкодію вакуумного насоса S_n та провідність S_b вакуумопроводу, який з'єднує насос із вакуумною камерою через співвідношення [9–12]:

$$\frac{1}{S_0} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_b}. \quad (9)$$

У свою чергу, швидкодія вакуумного насоса

$$S_H = S_p \left(1 - \frac{p_M}{p_K} \right), \quad (10)$$

де S_p — розрахункове значення швидкодії насоса; p_M — граничний можливий тиск у насосі [9–12]. Зазвичай параметри S_p і p_M наводяться у технічному паспорті на вакуумне обладнання. Ураховуючи співвідношення (9) і (10), формулу (8) можна переписати у вигляді [9 – 12]:

$$Q_0 = \frac{S_B S_p}{S_B + S_p} (p_K - p_M). \quad (11)$$

Системі рівнянь (1) – (11) можна надати загального вигляду [7, 8]:

$$\begin{cases} R_H I_H + L_H \frac{dI_H}{dt} = U_H, \\ m_H \frac{d^2 l_H}{dt^2} = C_e I_H - C_{пH} I_H - C_K \frac{dl_H}{dt}, \\ S_\Gamma = S_\Gamma(t), \\ V_\Gamma \frac{dp_\Gamma}{dt} = S_\Gamma (p_a - p_\Gamma) - S_{л} (p_\Gamma - p_K), \\ V_K \frac{dp_K}{dt} = S_{пр} (p_\Gamma - p_K) - \frac{S_B S_p}{S_B + S_p} (p_K - p_M), \\ I_\Gamma = a p_\Gamma^m U_{пр}^n. \end{cases} \quad (12)$$

Для розв’язання системи рівнянь (12) вихідним параметром об’єкта керування є струм розряду гармати I_Γ . Проте головну особливість з математичної точки зору має рівняння вхідного газового потоку $S_\Gamma = S_\Gamma(t)$, яке описує перехідну характеристику натікача як керувального елемента системи. У працях [7, 8] розглядалися узагальнені способи числового розв’язання системи (12) у лінійному наближенні, проте головні проблеми функціонування газодинамічних систем керування струмом через зміну тиску зумовлені саме нелінійним характером системи (12). Зокрема, підбір параметрів натікача та стійкого алгоритму керування пов’язаний із нелінійним характером залежності $I_\Gamma(U_H)$ [7, 8]. Тому метою цієї роботи є дослідження узагальненої залежності $I_\Gamma(U_H)$ у статичному режимі для розімкненої системи керування без зворотного зв’язку.

АНАЛІЗ РОБОТИ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ БЕЗ ЗВОРОТНОГО ЗВ’ЯЗКУ У СТАТИЧНОМУ РЕЖИМІ

Відповідно до узагальненої системи рівнянь (12) роботу електромагнітного натікача у статичному режимі можна описати спрощеною системою рівнянь:

$$\begin{cases} R_H I_H = U_H, \\ C_e I_H - I_H C_{пH} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для конструкції дозувального пристрою натікача, схему якого зображено на рис. 3, подамо у математичній формі зв'язок між геометричними конструктивними параметрами [9]:

$$b = h_1 + h_2, r_3 = r_1 - \alpha a, \alpha = \arctg\left(\frac{r_1 - r_2}{l}\right), r_{\text{cep}} = \frac{r_3 + r_2}{2}. \quad (14)$$

З урахуванням системи рівнянь (13) можна записати [9]:

$$a = b - \frac{U_{\text{н}} C_{\text{е}}}{R_{\text{н}} C_{\text{п}}}. \quad (15)$$

Одним з найскладніших завдань моделювання системи керування струмом електронної гармати ВТР є визначення вакуумної провідності дозувального пристрою натікача. Загалом у літературі наводяться лише залежності вакуумної провідності від геометричних параметрів трубопроводів та від тиску газу лише для систем із простою геометрією, зокрема для циліндричних та конічних трубопроводів та для тонких діафрагм різного перерізу [10 – 12]. На основі цих літературних даних у праці [9] отримано аналітичні співвідношення для розрахунку вакуумної провідності дозувального пристрою натікача, показаного на рис. 3:

$$G_1 = \frac{1,445 \cdot 10^4 K_d(a) a^3}{\ln(r_4) - \ln(\alpha a)}, K_d(a) = \frac{a^2}{a^2 + 0,001},$$

$$G_2 = \frac{2,72 \cdot 10^3}{h_1} \left(4(r_1^4 - r_{\text{cep}}^4) - \frac{(r_1^2 - r_{\text{cep}}^2)}{\ln(r_1) - \ln(r_{\text{cep}})} \right), G_3 = 1,088 \cdot 10^4 \frac{r_1^4}{h_2}. \quad (16)$$

З урахуванням співвідношень (16) тиск на елементах дозувального пристрою можна визначити таким чином [9]:

$$P_2 = \sqrt{\frac{G_1 p_a^2 + \frac{G_2 \left(p_r^2 G_3 + \frac{p_a^2 G_1 G_2}{G_1 + G_2} \right)}{\left(G_3 + G_2 - \frac{G_2^2}{G_1 + G_2} \right)}}{G_1 + G_2}}, P_3 = \sqrt{\frac{\left(p_r^2 G_3 + \frac{p_a^2 G_1 G_2}{G_1 + G_2} \right)}{\left(G_3 + G_2 - \frac{G_2^2}{G_1 + G_2} \right)}}. \quad (17)$$

Тоді, згідно із співвідношеннями (16), (17), вакуумна провідність конструкції дозувального пристрою визначається з використанням основного рівняння вакуумної техніки [10 – 12]:

$$P_1 = p_a; U_1 = G_1(P_1 - P_2); U_2 = G_2(P_2 - P_3); U_3 = G_3(P_3 - p_r); \quad (18)$$

$$S_{\text{н}} = \frac{U_1 U_2 U_3}{U_1 + U_2 + U_3}.$$

Головна проблема розв'язування системи рівнянь (16) – (18) полягає в залежності значень тиску у співвідношеннях (17) від тиску в розрядній камері гармати p_r . Тому якщо система рівнянь (16) для провідностей елементів дозувального пристрою натікача, отримана у праці [9], є зімкнена і незалежна, системи рівнянь (17) і (18) є взаємопов'язаними. Значення тисків P_2 і P_3 на елементах конструкції дозувального пристрою натікача мож-

на визначати лише ітераційно з використанням числових методів [13]. Вважаючи, що згідно із фізикою горіння ВТР значення тиску p_r лежить у діапазоні 1–10 Па, систему рівнянь (17), (18) можна розв'язати методом золотого перерізу [13]. У комп'ютерній програмі, розробленій для моделювання газодинамічних систем керування струмом гармат ВТР, для обчислення значення p_r зазвичай достатньо п'яти-шести ітерацій. Отримані залежності струму гармати від напруги на натікачі для різних значень крутості тягової характеристики електромагніта C_e , опору обмотки R_n та прискорювальної напруги $U_{пр}$ наведено на рис. 4 а – в. Усі розрахунки виконувалися з використанням співвідношень (14)–(18) для таких геометричних параметрів дозувального пристрою: $b = 0,02$ м; $l = 0,03$ м; $r_4 = 0,02$ м; $r_1 = 0,001$ м; $r_2 = 0,0002$ м; $\alpha = 0,001$ рад.

Із наведених залежностей зрозуміло, що зі збільшенням крутості тягової характеристики електромагніта та коефіцієнта пружності пружини крутість залежності $I_r(U_n)$ також стає більшою. Це дає змогу стабілізувати струм керувальним сигналом меншої амплітуди за менший час, проте у цьому разі можливі сплески амплітуди струму гармати через виникнення ефекту перекерування [7, 8]. Тому в реальних системах керування зазвичай обирають параметри натікача із середнім кутом нахилу керувальної характеристики. Кут нахилу залежності $I_r(U_n)$ збільшується також зі зменшенням опору обмотки натікача R_n (рис. 4, б). Зрозуміло, що зі збільшенням прискорювальної напруги збільшуються струм гармати та крутизна керувальної характеристики (рис. 4, в). Варто зазначити, що на всіх керувальних характеристиках за умови великих значень напруги U_n кут нахилу значно зменшується, тобто електромагнітний натікач як керувальний елемент системи працює з ефектом насичення. Це зумовлено тим, що, як видно із рис. 3, за умови великих значень координати рухомої частини штока l_n , коли натікач уже майже повністю відкритий, газовий потік у розрядну камеру гармати майже не змінюється. Виконані розрахунки якісно цілком відповідають параметрам розробленої системи керування, кількісна розбіжність розрахункових та експериментальних даних не перевищувала 15–20%.

АПРОКСИМАЦІЯ КЕРУВАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ СТРУМОМ ГАЗОРОЗРЯДНОЇ ГАРМАТИ

Оскільки залежності, наведені на рис. 4, розраховані з використанням числових алгоритмів, для реалізації алгоритму керування на практиці важливо мати апроксимацію залежності $I_r = f(U_n)$ для заданих геометричних та конструктивних параметрів дозувального пристрою натікача. Аналіз отриманих функціональних залежностей $I_r(U_n)$ показав, що для такої апроксимації з невеликим значенням похибки можна використати функцію помилок із параметрами a_1 та a_2 [14]:

$$I_r = a_1 \Phi((a_2 U_n)^2) = \frac{2a_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{U_n} \exp(-(a_2 U)^2) dU. \quad (19)$$

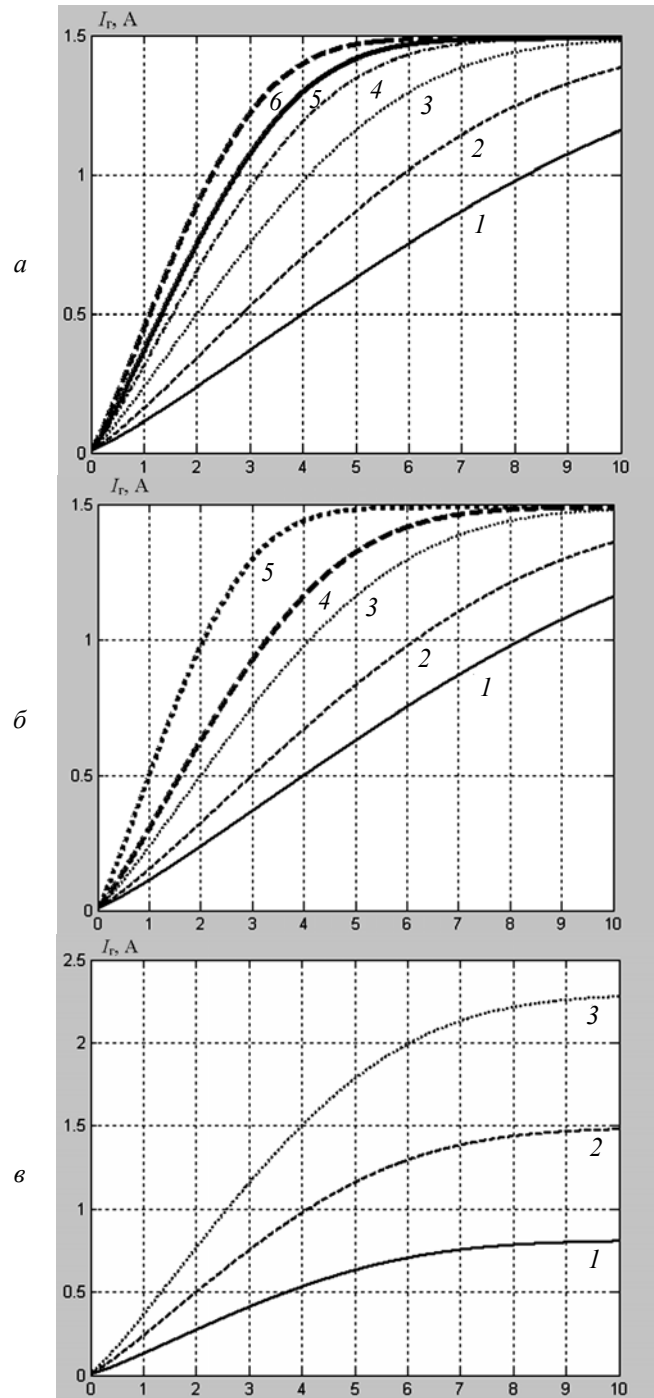


Рис. 4. Залежності струму електронної гармати ВТР від напруги на вході натікача для значень: крутості тягової характеристики електромагніта C_e (а), опору обмотки R_n (б), прискорювальної напруги $U_{пр}$ (в): а — $R_n = 10$ Ом, $U_{пр} = 15$ кВ, 1 — $C_e = 0,5$ кг/А, 2 — $C_e = 0,8$ кг/А, 3 — $C_e = 1$ кг/А, 4 — $C_e = 1,2$ кг/А, 5 — $C_e = 1,5$ кг/А, 6 — $C_e = 1,8$ кг/А; б — $C_e = 1$ кг/А, $U_{пр} = 15$ кВ, 1 — $R_n = 20$ Ом, 2 — $R_n = 15$ Ом, 3 — $R_n = 12$ Ом, 4 — $R_n = 10$, 5 — $R_n = 8$ Ом; в — $R_n = 10$ Ом, $C_e = 1$ кг/А, 1 — $U_{пр} = 10$ кВ, 2 — $U_{пр} = 15$ кВ, 3 — $U_{пр} = 20$ кВ

Наприклад, залежність 3, наведену на рис. 4, а, можна записати у вигляді функціональної залежності, заданої співвідношенням (19):

$$I_{\Gamma}(U_{\text{н}}) = 1,5 \Phi(0,175U_{\text{н}}) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{U_{\text{н}}} \exp(-0,030625U^2) dU. \quad (20)$$

Апроксимація даних проводилась за умови $a_1[\text{A}] = I_{\Gamma\text{max}}$, а значення коефіцієнта $a_2\left[\frac{1}{\text{B}}\right]$ визначалось з використанням засобів числових та аналітичних розрахунків системи MatLab за методикою, описаною у праці [6]. Отримана похибка апроксимації не перевищувала одиниць відсотків. На рис. 5 подано функцію $I_{\Gamma}(U_{\text{н}})$, яка відповідає залежності 3 на рис. 4, а, а також її апроксимацію з використанням співвідношення (20).

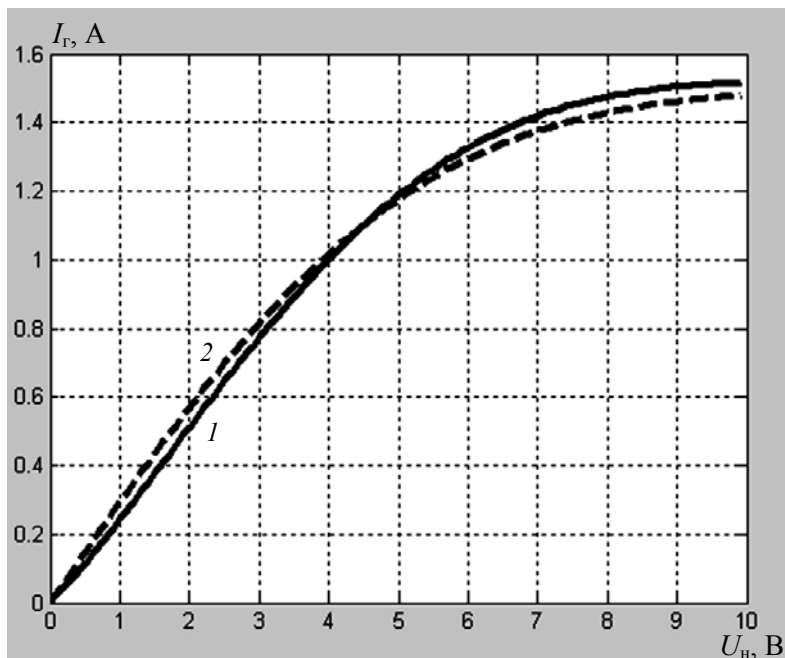


Рис. 5. Апроксимація залежності $I_{\Gamma}(U_{\text{н}})$ з використанням співвідношення (20): 1 — початкові значення; 2 — апроксимовані значення

ВИСНОВКИ

У роботі з використанням засобів комп'ютерного моделювання отримано залежності струму електронних гармат ВТР від напруги на електромагнітному натікачі для різних параметрів дозувального пристрою газодинамічної системи керування без зворотного зв'язку, а також знайдено аналітичну функцію, яка дозволяє апроксимувати ці залежності. Теоретичні дослідження показали, що похибка апроксимації для обраної аналітичної функції не перевищує кількох відсотків. Отримані в роботі результати є цікавими для спеціалістів, які займаються проектуванням газодинамічних систем керування для електронно-променевого технологічного обладнання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новиков А.А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой / А.А. Новиков. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 96 с.
2. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М.А. Завьялов, Ю.Е. Крейнфельд, А.А. Новиков, Л.П. Шантурин. — М.: Атомиздат, 1989. — 256 с.
3. Ладохин С.В. Электронно-лучевая плавка в литейном производстве / С.В. Ладохин, Н.И. Левитский, В.Б. Чернявский и др. — К.: Сталь, 2007. — 605 с.
4. Feinaeugle P. A new generation of plasma-based electron beam sources with high power density as a novel tool for high-rate PVD, Society of Vacuum Coaters / P. Feinaeugle, G. Mattausch, S. Schmidt, F.H. Roegner // 54-th Annual Technical Conference Proceedings, Chicago. — 2011. — P. 202–209.
5. Mattausch G. Gas discharge electron sources – proven and novel tools for thin-film technologies / G. Mattausch, B. Zimmermann, F. Fietzke etc. // Elektrotechnica and Electronica (E+E). — 2014. — 49, № 5–6. — P. 183–195.
6. Мельник І.В. Аппроксимация вольт-амперных характеристик технологических источников электронов высоковольтного тлеющего разряда с использованием средств системы MatLab / И.В. Мельник // Вестн. Херс. нац. техн. ун-та. — Херсон, 2009. — Вып. 2 (35). — С. 299–305.
7. Денбновецький С.В. Моделювання процесу автоматичного керування струмом газорозрядного електропроменевого нагрівача / С.В. Денбновецький, К.О. Костюченко, В.І. Мельник и др. // Електроніка і зв'язь. — 2014. — 9, № 22. — С. 15–17.
8. Denbnovetsky S.V. Model of control of glow discharge electron gun current for microelectronics production applications / S.V. Denbnovetsky, V.I. Melnyk, I.V. Melnyk, B.A. Tugay // Proceedings of SPIE. Sixth International Conference on Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics. — 2013. — Vol. 5065. — P. 64–76.
9. Мельник І.В. Исследование пропускной способности дозирующего устройства натекателя газа для газоразрядной электронной пушки / И.В. Мельник, С.Б. Тугай // Электроника и связь, № 5 (64), 2011. — С. 25–30.
10. Пипко А.И. Конструирование и расчет вакуумных систем / А.И. Пипко, В.Я. Плисковский, Е.А. Пенчко. — М.: Энергия, 1979. — 504 с.
11. Гейнце В. Введение в вакуумную технику: в 2 т. / В.М. Гейнце. — М.–Л.: Госэнергоиздат, 1960. — Т. 1. Физические основы вакуумной техники. — 511 с.
12. Тягунов Г.А. Основы расчета вакуумных систем / Г.А. Тягунов. — М.–Л.: Госэнергоиздат, 1948. — 148 с.
13. Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач / В.П. Васильев. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
14. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — М.: Наука, Гл. ред. Физико-математ. лит-ры, 1986. — 723 с.

Надійшла 04.04.2016

ЗАСТОСУВАННЯ ОНТОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ ФАХІВЦІВ З РОЗРОБЛЕННЯ НАЦІОНАЛЬНИХ СТАНДАРТІВ

А.Я. ГЛАДУН, Ю.В. РОГУШИНА

Анотація. Необхідність і актуальність упровадження національних стандартів та їх гармонізації з міжнародними стандартами проаналізовано на прикладі сфери інформаційних технологій і тих специфічних проблем, що виникають при цьому. Запропоновано об'єктивні методи оцінювання компетентності експертів та розробників національних стандартів України. Подані методи ґрунтуються на семантичному зіставленні опису стандарту та документів, що характеризують компетентність його розробників в обраній сфері. Запропоновано використовувати знання, що здобуваються з відкритого середовища Web: Вікі-довідники, наукометричні бази, офіційні сайти організацій і супровідні метадані, онтології предметних областей тощо. Для інтеграції цих інформаційних ресурсів розроблено спеціалізовану онтологію наукової діяльності, що дозволяє стандартизувати термінологічну базу для опису кваліфікації потенційних експертів.

Ключові слова: стандартизація, онтологія, наукометричні показники, компетентність.

ВСТУП

Натепер майже всі сфери діяльності людини важко уявити без використання стандартів різного призначення. Стандарти акумулюють передовий науково-технічний досвід багатьох країн, який націлений на забезпечення єдності вимог до продукції, що є предметом міжнародного товарообміну, і забезпечує взаємозамінність комплектувальних виробів, єдині методи випробування та оцінювання якості виробів. Стандартизація являє собою складну, комплексну, міжгалузеву, багатопланову та багатоаспектну проблему, яка потребує сучасних рішень для її успішного розвитку.

Основна мета міжнародної стандартизації — забезпечити міжнародний товарообмін та взаємодопомогу, а також розширити співпрацю у сферах інтелектуальної, наукової, технічної й економічної діяльності у світовому масштабі. Тому цьому питанню у зв'язку з процесами євроінтеграції приділяється велика увага в Україні. Світову систему стандартизації складають міжнародні, міждержавні, національні, галузеві та інші організації стандартизації: ISO; IEC; ITU; ETSI; IEEE; EIA; ANSI; SEI; ECMA; CEN; CENELEC тощо.

В ISO/IEC за розвиток і синхронізацію стандартів у сфері інформаційних технологій відповідає об'єднаний технічний комітет JTC 1 (Joint Technical Committee 1 – Information Technology), який має багато вузькопрофільних підкомітетів (SC — Subcommittee). Зокрема, один з них JTC 1/SC 6 — Telecommunications and information exchange between systems відповідає за розвиток стандартів з телекомунікацій та систем обміну інформа-

цією між системами – саме зі сфери його діяльності наведено подальші приклади в цій роботі. Діяльність зі стандартизації в Україні ґрунтується на правових нормах Закону України «Про стандартизацію» [1], Декрету Кабінету Міністрів України «Про стандартизацію і сертифікацію» та інших нормативних актах з урахуванням принципів і положень міжнародних організацій зі стандартизації [2, 3].

Етапи розроблення національного стандарту. Для того щоб оцінювати компетентність розробників стандартів, потрібно проаналізувати, якою саме діяльністю вони займаються на різних етапах розроблення стандартів та, які завдання вони мають вирішувати.

Організація-розробник попередньо проходить процедуру тендерних закупівель. Основною базою для реформування державних закупівель в Україні є новий Закон України «Про здійснення державних закупівель» № 1197-VII (1197-18) від 10.04.2014. Мета закону – створення конкурентного середовища у сфері державних закупівель, запобігання проявам корупції у цій сфері, розвиток добросовісної конкуренції.

Відповідно до затвердженої Програми робіт з національної стандартизації організація-розробник призначає відповідальних виконавців і визначає термін виконання етапів роботи. Потім створюється *технічне завдання* на розроблення стандарту. Для цього потрібно зібрати, вивчити та проаналізувати матеріали про об'єкт стандартизації з урахуванням досягнень вітчизняного та закордонного досвіду, зокрема виконувати патентні дослідження [4]. *Технічний комітет* зі стандартизації для виконання робіт визначає відповідний *підкомітет*, який формує робочу групу або залучає фахівців, найкомпетентніших у цій предметній області (ПрО). Підкомітет готує проект першої редакції стандарту згідно з договором і технічним завданням на розроблення стандарту. Усі етапи розроблення національного стандарту технічним комітетом стандартизації подано в ДСТУ 1.2:2015 [3].

Особливу увагу під час розроблення стандартів фахівці технічного комітету приділяють термінології. *Термінологія* — сукупність термінів, тобто слів та/або словосполучень, що виражають специфічні поняття з певної ПрО (галузі), а також сукупність усіх термінів, наявних у тій чи іншій мові. Від звичайних слів терміни відрізняються точністю семантичних меж [5].

Галузеві термінології (тобто сукупності термінів конкретних галузей) називають термінологічними системами (терміносистемами). Характеризуючи терміносистему в сфері інформаційних технологій (ІТ), необхідно відзначити динаміку її виникнення та інтенсивність збагачення новими лексичними одиницями. Фахівець з розроблення проекту стандарту повинен досконально знати ПрО розроблюваного стандарту, а також мати значний запас термінів з цієї спеціалізованої ПрО. Особливо це стосується процесу розроблення стандарту, гармонізованого зі стандартами, викладеними іншими мовами світу.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Створення об'єктивних методів оцінювання компетентності претендентів на основі використання й оброблення знань про ПрО для прогнозування успішного розроблення стандартів є сьогодні актуальною і важливою науковою проблемою.

Оцінки можна отримати на основі аналізу формальних характеристик розробників стандарту (дипломів, кількості публікацій у зазначеній Про, стажу роботи тощо), однак вони є надто приблизними і не враховують семантику виконуваного завдання. Тому необхідно розробити методи, які здатні обробляти знання про ці характеристики, враховуючи динамічність, розподіленість та нечіткість таких знань. Пропонується використовувати для цього засоби онтологічного аналізу.

Використання онтологій для формалізованого подання знань про компетентність учасників виконання проекту (розробників, наукових редакторів, експертів тощо) потребує розроблення засобів зіставлення семантичного опису стандарту та відомостей про учасників, що характеризує їх знання і досвід у Про стандарту та враховує їх знання і досвід.

Таке зіставлення зводиться до аналізу двох множин природномовних документів і пов'язаних з ними метаданих та знань. Запропонований підхід дозволяє інтегрувати персоніфіковані онтологічні знання про експертів із Про і логічні методи їх оброблення, використовуючи онтологічний аналіз та методи семантичного пошуку.

Мета роботи — розроблення об'єктивних алгоритмів та методів оцінювання компетентності учасників розроблення стандартів, що ґрунтуються на здобутті знань з відкритого середовища Web та документів, які описують стандарти. Запропонований підхід дасть змогу інтегрувати відомості про розробників у певному домені IT та стандартизувати термінологічну базу.

ПРОФЕСІЙНА КОМПЕТЕНЦІЯ ТА КОМПЕТЕНТНІСТЬ ФАХІВЦІВ ЗІ СТАНДАРТИЗАЦІЇ

Термінологічні проблеми в сфері стандартизації. Основна складність перекладу текстів у сфері IT, зокрема переклад термінологічних одиниць, полягає у розкритті та передачі засобами української мови іншомовних понять. Інтенсивний розвиток науки і техніки разом із процесами глобалізації в сучасному суспільстві сприяє безперервному збагаченню термінологічної системи словами та словосполученнями, пов'язаними зі сферою IT. Комп'ютерна термінологія є найдинамічнішою із термінологічних систем, і в ній навряд чи колись можна буде поставити крапку та вважати її дослідженою, оскільки інновації в комп'ютерній техніці розвиваються досить швидко [6].

Сучасна українська науково-технічна мова не завжди містить релевантні терміни для перекладу нових понять або понять, що набули нового значення в іншій Про. Обов'язкова умова повноцінного перекладу будь-якого спеціального тексту — це повне розуміння його перекладачем. Дослівний переклад термінів без проникнення у їх сутність без знання самих явищ, процесів та механізмів, про які йдеться в оригіналі, може призвести до грубих помилок у перекладі та спотворення його семантики. Основними способами відтворення українською мовою комп'ютерної термінології є: калькування, транскодування, описовий переклад, еквівалентний переклад.

Під *калькуванням* розуміють переклад частин іншомовного слова (складного, похідного або словосполучення) з подальшим складанням елементів в одне ціле. Приклади калькування — переклад таких термінологічних словосполучень, як «access code» — «код доступу»; «abstract semantic network» — «абстрактна семантична мережа». Такий вид перекладу досить часто призводить до створення незрозумілих слів, які ускладнюють розуміння тексту.

Транскодування (транскрипція) — це передача звукової або графічної форми слова вихідної мови засобами абетки мови перекладу. Наприклад, «semantic web» перекладається як «семантичний веб» (а не «змістове павутиння»), «installation» — як «інсталяція», «notebook» — як «ноутбук», «startup» — як «стартап». Такий прийом найчастіше використовують для перекладу слів та словосполучень, які на практиці широко вживаються саме похідною мовою і не мають безпосередніх аналогів в українській мові. Нерідко в процесі перекладу транскрипцію та калькування застосовують одночасно.

Описовий переклад, або експлікація (від лат. explicatio — роз'яснення) — це лексико-граматична трансформація, за якої лексична одиниця мови-оригіналу замінюється словосполученням, яке дає пояснення або визначення цієї одиниці. Наприклад, «native mode» — «режим роботи у власній системі команд»; «processor-specific code» — «програма, прив'язана до певного процесора».

Якщо значення англійського терміна повністю та однозначно відповідає значенню українського, то це — *еквівалентний переклад*. Цей вид перекладу досить поширений, хоча в українській мові немає достатнього обсягу термінології, наприклад, у галузі ІТ.

Вибір способу перекладу досить часто залежить від компетентності перекладачів у Про тексті, які його перекладають: найкваліфікованіші з них здатні вибрати найвідповідніші терміни української мови і лише за їх відсутності звертатися до калькування та транскрипції.

Професійна компетенція розробників. Проблема розроблення стандартів присвячено багато методичних розробок [7], а аналіз їх актуальності та прогнозування ефективності є завданням експертів відповідних Про [8].

Варто розрізнити поняття «компетенція» і «компетентність». Компетенція — це знання, які повинна мати особа; коло питань, з якими особа повинна бути обізнана; досвід, який треба мати для успішного виконання певних завдань відповідно до встановлених прав, законів тощо, тобто поняття, що в загальному випадку не пов'язане з конкретною особою. Компетентність — це відносини між особою і компетенцією, що означає, що певна людина має цю компетенцію. У розгляданому випадку компетенція — це характеристики та завдання, які потребують вирішення під час розроблення проекту зі стандартизації, а компетентність — властивість розробника, його характеристики, досвід та можливості.

Елементи компетентності — знання і навички, життєвий досвід, здатності, риси характеру, інтелект тощо, об'єднані в різних конфігураціях для вирішення особою конкретних завдань. *Компетентність* — рівень досягнень (досвіду, знань, звичок) особи в певній Про. Компетентність можна визначати на підставі аналізу діяльності фахівця, його поінформованості

щодо досягнень науки і техніки, його розуміння досліджуваних проблем і можливих способів їх вирішення.

Варто враховувати, що в загальному випадку експерт — це компетентний фахівець. У сучасних умовах, коли відбувається експонентне збільшення обсягів наукової інформації, виконувати експертне оцінювання стає дедалі важче, і тому важливо якомога чіткіше визначати межі компетентності кожного потенційного експерта [9]. У сфері розроблення стандартів існують як формальні, так і неформальні вимоги до експертів.

Відкриті джерела відомостей про ПрО та фахівців. Основним джерелом відомостей про проект розроблення стандарту є його *природомовний* опис (заявка, технічне завдання, публікація міжнародного стандарту, програма робіт з національної стандартизації тощо), а також додаткові зовнішні інформаційні ресурси (ІР) — онтології, Вікі-сторінки тощо, які містять структуровані та семантично значущі відомості про ПрО.

Складнішим завданням є аналіз інформації про учасників розроблення стандартів. Частина відомостей про них є чітко формалізована і може бути однозначно оцінена без урахування семантики ПрО та додаткових знань про стандарт (рівень освіти, їх стаж роботи у відповідній сфері, наявність раніше розроблених стандартів). Але часто цих відомостей недостатньо для визначення компетентності щодо розроблення стандарту в нових і динамічно змінюваних ПрО. Одним з найбільш об'єктивних критеріїв оцінювання сфери компетентності наукових співробітників є аналіз їх публікацій, поданих у Web: наукових статей, доповідей, звітів і презентацій.

Таким чином, як джерела відомостей про сферу компетентності авторів проекту пропонується розглядати такі ІР: офіційні документи, що підтверджують освіту та досвід роботи (наприклад, диплом про вищу освіту, науковий ступінь, сертифікати та нагороди); ІР, що розкривають семантику офіційних документів розробників (паспорти спеціальностей та дисциплін, вимоги до здобування наукових звань та вчених ступенів, посадові інструкції, таксономія національних учених ступенів тощо); тексти опублікованих статей, тез доповідей, монографій, підручників, технічних звітів, патентів та інших об'єктів інтелектуальної власності, поданих у вигляді природомовних документів, опублікованих у Web, з урахуванням рейтингів наукометричних баз даних (НМБД); Вікі-сторінок авторів розроблення стандартів, що містяться у різних Вікіпедіях, і Вікі-довідників, які забезпечують структуроване подання інформації; Вікі-сторінок організацій та установ, з якими пов'язані автори розроблення (наприклад, членство в технічному комітеті зі стандартизації, співпраця з Національною академією наук України, навчальними закладами) [10].

НАУКОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Ефективність наукової діяльності окремих осіб, колективів та організацій може оцінюватися з використанням як якісних, так і кількісних показників. Основу якісних оцінок становлять висновки експертів. Однак суб'єктивність подібних оцінок значно зменшує достовірність отримуваних результатів, а відсутність кількісного вираження ускладнює їх використання.

Наукометричні показники є зручними для оцінювання результатів фундаментальних досліджень, затребуваність яких оцінюють через відгуки наукового співтовариства на публікації авторів. Статистичним дослідженням структури та динаміки потоків наукової інформації займається наукометрія — галузь наукознавства, яка вивчає еволюцію науки через числові вимірювання наукової інформації, такі як кількість наукових статей за певний проміжок часу, цитування тощо. Термін «наукометрія» введено в 1969 р. В.В. Налімовим [11]. Підвищений інтерес до наукометричних показників спричинено насамперед можливістю автоматизації процесу оцінювання результатів наукової діяльності [12].

Натепер під час формування рейтингу дослідника застосовують різні параметри — кількість публікацій — сумарно або окремо за типами (монографії, статті, тези, публікації у виданнях, проіндексовані у Web of Science, SCOPUS або Google Scholar тощо) і посилань на них. Іноді враховують обсяг публікацій. На їх основі формують інтегральні критерії, у яких бали за публікацію визначають її типом та імпаکت-фактором видання, у якому її опубліковано.

Ефективність наукової діяльності можна оцінювати, застосовуючи як якісні, так і кількісні показники. У праці [13] проаналізовано найефективніші та найпоширеніші характеристики продуктивності наукової діяльності, зокрема, індекс Гірша та імпакт-фактор.

У 2005 р. Х. Гірш запропонував новий показник — індекс Гірша (h -індекс) [14], який є максимальним цілим числом h і який означає, що автор опублікував h статей, кожна з яких наведено хоча б h раз. Простота розрахунків та нечутливість до типових прийомів штучного покращення розглянутих вище показників миттєво зробили індекс Гірша популярним наукометричним індикатором. Індекс Гірша можна обчислювати, користуючись як безкоштовними загальнодоступними НМБД в Інтернеті (наприклад, Google Scholar, Elibrary.ru, ADS NASA), так і БД із платною передплатою (наприклад, SCOPUS або ISI Web of Science); однак платні БД часто теж подають h -індекс учених у вільному доступі. Слід зазначити, що індекс Гірша має різні значення одного й того самого вченого залежно від проіндексованих IP. Індекс Гірша дає об'єктивніші результати в разі вилучення посилань авторів на власні статті. Наприклад, у рейтингу вчених України відповідно до індексу Гірша виконано обчислення з БД SCOPUS з вилученням посилань авторів на власні статті.

Імпакт-фактор показує, скільки разів у середньому наведено кожному опубліковану в журналі статтю протягом x наступних років після її виходу. Це числовий показник значущості наукового журналу, який щорічно розраховує Інститут наукової інформації (Institute for Scientific Information — ISI) і опубліковує в журналі Journal Citation Report. Імпакт-фактор дає змогу за формальними ознаками порівнювати різні журнали та дослідницькі групи.

Зазвичай обчислення імпакт-фактора ґрунтується на трирічному періоді. Імпакт-фактор журналу A за рік x обчислюють за формулою

$$\text{Im } p(A, x) = \frac{\text{Cit}(A, x - 2, x) + \text{Cit}(A, x - 1, x)}{\text{Pub}(A, x - 2) + \text{Pub}(A, x - 1)},$$

де $Cit(A, y, z)$ — кількість посилань протягом року z статей, опублікованих у журналі A в році y в публікаціях журналів, які відслідковує Інститут наукової інформації, а $Pub(A, y)$ — кількість публікацій в журналі A за рік y .

Індекс наведення — це прийнятий в науковому світі ступінь значущості наукової праці будь-якого вченого або наукового колективу, що є сумарною кількістю посилань у проіндексованих працях на розглянуті публікації. Зазвичай слабкі і вторинні роботи не наводять. Наведеність залежить не тільки від рівня наукових результатів, але й від інших факторів, наприклад, своєчасності.

Для отримання цих оцінок користуються НМБД — бібліографічними та реферативними БД з інструментами для відстеження наведеної статей, опублікованих у наукових виданнях.

Найвідоміша НМБД SCOPUS видавничої корпорації Elsevier. У SCOPUS не застосовують поняття імпаکت-фактора, але широко користуються індексом Гірша. База даних є доступною на умовах передплати через Web-інтерфейс (<http://www.SCOPUS.com>).

Не менш популярною є НМБД Web of Science (WoS) компанії Thomson Reuters. Вона містить посилання на повні тексти в першоджерелах і переліки всіх бібліографічних посилань, які трапляються в кожній публікації.

Менш відома міжнародна НМБД Index Copernicus (Польща) (<http://www.indexcopernicus.com>), яка охоплює індексування, ранжування і реферування журналів, а також є платформою для наукової співпраці та виконання спільних наукових проектів.

Найповніше представлено у Web наукові праці, проіндексовані в Google Scholar (<http://scholar.google.com/>) — вільно доступній пошуковій системі, що індексує повний текст наукових публікацій усіх форматів і дисциплін. Основний наукометричний показник, що генерує ця НМБД, — індекс Гірша (як загальний, так і за останні п'ять років).

Є також національні НМБД, орієнтовані на індексацію й оцінку публікацій мовами, відмінними від англійської. Наприклад, Web-сайт «Український індекс наукового цитування» (<http://uincit.urau.ua>). Передбачається, що сайт дасть змогу з показників публікаційної активності як окремих учених, так і наукових установ України, довідатися про показники наведеної їхніх робіт і ключові наукометричні показники.

ОНТОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ У СТАНДАРТИЗАЦІЇ

Онтології ПрО, що характеризують певні стандарти, можна застосовувати не лише для оцінювання компетентності їх розробників та експертів. Вони є потужним інструментом для оброблення, аналізу та застосування знань, що містяться в цих стандартах, забезпечують їх автоматизоване оброблення та інтегрування [15].

Важливим питанням, пов'язаним з розробленням стандартів, є їх інтероперабельність і забезпечення їх автоматизованого пошуку та порівняння. Тому в процесі розроблення стандартів виникає потреба в побудові їх семантичних метаописів. Такими метаописами можуть стати онтології ПрО стандарту, у яких формалізовано основні поняття ПрО, що їх відображено в стан-

дарті, та зв'язки між ними. Онтологічний підхід полегшує коректний переклад стандартів і дає змогу визначити, якими саме близькими за змістом термінами треба користуватись у кожному окремому випадку.

Щоб виявити семантичну близькість між стандартами, потрібно зіставити їх онтології, знайти близькі за змістом поняття і на підставі цього обчислити семантичну відстань між стандартами. Саме онтології ПрО можуть стати джерелом знань для пошуку компетентних фахівців для розроблення національних стандартів, якщо за чинним стандартом побудувати онтологію та порівняти її з онтологіями фахівців, які можна отримати з аналізу результатів їх науково-технічної та навчально-методичної діяльності, що відображається в їх публікаціях.

Ще одна сфера застосування онтологій стандартів — автоматизована побудова галузей компетенції підкомітетів зі стандартизації, формалізованих через поєднання онтологій уже розроблених стандартів. Аналіз відношень між онтологіям стандартів дасть змогу також визначити порядок розроблення стандартів та з'ясування не лише формальних, але й семантичних зв'язків між ними. Наприклад, стандарт, у якому наведено певні терміни, потрібно розробляти раніше, ніж той, у якому ці терміни вже застосовано.

Розглянемо це на прикладі побудови онтології для стандарту [16] з таксономії профілів (рис. 1). У цьому стандарті застосовують терміни, наведені в розділі стандарту «Терміни та визначення понять». Усі ці терміни мають бути класами онтології відповідної ПрО, яка описує цей стандарт, і є підкласами класу «терміни стандарту». Спочатку в онтології створюють клас «стандарт», який описує основні характеристики стандарту, такі як назва, код, тематика, рік прийняття, розробники, обсяг тощо.

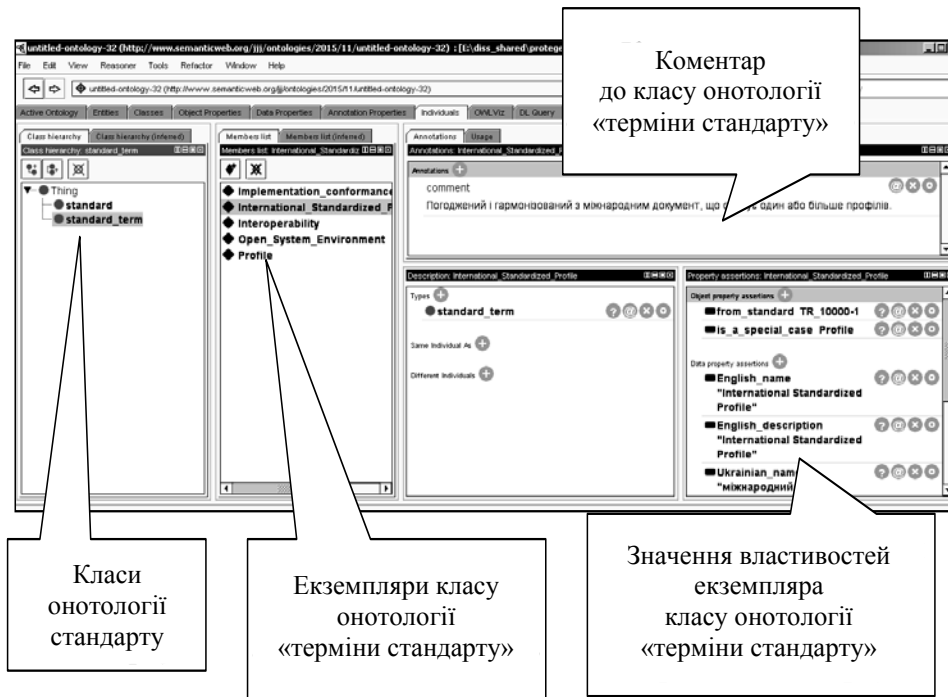


Рис. 1. Онтологія стандарту

Для інтероперабельного використання знань, які подано в стандартах, доцільно також додати до опису класу «стандарт» зв'язки цього стандарту з іншими. Крім того, можна зазначити, які саме терміни належать до цього стандарту за допомогою властивості об'єктів «стандарт використовує термін».

Клас «терміни стандарту» має властивості даних (Data Properties): «назва стандарту», «назва терміна українською», «назва терміна англійською», «опис терміна українською», «опис терміна англійською» і «примітка» типу «рядок символів» та властивості об'єктів (Object Properties) «є підкласом» та «є синонімом», які дають змогу встановлювати семантичні зв'язки між елементами термінів стандарту. Онтологію ПрО для ДСТУ ISO/IEC TR 10000-1:2006 показано на рис. 2.

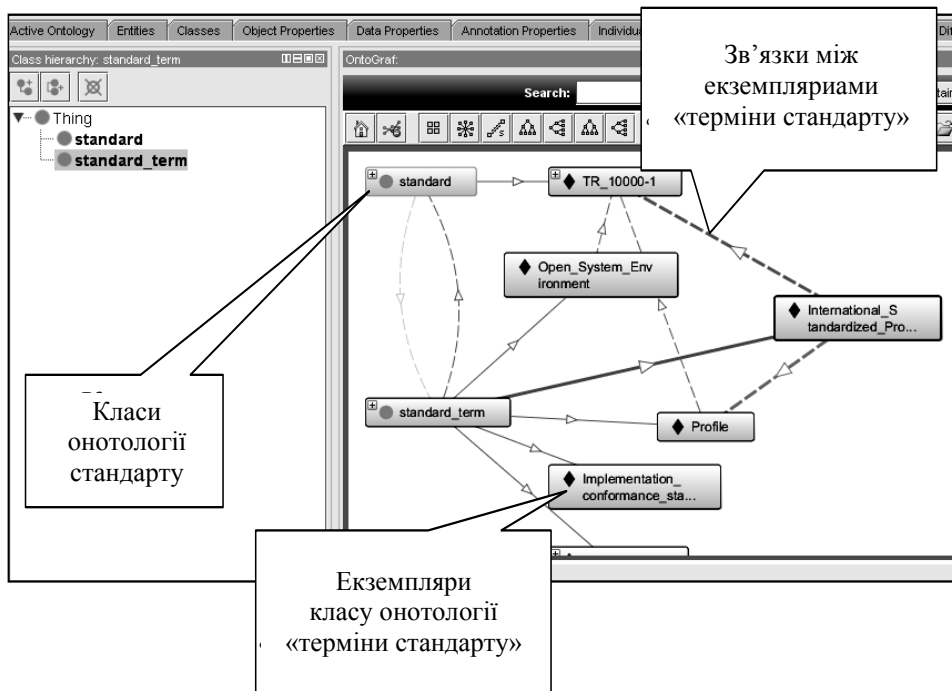


Рис. 2. Візуалізація зв'язків між класами, екземплярами класів та їх властивостями в онтології стандарту

Зв'язки між класами, екземплярами класів та їх властивостями в онтології стандарту відображають візуально так, як показано на рис. 2.

РОЛЬ ОНТОЛОГІЇ В ОЦІНЮВАННІ КОМПЕТЕНЦІЇ ЕКСПЕРТІВ

Крім загального професійного рівня, потрібно оцінювати компетентність розробників та експертів саме в тій ПрО, якої стосується конкретний стандарт. Формальною моделлю такої ПрО є її онтологія. Саме онтології є натеper найуживанішим засобом подання знань про ПрО, що дає змогу аналізувати і зіставляти компетенції експертів та розробників у нових дослідницьких галузях. Сам факт наявності в розробників стандарту онтології, що відповідає ПрО, зазвичай свідчить про ґрунтовніші пізнання у вибраній галузі (особливо якщо йдеться про інформаційні технології).

Разом з онтологіями ПрО доцільно застосовувати загальну онтологію наукової діяльності, яка дає змогу однозначно встановлювати термінологію, пов'язану з рейтингом публікацій, науковими ступенями та вченими званнями, типами організацій тощо (рис. 3). Таку онтологію спеціально розроблюють для визначення компетентності авторів проекту на основі організаційних онтологій наукових організацій, класифікатора УДК та паспортів спеціальностей.

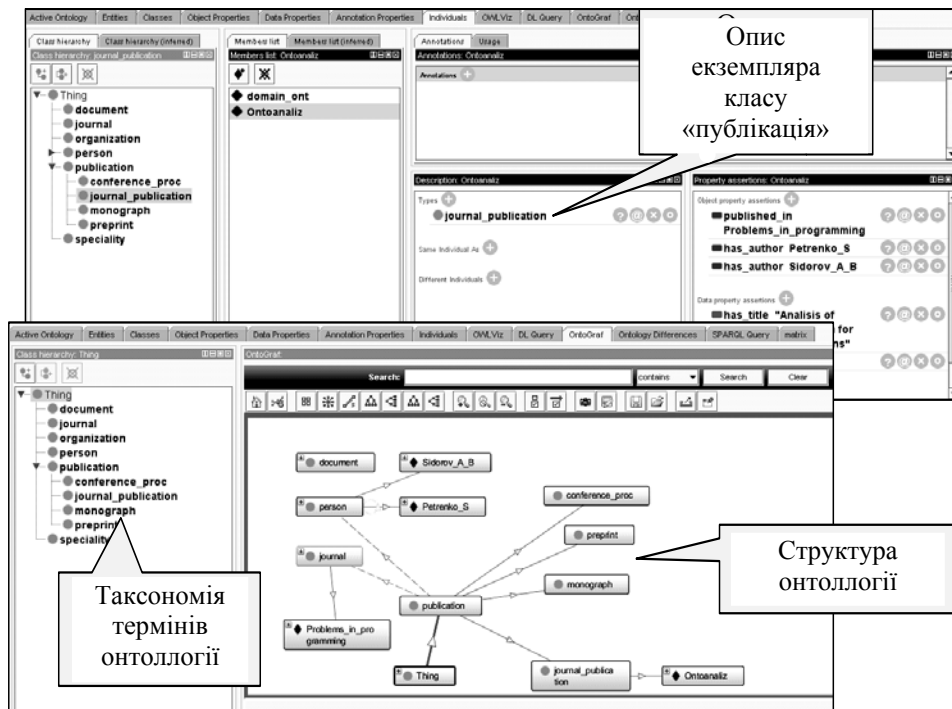


Рис. 3. Онтологія наукової діяльності для аналізу компетентності розробників

У такій онтології відображають, наприклад, такі взаємозв'язки між класами, як «бути співавтором», «працювати в організації», «бути автором публікації», «мати вчений ступінь за фахом» і властивості «бути публікацією», «мати індекс Гірша».

Цю онтологію запропоновано розробникам стандарту як зразок для опису та класифікації поданих документів, які мають засвідчити рівень їх компетентності в науковій діяльності загалом та в ПрО стандартизації зокрема.

ТЕЗАУРУС І ОНТОЛОГІЯ ПрО ЯК ЗАСІБ ЗІСТАВЛЕННЯ ПРИРОДОМОВНИХ ДОКУМЕНТІВ

Для зіставлення стандарту та компетенції розробників стандарту запропоновано побудувати тезаурус стандарту та тезауруси всіх ІР, які описують учасників розроблення стандарту. Тезаурус природомовного ІР є проєкцією онтології, аналізованої ПрО на документ, який досліджують тепер. Тезаурус учасників розроблення визначають як об'єднання тезаурусів окремих ІР.

При цьому слід зважати на вагу окремих ІР, у якій має бути враховано як значущість самого документа для опису компетенції, так і рівень довіри до самого ІР. Наприклад, більшу вагу має автореферат дисертації, ніж опис диплома, а під час оцінювання публікацій доцільно враховувати рейтинг різних журналів і конференцій у НМБД.

Припускають, що кожен з розробників стандарту сам формує набір документів, які є найбільш пертинентними запропонованому проекту стандарту. Наприклад, якщо у автора є n наукових публікацій, то він сам відбирає m з них, які пов'язані з тією проблемою, якої стосується розроблення стандарту, причому не обов'язково це повинні бути статті з найбільшим індексом цитування або ті, що входять до SCOPUS. Однак автор повинен прагнути до того, щоб для всіх понять онтології ПрО, для яких виявлено лінгвістичні аналоги в тексті стандарту, було знайдено такі відповідності і в його роботах (вагу кожного окремого зіставлення визначають вагою ІР, що обумовлений як функція від статусу документа і його рейтингу). Статус документа характеризує рівень його документального підтвердження, а рейтинг — його оцінку в НМБД [17].

Спочатку будують тезаурус стандарту Th_{proj} , який залежить від опису проекту розроблення стандарту та від вибраної онтології ПрО. Він являє собою множину пар (t_i, q_i) , де $t_i \in T$, T — множина термінів онтології ПрО $O_{ПрО} = \langle T, R, A \rangle$, а q_i — кількість знайдених відповідностей, що обумовлює вагу цього терміна. (Якщо певний термін трапився в описі проекту стандарту 10 разів, то припускають, що він важливіший, ніж той, який трапився 2 рази.) Для кожного терміна онтології ПрО пробують знайти фрагменти тексту.

Загальну оцінку компетентності колективу авторів визначають за допомогою масиву $\left(t_i, \sum_{j=1}^m p_{IR_{j_i}} * v_{IR_j} \right)$, де t_i — множина термінів онтології ПрО $O_{ПрО} = \langle T, R, A \rangle$; $p_{IR_{j_i}}$ — кількість знайдених відповідностей із цим терміном в j -му ІР; v_{IR_j} — вага j -го ІР.

Щоб визначити вагу j -го ІР, кожному документу попередньо призначають за замовчуванням вагу 1, яка може збільшуватися за такими умовами (оцінки можна підсумовувати):

- для наукових публікацій — якщо стаття є публікацією у виданнях з імпаکت-фактором понад 0,5, то +5, якщо матеріалами конференції, то +1, якщо її опубліковано в закордонному виданні, то +3, якщо проіндексовано в Google Scholar, то +2, а якщо в SCOPUS, то +10;
- для паспорта спеціальності, диплома +5; для опису профілю діяльності організації +3; для описів раніше виконаних проектів +3; для автореферату дисертації +3.

Важливим є те, що в цьому масиві є не всі терміни онтології ПрО (яка загалом може бути значно ширшою, ніж та, що її безпосередньо досліджують у проекті стандарту), а лише ті, для яких знайдено відповідності в цьому проекті стандарту.

Очевидно, що різні ІР мають різну вагу під час оцінювання компетенції фахівців. Наприклад, публікація в реферованому журналі є більш пріоритетною, ніж технічний звіт, викладений у Web. Тому під час оцінювання публікацій доцільно враховувати імпакт-фактор видання, яке опублікувало статтю.

У такому випадку загальну оцінку компетентності авторів можна подати таким чином:

$$C = \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j=1}^m p_{IR_{j_i}} v_{IR_j} \text{Im } p(IR_{j_i}) \right), \quad (1)$$

де $\text{Im } p(IR_{j_i})$ — імпакт-фактор видання, що опублікувало ІР.

Надалі доцільно ввести різні нормалізовані коефіцієнти, які дають змогу зменшити вплив документів великого обсягу, що є слабонасиченими термінами ПрО. Однак це потребує детальнішого дослідження вмісту документів, надаваних авторами на експертизу, і значною мірою залежить від специфіки проведеного конкурсу.

Оцінка (1) не використовує семантику ПрО і не враховує зв'язки між термінами в онтології ПрО. Для коректнішого врахування цих зв'язків запропоновано використовувати таку оцінку:

$$C = \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j=1}^m p_{IR_{j_i}} v_{IR_j} \right) s_i,$$

де параметр s_i визначає значущість i -го терміна онтології через кількість його зв'язків з іншими термінами онтології, що також увійшли до тезаурусу проекту стандарту, з урахуванням семантичної відстані між ними.

Щоб урахувати, крім спеціалізації у вибраній ПрО, загальну кваліфікацію кожного з розробників проекту стандарту, доцільно враховувати в оцінюванні і їх рейтинг як дослідників, отриманий з НМБД. Зокрема, запропоновано користуватись відомостями з Google Scholar і SCOPUS, оскільки ця інформація є відкритою й доступною для всіх користувачів Web. Крім того, це дає змогу диференціювати кваліфікацію окремих авторів, а не просто підсумувати їх результати. При тому, що оцінювання якості формування колективу розробників не є завданням експертів, однак наявність у ньому людей із кваліфікаціями, що значно розрізняються, може викликати здивування. Запропоновано користуватись таким критерієм оцінювання x -го автора проекту:

$$C_x = \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j=1}^m p_{IP-x_{j_i}} v_{IP-x_j} \right) s_i h_x,$$

де h_x — сума індекса Гірша вченого з Google Scholar та SCOPUS.

Загальну оцінку кваліфікації розробників проекту стандарту можна оцінювати як суму оцінок учасників або як їх нормалізовану суму. Перший підхід має переваги, оскільки знання й досвід кожного можна застосовувати незалежно від кількості учасників. Тому нормалізовану оцінку може бути застосовано лише як додаткову.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Запропоновано новий підхід до проблеми об'єктивного оцінювання компетентності в контексті нових інформаційно-комунікаційних технологій, що характеризуються високою динамікою розвитку наукових досліджень, використання й оброблення інформаційних ресурсів про експертів ПрО, яка нас цікавить. Метою розроблення поданих методів є об'єктивізація процесу оцінювання кваліфікації потенційних учасників з урахуванням значної кількості доступних знань про їх кваліфікацію в сфері розроблення та стандартизації.

Запропонований підхід дає змогу на підставі опису проекту та природомовної інформації про учасників проекту з розроблення стандартів (їх публікацій, дипломів, описів раніше виконаних проектів, відомостей про їхні організації тощо) будувати тезаурус проекту й тезауруси учасників, які базуються на онтології ПрО проекту з розроблення стандарту, зіставляти ці тезауруси і визначати на основі цього рівень компетентності учасників.

Надалі результатом цієї роботи має стати створення *глобальної семантичної мережі стандартів*, яка пов'яже окремі національні та міжнародні стандарти; об'єкти, що використовують ці стандарти та посилаються на них (як матеріальні, так і інформаційні об'єкти); фахівців, які є експертами в сфері розроблення стандартів, та організації різного рівня, що підтримують різні види діяльності, пов'язаної з розробленням та застосуванням стандартів. Інтероперабельне подання знань та застосування відповідних технологій і форматів дасть змогу інтегрувати цю мережу знань зі знаннями, поданими в Semantic Web.

ЛІТЕРАТУРА

1. Закон України «Про стандартизацію». Верховна Рада України, Закон від 05.06.2014, № 1315 – VII. — <http://zakon0.rada.gov.ua/laws/show/1315-18>
2. ДСТУ 1.1:2015 Національна стандартизація. Стандартизація та суміжні види діяльності. Словник термінів. — Чинний від 20.12.2015.
3. ДСТУ 1.2:2015 Національний стандарт України. Національна стандартизація. Правила проведення робіт з національної стандартизації. — Чинний від 20.12.2015.
4. ДСТУ 1.7:2015 Національна стандартизація. Правила та методи прийняття міжнародних і регіональних нормативних документів. — Чинний від 20.12.2015.
5. Гладун А.Я. Основи методології формування тезаурусів з використанням онтологічного та мережологічного аналізу / А.Я. Гладун, Ю.В. Рогушина // Искусственный интеллект, 2008. — № 5. — С.112–124.
6. Грицик Н. Комп'ютерна термінологія та основні способи її перекладу / Н. Грицик // XVIII Міжнародна науково-практична Інтернет-конференція «Проблеми та перспективи розвитку науки на початку третього тисячоліття», Переяслав-Хмельницький, 2013. — С. 45–52.
7. Цициліано О. Креативність та стандартизація як основа конкурентоспроможності організації / О. Цициліано // Стандартизація. Сертифікація. Якість. — 2007. — № 1 (44). — С. 42–44.

8. *Доманцевич Р.І.* Основи стандартизації, метрології та управління якістю / Р.І. Доманцевич, І.С. Полікарпов, Б.П. Яцишин. — К.: НМЦ «Укоопосвіта», 1997. — 219 с.
9. *Костенко Л.Й.* Наукова періодика України та бібліометричні дослідження / Л.Й. Костенко, О.І. Жабін, Є.О. Копанєва, Т.В. Симоненко // НАН України, Нац. б-ка України ім. В. І. Вернадського. — К., 2014. — 173 с.
10. *Rogushina J.* Ontology-based competency analysis in new research domains / J. Rogushina, A. Gladun // Journal of Computing and Information Technology. — 2012. — 23, N 4. — P. 123–134.
11. *Налимов В.В.* Наукометрия: Изучение развития науки как информационного процесса / В.В. Налимов, З.М. Мульченко. — М.: Наука, 1969. — 192 с.
12. *Штовба С.Д.* Обзор наукометрических показателей для оценки публикационной деятельности ученого / С.Д. Штовба, Е.В. Штовба // Наукометрия и экспертиза в управлении наукой. — М.: ИПУ РАН, 2013. — С. 262–278.
13. *Бурков В.Н.* Параметры цитируемости научных публикаций в наукометрических базах данных / В.Н. Бурков, А.А. Белошицкий, В.Д. Гогунский // Управління розвитком складних систем. — 2013. — Вып. 15. — С. 134–139.
14. *Hirsch J.E.* An index to quantify an individual's scientific research output / J.E. Hirsch // Proc. Of the National academy of Sciences of the United States of America. — 2005. — 102(46). — P. 16569–16572.
15. *Гладун А.Я.* Семантичні технології: принципи та практики: моногр. / А.Я. Гладун, Ю.В. Рогушина. — К.: Універсаріум, 2016. — 314 с.
16. *Гладун А.Я.* ДСТУ ISO/IEC TR 10000-1:2004 «Інформаційні технології. Основи та таксономія міжнародних стандартизованих профілів. Частина 1. Загальні принципи та основи документування». — К.: Держспоживстандарт, 2004. — 20 с. — Чинний від 01.01.2006.
17. *Рогушина Ю.В.* Онтологічний аналіз у Web: моногр. / А.Я. Гладун, В.В. Осадчий, С.М. Прийма. — Мелітополь: МДУПУ ім. Богдана Хмельницького, 2015. — 407 с.

Надійшла 15.04.2016

EMPIRICAL ANALYSIS OF CHERNOBYL NUCLEAR REACTOR CORE FOR 5 SECONDS BEFORE THE EXPLOSION

YOSHIO MATSUKI, PETRO I. BIDYUK

Abstract. This study uses the methodology of empirical analysis for analyzing the transient mode of the nuclear reactor core, a few second before the explosion at the time of the Chernobyl accident. The parameters were selected from the published articles [1]. A scenario was assumed for this analysis, such as the reduction of the flow rate of the Main Circulation Pump, and regression models were constructed to examine this scenario. The results of the models application were examined, and conclusions were made regarding the reduction of the flow rate of the Main Circulation Pump and the reactivity during the last few seconds to the explosion.

Keywords: Chornobyl disaster, critical operation mode, regression analysis, void and water environment

SCOPE OF ANALYSIS

On 26 April 1986, an explosion occurred in the nuclear reactor core of Chernobyl Power Station, Unit No.4. It is known that the specific design of the reactor core was one of the main causes of the accident. This research analyzed the relations between the sudden reactor power increase and water flow in the reactor core, with a methodology of empirical analysis. The result is compared with the nuclear reactor theory.

Table 1. Descriptive Statistics of Parameters (taken from Fig. 3 of [1])

Parameters	Fuel temperature, K	MCP flow rate, m ³ /sec	Power (% nominal power)	Reactivity, %	Void, %
Mean	210,421	9,653	67442,4	0,533	31,819
Median	131,396	9,575	13220	0,554	34,500
Maximum	570,633	10,200	227186,7	1,000	40,050
Minimum	90,100	9,3	0	0,214	12,000
Std. Dev.	147,216	0,269	90122,460	0,250	9,202
Skewness	1,371	0,713	0,872	0,228	-0,947
Kurtosis	3,722	2,396	2,039	1,972	2,837
Observations	16	16	16	16	16

Note: Max.: maximum value. Min.: minimum value. Std. Dev.: standard deviation. Skewness: the measure of the probability distribution leaning to one side of the mean. Kurtosis: “peakedness” of probability distributions. Observation: number of observations.

This research focuses on the time period of 5 seconds before the explosion (between 01h 23 min 38 sec and 01 h 23 min 42,71 sec on 25 April 1986) with the parameters (the data) of power, MCP flow rate¹, void, reactivity and fuel temperature, which are taken from Martines, et.al 1989 [1]. Table 1–2 shows the descriptive statistics of the selected variables for this research.

Table 2. Descriptive Statistics of Parameters (taken from Table ii of [1])

Parameters	Fuel temperature, K	Fuel energy, %	Total energy, MJ	Total power, MW	Water energy, %	Water power, %
Mean	822,0312	60,0725	24623,62	89767,5	40,075	29,51
Median	604,95	69,55	5495	9600	30,73	14,08
Maximum	1524,9	94	89200	306000	100	100
Minimum	537,9	0	0	200	8,4	5,71
Std. Dev.	359,784	33,499	32259,010	120344,200	33,389	31,315
Skewness	0,960	-0,624	0,993	0,877	0,606	1,257
Kurtosis	2,268	1,924	2,353	2,040	1,899	3,182
Obs.	16	16	16	16	16	16

Note: Max.: maximum value. Min.: minimum value. Std. Dev.: standard deviation. Skewness: the measure of the probability distribution leaning to one side of the mean. Kurtosis: «peakedness» of probability distributions. Obs.: number of observations.

METHODOLOGY

For the analysis, at first, the correlations are calculated; and coefficients of linear models are calculated for the investigation of the strength of the relations between the selected variables.

Estimating the coefficients of a linear model

At first, the average value $E(x)$ of each independent variable x is calculated:

$$E(x) = 1/n \sum_{i=1}^n x_i,$$

where $i = 1, 2, \dots, n$; where n is the total number of the sample of the variable x_i .

Then, the variance $V(x)$ and covariance $C(x, y)$ of the variables x and y are calculated:

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = \sigma_x^2, \quad C(x, y) = E(x^* y^*) = \sigma_{xy},$$

where $x^* = x - E(x)$, $y^* = y - E(y)$; where y is also an independent variable.

Then, a linear regression model is constructed as follows.

Case of 1 independent variable

In case of 1 independent variable, the regression model is written as follows:

$$Y = c_1 + c_2 X_2, \quad (1)$$

¹ MCP flow rate: the flow rate of the Main Circulation Pump

where Y is a dependent variable; X_2 is an independent variable; c_1 and c_2 are constant values.

The values of those coefficients are obtained by the following equations, which are obtained by an optimization of $U = Y - (c_1 + c_2X_2)$:

$$c_1 = E(Y) - c_2E(X_2), \quad (2)$$

$$c_2 = \frac{\sigma_{X_2Y}}{\sigma_{X_2}^2}. \quad (3)$$

Case of 2 independent variables

In case of 2 independent variables, the regression model is written as follows:

$$Y = c_1 + c_2X_2 + c_3X_3, \quad (4)$$

where Y is a dependent variable; X_j are independent variables; c_1 and c_j are constant values; where, $j = 2, 3$.

The values of those coefficients are obtained by the following equations, which are obtained by an optimization of $U = Y - (c_1 + c_2X_2 + c_3X_3)$:

$$c_1 = E(Y) - c_2E(X_2) - c_3E(X_3), \quad (5)$$

$$c_2 = (1/(1 - \sigma_{X_2X_3}^2/\sigma_{X_2X_3}))(\sigma_{X_2Y}/\sigma_{X_2} - \sigma_{X_2X_3}\sigma_{X_2Y}/\sigma_{X_2}\sigma_{X_3}), \quad (6)$$

$$c_3 = (1/(1 - \sigma_{X_2X_3}^2/\sigma_{X_2X_3}))(\sigma_{X_3Y}/\sigma_{X_3} - \sigma_{X_2X_3}\sigma_{X_2Y}/\sigma_{X_2}\sigma_{X_3}). \quad (7)$$

Correlation coefficients

For the regression model, the independent variables X_i are independent from each other. Therefore, before formulating the model equation (1) and/or (4), the correlation (ρ) between each pair of the variables need to be investigated by the following equation:

$$\rho = \frac{C(X_iX_j)}{\sqrt{V(X_i)}\sqrt{V(X_j)}} = \frac{\sigma_{X_iX_j}}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}}, \quad (8)$$

where $i \neq j$.

Fitting (predictability) of the linear model in the data

After obtaining the correlations ρ and the coefficients, c_2 and c_3 , the fitting of the model equation (1) and/or (4) on the given data of x_i and Y needs to be investigated by the following procedure:

1. Calculate the predicted value of Y (i.e., \hat{Y}) with the following equation:

$$\hat{Y}_i = c_1 + \sum_{j=2}^k c_jx_j, \quad (9)$$

where $j = 2, 3, \dots, k$; i corresponds to i -th observation of the variable x_j ($k = 2$ in equation (4); $k = 3$ in equation (4)).

2. Calculate the value of R^2 by the following equation:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (10)$$

where $\bar{Y} = 1/n \sum_{i=1}^n x_i$; where $i = 1, 2, \dots, n$; n is the number of the samples of the variable, x_i .

The value of R^2 represents the fitting and predictability of the given linear model upon the given data, and when $R^2 = 1, 0$, it is the perfect match, while the level of the matching is lower when the value of R^2 is lower. In practice, if $R^2 \geq 0,8 \sim 0,6$, the fitting of the model in the data is significant. However, the threshold value depends on the topic and the data of the concerned research question, therefore the values of R^2 need to be considered on the comparative manner.

It is noted that the coefficients of the linear model (c_i , where $i = 2, 3$), R^2 of each linear model, and the correlation (ρ) of each pair of the variables are all different, as each of them is calculated by different equation from each other as shown above.

RESULTS

Formation of the linear models after calculating the correlations of the variables

Tables 3, 4 show the correlations between each pair of the variables, which are calculated by the equation (8).

Table 3. Correlation matrix 1

Variable	FUEL ENERGY*	FUEL TEMPERATURE*	FUEL TEMP2	MCP FLOW RATE	POWER	REACTIVITY
FUEL ENERGY*	1					
FUEL TEMPERATURE*	0,7202	1				
FUEL TEMP2	0,6981	0,9607	1			
MCP FLOW RATE	-0,9861	-0,7417	-0,7310	1		
POWER	0,7178	0,9883	0,9354	-0,7383	1	
REACTIVITY	0,8661	0,4322	0,3850	-0,7859	0,4300	1
TOTALENERGY*	0,7182	0,9997	0,9643	-0,7428	0,9874	0,4230
TOTALPOWER*	0,7233	0,9976	0,9450	-0,7392	0,9883	0,4523
VOID	0,9736	0,6810	0,6640	-0,9729	0,6810	0,8330
WATERENERGY*	-0,9996	-0,7201	-0,6937	0,9834	-0,7187	-0,8716
WATERPOWER*	-0,9570	-0,5393	-0,5342	0,9589	-0,5419	-0,8245

Table 4. Correlation matrix 1

Variable	TOTAL ENERGY*	TOTAL POWER*	VOID	WATER ENERGY*	WATER-POWER*
TOTALENERGY*	1				
TOTALPOWER*	0,9962	1			
VOID	0,6801	0,6859	1		
WATERENERGY*	-0,7176	-0,7244	-0,9757	1	
WATERPOWER*	-0,5396	-0,5412	-0,9647	0,9556	1

Note: Number of observations is 16 as shown in Table 1 and Table 2.

FUEL ENERGY*: Fuel energy (%) in Table 2. FUEL TEMPERATURE*: Fuel temperature (K) in Table 2. FUEL TEMP2: Fuel temperature (K) in Table 1. MCP FLOW RATE: MPC flow rate (m³/sec) in Table 1.

POWER: Power (% nominal power) in Table 1. REACTIVITY: Reactivity (%) in Table 1. TOTAL ENERGY*: Total energy (MJ) in Table 2. TOTAL POWER*: Total power (MW) in Table 2. VOID: Void (%) in Table 1. WATER ENERGY*: Water energy (%) in Table 2. WATER POWER*: Water power (%) in Table 2.

For the formulation of the linear model as shown in equations (1) and (4), the dependent variable, Y, needs to be defined. In this analysis, it is assumed that the reactor's power indicates the transient process, inside of the nuclear reactor. Therefore, one of the following three variables: the Power (% nominal power) in Table 1, the Total energy (MJ) in Table 2, and the Total power (MW) in Table 2, should be selected as the dependent variable, Y. For this selection, the correlation between each pair of these 3 variables was examined, and the result is shown in Table 5. As the result, it was found that each pair of these 3 variables has large correlations, which are between 0,98 and 1,00. Upon this observation, it is concluded that these 3 variables are considered to be the same indicator of the reactor power. Therefore, it was assumed that any of these 3 variables could represent the reactor's power. For this research paper, the Power (% nominal power) in Table 1 is used as the dependent variable, because this value is taken from the same graph in [1] with values of the void and reactivity, which are related to the reactor transient process of Chernobyl accident².

Table 5. Correlations between the pairs of the candidates for dependent variables

Case	Selected pair of variables		Value of correlation
1	Power (% nominal power) in Table 1-1	Total energy (MJ) in Table 1-2	0,9874
2	Power (% nominal power) in Table 1-1	Total power (MW) in Table 1-2	0,9883
3	Total energy (MJ) in Table 1-2	Total power (MW) in Table 1-2	0,9962

And then, the independent variables (X_i , where $i = 2,3$) in the equations (1) and (4) also need to be defined. For this purpose, it is necessary to examine the

² The theory of the reactor transient will be explained in latter part of this paper, in the section 3.3.

correlations between each pair of those variables. And, then, the variables, which are less correlated, should be selected as independent variables. As the result, the pairs of the variables with greater correlations are shown in Table 6; and, the pairs with less correlations are shown in Table 7. Those 7 pairs of the variables shown in Table 6 are not considered to be independent, therefore any of those 7 pairs cannot be put together in the same linear model for the equation (1) and (4). On the other hand, each of those 14 pairs of the variables shown in Table 7 can be regarded as independent variables.

Table 6. Correlations between pairs of variables, which hold stronger correlations ($\geq 0,70$)

Case	Selected pair of variables		Value of correlation
1	Fuel temperature (K) in Table 2	Fuel temperature (K) in Table 1-1	0,9607
2	MCP flow rate (m ³ /sec) in Table 1	Water energy (%) in Table 1-2	0,9834
3	MCP flow rate (m ³ /sec) in Table 1	Water power (%) in Table 1-2	0,9589
4	Reactivity (%) in Table 1	Void (%) in Table 1-1	0,8330
5	Water energy (%) in Table 2	Water power (%) in Table 1-2	0,9556
6	Fuel energy (%) in Table 2	Fuel temperature (K) in Table 1-2	0,7202
7	Fuel energy (%) in Table 2	Fuel temperature (K) in Table 1-1	0,6981

Table 7. Correlations between pairs of variables, which hold weaker correlations ($\leq 0,70$)³

Case	Selected pair of variables		Value of correlation
1	Fuel temperature (K) in Table 2	MCP flow rate (m ³ /sec) in Table 1	-0,7417
2	Fuel temperature (K) in Table 2	Reactivity (%) in Table 1	0,4322
3	Fuel temperature (K) in Table 2	Void (%) in Table 1	0,6810
4	Fuel temperature (K) in Table 2	Water energy (%) in Table 2	-0,7201
5	Fuel temperature (K) in Table 2	Water power (%) in Table 2	-0,5393
6	Fuel temperature (K) in Table 1	MCP flow rate (m ³ /sec) in Table 1	-0,7310
7	Fuel temperature (K) in Table 1	Reactivity (%) in Table 1	0,3850
8	Fuel temperature (K) in Table 1	Void (%) in Table 1	0,6640
9	Fuel temperature (K) in Table 1	Water energy (%) in Table 2	-0,6937
10	Fuel temperature (K) in Table 1	Water power (%) in Table 2	-0,5342
11	MCP flow rate (m ³ /sec) in Table 1	Reactivity (%) in Table 1	-0,7859
12	MCP flow rate (m ³ /sec) in Table 1	Void (%) in Table 1	-0,9729
13	Void (%) in Table 1	Water energy (%) in Table 2	-0,9757
14	Void (%) in Table 1	Water power (%) in Table 2	-0,9647

Analysis of the reactor's transient by the linear model

Before the formulation of the linear model, the following scenario was assumed to describe the process of the reactor's transient for 5 seconds before the explosion:

1. The flow rate of the Main Circulation Pump (MCP flow rate) was reduced⁴.

³ In this process of the selection, the negative correlations (with the sign of minus) were accounted as the less correlated.

2. The voids were produced in the water inside of the reactor.
3. The increased void led to the increase of the neutron flux.
4. The power increased, leading to the explosion.

And, then, the following models were formulated, which should examine the relations between the related variables:

$$\text{POWER} = c_1 + c_2 \times \text{MCPFlowRate} + c_3 \times \text{REACTIVITY}, \quad (11)$$

$$\text{POWER} = c_1 + c_2 \times \text{MCPFlowRate} + c_3 \times \text{VOID}, \quad (12)$$

$$\text{REACTIVITY} = c_1 + c_2 \times \text{VOID}. \quad (13)$$

At first, the influence of 2 variables (MCP Flow Rate, and REACTIVITY) to POWER was examined by the equation (11); and, the influence of MCP Flow Rate and REACTIVITY to POWER was examined by the equation (12). REACTIVITY and VOID are strongly correlated (the correlation value is 0,8330 as shown in Table 6), therefore these two variables could not be put in the same linear model. Then, the equations (11) and (12) were formulated as separate equations. In addition, the relation between VOID and REACTIVITY was examined by the linear model, equation (13).

The other independent variables (FUEL TEMPERATURE, FUEL TEMP2) are strongly correlated with POWER (the correlations are: 0,9883 by FUELTEMPERATURE, and 0,9354 by FUELTEMP2 as shown in Table 3); therefore, it was assumed these two variables were surrogate of the POWER, not the independent variables. On the other hand, WATER ENRGY and WATER POWER are strongly correlated with MCP Flow Rate (the correlations are: 0,9834 by WATER ENERGY, and 0,9589 by WATER POWER as shown in Table 6); therefore, it was assumed these two variables were surrogates for MCP Flow Rate, and not independent variables. Also, FUEL ENERGY was omitted from this analysis, because Table 6 suggests that it has correlations with FUEL TEMPERATURE, FUEL TEMP2, and POWER, although the values of the correlations are about 0,70⁵.

And, then the coefficients (c_i , where $i = 1, 2, 3$) of each linear model shown in the equations (11), (12) and (13) were calculated, with the equations (2) and (3) for the cases of 1 independent variable, and the equations (5), (6) and (7) for 2 independent variables. The calculated results are shown in Table 8, together with calculated values of R^2 .

Table 8. Calculated Linear Models

Model Equation	Linear models and calculated coefficients	R^2
14	POWER = 3535019 - 351394,8 × MCPFlowRate - 141558,0 × REACTIVITY	0,6042
15	POWER = 4875626 - 475560,6 × MCPFlowRate - 6836,794 × VOID	0,5712
16	REACTIVITY = -0,1876 + 0,02266 × VOID	0,6938

⁴ This action was taken for testing the plant's ability of recovering the loss of external electricity supply for the Main Circulation Pump.

⁵ In practice, the value of 0,70 is considered as sufficiently a high correlation.

The R^2 of the model equation (11) is 0,6042, while its value of the equation (12) is 0,5712. The value of R^2 shows how the predicted values by the model equation fit in the sampled data. These calculated two values show that the predictability of the models is satisfactory by both models⁶; in other words, the models sufficiently fit in the data.

In both two models, the coefficients of MCP Flow Rate show similar values in their order of magnitude. But the sign of the coefficients are both negative. This sign is consistent with the scenario that led to the increase of the reactor power.

On the other hand, signs of the coefficients of REACTIVITY and VOID are also both negative; but, the values of the coefficients are smaller than the value of the coefficient of MCP Flow Rate. This observation suggests that the increase of power was dominated by the reduction of the MCP Flow Rate, while REACTIVITY and VOID were no longer influential to the increase of the reactor power in this period of 5 seconds before the explosion.

Reactor theory

It is known that the positive void coefficient was one of the causes of the sudden increase of the reactor power, in case of the explosion of Chernobyl reactor. However, in the above observation during the period of a few seconds before the explosion, the void coefficient didn't act as the dominant factor, although the reactivity should have increased the neutron flux on theory. Therefore, in this observation, the reactivity and/or void coefficient needs to be considered as predominant factor, of which influence was not observed dynamically during the period of these 5 seconds. Therefore, here it is necessary to discuss this problem with the reactor theory.

SUMMARY, CONCLUSION AND RECOMMENDATION

Empirical method was used for analyzing the transient of the nuclear reactor core, a few second before the explosion at the time of the Chernobyl accident (between 01h 23min 38sec and 01h 23min 42,71sec). 11 parameters were taken from the literature [1] and correlations of each pair of those variables were calculated. And, then, 4 parameters were selected for further analyzing the process of transient before the explosion. A scenario was assumed for this analysis, such as the reduction of the flow rate of the Main Circulation Pump and the insertion of the void caused the increase of the power for the explosion. 2 separate linear models were made to examine this scenario. The result indicated that the reduction of the flow rate of the Main Circulation Pump was dominant over the void and the reactivity during the last few seconds to the explosion. And, then, the relation between the void and the reactivity was investigated also with this methodology, and the result was compared with the nuclear reactor theory shown in the literature [2]. The result of this comparison suggested that the value of the void coefficient was 30 pcm/%. In the literature [1], the inserted void was about 50 % before this final moment. Therefore, the reactivity was calculated as 0,015 in the literature [2], while the empirical analysis indicated its value as 0,023.

⁶ R^2 is about 0.60. It means that more than half of the actual data are predicted by the model.

The empirical method calculates the degree of changes within each valuable, not the absolute value such as average; and then, this methodology further calculates and determines the relation with other variable(s). Focus is made on the changes (distribution) of the variables. In other words, empirical method emphasizes relations between the relative changes in the variables, while statistics examines the appropriateness of the estimated absolute values.

The result of the empirical analysis in this study shows a brief outlook of the process of the reactor explosion of Chernobyl. The calculated reactivity by the empirical method is not exactly as same as the value calculated by the reactor theory, but in the same order of magnitude. Rather, the empirical method calculates the strength of the relations between different types of the variables. In this study, one linear model was constructed to examine the influence to the sudden power increase by the water flow in the reactor core and by the reactivity. And, the calculated coefficients of the linear model show a significant influence of the reduction of the circulation of reactor coolant.

The predominance of reactor design, such as indicated by the void coefficient, is well known for explaining the accident of Chernobyl: although, it is not the aim of this paper to introduce a large number of published literatures about the reactor design. On the other hand, the empirical analysis in this study shows how the insertion of void and the reduction of water flow were related to the power increase.

The literature [2] calculated the value of reactivity $\left(\frac{\Delta K_{\text{eff}}}{K_{\text{eff}}}\right)$ at the time of the reactor transient of the Chernobyl accident, as 0,015, by the following equation, given 30 pcm/% of the void coefficient and 50 % void insertion by Xenon poisoning:

$$\frac{\Delta K_{\text{eff}}}{K_{\text{eff}}} = \text{Void Coefficient (pcm/\%)} \times \text{Void Insertion (\%)}$$

On the other hand, Table 6 shows the relation between REACTIVITY and VOID in the model (13), and the coefficient of VOID for REACTIVITY is 0,023. This value is roughly on the same order of magnitude as the theory [2] indicates as 0,015. Therefore, this observation shown in Table 6 also suggests that the void coefficient is about 30 pcm/%, which was as discussed by [2].

The result of this study shows possibility of using empirical method for analysis of physical phenomena, specifically the process of transient in the nuclear reactor core.

REFERENCES

1. *Martinez J. M.* An Analysis of the Physical Causes of the Chernobyl Accident / Jose M. Aragonez, Emilio Mingues, Jose M. Peri, Guillermo Velarde // Nuclear Technology. — 1990. — Vol. 90. — P. 371–399.
2. *Reich F.* Neutron Kinetics of the Chernobyl Accident / F. Reich // ENS News. — 2005. — Issue 13.

Received 04.02.2016

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТ ПО РЕСУРСАМ В НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

В.П. СИМОНЕНКО, А.М. СЕРГИЕНКО

Аннотация. Предложен метод динамического распределения работ в неоднородной вычислительной системе в реальном времени. Основой метода является предварительная подготовка исходной информации с учетом ограничений на продолжительность планирования, сложности выполняемых работ, а также индивидуальных характеристик ресурсов, таких как производительность, емкость памяти, наличие загруженных исходных данных и математического обеспечения. Алгоритм такой подготовки состоит в формировании матрицы запасов времени выполнения работ на ресурсах и в последовательности преобразований этой матрицы в матрицу стоимостей с применением матрицы проверки конфликтности назначений. После подготовки информации задача планирования решается венгерским алгоритмом поиска максимального паросочетания в графе.

Ключевые слова: расписание, двудольный граф, венгерский алгоритм, планировщик.

ВВЕДЕНИЕ

Планирование вычислений состоит в определении плана решения совокупности работ с определенным временем исполнения и ограничениями по времени их выхода из вычислительной системы (ВС). Система планирования должна обеспечить выполнение требования минимального суммарного временного отклонения моментов выхода работ из ВС от заданных сроков их выполнения при соблюдении порядка следования. Планирование в реальном времени, т.е. динамическое планирование, означает, что такая задача должна быть решена за интервал времени, который оказывается меньшим чем некоторое значение, определяемое допустимым временем реакции ВС на поток заявок на работы. Поэтому такое планирование является довольно трудной задачей. В общем случае задача планирования, даже с одним вычислительным узлом, относится к классу NP-полных [1, 2].

В большинстве случаев разработчики систем планирования в реальном времени используют статические алгоритмы и заранее определяют максимальный список заявок на работы, допустив наихудший случай для получения статической таблицы, управляющей распределением работ, т.е. плана. Этот план фиксируется и используется для безусловного исполнения в динамическом режиме со следующими допущениями:

- все временные ограничения остаются неизменными на время выполнения плана;
- все работы вкладываются в свое критическое время исполнения и выхода работ из системы.

В других случаях при помощи приемов статического планирования создается статический список приоритетов для использования в динамическом режиме во время диспетчеризации самих работ.

Если система реального времени работает только в динамическом режиме, то использование допущений статического планирования, когда все известно априори, недопустимо. В этом случае выбирается один из возможных алгоритмов составления расписания и тщательно анализируется на применимость его в динамическом режиме в конкретной вычислительной системе. Как правило, применяются алгоритмы, использующие планирование по спискам, и приоритетное обслуживание [3–6].

В работе предлагается динамическое планирование выполнять с использованием математического аппарата поиска максимального паросочетания. Для этого разработан метод преобразования исходной информации о множестве работ в исходные данные для составления плана с помощью этого аппарата. Причем распределение заявок на работы по ресурсам реализуется для неоднородной параллельной вычислительной системы (НПВС) с учетом ограничений реального времени и выполняется планировщиком нижнего уровня. В качестве этого аппарата целесообразно использовать венгерский алгоритм, а также его модификацию, описанную авторами в работе [7], которая имеет меньшую временную сложность.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим общую постановку задачи планирования с ограничениями реального времени. На вход НПВС поступает множество работ. Из него выбирается порция n работ, которые следует распределить на n имеющихся ресурсов. Каждая работа характеризуется тремя временными параметрами:

T_{in}^i — момент поступления i -й входной работы в ВС;

T_{out}^i — момент выхода i -й работы из ВС;

T_w^i — длительность выполнения i -й работы на вычислительном узле НПВС, имеющем максимальную производительность, $i = 1, \dots, n$, которая равна оценке сложности этой работы.

Распределенная ВС, такая как НПВС, имеет множество ресурсов; j -й характеризуется производительностью R^j . Для i -й работы можно определить время решения ее на j -м ресурсе в относительных единицах. Для этого определим $R_{\max} = \max \{R^1, \dots, R^n\}$.

Определим относительную производительность j -го вычислительного узла как $Z^j = R^j / R_{\max}$, $j = 1, \dots, n$.

Имея значения относительной производительности узлов, можно определить отношение работа–ресурс с учетом времени выполнения работы и производительности каждого узла НПВС. Для этого сформируем матрицу связности C , в которой элемент $C[i, j] = T_w^i / Z^j$ определяет относительное время выполнения i -й работы на j -м ресурсе с учетом его производительности. Причем значение $C[i, j]$ определяет относительное время выполнения

i -й работы на j -м ресурсе ввиду того, что $0 < Z^j \leq 1$. Элемент $C[i, j]$ также учитывает наличие загруженных исходных данных и математического обеспечения. Например, при их отсутствии $C[i, j] = 0$.

В системах с несколькими обслуживающими ресурсами часто используется стратегия минимизации максимальной из продолжительностей использования ресурсов, что обычно связано с повышением быстродействия такой системы при функционировании в интерактивном режиме. В работе используется критерий минимума времени выполнения всех работ, поскольку предполагается, что все заявки на работы являются независимыми и требуется, чтобы не достигалось максимально допустимое время реакции T_{out}^i на i -ю заявку. Обычно T_{out}^i указывается в спецификации заявки. При этом для выполнения каждой работы обеспечивается требуемое быстродействие системы.

В связи с тем, что работа, выполняемая с ограничениями в реальном времени, должна завершиться до заданного времени реакции T_{out}^i , то необходимо учитывать временной запас загрузки ресурса:

$$\Delta_t^{i,j} = T_{out}^i - T_{in}^i - C[i, j].$$

Запас $\Delta_t^{i,j}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от сложности T_w^i работы и относительной производительности Z^j j -го ресурса. Положительные значения $\Delta_t^{i,j}$ означают, что работа i , назначенная на ресурс j , будет завершена на промежуток времени $\Delta_t^{i,j}$ до назначенного срока, а отрицательные — что выход заявки из системы произойдет позже назначенного срока с задержкой $\Delta_t^{i,j}$. Примерная матрица Δ_t элементов $\Delta_t^{i,j}$ для некоторых наборов работ и ресурсов показана на рис. 1.

		Ресурсы					
		1	2	3	4	5	6
Работы	1	1	3	-2	-3	4	5
	2	-2	0	-5	-6	-4	-2
	3	3	6	1	7	9	1
	4	1	-3	-4	-5	-1	-1
	5	-1	4	-4	1	-5	-1
	6	8	1	2	4	3	2

Рис. 1. Исходная матрица Δ_t

При вычислении $\Delta_t^{i,j}$ следует учитывать, что на момент планирования T_p все заявки имеют одно и то же базовое время начала планирования неза-

висимо от времени прихода заявок в систему, т.е. считается, что заявки хранятся в буфере. Кроме этого, следует учитывать время работы планировщика, т.е. длительность планирования T_{Σ} . Поэтому можно принять

$$T_{in}^i = T_P + T_{\Sigma}.$$

В соответствии с требованиями режима реального времени значение $\sum_{i=1}^n \Delta_t^{i,j}$ должно быть больше или равно 0. При невозможности получения варианта распределения с выполнением требования по времени выхода для всех заявок и при включении в распределение значений с $\Delta_t^{i,j} < 0$ их сумма должна быть минимальной.

ПРИВЕДЕНИЕ УСЛОВИЙ ПЛАНИРОВАНИЯ К ЗАДАЧЕ ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ

В указанной выше постановке решение задачи назначения можно свести к задаче поиска максимального паросочетания во взвешенном двудольном графе, которая решается венгерским алгоритмом или алгоритмом направленного поиска. Следует отметить, что поиск варианта распределения выполняется для НПВС, для которой решение ищется в разреженной бинарной матрице связности. Эта матрица формируется в соответствии с венгерским алгоритмом и с ее помощью ищется максимальное паросочетание для невзвешенного двудольного графа. В этом случае можно применить адаптивный алгоритм, временная сложность которого зависит от коэффициента заполнения матрицы связности двудольного графа, а при коэффициенте заполнения менее 0,7 временная сложность не превышает $O(n^{1,5} \log n)$ [7].

Для поставленной задачи требуется модификация формирования исходных данных и формирование базовой (начальной) области поиска. Рассмотрим процедуры формирования исходных данных и области поиска на примере решения задачи назначения для шести работ на шести процессорных узлах. После обработки временных ограничений и учета производительности каждого узла получим исходную матрицу Δ_t (рис. 1).

Информация в матрице Δ_t указывает только объем работы и относительное время ее выполнения с учетом производительности вычислительных узлов. Однако из-за неоднородности НПВС приходится учитывать индивидуальные характеристики каждого вычислительного узла, связанные с возможностью выполнения работы. Это наличие оперативной памяти достаточного объема, исходных данных в узле, программ, соответствующих заявке на работу и т.п. Для правильного планирования требуется оценка принципиальной возможности выполнения работ в каждом узле, которая учитывает эти критерии. Для этого необходимо сформировать матрицу Q проверки конфликтности назначений i -й работы в j -й узел:

$$Q_{i,j} = \prod_{x=1}^P C_x^{i,j},$$

где $C_x^{i,j}$ — степень выполнения x -го обязательного требования для назначения i -й заявки на j -й ресурс. Для матрицы на рис.1 матрица Q показана на рис. 2. Ввиду того, что обязательное требование следует выполнять безусловно, то элементы $Q_{i,j}$ могут принимать лишь значения 1 или 0.

На следующем этапе формирования исходной информации необходимо выполнить фильтрацию элементов матрицы Δ_t в соответствии со значениями элементов матрицы Q . В результате получаем новую матрицу Δ'_t , показанную на рис. 3, где символом ∞ обозначены варианты невозможных назначений:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	0
2	1	1	1	0	1	1
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	1	1	1	0
5	1	0	0	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1

Рис. 2. Матрица проверки конфликтных назначений $Q_{i,j}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	∞	∞	4	∞
2	-2	0	-5	∞	-4	-2
3	∞	6	∞	7	9	∞
4	∞	-3	-4	-5	-1	∞
5	-1	∞	∞	1	-5	-1
6	8	1	∞	4	3	2

Рис. 3. Матрица Δ'_t после фильтрации конфликтных назначений Δ_t

Для формирования плана распределения работ по процессорным узлам в соответствии с требованиями венгерского алгоритма и ограничениями, накладываемыми постановкой задачи, требуется сформировать начальную или исходную зону поиска. Для этого выполним следующие действия.

Необходимо учесть, что положительные значения элементов матрицы Δ_t соответствуют назначениям, которые безусловно включаются в решение, так как любое назначение, соответствующее $\Delta_t^{i,j} > 0$, не противоречит условиям временных ограничений. Поэтому всем положительным элементам присваиваем значения 0, а у отрицательных элементов поменяем знак на положительный. В результате получаем новую матрицу Δ''_t (рис. 4).

ПОИСК ПЛАНА ПО ВЕНГЕРСКОМУ АЛГОРИТМУ

Дальнейшие действия по формированию исходной области и собственно поиск паросочетания выполняются в соответствии с венгерским алгоритмом. Для этого из каждого элемента столбца матрицы Δ''_t вычитается наименьший элемент этого столбца:

$$\Delta_t^{m,j} = \Delta_t^{m,j} - \min_i \Delta_t^{m,j} . \Delta$$

Из каждого элемента строки полученной матрицы Δ_t''' вычитается наименьший элемент этой строки:

$$\hat{\Delta}_t^{i,j} = \Delta_t^{m_i,j} - \min_i \Delta_t^{m_i,j}.$$

В результате в каждой строке и каждом столбце матрицы $\hat{\Delta}_t$ имеем нулевой элемент (рис. 5).

Для поиска решения из исходной матрицы поиска $\hat{\Delta}_t$ выделяем нулевые элементы и формируем исходную матрицу для поиска максимального паросочетания (OPR) (рис. 6). Для получения решения используем один из алгоритмов поиска максимального паросочетания в невзвешенном двудольном графе. Для него необходимо инвертировать значения элементов матрицы OPR, т.е. заменить в ней все нулевые элементы на единичные и наоборот. Получаем матрицу поиска решения PR (рис. 7):

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	∞	∞	0	∞
2	2	0	5	∞	4	2
3	∞	0	∞	0	0	∞
4	∞	3	4	5	1	∞
5	1	∞	∞	0	5	1
6	0	0	∞	0	0	0

Рис. 4. Промежуточная матрица Δ_t'''

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	∞	∞	0	∞
2	2	0	2	∞	4	2
3	∞	0	∞	0	0	∞
4	∞	2	0	4	0	∞
5	1	∞	∞	0	5	1
6	0	0	∞	0	0	0

Рис. 5. Исходная матрица поиска $\hat{\Delta}_t$

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	1	1
3	1	0	1	0	0	1
4	1	1	0	1	0	1
5	1	1	1	0	1	1
6	0	0	1	0	0	0

Рис. 6. Матрица области поиска решения (OPR)

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	1	1	1

Рис. 7. Матрица поиска решения (PR)

Для рассматриваемого примера, следуя венгерскому алгоритму, найдено максимальное паросочетание (рис. 8). Оно является окончательным планом размещения заявок по узлам, поскольку мощность полученного паросочетания равна размерности решения задачи, т.е. все заявки распределены.

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	1	1	1

Рис. 8. План распределения

В том случае, если совершенное паросочетание не получено, т.е. когда мощность полученного паросочетания меньше размерности матрицы PR, необходимо найти новую область поиска в соответствии с венгерским алгоритмом. В результате такого выполнения определяются элементы $\Delta_i^{i,j}$, которые могут быть дополнительно включены в зону поиска.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий формирование новой зоны поиска, в соответствии с венгерским алгоритмом. В качестве исходной примем матрицу, представленную на рис. 9.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	3	0	∞	2	0	2
X_2	5	2	8	0	∞	4
X_3	2	∞	0	3	4	3
X_4	8	0	7	∞	3	1
X_5	0	1	0	∞	0	0
X_6	∞	∞	1	3	0	6

Рис. 9. Исходная матрица, не имеющая прямого решения

Для данного примера имеем предварительное распределение, отмеченное выделенными нулями. Поиск максимального паросочетания по этой матрице не дает решения. Для дальнейшего поиска решения определяется минимальная опора. Минимальной опорой называют минимальное множество строк или столбцов, т.е. линий, содержащих все нулевые элементы. Для этого выполняют алгоритм [8]:

1. Отмечают в каждой строке, в которой есть решение, все нули.
2. Помечают знаком «+» каждую строку, не содержащую отмеченных нулей.
3. Помечают знаком «+» каждый столбец, содержащий отмеченные нули, в какой-либо из строк, помеченных знаком «+».
4. Помечают знаком «+» каждую строку, содержащую отмеченный нуль в каком-либо столбце, помеченном знаком «+».
5. Действия повторяют до тех пор, пока возможно помечать знаком «+» новые строки и столбцы.

Выделим минимальную опору. Для этого отметим все непомеченные знаком «+» строки (в примере — X_2, X_3, X_5) и все помеченные столбцы (в примере — Y_2, Y_5). В результате, получаем помеченную матрицу (рис. 10).

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
X_1	3	0	∞	2	0	2	+
X_2	5	2	8	0	∞	4	
X_3	2	∞	0	3	4	3	
X_4	8	0	7	∞	3	1	+
X_5	0	1	0	∞	0	0	
X_6	∞	∞	1	3	0	6	+
		+			+		

Рис. 10. Матрица с выделенной минимальной опорой

Затем формируется новая зона поиска. Для этого рассматривается подматрица, образованная элементами, через которые не проходят отмеченные на рис. 10 линии и берется наименьший элемент этой подматрицы, в примере — равный 1. Этот элемент вычитается из элементов всех тех столбцов, через которые не проходят отмеченные линии, и затем он прибавляется к элементам всех тех строк, через которые проходят выделенные линии. В данном примере единица вычитается из элементов столбцов Y_1, Y_3, Y_4, Y_6 и прибавляется затем к элементам строк X_2, X_3, X_5 . В результате этих действий изменяется количество нулей, определяющих зону поиска решения.

После этого снова выполняется попытка найти максимальное паросочетание. Вышеописанные действия повторяются до тех пор, пока не будет получено максимальное паросочетание. Результирующая матрица показана на рис. 11.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	2	0	∞	1	0	1
X_2	5	3	8	0	∞	4
X_3	2	∞	0	3	5	3
X_4	7	0	6	∞	3	0
X_5	0	2	0	∞	1	0
X_6	∞	∞	0	3	0	5

Рис. 11. Матрица окончательного решения

Таким образом, условия задачи динамического планирования с ограничениями реального времени для НПВС формально преобразуются в матрицу поиска, которая обрабатывается с использованием алгоритма поиска максимального паросочетания с быстрым получением эффективного плана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе метод преобразования исходной информации приводит решение задачи распределения заявок по вычислительным ресурсам с ограничениями реального времени к классической задаче комбинаторной математики — поиска максимального паросочетания во взвешенном двудольном графе. Быстрое решение такой задачи позволяет выполнять динамическое планирование в современных параллельных ВС. Дальнейшее ускорение составления расписания можно получить, применив алгоритм адаптивного планирования, предложенный в работе [7], который основан на улучшении алгоритма поиска максимального паросочетания во взвешенном двудольном графе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Papadimitriou C.H.* Combinatory optimization, algorithm and complexity / C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. — New Jersey: Prentice-Hall. — 1982. — 496 p.
2. *Berge C.* Theorie des graphes et ses application / C. Berge. — Paris: Dunod. — 1958. — 275 p.
3. *Зыль С.* Операционная система реального времени QNX: от теории к практике. — 2-изд. / С. Зыль. — СПб.: БХВ — Петербург, 2004. — 192 с. ISBN 5-94157-486-X
4. *Зыль С.* QNX Momentics. Основы применения / С. Зыль. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 256 с.: ил. ISBN 5-94157-430-4
5. *Кёртен Р.* Введение в QNX/Neutrino 2 / Р. Кёртен. — СПб.: Петрополис. — 2001. — 512 С. ISBN 5-94656-025-9.
6. *Ослэндер Д.М.* Управляющие программы для механических систем: Объектно-ориентированное проектирование систем реального времени / Д.М. Ослэндер, Дж.Р. Риджли, Дж.Д. Рингенберг. — М.: Бином. Лаборатория знаний. — 2004. — 416 с. ISBN 5-94774-097-4.
7. *Симоненко В.П.* Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределенных вычислительных системах / В.П. Симоненко, А.М. Сергиенко, А.В. Симоненко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 2. — С. 20–35.
8. *Kauffman A.* Introduction to a la combinatorique en vue des applications / A. Kauffman. — Paris: Dunod, 1968.

Поступила 25.05.2016

**ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ПРИРОДОКОРИСТУВАННІ
З УРАХУВАННЯМ РИЗИКУ НЕВИКОРИСТАНИХ
МОЖЛИВОСТЕЙ НА ПІДСТАВІ
ПОПАРНОГО ПОРІВНЯННЯ АЛЬТЕРНАТИВ**

Ю.Д. СТЕФАНИШИНА-ГАВРИЛЮК, Д.В. СТЕФАНИШИН

Анотація. Обґрунтовано необхідність урахування ризику невикористаних можливостей як складової повного ризику під час прийняття рішень у природокористуванні в умовах ризику. Сформульовано загальні положення і правила та наведено принципові узагальнення — означення і твердження, що стосуються прийняття рішень у природокористуванні з урахуванням ризику невикористаних можливостей. Запропоновано функції повного ризику альтернатив у вигляді лінійних комбінацій, які поєднують системні (власні) ризики альтернатив та ризики невикористаних можливостей, де останні трактуються як виграшні ефекти альтернатив, що відкидаються. Сформульовано твердження про те, що множина оптимальних альтернатив за критерієм мінімального ризику як результат розв'язання задачі прийняття рішень з урахуванням ризику невикористаних можливостей збігається з множиною оптимальних альтернатив за критерієм максимальної корисності. Наведено способи визначення компонент повного ризику для заповнення таблиць рішень на підставі попарного порівняння альтернатив і запропоновано алгоритми вибору оптимальної альтернативи з урахуванням ризику невикористаних можливостей.

Ключові слова: альтернатива, оптимізація, прийняття рішень у природокористуванні, повний ризик, ризик невикористаних можливостей, системний ризик.

ВСТУП

Формальний підхід до прийняття рішень у природокористуванні передбачає порівняння варіантів (альтернатив) та вибір серед них оптимальних (квазі-оптимальних, компромісних тощо) [1–3].

Оскільки ефекти від природокористування реалізуються в майбутньому, то відповідні альтернативи оцінюються і порівнюються в умовах невизначеності. Для формалізації задачі прийняття рішення в умовах невизначеності використовується ризик як інструмент її розкриття і подолання.

Проблемами ризику у природокористуванні в різних його проявах (господарському, екологічному, в контексті раціонального природокористування і сталого розвитку територій тощо) у різні роки займалися такі відомі вчені, як М.М. Биченок, П.І. Бідюк, В.В. Вітлінський, Ю.Л. Забулонов,

М.З. Згуровський, А.Б. Качинський, М.О. Клименко, О.М. Ларічев, В.А. Лєгасов, Г.В. Лисиченко, Ц.Є. Мірцхулава, А.А. Музалєвський, Е.Мушик, П.Мюллер, Я.С. Наконечний, В.А. Ойгензихт, Н.Д. Панкратова, Б.Н. Порфірьєв, А.Ф. Реймерс, А.Ю. Ретеюм, І.В. Сергієнко, Г.А. Хміль, Н.В. Хохлов, А.С. Шапкін, Є.А. Яйлі, О.І. Ястремський, P.F. Ricci, W. Rowe, P. Slovic, C. Starr та інші. Однак, незважаючи на велику кількість різних інтерпретацій ризику, методів і моделей його аналізу й оцінювання [4–11], дотепер немає методів прийняття рішення в умовах ризику, які дозволяли б повною мірою враховувати взаємопов'язаність та взаємозалежність різних наслідків прийняття рішення, як негативних, так і позитивних, у контексті порівняння альтернатив та вибору серед них тих, що обтяжені меншим ризиком [12–14].

МЕТА РОБОТИ, ОБ'ЄКТ І ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕНЬ

Сучасні національні стратегії екологічної і техногенної безпеки багатьох країн орієнтуються на концепцію прийняттого («ненульового», «майже досяжного мінімального» тощо) ризику в природокористуванні. При цьому і відмова від природокористування теж може бути пов'язана з ризиком, зокрема з ризиком невикористаних (утрачених) можливостей, коли суспільство, не використовуючи раціонально природних ресурсів, ризикує відстати у своєму поступальному розвитку.

Поняття ризику невикористаних можливостей не є новим, оскільки в багатьох прикладних завданнях ризик як атрибут прийняття рішень в умовах невизначеності визначається не тільки ймовірними негативними наслідками (збитками, шкодою тощо), а й відсутністю очікуваних позитивних результатів. Це означає, що не існує альтернатив, які б не були обтяжені ризиком. Вибираючи альтернативу з відсутніми негативними наслідками, носій рішення ризикує позитивним результатом, які дає альтернатива з наявними негативними наслідками. У контексті природокористування під ризиком невикористаних можливостей слід розуміти не тільки втрачені ймовірні вигоди (економічні та інші вигоди корисності), які можна отримати від використання природних ресурсів, а і зменшення негативних наслідків (збитків, шкоди, втрат), зменшення розмірів штрафних та інших санкцій від упровадження більш безпечних технологій тощо.

Мета роботи — подання моделей оцінювання повного (сукупного) ризику альтернатив з урахуванням як негативних, так і позитивних наслідків природокористування та методу прийняття оптимальних рішень з урахуванням ризику невикористаних можливостей на підставі попарного порівняння альтернатив.

Об'єктом досліджень є ризику як оцінні функції альтернатив, **предметом досліджень** — методи і моделі оцінювання повного ризику альтернатив та прийняття оптимальних рішень на підставі їх попарного порівняння з урахуванням ризику невикористаних можливостей.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПРИНЦИПОВІ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Під прийняттям рішення надалі розумітимемо формалізовану процедуру порівняння альтернатив та вибору (алгоритм здійснення такого вибору) оп-

тимальної альтернативи з множини альтернатив, яку реалізує носій рішення [1–3].

У розглядуваному випадку прийняття рішення на підставі порівняння альтернатив являє собою попарне їх оцінювання та вибір однієї з них (оптимальної) $a_{i,\text{opt}}$ з деякої множини допустимих альтернатив \mathbf{A} . Будемо розглядати найбільш поширений на практиці випадок, коли є зліченна кількість допустимих альтернатив $a_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{0, n}$, де a_0 — відмова від рішення або «нульова альтернатива».

Умовимося, що кожна допустима альтернатива a_i однозначно визначається деяким результатом r_i , який допускає кількісну оцінку.

Визначимо результат r_i як ризик альтернативи a_i і шукатимемо альтернативу з найменшим його значенням, тобто метою вибору буде $\min r_i$.

Оптимальне рішення d_{opt} вибиратимемо за правилом

$$d_{\text{opt}} = \{a_{i,\text{opt}} \mid a_{i,\text{opt}} \in \mathbf{A} \wedge r_{i,\text{opt}} = \min(r_i)\}. \quad (1)$$

Кожній допустимій альтернативі a_i можуть відповідати різні зовнішні умови F_j і відповідні результати $r_{i,j}$. Нехай $r_{i,j}$ — оцінка ризику, що відповідає альтернативі a_i за умов F_j .

Відповідно сім'ю рішень можна подати таблицею (матрицею) рішень (рис. 1).

a_i	F_j						
	F_0	F_1	...	F_j	...	F_{m-1}	F_m
a_0	$r_{0,0}$	$r_{0,1}$...	$r_{0,j}$...	$r_{0,m-1}$	$r_{0,m}$
a_1	$r_{1,0}$	$r_{1,1}$...	$r_{1,j}$...	$r_{1,m-1}$	$r_{1,m}$
...
a_i	$r_{i,0}$	$r_{i,1}$...	$r_{i,j}$...	$r_{i,m-1}$	$r_{i,m}$
...
a_n	$r_{n,0}$	$r_{n,1}$...	$r_{n,j}$...	$r_{n,m-1}$	$r_{n,m}$

Рис. 1. Загальний вигляд таблиці рішень

Відповідно критерій вибору (1) набуде вигляду

$$d_{\text{opt}} = \{a_{i,\text{opt}} \mid a_{i,\text{opt}} \in \mathbf{A} \wedge r_{i,j,\text{opt}} = \min(r_{i,j})\}, \forall F_j, j = \overline{0, m}. \quad (2)$$

Вибір оптимального рішення згідно з критерієм (2) не є однозначним, оскільки мінімальний результат $\min r_{i,j}$ може досягатися на множині всіх результатів $\{r_{i,j}\}$ багаторазово.

Щоб дійти до однозначної і, по можливості, найвигіднішої альтернативи у випадку, коли різним альтернативам a_i відповідають різні зовнішні умови F_j , вводяться оцінні (цільові) функції.

Оскільки в оцінну функцію можна вкладати будь-який зміст, то охарактеризуємо наслідки альтернативних рішень комбінаціями результатів, що

відповідають обом порівнюваним альтернативам одночасно. При цьому множину альтернатив, з якими порівнюється кожна з досліджуваних альтернатив, будемо розглядати як множину зовнішніх умов, за яких здійснюється вибір.

Нехай \mathbf{A} — деяка (зліченна) множина попарно порівнюваних альтернатив $a_i, a_j, i, j = \overline{0, n}, i \neq j$, для яких задано невід’ємні значення деяких числових характеристик l_i, g_i і l_j, g_j , що в цілому описують програшні l та виграшні g їх якості відповідно.

Покладемо, що сукупний ризик кожної з припустимих альтернатив визначається можливими втратами (програшами) l , зумовленими цією альтернативою (капітальні затрати, операційні витрати, збитки, штрафи тощо), та відсутністю очікуваних позитивних результатів (виграшів) g , що можуть бути отримані з альтернативами. Розглянемо функції сукупного (повного) ризику, пов’язаного з вибором альтернативи $a_i \in \mathbf{A}, i = \overline{0, n}$, за умови існування альтернатив $a_j \in \mathbf{A}, j = \overline{0, n}, i \neq j$ у вигляді лінійних комбінацій:

$$r_{i,j} = l_i + g_j; i, j = \overline{0, n}; i \neq j. \quad (3)$$

Ризик $r_{i,j}$ у формі (3) можна витлумачити як ризик альтернативи a_i за умови, що носій рішення відмовляється від альтернативи a_j .

Таблиця рішень $\|r_{i,j}\|$ зводиться до n рядків (рис. 2), де кожній альтернативі a_i приписується $n-1$ результатів $r_{i,j}, i, j = \overline{0, n}; i \neq j$, які характеризують у цілому всі наслідки цього рішення з урахуванням ризику невикористаних можливостей. Зауважимо, що діагональ видозміненої таким чином таблиці рішень з n рядків з індексами $i = j$ при цьому не заповнюється, оскільки альтернативи не можуть порівнюватися самі з собою.

a_i	a_j						
	a_0	...	a_i	a_j	a_n
...
a_i	$r_{i,0}$...		$r_{i,j}$	$r_{i,n}$
...

Рис. 2. Рядок оцінних функцій для альтернативи a_i

Назвемо величину $r_{i,j}$, яка є сумою програшу l_i за альтернативою a_i та виграшу g_j за альтернативою $a_j, r_{i,j} = l_i + g_j$, повним ризиком альтернативи a_i порівняно з альтернативою $a_j, i \neq j$.

Відповідно для альтернативи a_j порівняно з альтернативою a_i повний ризик $r_{j,i} = l_j + g_i$.

Модель сукупного (повного) ризику, пов’язаного з вибором кращої альтернативи, у вигляді (3) дозволяє для прийняття рішень згідно з критерієм (2) одночасно оперувати як програшними, так і виграшними ефектами, що характеризують альтернативи, які між собою порівнюються.

Згідно з виразами (3) для кожної альтернативи $a_i \in A$, $i = \overline{0, n}$, може задаватися $m = n - 1$ значень повного (сукупного, сумарного) ризику $r_{i,j}$, де n — загальна кількість допустимих альтернатив.

Складову l_i сукупного ризику $r_{i,j}$ альтернативи a_i в порівнянні a_i з альтернативою a_j , $i \neq j$, назовемо системним або власним ризиком альтернативи a_i .

Складову g_j , $j = \overline{0, n}$, $i \neq j$, альтернативи a_j в порівнянні a_i з альтернативою a_j , $i \neq j$, назовемо несистемним ризиком альтернативи a_i або ризиком невикористаних можливостей альтернативи a_i порівняно з альтернативою a_j .

Нехай існує альтернатива a_0 , для якої програш $l_0 = 0$ та виграш $g_0 = 0$. Назвемо альтернативу a_0 , для якої програш $l_0 = 0$ і виграш $g_0 = 0$, нульовою.

Твердження 1. Повний ризик нульової альтернативи порівняно з будь-якою іншою допустимою альтернативою з ненульовим виграшем g_j є ризиком невикористаних можливостей, який дорівнює цьому виграшу: $r_{0,j} = g_j$.

Твердження 2. Повний ризик будь-якої допустимої альтернативи з ненульовим програшем l_i у порівнянні її з нульовою альтернативою є власним ризиком альтернативи, який дорівнює її програшу: $r_{i,0} = l_i$.

Нехай альтернативи a_i , a_j називаються ефективними, якщо їх очікувані програші є меншими за очікувані виграші: $l_i < g_i$, $l_j < g_j$.

Твердження 3. Якщо серед зліченної множини \mathbf{A} попарно порівнюваних альтернатив a_i , a_j , $i, j = \overline{0, n}$, $i \neq j$, знайдеться лише одна ефективна альтернатива $a_k \in \mathbf{A}$, то вона буде кращою за повним ризиком $r_{k,i} = l_k + g_i$ порівняно з усіма іншими альтернативами $a_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{0, n}$, $i \neq k$.

Упорядкуємо альтернативи $a_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{0, n}$, за зростанням програшів l_i .

Твердження 4. Якщо серед зліченної множини \mathbf{A} допустимих альтернатив, упорядкованих за зростанням програшу, знайдеться альтернатива a_k , повні ризики якої $r_{k,i}$, $r_{k,j}$ порівняно з найближчими її сусідніми альтернативами a_i , a_j з індексами $i = k - 1$, $j = k + 1$ виявляться меншими, ніж повні ризики $r_{i,k}$, $r_{j,k}$ альтернатив a_i , a_j при їх порівнянні з a_k , то альтернатива a_k буде кращою при попарному її порівнянні з усіма альтернативами, що належать множині $\mathbf{A}_j = \{a_j\}$, $j = \overline{0, k+1}$, $\mathbf{A}_j \in \mathbf{A}$.

Розглянемо задачу багатокритеріальної оптимізації на зліченній множині допустимих альтернатив $\mathbf{A} = \{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$:

$$f_k(a_i) \rightarrow \text{extr}, k = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}, a_i \in \mathbf{A}, \quad (4)$$

у якій критерії оцінювання альтернатив $f_k(a_i)$, $k = \overline{1, p}$, мають числову оцінку і вважаються визначеними, кожний з критеріїв оцінювання характеризує деяку локальну властивість альтернативи $a_i \in \mathbf{A}$, і, якщо всі критерії f_1, f_2, \dots, f_p досліджуються на мінімум, тобто

$$f_k(a_i) \rightarrow \min,$$

то серед них обов'язково знайдеться хоча б один такий критерій f_q , $q \in \{1, 2, \dots, p\}$, значення якого спадають зі зростанням значень інших критеріїв.

Твердження 5. Задача (4) при попарному порівнянні альтернатив зводиться до такої задачі оптимізації:

$$d_{\text{opt}} = \{a_{i,\text{opt}} \mid a_{i,\text{opt}} \in \mathbf{A} \wedge r_{i,\text{opt}} = \min(r_{i,j}, r_{j,i}) \forall (a_i, a_j)\}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (5)$$

де $r_{i,j}$, $r_{j,i}$ — повні ризики, відповідно, альтернативи a_i порівняно з a_j та a_j порівняно з a_i : $r_{i,j} = l_i + g_j$, $r_{j,i} = l_j + g_i$, де l_i , l_j і g_i , g_j — значення відповідним чином нормованих згорток критеріїв, що мінімізуються та максимізуються, для альтернатив a_i і a_j відповідно подані у формі ризиків: l_i , l_j — власних (системних) ризиків альтернатив a_i , a_j та g_j , g_i — ризиків невикористаних можливостей.

Нехай існує деяка функція корисності $u(a_i)$, яка таким чином відображає відношення переваги на множині альтернатив a_i , $i = \overline{1, n}$, що більш переважній з них відповідає більше значення цієї функції.

Нехай за заданої функції корисності $u(a_i)$ задача оптимізації на зліченній множині альтернатив $\mathbf{A} = \{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$, може бути записана як

$$u(a_i) \rightarrow \max, i = \overline{1, n}, a_i \in \mathbf{A}.$$

Твердження 6. Множина оптимальних альтернатив $\mathbf{A}_{\text{opt},r}$ за критерієм оптимального ризику $r_{i,\text{opt}} = \min(r_{i,j}, r_{j,i})$ як результат розв'язання задачі (5) збігається з множиною оптимальних альтернатив $\mathbf{A}_{\text{opt},u}$ за таким критерієм максимальної корисності:

$$u(a_i)_{\text{opt}} = \max(u_i, u_j) \forall (a_i, a_j)\}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

де $u_i = g_i - l_i$, $u_j = g_j - l_j$; l_i , l_j та g_i , g_j — відповідно очікувані програші та виграші альтернатив $a_i \in \mathbf{A}$, $a_j \in \mathbf{A}$.

ВИЗНАЧЕННЯ КОМПОНЕНТ ПОВНОГО РИЗИКУ АЛЬТЕРНАТИВ І ВИБІР ОПТИМАЛЬНОЇ АЛЬТЕРНАТИВИ

Залежно від особливостей оцінювання компонент повного ризику (l, g) альтернатив можливі такі способи їх кількісного подання.

Спосіб 1. Компоненти повного (сукупного) ризику альтернатив оцінюються як ймовірності $\{p_i\}$ очікуваних негативних наслідків і ймовірності $\{s_j\}$, $j \neq i$, позитивних результатів для альтернатив a_j , що при цьому відкидаються. Такий підхід використовується у випадку визначення ймовірних втрат l і очікуваних ефектів g у вигляді добутків $l = p \cdot c$, $g = s \cdot c$, де c — деяка константа, наприклад, вартість (цінність), якою оперують під час прийняття рішення.

Відповідно на першому кроці формування таблиці рішень для кожної допустимої альтернативи задаються значення ймовірностей p_i і s_i : $a_i = (p_i, s_i)$.

Для ефективних альтернатив ймовірностям програшу p мають відповідати більші ймовірності виграшу s . Якщо серед допустимих альтернатив є ефективні, то всі неефективні альтернативи з розгляду можуть вилучатися.

На другому кроці альтернативи упорядковуються згідно з умовою

$$p_0 < p_1 < \dots < p_i < \dots < p_{n-1} < p_n \quad (6)$$

і формується (третій крок) упорядкована множина допустимих альтернатив $\mathbf{A} = \{a_i\}$, $i = \overline{0, n}$, $a_i = (p_i, s_i)$.

На четвертому кроці визначаються функції повного (сукупного) ризику, пов'язаного з вибором альтернативи $a_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{0, n}$, за умови існування альтернатив $a_j \in \mathbf{A}$, $j = \overline{0, n}$, $i \neq j$, у вигляді лінійних комбінацій:

$$r_{i,j} = p_i + s_j; i, j = \overline{0, n}; i \neq j.$$

На п'ятому кроці формується таблиця рішень, у яку заносяться значення $r_{i,j}$. Діагональ таблиці з індексами $i = j$ не заповнюється.

Оптимальна альтернатива вибирається згідно з правилом (5) шляхом попарного порівняння альтернатив, починаючи з пари (a_0, a_1) , з відбором та збереженням на кожному кроці альтернативи, обтяженої меншим ризиком.

Приклад. Оптимальне рішення вибирається з урахуванням ризику невикористаних можливостей серед семи ефективних альтернатив, які описуються ймовірностями p_i очікуваних негативних наслідків і ймовірностями очікуваних позитивних результатів s_i прийняття відповідних рішень (див. таблицю). Альтернативи упорядковано згідно з умовою (6).

Кількісні характеристики альтернатив (приклад)

a_i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
p_i	0	0,03	0,06	0,1	0,15	0,22	0,3	0,4
s_i	0	0,09	0,16	0,23	0,29	0,34	0,39	0,43

Відповідну таблицю рішень зображено у вигляді рис. 3.

a_j	a_i							
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0	–	0,09	0,16	0,23	0,29	0,34	0,39	0,43
a_1	0,03	–	0,19	0,26	0,32	0,37	0,42	0,46
a_2	0,06	0,15	–	0,29	0,35	0,4	0,45	0,49
a_3	0,10	0,19	0,26	–	0,39	0,44	0,49	0,53
a_4	0,15	0,24	0,31	0,38	–	0,49	0,54	0,58
a_5	0,22	0,31	0,38	0,45	0,51	–	0,61	0,65
a_6	0,30	0,39	0,46	0,53	0,59	0,64	–	0,73
a_7	0,40	0,49	0,56	0,63	0,69	0,74	0,79	–

Рис. 3. Таблиця рішень (за наведеними вище характеристиками альтернатив)

У результаті покрокового попарного порівняння альтернатив згідно з правилом (5) отримуємо (рис. 3):

– повний ризик альтернативи a_0 порівняно з a_1 становить $r_{0,1} = 0,09$, альтернативи a_1 порівняно з a_0 буде $r_{1,0} = 0,03$, краща серед a_0 , a_1 — альтернатива a_1 ;

– повний ризик альтернативи a_1 порівняно з a_2 становить $r_{1,2} = 0,19$, альтернативи a_2 порівняно з a_1 буде $r_{2,1} = 0,15$, краща серед a_1 , a_2 — альтернатива a_2 ;

– повний ризик альтернативи a_2 порівняно з a_3 становить $r_{2,3} = 0,29$, альтернативи a_3 порівняно з a_2 буде $r_{3,2} = 0,26$, краща серед a_2 , a_3 — альтернатива a_3 ;

– повний ризик альтернативи a_3 порівняно з a_4 становить $r_{3,4} = 0,39$, альтернативи a_4 порівняно з a_3 буде $r_{4,3} = 0,38$, краща серед a_3 , a_4 — альтернатива a_4 ;

– повний ризик альтернативи a_4 порівняно з a_5 становить $r_{4,5} = 0,49$, альтернативи a_5 порівняно з a_4 буде $r_{5,4} = 0,51$, краща серед a_4 , a_5 — a_4 і так далі. У результаті попарного порівняння a_4 з a_6 та a_7 отримуємо, що повні ризики альтернативи a_4 будуть меншими за повні ризики та наступних альтернатив a_6 , a_7 і, відповідно, a_4 серед семи порівнюваних альтернатив є оптимальною.

Спосіб 2. Компоненти повного (сукупного) ризику альтернатив оцінюються як добутки $l = p \cdot w$, $g = s \cdot v$, $w \neq v$, де w , v — деякі задані вартості або цінності, якими оперують під час рішення, і які мають однакові одиниці вимірювання (наприклад, у грошових одиницях).

У цьому випадку на першому кроці формування таблиці рішень для кожної альтернативи мають задаватися відповідні значення ймовірностей p_i , s_i і значення відповідних вартостей та цінностей w_i , v_i : $a_i = (p_i, w_i; s_i, v_i)$.

На другому кроці кожній альтернативі приписуються ймовірні втрати $l_i = p_i \cdot w_i$ та виграші $g_i = s_i \cdot v_i$: $a_i = (l_i, g_i)$.

Для ефективних альтернатив імовірним втратам l мають відповідати більші очікувані виграші g . Якщо серед допустимих альтернатив є ефективні, то всі неефективні альтернативи з розгляду можуть вилучатися. Так, на третьому кроці формується остаточна злічена множина допустимих альтернатив.

На четвертому кроці альтернативи упорядковуються й нумеруються згідно з умовою

$$l_0 < l_1 < \dots < l_i < \dots < l_{n-1} < l_n$$

і формується упорядкована множина допустимих альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = \overline{0, n}$, $a_i = (l_i, g_i)$.

На п'ятому кроці визначаються функції повного ризику, пов'язаного з вибором альтернативи $a_i \in A$, $i = \overline{0, n}$, за умови існування альтернатив $a_j \in A$, $j = \overline{0, n}$, $i \neq j$, у вигляді лінійних комбінацій (3). Вибір оптимальної альтернативи здійснюється згідно з правилом (5) попарним порівнянням альтернатив, починаючи з пари (a_0, a_1) , з відбиранням і збереженням на кожному кроці альтернативи, обтяженої меншим сукупним ризиком.

Спосіб 3. У випадку, коли вартості або цінності, якими оперують під час рішення, мають різні одиниці вимірювання, можна використовувати кількісні оцінки компонент повного ризику в бальних одиницях. Бальні оцінки ризику при цьому можна формувати за логарифмічною шкалою.

У загальному випадку бальна оцінка деякого параметра y_i (у балах) становитиме

$$r(y_i) = \mu_i \lg y_i + y_{i,0},$$

де μ_i — модуль; $y_{i,0}$ — нуль-пункт на універсальній (інтегральній) логарифмічній шкалі довжиною L , для параметра y_i :

$$\mu_i = \frac{L}{\lg y_{i,\max} - \lg y_{i,\min}}, \quad y_{i,0} = -\mu_i \lg y_{i,\min},$$

де $y_{i,\max}$, $y_{i,\min}$ — максимальне і мінімальне значення y_i .

$$\text{Якщо } y_{i,\min} = 0, \text{ маємо } y_{i,0} = 0, \mu_i = \frac{L}{\lg y_{i,\max}}.$$

Після формування бальних оцінок ризику вибираються множини допустимих альтернатив, здійснюються їх упорядкування та нумерація і визначаються функції повного ризику у вигляді лінійних комбінацій (3).

Оптимальна альтернатива вибирається згідно з правилом (5) попарним порівнянням альтернатив, починаючи з пари (a_0, a_1) .

Спосіб 4. Нехай порівнюються різні альтернативні заходи (альтернативи) підвищення безпеки природокористування, які характеризуються очікуваними зведеними затратами на їх здійснення c та ймовірними збитками у разі надзвичайних ситуацій d . Імовірні збитки можуть визначатися як добуток ймовірностей реалізації відповідних надзвичайних ситуацій та збитків, завданих ними.

Допустимими альтернативами в цьому випадку можуть вважатися альтернативи, які зі зростанням затрат на їх реалізацію забезпечують зменшення ймовірних збитків у разі надзвичайних ситуацій.

На першому кроці формування таблиці рішень для кожної допустимої альтернативи задаються відповідні значення очікуваних затрат на її реалізацію c_i та ймовірних збитків d_i : $a_i = (c_i, d_i)$.

Для альтернативи, для якої затрати не передбачаються (назвемо її «нульовою»), відповідно маємо $c_0 = 0$: $a_0 = (0, d_0)$.

Далі альтернативи упорядковуються згідно з умовою

$$c_0 < c_1 < \dots < c_i < \dots < c_{n-1} < c_n$$

і формується упорядкована множина допустимих альтернатив $\mathbf{A} = \{a_i\}$, $i = \overline{0, n}$, $a_i = (c_i, d_i)$.

Визначаються функції повного ризику, пов'язаного з вибором альтернативи $a_i \in \mathbf{A}$, $i = \overline{0, n}$, за умови існування альтернатив $a_j \in \mathbf{A}$, $j = \overline{0, n}$, $i \neq j$, у вигляді лінійних комбінацій (3), де $l_i = \Delta c_i$, $\Delta c_i = c_i - c_0$; $g_j = \Delta d_j$, $\Delta d_j = d_0 - d_j$:

$$r_{i,j} = \Delta c_i + \Delta d_j; i, j = \overline{0, n}; i \neq j.$$

Оптимальна альтернатива вибирається згідно з правилом (5) попарним порівнянням альтернатив, починаючи з пари (a_0, a_1) , з вибором на кожному кроці альтернативи, обтяженої меншим сукупним ризиком. Фрагмент відповідної таблиці рішень показано на рис. 4.

a_j	a_i				
	a_0	...	a_i	a_j	...
a_0	–	...	Δd_i	Δd_j	...
...	...	–
a_i	Δc_i	...	–	$c_i + \Delta d_j$...
a_j	Δc_j	...	$c_j + \Delta d_i$	–	...
...	–

Рис. 4. Фрагмент таблиці рішень $\|r_{i,j}\|$ для вибору оптимальної альтернативи щодо підвищення безпеки природокористування при $c_0 = 0$

ВИСНОВКИ

Обґрунтовано необхідність урахування ризику невикористаних можливостей як складової повного ризику під час прийняття рішень у природокористуванні. Відзначено, що під ризиком невикористаних можливостей у природокористуванні можна розуміти не тільки не отримані ймовірні вигоди (економічні та інші вигоди) безпосередньо від використання природних ресурсів, а і зменшення негативних наслідків (збитків, шкоди, втрат), зниження розміру штрафних та інших санкцій від упровадження більш безпечних технологій тощо.

Сформульовано загальні положення, правила та принципові узагальнення, що стосуються прийняття рішень у природокористуванні з урахуванням ризику невикористаних можливостей на підставі попарного порівняння альтернатив. Запропоновано функції повного ризику альтернатив у вигляді лінійних комбінацій, які поєднують системні (власні) ризики альтернатив та ризики невикористаних можливостей, які трактуються як вигравні ефекти альтернатив, що відкидаються. Сформульовано твердження про те, що множина оптимальних альтернатив за критерієм мінімального ризику як результат розв'язання задачі прийняття рішень з урахуванням ризику невикористаних можливостей збігається з множиною оптимальних альтернатив за критерієм максимальної корисності. Запропоновано різні способи визначення компонент повного ризику альтернатив для заповнення таблиць рішень та відповідні алгоритми вибору оптимальної альтернативи з урахуванням ризику невикористаних можливостей.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бейко І.В.* Задачі, методи і алгоритми оптимізації: навч. посіб. / І.В. Бейко, П.М. Зінько, О.Г. Наконечний. — Рівне: НУВГП, 2011. — 624 с.
2. *Мушик Э.* Методы принятия технических решений / Э. Мушик, П. Мюллер; пер. с нем. — М.: Мир, 1990. — 206 с.
3. *Эддоус М.* Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стенсфилд; пер. с англ. — М.: ЮНИТИ, Аудит, 1997. — 510 с.
4. *Вітлінський В.В.* Економічний ризик: ігрові моделі / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко, А.В. Сігал, Я.С. Наконечний. — К.: КНЕУ, 2002. — 446 с.
5. *Згуровский М.З.* Системный анализ / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. — К.: Наук. думка, 2011. — 900 с.
6. *Качинський А.Б.* Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи: моногр. / А.Б. Качинський; Ін-т проблем національної безпеки. Нац. акад. служби безпеки України. — К.: [б. н.], 2004. — 470 с.
7. *Лисиченко Г.В.* Природний, техногенний та екологічний ризики: аналіз, оцінка, управління / Г.В. Лисиченко, О.Л. Забулонов, Г.А. Хміль. — К.: Наук. думка, 2008. — 544 с.
8. *Мирицхулава Ц.Е.* Опасности и риски на некоторых водных и других системах. Виды, анализ, оценка / Ц.Е. Мирицхулава. — Тбилиси: Мецниереба, 2003. — 538 с.

9. Панкратова Н.Д. Оцінювання багатофакторних ризиків в умовах концептуальної невизначеності / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 72–82.
10. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику / О.І. Ястремський. — К.: АртЕк, 1997. — 248 с.
11. Rowe W. An anatomy of risk / W. Rowe. — New York: W. J. Wiley, 1997. — 488 p.
12. Стефанишин Д.В. Вибрані задачі оцінки ризику та прийняття рішень за умов стохастичної невизначеності / Д.В. Стефанишин. — К.: Азимут-Україна, 2009. — 104 с.
13. Стефанишин Д.В. Метод порівняння варіантів рішень в природокористуванні з врахуванням ризиків невикористаних можливостей / Д.В. Стефанишин, Ю.Д. Стефанишина, М.В. Кубай // Математичне та комп'ютерне моделювання: зб. наук. праць Кам'янець-Подільського національного ун-ту; Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ; [редкол.: В.В. Скопецький (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський, 2008. — Вип. 1. — С. 174–181.
14. Stefanyshyn D.V. A method of decision making at risk in natural resources use by pairwise comparison of alternatives with taking account of risks of lost opportunities / D.V. Stefanyshyn, Yu.D. Stefanyshyna // Proc. Of Int. Scientific School «Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems». — July 7–11, 2009. — S.-Petersburg, Russia. — P. 435–439.

Надійшла 20.05.2015

АНАЛІЗ РОЗПОДІЛУ ЕЛЕКТОРАЛЬНИХ ПОЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕРЕЖЕВИХ СТРУКТУР

Є.О. ТЕРПІЛЬ, О.С. МАКАРЕНКО

Анотація. Досліджено підходи на основі математичного моделювання до аналізу розподілу електоральних полів. Розглянуто моделі на основі клітинних автоматів та складних мереж. Клітинні автомати пояснюють утворення стійких електоральних регіонів, однак мало придатні для реального прогнозування. З огляду на можливість урахування нерівномірного поширення суспільної думки перевагу надано складним мережам. Розглянуто зв'язок між спільнотами у мережі та утворенням стійких електоральних регіонів. Запропоновано використати модулярність для знаходження меж спільнот і завдяки яким пояснити існуючі електоральні поля та передбачити місця утворення меж нових електоральних регіонів. Для верифікації обраного підходу проаналізовано розподіл електорального поля півдня України на підставі даних парламентських виборів 2014 р.

Ключові слова: клітинні автомати, складні мережі, електоральні поля, модулярність, моделювання суспільної думки.

ВСТУП

Завдання моделювання суспільної думки, зокрема електоральних уподобань, на тепер є одними з найактуальніших. Через стрімкий розвиток демократії у всьому світу процес виборів став популярним об'єктом дослідження, його стало легко формалізувати. Зазвичай основною метою дослідників є прогнозування результатів майбутніх виборів, або рейтингу партії (політика). Однак цю роботу сфокусовано на географічному розподілі вподобань виборців.

Електоральні мапи з багатьох країн світу характеризуються поділом електорального поля на регіони з домінуванням певної політичної сили. До того ж такі регіони зазвичай дуже стійкі і не змінюються протягом багатьох років. Для прикладу на рис. 1 зображено поділ електорального поля України у період останніх п'ятнадцяти років.



Рис. 1. Поділ електорального поля України на виборах у 2004 – 2012 рр.

Попередні дослідження [1] пов'язували виникнення чітких меж з особливостями ландшафту, географічними характеристиками та історичними особливостями територій. У цій роботі буде застосовано підходи на основі клітинних автоматів та складних мереж до моделювання розподілу електоральних полів, порівняно їх та досліджено місця утворення меж. Показано, що клітинні автомати хоч і дають змогу зрозуміти як утворюються стійкі електоральні регіони, однак мало придатні для реального прогнозування. Обійти цю проблему дозволить запровадження описаної мережевої структури. Для верифікації обраного підходу окремо проаналізовано розподіл електорального поля півдня України на підставі даних парламентських виборів 2014 р.

ПІДХІД НА ОСНОВІ КЛІТИНИХ АВТОМАТІВ

Одним з підходів до моделювання суспільної думки є клітинні автомати. Вони набули поширення внаслідок інтенсивного розвитку інформаційних технологій, який дозволив швидко і легко проводити числові експерименти з моделями. Крім того, алгоритми таких моделей більш прозорі, ніж, наприклад, диференціальні рівняння, які потребують окремої реалізації числових методів наближення їх розв'язків.

Розглянемо процес формування суспільної думки як множину елементарних взаємодій між індивідами [2]. Припустимо, що всі індивіди керуються одним і тим самим набором правил. Ці правила задають для кожного моменту часу, стан індивіда, який буде в наступний момент часу залежно від поточного стану інших індивідів. Станом індивіда вважатимемо прихильність до однієї з альтернатив (партії чи кандидата) у певний момент часу. Відповідно множина станів є множиною альтернатив. Відкинувши демографічні та міграційні особливості, на невеликих проміжках часу розглянемо множину індивідів як таку, що не змінюється з часом і зафіксована на певній ґратці. Це означає, що для кожного індивіда вказано множину його сусідів (окіл), яка також є фіксованою. Звісно, що це доволі загальні припущення, однак вони дають змогу побудувати найпростішу модель клітинного автомата.

В основу моделі впливу оточення покладено гіпотезу, яка передбачає, що виборчі пріоритети індивідуума визначаються уподобаннями його найближчого оточення. Нехай індивід приймає рішення щодо голосування в момент $t+1$ як одну з n альтернатив. За правило переходу візьмемо правило більшості, тобто індивід обирає таку альтернативу, як і більшість у його околі. Як оточення виборця беремо окіл Мура. Тоді функція переходу такого клітинного автомата описується рівнянням

$$y^{i,j}(t+1) = \operatorname{argmax}_{v=1..n} C(v, O(i, j), t), \quad (1)$$

де $y^{i,j}(t)$ — альтернатива, яку обрав індивід в клітині з індексами i, j в момент часу t ; $O(i, j)$ — окіл клітини з індексами i, j ; $C(v, O(i, j), t)$ — кількість клітин зі значенням v у околі $O(i, j)$.

Крім того, можна замість функції максимуму у рівняння (1) розрахувати вагу кожної з альтернатив, які будуть нормованими значеннями

$C(v, O(i, j), t)$ і на їх підставі випадковим чином обирати одну з альтернатив. Типові конфігурації такого автомата зображено на рис. 2.

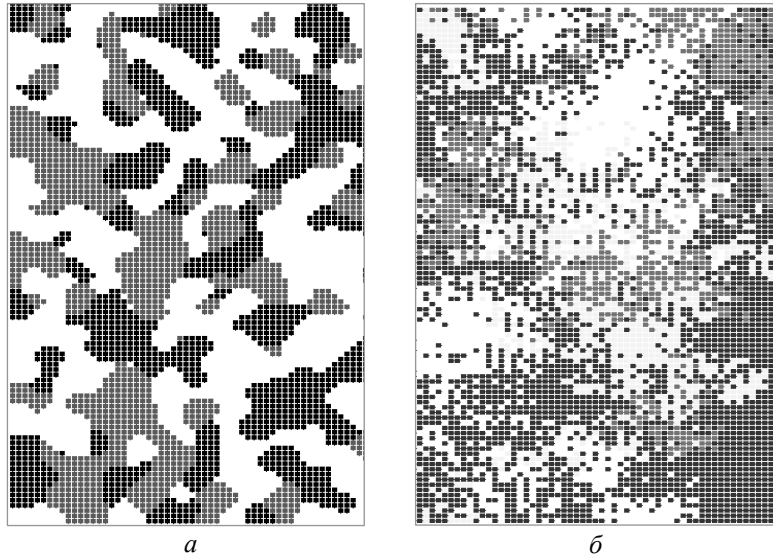


Рис. 2. Еволюція моделі впливу оточення звичайним автоматом (а) та ймовірнісним автоматом (б)

Детермінована модель характеризується швидкою збіжністю (20–30 тактів). У ній утворюються стійкі групи виборців з чіткими та доволі гладкими межами. На відміну від неї стохастична модель не збігається і утворює доволі складні еволюції (рис. 3), які також характеризуються утворенням груп виборців, однак не настільки чітких, як у звичайній моделі.

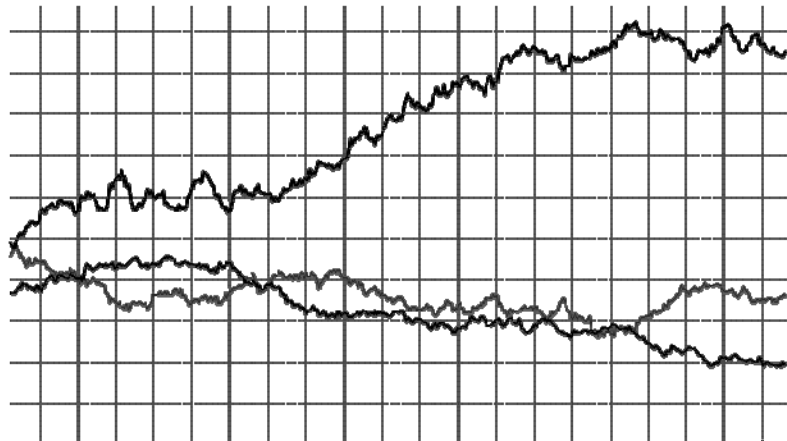


Рис. 3. Динаміка зміни кількості прихильників партій в імовірнісній моделі

Крім наведених вище моделей впливу оточення, існують їх численні розширення, які враховують нерівномірний початковий розподіл, вплив зовнішніх факторів та залежність альтернатив [3]. Однак процес поширення думки в таких моделях відбувається рівномірно і задається тільки початковим розподілом, що не зовсім відповідає електоральним реаліям. Частково цю проблему вирішує модель з «далекими зв'язками».

Грановеттер [4] запропонував поділити зв'язки між індивідами на слабкі та сильні, взявши за означення, що чим більше спільних друзів мають два індивіди, тим сильніший зв'язок між ними. Відповідно до цього він висунув гіпотезу: соціальні зв'язки різних типів мають різні ролі в динаміці соціальної структури та обміну інформацією.

У праці [5] уже розглядалась модель клітинного автомата з «далекими (слабкими) зв'язками». Тобто до околу Мура для кожного індивіда додавалася наперед задана кількість випадково обраних клітин, які відповідали «далеким зв'язкам». Проведені дослідження моделі показали, що на відміну від базової детермінованої моделі швидкість збіжності (набуття до стаціонарних станів) виявилася дуже великою (10–30 тактів), при цьому кінцеві стани свідчать про значну кількісну перевагу електорату, що має на початку незначну перевагу. Однак така модель не дає змоги пояснити утворення стійких електоральних регіонів помірно популярних партій.

ПІДХІД НА ОСНОВІ СКЛАДНИХ МЕРЕЖ

Альтернативою клітинним автоматам є підхід на основі складних мереж. Замість однорідної ґратки множина індивідів подається у вигляді графу. Причому розглядається не випадковий граф, а з характерними для соціальних мереж характеристиками.

Попередні дослідження [6] виявили, що кількість соціальних зв'язків у індивідів розподілено нерівномірно, зазвичай показниково. Такі мережі називають безмасштабними (scale-free). Відповідно і структура оточення, яке може впливати, змінюється відповідно до положення індивіда в мережі. Це означає, що в мережі є велика кількість вузлів (індивідів) з малою кількістю зв'язків та невелика група індивідів з великою кількістю зв'язків.

Варто зазначити, що зв'язки, окрім поділу на сильні та слабкі, можуть бути несиметричними. Те, що деякі індивіди можуть впливати на вибір конкретного індивіда, не означає, що і він так само впливає на їх вибір. Популярні індивіди з великою кількістю вхідних зв'язків зазвичай мають малу кількість вихідних.

Крім прямого зв'язку, індивіди можуть бути зв'язані між собою опосередковано, тобто через посередника чи групу посередників. У теорії мереж визначають поняття шляху як найкоротшої відстані між вузлами мережі та середнього шляху як середню по всіх парах вузлів найкоротшу відстань між ними. Соціальні мережі зазвичай мають доволі невеликий середній шлях. Такий ефект називають феноменом «малих світів» чи «п'яти рукостикань». Ця властивість проявляється саме через наявність у мережі «далеких зв'язків».

Складні соціальні мережі характеризуються наявністю структури спільнот (communities). Спільнота — група вузлів, які мають високу щільність їх ребер, попри те, що щільність ребер між окремими групами низька. Традиційним методом для виявлення структури спільнот є кластерний аналіз. Існують десятки методів, які базуються на різних вимірах відстаней між вузлами, зважених шляхових індексах між вузлами тощо.

У роботі більш ретельно розглянуто метод на основі оптимізації модularity, запропонований Ньюменом [7]. (Цей метод обрано тому, що він

реалізований у програмному пакеті Gephi і дозволяє швидко виділити спільноти в досить великих мережах.). Значення модулярності дорівнює різниці між часткою ребер всередині спільноти і очікуваної частки зв'язків, якби ребра були розміщені випадково. Мережі з високою модулярністю мають щільні з'єднання між вузлами в межах спільнот і рідкі з'єднання між вузлами з різних спільнот.

Припустимо, що задано мережу з n вершинами, які поділено на дві групи. Нехай $s_i = 1$, якщо вершина i належить групі 1, і $s_i = -1$, якщо вона належить групі 2. Нехай ребра між вершинами i та j задано матрицею суміжності A_{ij} , яка складається з 0 та 1 (розглядається випадок коли ребра без ваг). Утім очікувана кількість ребер між вершинами i та j , якщо вершини з'єднати випадковим чином, буде становити $\frac{k_i k_j}{2m}$, де k_i і k_j — кількість зв'язків відповідних вершин (ступені вершин), а $m = \frac{1}{2} \sum_i k_i$ — загальна кількість ребер у мережі. Тоді модулярність визначається за таким виразом:

$$Q = \frac{1}{4m} \sum_{ij} \left[A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] s_i s_j, \quad (2)$$

який можна переписати у матричній формі

$$Q = \frac{1}{4m} s^T B s,$$

де B — симетрична матриця:

$$B_{ij} = A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}.$$

Цю матрицю також називають «матрицею модулярності». Оскільки сума значень по рядках та стовпцях такої матриці дорівнює 0, вона завжди має власний вектор $(1, 1, 1, \dots)$ і власне число 0.

Перепишемо вираз (2), подавши s як лінійну комбінацію нормалізованих власних векторів u_i матриці B таких, що $s = \sum_{i=1}^n a_i u_i$, $a_i = u_i^T s$, тоді

$$Q = \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^n a_i u_i^T B \sum_{i=1}^n a_i u_i = \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^n (u_i^T s)^2 \beta_i,$$

де β_i — власні числа B , які відповідають власним векторам u_i і впорядковані за спаданням ($\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$).

Задача полягає у знаходженні такого вектора розбиття мережі s , який би максимізував значення Q . Тобто треба максимізувати $u_i^T s$. Для цього можна встановити $+1$ для всіх елементів s , якщо відповідний елемент u_i є додатним і -1 , якщо відповідний елемент u_i є від'ємним.

Для розбиття мережі більше ніж на дві спільноти [8] модулярність визначається як

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left[A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(c_i, c_j),$$

де c_i, c_j — спільноти вершин i та j відповідно; $\delta(c_i, c_j)$ дорівнює 1, коли $c_i = c_j$, в іншому випадку — 0. Оптимізація складається з двох фаз: на першій вона утворює невеликі спільноти, щоб досягти локальних максимумів модулярності, а на другій будується нова мережа, вузли якої є спільноти, виявлені на першому етапі. Ці дві фази повторюються доти, доки не досягнеться максимум модулярності. Результатом роботи алгоритму є ієрархія спільнот. Детальне математичне обґрунтування запропонованого методу описано у праці [9]. Крім того, в останні роки з'явилося багато оптимізацій і вдосконалень виявлення спільнот на основі модулярності [10, 11].

Існує доволі велика кількість робіт, що пов'язує поляризацію поглядів у суспільстві з утворенням у ньому окремих спільнот [12, 13] та вплив модулярності на поширення інформації [14]. Висунемо гіпотезу, що розбиття електорального поля також пов'язане з розбиттям суспільства на спільноти. Для перевірки припущення розглянемо реальні дані електорального поля півдня України.

ОЦІНЮВАННЯ МЕЖІ ЕЛЕКТОРАЛЬНОГО ПОЛЯ В ПІВДЕННІЙ УКРАЇНІ

В електоральному сенсі південь України протягом багатьох попередніх виборів входив до великого південно-східного електорального регіону, однак події 2013–2014 рр. зумовили зсуви межі поля і на парламентських виборах 2014 р. в усіх виборчих округах Херсонської області перемогу здобули прозахідні партії, а натомість у сусідній Запорізькій області — проросійські партії (рис. 4). Результати усереднено за виборчими округами.



Рис. 4. Результати парламентських виборів 2014 р. на основі опрацювання 50% протоколів: ■ — прозахідні партії; ■ — проросійські партії

Цікавим є той факт, що електоральна межа майже збіглася з адміністративною, хоч області і не розділені горами чи великою річкою.

Для перевірки гіпотези було зібрано базу користувачів соціальної мережі «ВКонтакте», які мешкають (за даними профілю) на межі вище від згаданих областей. Цю соціальну мережу обрано з огляду на те, що вона найпопулярніша в Україні і має зручне API. Для отримання вибірки з мережі випадковим чином обрано користувачів, які мешкають у містах та селах, що потрапляють у прямокутник, зображений на рис. 5.

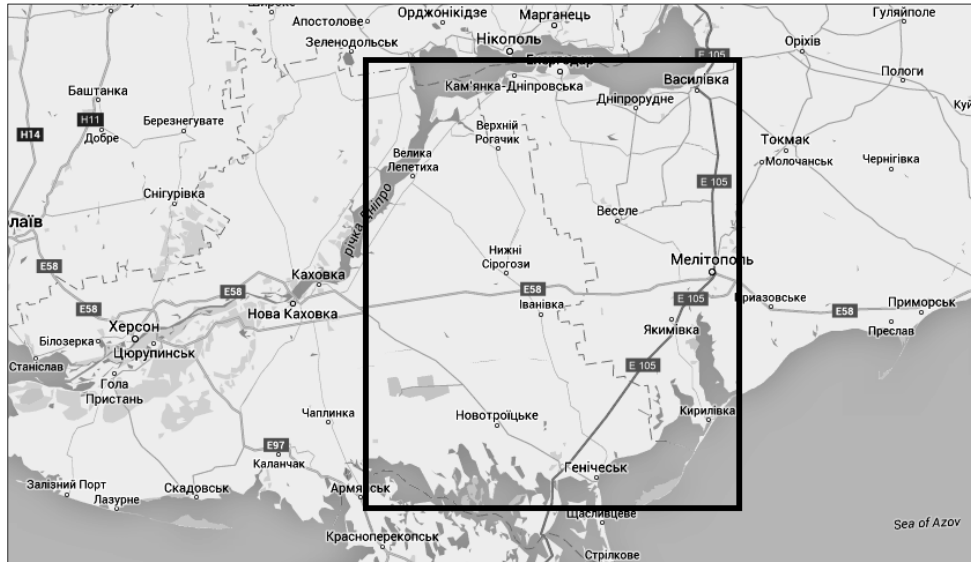


Рис. 5. Ділянка, з якої бралися місця для побудови мережі

Від кожного з таких користувачів розпочиналось випадкове блукання по мережі, запитуючи його друзів. Якщо будь-які два користувачі були друзями, вони поєднані зв'язком. Слід зазначити, що в такій соціальній мережі дружба напрямлена, тобто може не існувати зворотного зв'язку. У результаті отримано граф з вершинами і напрямленими ребрами (рис. 6):

За допомогою описаного вище методу на основі модулярності знайдено спільноти у мережі, які майже збігалися з межами міст та сіл. Однак з урахуванням початкової задачі, мета якої виокремлення лише двох основних спільнот, які могли б бути схожі на розбиття електорального поля. Результати такого розбиття порівняно з поділом за областями показано на рис. 7.

Із рисунка видно, що поділ за областями, хоча і проходить по межах спільнот, незначно відрізняється від розбиття за модулярністю. Зауважимо, що найбільшою спільнотою є місто Мелітополь, яке залучає спільноти сусідніх міст. Поділ за модулярністю об'єднує агломерацію Мелітополя з частиною південних міст Херсонської області.

Якщо порівняти карту території (рис. 5) та отриману мережу (рис. 6), то чітко видно залежність між ступенем зв'язності спільнот від наявності транспортної інфраструктури. Там, де є велика дорога, спільноти мають тісніший зв'язок і перекривають одна одну, а там, де немає, — модулярність більша. Так, наприклад, північ Херсонської та Запорізької областей мають низьку зв'язність, тому і голосують по-різному. У південній частині наявність великої дороги (траси E105) від Мелітополя на південь транслює погляди від великого міста на доволі великі приморські міста Херсонської об-

ласті (наприклад, Геніченськ). Електоральна мапа (див. рис. 4) усереднює результати по виборчих округах. За більш детального розгляду виявляється, що на дільницях Геніченська перевагу отримали проросійські партії. Це доводить ефективність використання модулярності як міри розподілу електорального поля, а отримані на її основі спільноти пояснюють утворення меж електоральних полів (рис. 7).

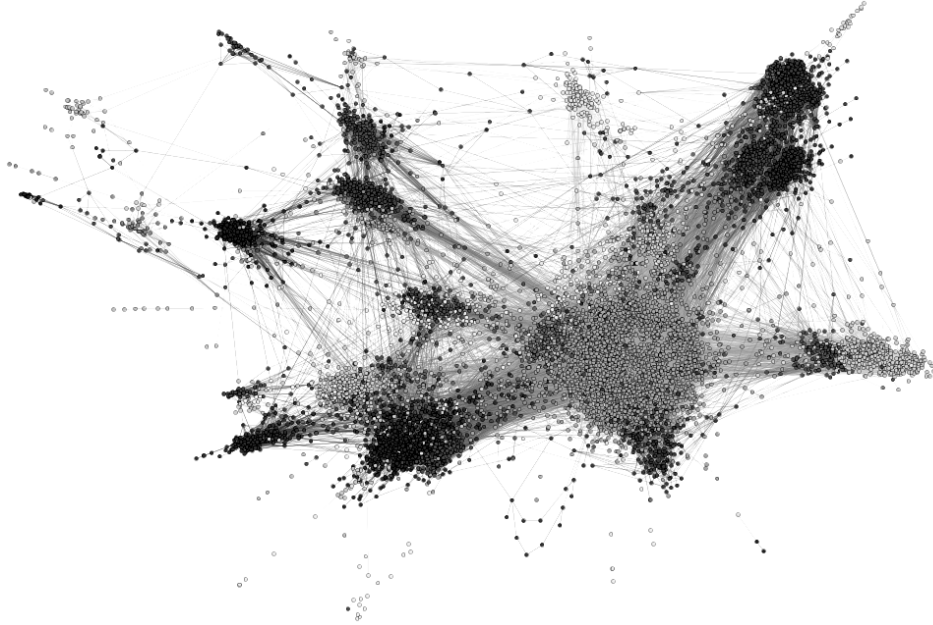


Рис. 6. Мережа користувачів соціальної мережі «Вконтакте» в районі Мелітополя, укладена за допомогою алгоритму ForceAtlas2 (насиченість вершини різниться відповідно до міста (села))



Рис. 7. Розбиття мережі на основі модулярності (а) та за областю (б)

ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу аналізу розподілу електоральних полів. Запропоновано підходи на основі клітинних автоматів та складних мереж. З огляду на можливість врахування нерівномірності поширення суспільної думки та легкість отримання початкових даних з популярних соціальних мереж перевагу надано моделі складних мереж. Для тестування запропонованих підходів по-

будовано граф користувачів соціальної мережі «ВКонтакте» на межі Херсонської та Запорізької областей. В ході експерименту підтверджено зв'язок між спільнотами в моделі складних мереж та межами розподілу електоральних полів. Запропонований метод на основі модулярності можна використовувати для пояснення наявних меж електоральних регіонів та передбачення місць утворення нових електоральних меж.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ралко О.Н.* Возникновение и развитие электоральной географии в США и Западной Европе / О.Н. Ралко // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «География». — 2012. — **25** (64). — № 2. — С. 147–152.
2. *Brown T.A.* Nonlinear Politics / T.A. Brown // *Chaos Theory in the Social Sciences*. — 1996. — P. 119–137.
3. *Terpil I.O.* Simulation of Public Opinion with Ideas of Cellular Automata / I.O. Terpil A.S. Makarenko // *Lecture Notes in Computer Science*. — **8751**. — P. 518–525.
4. *Granovetter M.S.* The Strength of Weak Ties / M.S. Granovetter // *American Journal of Sociology*. — 1973. — **78**, Issue 6. — P. 1360–1380.
5. *Горбулін В.П.* Інформаційні операції та безпека суспільства: загрози, протидія, моделювання: моногр. / В.П. Горбулін, О.Г. Додонов, Д.В. Ланде. — К.: Інтертехнологія, 2009. — С. 153–162.
6. *Barabási A.-L.* Statistical mechanics of complex networks / A.-L. Barabási, R. Albert // *Reviews of Modern Physics* **74**. — 2012. — **74**. — P. 47–97.
7. *Newman M.E.J.* Modularity and community structure in networks / M.E.J. Newman // *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 2006. — **103**. — P. 8577–8582.
8. *Blondel V. D.* Fast unfolding of communities in large networks / V.D. Blondel, J.L. Guillaume, R. Lambiotte, E. Lefebvre // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2008. — **10**. — P. 1000.
9. *Lambiotte R.* Laplacian Dynamics and Multiscale Modular Structure in Networks / R. Lambiotte, J.-C. Delvenne, M. Barahona // *IEEE Transaction on Network Science and Engineering*. — 2015. — **1**, Issue 2. — P. 76–90.
10. *Chen M.* Community Detection via Maximization of Modularity and Its Variants / M. Chen, K. Kuzmin, B.K. Szymanski // *IEEE Transactions on Computational Social Systems*. — 2014. — **1**(1). — P. 46–65.
11. *Azizifard N.* Social Network Clustering / N. Azizifard // *I.J. Information Technology and Computer Science*. — 2014. — **01**. — P. 76–81.
12. *Adamic L.A.* The political blogosphere and the 2004 u.s. election: divided they blog / L.A. Adamic, N. Glance // *Proceedings of the 3rd international workshop on Link discovery*. — New York: LinkKDD. — 2005. — P. 36–43.
13. *Guerra P.H.C.* A Measure of Polarization on Social Media Networks Based on Community Boundaries / P.H.C. Guerra, W.M. Jr, C. Cardie, R. Kleinberg // Режим доступу: <https://www.cs.cornell.edu/home/cardie/papers/ICWSM13-Polarization.pdf>
14. *Nematzadeh A., Ferrara E., Flammini A., Ahn YY.* Optimal network modularity for information diffusion / A. Nematzadeh, E. Ferrara, A. Flammini, YY. Ahn // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — **113**. — P. 8.

Надійшла 18.11.2015

**РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ
РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ У ВЕЛИКИХ БЛОЧНО-
СТРУКТУРОВАНИХ СИСТЕМАХ
ЗІ ЗВ'ЯЗУЮЧИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

О.Є. КІРІК

Анотація. Розв'язання нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими параметрами (змінними) реалізується шляхом комбінації апроксимаційного та декомпозиційного підходів. Апроксимаційний метод обрано таким чином, щоб декомпозицію задачі математичного програмування можна виконувати без будь-яких припущень щодо опуклості або адитивної сепарабельності функцій критерію та обмежень. Координуюча та блочні підзадачі, що є допоміжними в апроксимаційному методі, розв'язуються за скінченну кількість кроків. У ході обчислень зв'язуючі параметри змінюються від кроку до кроку ітераційного процесу, забезпечуючи монотонне зменшення значення цільової функції координуючої задачі, тобто кількість загальних ресурсів змінюється таким чином, аби блочні підсистеми працювали дедалі ефективніше з точки зору ефективності роботи всієї системи.

Ключові слова: задачі розподілу ресурсів, оптимізаційні моделі, апроксимуючі методи, нелінійне програмування, алгоритми декомпозиції.

ВСТУП

До нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими змінними зводиться численна кількість практичних проблем планування та управління. У задачах управління виробництвом та запасами блочні структури виникають, коли основну частину технологічних параметрів можна подати у вигляді підмножин, що не перетинаються, а показники інтенсивності використання решти параметрів є зв'язуючими змінними. До блочних задач зводяться також різні динамічні моделі управління виробництвом. Загалом, якщо складна система містить декілька підсистем, функціонування яких описується індивідуальними наборами змінних, але можливості діяльності кожної підсистеми залежать до того ж від деяких загальносистемних параметрів або напрямів, то виникають задачі блочної структури зі зв'язуючими змінними.

Ефективним підходом до розв'язання оптимізаційних блочних задач є використання прийомів декомпозиції, тобто застосування оптимізаційних

методів до спеціальним чином побудованої координуючої задачі та набору підзадач для окремих блоків [1, 2]. При цьому істотною умовою є опуклість та адитивна сепарабельність функцій, що визначають критерій та обмеження, а складові цільової функції координуючої задачі у загальному випадку визначені на обмежених множинах і іноді потребують певних процедур регуляризації вихідної задачі [3]. Процедури розв'язання координуючих задач на основі різних методів оптимізації та властивості функцій координуючих задач досліджувалися у багатьох працях, зокрема [4–6]

У праці [7] запропоновано підхід до розв'язання задач блочної структури зі зв'язуючими обмеженнями у вигляді триступеневої ітераційної схеми, де на верхньому рівні вихідна задача змінюється послідовністю апроксимуючих задач з адитивно-сепарабельними цільовими функціями та лінійними обмеженнями, а на другому рівні розв'язуються координуючі задачі, які формуються за рахунок інформації, отриманої на найнижчому рівні під час розв'язання блочних підзадач.

Аналогічну схему можна запропонувати і для нелінійних задач зі зв'язуючими змінними. Але на відміну від задач зі зв'язуючими обмеженнями в цьому випадку потрібно застосовувати прямий, а не двоїстий метод декомпозиції.

Мета роботи — побудова та аналіз методу розв'язання нелінійних задач блочної структури зі зв'язуючими змінними із застосуванням комбінації апроксимуючого методу нелінійної оптимізації та прямої схеми декомпозиції.

Оскільки декомпозиції в цьому випадку підлягають спеціальним чином побудовані задачі, які мають потрібні для розбиття властивості, то немає необхідності ставити вимоги сепарабельності до вихідної задачі. Це розширює класи задач, що можуть бути розв'язані із застосуванням спеціальних прийомів.

АПРОКСИМУЮЧІ МЕТОДИ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як показано у працях [7, 8], зручним способом замінити нелінійну задачу задачею квадратичного програмування з адитивно-сепарабельними цільовими функціями є застосування методу лінеаризації Б.М. Пшеничного [9]. Основна ідея цього методу полягає у заміні нелінійної задачі послідовністю лінеаризованих задач, доповнених квадратичним штрафом за великі відхилення аргумента. Метод лінеаризації є методом першого порядку. Але його ефективність може бути підвищена застосуванням деяких спеціальних прийомів [10], а для певних класів задач, зокрема, нелінійних задач з лінійними обмеженнями, вдається досягти швидкості збіжності, зіставної зі швидкістю методів послідовного квадратичного програмування.

Нехай маємо нелінійну задачу гладкої умовної оптимізації

$$\min_{x \in M} f_0(x), \quad M = \{x \in R^n : f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (1)$$

Якщо є обмеження-рівності, то заміняємо їх еквівалентною парою відповідних нерівностей.

Загальну схему апроксимуючих методів умовної оптимізації можна подати у вигляді ітераційного процесу

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де $\alpha_k > 0$, а $p^k = p(x^k)$, $p^k \in R^n$ — розв’язок допоміжної апроксимуючої задачі з лінійними обмеженнями:

$$\min_p \left\{ f_0(x^k) + \langle f'_0(x^k), p \rangle + \frac{1}{2} \langle D_k p, p \rangle : f_i(x^k) + \langle f'_i(x^k), p \rangle, \quad i = 1, \dots, m \right\}. \quad (3)$$

Для визначення крокового множника α_k у всіх методах можна використувати релаксацію вздовж вектора спуску p_k недиференційованої штрафної функції

$$\bar{f}(x, \Lambda) \equiv f_0(x) + \Lambda F(x), \quad \Lambda > 0,$$

де $F(x) = \max \{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\}$.

У методі лінеаризації Б.М. Пшеничного $D_k = E$ — це одинична $n \times n$ -матриця; квадратичний доданок у цільовій функції апроксимуючої задачі відіграє роль штрафної функції, а α_k обчислюється як найбільше зі значень $\alpha = 2^{-t}$, $t = 0, 1, \dots$, за якого виконується нерівність

$$\bar{f}(x^k + \alpha p^k, \Lambda) \leq \bar{f}(x^k, \Lambda) - \varepsilon \alpha \|p^k\|^2, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (4)$$

Коефіцієнт штрафу $\Lambda > 0$ мажорує множники Лагранжа λ^k задачі (3):

$$\Lambda \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

причому виконання умови (5) гарантує, що нерівність (4) виконується після скінченної кількості ділень одиниці навпіл.

Під час формування апроксимуючої задачі до неї можна включати лише найбільш істотні обмеження, причому правила зменшення кількості обмежень викладено у праці [9].

БЛОЧНІ ЗАДАЧІ ЗІ ЗВ'ЯЗУЮЧИМИ ЗМІННИМИ

Якщо вихідна задача (1) має вигляд блочної зі зв'язуючими змінними, то апроксимуючу задачу (3) з Q блоками у матричному вигляді можна сформулювати таким чином:

$$F(p) \equiv \sum_{i=1}^{Q+1} F_i(p_i) \rightarrow \min,$$

$$A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q, \quad (6)$$

де $F_i(p_i) = \langle c_i, p_i \rangle + \frac{1}{2} \|p_i\|^2$, $c_i \in R^{n_i}$, $p_i \in R^{n_i}$, $b_i \in R^{m_i}$; A_i і B_i — матриці розмірностей відповідно $(m_i \times n_i)$ і $(m_i \times n_{Q+1})$; $p_{Q+1} \in R^{n_{Q+1}}$ — вектор зв'язуючих змінних;

$$\sum_{i=1}^{Q+1} n_i = n, \quad \sum_{i=1}^Q m_i = m.$$

Беремо до уваги, що апроксимуюча задача (6) змінюється від кроку до кроку процесу (2), але випускаємо індекси, що є номерами кроку k , аби не обтяжувати формули додатковими позначеннями.

Основна ідея методу розділення змінних [1], що застосовується для розв'язання задач зі зв'язуючими змінними, полягає у тому, що фіксуються зв'язуючі змінні p_{Q+1} і розв'язується задача стосовно решти змінних, яка внаслідок блочної структури розпадається на незалежні підзадачі меншого розміру, причому екстремуми цільових функцій цих підзадач залежать від фіксованих змінних як від параметрів. Підставляючи їх у неявному вигляді у вихідну задачу, отримують координуючу задачу, що залежить лише від фіксованих змінних. Загалом лише для обмежених класів функцій можна отримати явний вигляд координуючої задачі.

Нехай точка \bar{p}_{Q+1} є допустимою, тобто

$$\bar{p}_{Q+1} \in \{p_{Q+1} : A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, Q\}.$$

За фіксованого $p_{Q+1} = \bar{p}_{Q+1}$ задача (6) розпадається на Q задач

$$\min F_i(p_i),$$

$$A_i p_i + B_i \bar{p}_{Q+1} + b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, Q. \quad (7)$$

Це означає, що задачу (6) можна замінити знаходженням мінімуму функції

$$\Phi(p_{Q+1}) = \sum_{i=1}^Q \Phi_i(p_{Q+1}) + F_{Q+1}(p_{Q+1}), \quad (8)$$

де

$$\Phi_i(p_{Q+1}) = \min_{p_i} \{F_i(p_i) : A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \leq 0\}, i = 1, 2, \dots, Q, \quad (9)$$

на множині допустимих точок p_{Q+1} . Функції (9) є неявними і в загальному випадку їх оцінка в деякій точці p_{Q+1} потребує розв'язання задач (7). Однак ці задачі меншої розмірності, ніж вихідна задача (6), і розв'язуються незалежно, що може виявитися зручним для розрахунків.

У схемах декомпозиції задача

$$\min \Phi(p_{Q+1}), \quad (10)$$

що є еквівалентною вихідній, називається координуючою задачею. Задачі (7) будемо називати блочними підзадачами.

Нехай $M_i(\bar{p}_{Q+1}) = \{p_i : A_i p_i + B_i \bar{p}_{Q+1} + b_i \leq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, Q$ — допустимі області задач (7). Якщо розглядати M_i як опуклі багатогранні багатозначні відображення, то з блочних підзадач можна отримати інформацію щодо субградієнтів функції (8). Оскільки цільові функції задач (7) є опуклими і власними, то $\Phi_i(p_{Q+1})$ є опуклими функціями і, використовуючи теорему про обчислення субдиференціала через відображення, локально спряжене до багатозначного [11], отримуємо

$$\partial\Phi_i(p_{Q+1}) = \{B_i^* u_i : c_i + p_i + A_i^* u_i = 0, u_i \geq 0, (A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i)^* u_i = 0\},$$

$$i = 1, 2, \dots, Q.$$

Тут u_i — вектор множників Лагранжа i -ї блочної підзадачі.

Оскільки є можливість оцінити значення Φ_i та їх субградієнтів, то для розв'язання задачі (10) можна обрати який-небудь метод опуклого програмування. Але для отримання алгоритму, що збігається за скінченну кількість кроків, потрібно гарантувати виконання деяких додаткових умов.

Нехай за деякого фіксованого $p_{Q+1} = \bar{p}_{Q+1}$ задачі (7) розв'язані та знайдені оптимальні значення $p_i(\bar{p}_{Q+1})$. Позначимо через $J_i = J_i(\bar{p}_{Q+1})$ множину номерів активних обмежень i -ї задачі (7) у точці \bar{p}_{Q+1} , тобто тих обмежень, які в цій точці виконуються як рівності:

$$A_{J_i} p_i(\bar{p}_{Q+1}) + B_{J_i} \bar{p}_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q.$$

Тут через A_{J_i} , B_{J_i} позначено матриці, що складаються з рядків, номери яких входять у множини J_i . Їм відповідають складові векторів b_{J_i} та u_{J_i} вільних членів і множників Лагранжа відповідних задач.

Надалі будемо використовувати такі означення.

Точка \bar{p}_{Q+1} називається регулярною, якщо виконуються такі умови: всі блочні підзадачі (7) за фіксованого $p_{Q+1} = \bar{p}_{Q+1}$ є розв'язними, рядки матриць A_{J_i} — лінійно незалежними; множники Лагранжа, що відповідають активним обмеженням, — строго додатними $u_{J_i} > 0$.

У разі невеликого відхилення p_{Q+1} від \bar{p}_{Q+1} набори активних обмежень та знаки множників Лагранжа блочних підзадач можуть залишитися незмінними.

Підмножина множини змін p_{Q+1} , що складається з регулярних точок, яким відповідає одна й та сама матриця активних обмежень A_{J_i} зі строго додатними множниками Лагранжа u_{J_i} , називається регулярною областю для функції $\Phi_i(p_{Q+1})$.

Теорема 1. У кожній регулярній області функції $\Phi_i(p_{Q+1})$ є квадратичними.

Доведення. У регулярній точці p_{Q+1} множники Лагранжа визначаються однозначно і $\partial\Phi_i(p_{Q+1})$ складається з єдиного вектора градієнта функції $\Phi'_i(p_{Q+1}) = B_i^* u_i(p_{Q+1})$.

Необхідні умови екстремуму для i -ї блочної підзадачі (7) у цій точці виконуються у такій формі:

$$c_i + p_i + A_{J_i}^* u_{J_i} = 0, \quad A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad u_{J_i} > 0.$$

Звідси

$$\bar{p}_i = -c_i - A_{J_i}^* u_{J_i}, \quad (11)$$

$$u_{J_i} = -(A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} (A_{J_i} c_i - B_{J_i} p_{Q+1} - b_{J_i}). \quad (12)$$

Формула (12) виведена за припущення, що A_{J_i} є матрицею активних обмежень блочної підзадачі, тому для тих p_{Q+1} , для яких ця умова виконується, градієнт функції Φ_i є лінійною функцією від p_{Q+1} :

$$\Phi_i'(p_{Q+1}) = B_{J_i}^* u_i = B_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} B_{J_i} p_{Q+1} + B_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} (b_{J_i} - A_{J_i} c_i).$$

Сама ж функція Φ_i у цій регулярній області є квадратичною:

$$\begin{aligned} \Phi_i(p_{Q+1}) = & \frac{1}{2} \left\langle B_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} B_{J_i} p_{Q+1}, p_{Q+1} \right\rangle + \\ & + \left\langle B_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} (b_{J_i} - A_{J_i} c_i), p_{Q+1} \right\rangle + \bar{b}_{J_i}, \end{aligned}$$

де \bar{b}_{J_i} — це деяка константа, яку можна знайти з означення функції Φ_i (формула (9)):

$$\begin{aligned} \bar{b}_{J_i} = & -\frac{1}{2} \left\| [E - A_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} A_{J_i}^*] c_i \right\|^2 - \left\langle A_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} b_{J_i}, c_i \right\rangle + \\ & + \frac{1}{2} \left\| A_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} b_{J_i} \right\|^2. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Кожна регулярна область для $\Phi(p_{Q+1})$ є перетином регулярних областей функцій $\Phi_i(p_{Q+1})$, $i=1,2,\dots,Q$. Тому неперервна функція $\Phi(p_{Q+1})$ складається із фрагментів квадратичних функцій, причому в місцях з'єднання цих функцій можливі розриви її похідних. Через можливий розрив градієнта скінченнокрокові градієнтні методи для мінімізації $\Phi(p_{Q+1})$ не можуть бути застосовані. Оскільки задача (6) є допоміжною в апроксимуючому методі, то бажано отримати її розв'язок за скінченну кількість кроків. Тому замість мінімізації неявної функції $\Phi(p_{Q+1})$ будемо проводити послідовну мінімізацію спеціальним чином побудованих квадратичних функцій.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Якщо є багатогранна множина, що описується системою нерівностей, то гранню цієї множини називається підмножина, яка описується набором з обмежень, що задовольняються як рівності.

Нехай $p = \{p_1, p_2, \dots, p_Q, p_{Q+1}\}$ — довільна точка, що належить множині означень задачі (6), тобто $A_i p_i + B_i p_{Q+1} + b_i \leq 0$, $i=1,2,\dots,Q$. Якщо

$J_i = J_i(p)$ — множина номерів обмежень i -ї задачі (7), що в точці p задовольняються як рівності, то цю систему рівностей можна записати у вигляді

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (13)$$

Надалі припускаємо, що виконується така умова невинності і для наборів індексів $J_i = J_i(p)$, що породжуються довільною допустимою точкою p , вектори, які є рядками матриці активних обмежень A_{J_i} , є лінійно незалежними.

Випишемо задачу мінімізації функції $F(p)$ на грані (13) допустимої множини задачі (6)

$$\min F(p),$$

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (14)$$

Зафіксуємо $p_{Q+1} = \bar{p}_{Q+1}$. При цьому задача (14) розпадеться на Q задач

$$\min F_i(p_i),$$

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} \bar{p}_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (15)$$

Позначимо:

$$\Phi_{J_i}(p_{Q+1}) = \min_{p_i} \{F_i(p_i) : A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} \leq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, Q.$$

Визначимо розв'язок задач (15) у явному вигляді, використовуючи необхідні умови екстремуму

$$\bar{p}_i = -(E - A_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} A_{J_i}^*) c_i - A_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} (B_{J_i} \bar{p}_{Q+1} + b_{J_i}), \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, Q,$$

$$\Phi_{J_i}(p_{Q+1}) = \frac{1}{2} \left\langle B_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} B_{J_i} p_{Q+1}, p_{Q+1} \right\rangle + \left\langle B_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} (b_{J_i} - A_{J_i} c_i), p_{Q+1} \right\rangle + \bar{b}_{J_i}, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (17)$$

Задачу мінімізації функції

$$\Phi_J(p_{Q+1}) = \sum_{i=1}^Q \Phi_{J_i}(p_{Q+1}) + F_{Q+1}(p_{Q+1}) \quad (18)$$

назвемо локальною координуючою задачею, а операцію обчислення p_i за формулами (16) — допоміжною операцією.

Розв'язання задач (14) мінімізації цільової функції на грані еквівалентно розв'язанню відповідної локальної координуючої задачі з подальшим виконанням допоміжної операції.

Опишемо ідею заміни координуючої задачі набором локальних координуючих задач. Обираємо довільну допустиму точку \bar{p}_{Q+1} . За фіксованого $p_{Q+1} = \bar{p}_{Q+1}$ розв'язуємо блочні підзадачі (7). Виділяємо серед обмежень

цих задач ті, що в оптимальних точках $p_i(\bar{p}_{Q+1})$ задовольняються як рівності. Активні обмеження визначають певну грань багатогранної множини, що описується обмеженнями задачі (6). Будуємо локальну координуючу задачу, що відповідає мінімізації цільової функції задачі (6) на цій грані. Розв'язуємо цю задачу методом спряжених градієнтів [9]. Якщо до кожної з отриманих у процесі розв'язання точок застосувати допоміжну операцію (16), отримаємо послідовність точок $p = \{p_1, p_2, \dots, p_Q, p_{Q+1}\}$, що належить виділеній грані. На кожному кроці виконується перевірка для контролю виходу на грань допустимої множини, аби не допустити виходу за межі допустимої області. Якщо в деякій точці вздовж обраного напрямку одне з неактивних обмежень перетворюється в нуль, то додаємо його до активного набору і будуємо нову допоміжну координуючу задачу для розширеного активного набору, після чого продовжуємо застосовувати метод спряжених градієнтів.

Метод спряжених градієнтів мінімізує конкретну квадратичну функцію за скінченну кількість ітерацій. Оскільки кількість граней є також скінченною, то після скінченної кількості кроків отримаємо точку мінімуму локальної координуючої задачі.

Координуюча задача (10) є еквівалентною вихідній задачі (6), а кожна локальна координуюча задача — еквівалентною задачі типу (14), що за умови збереження допустимості p_{Q+1} має більш вузьку порівняно із задачею (6) допустиму область. Тому точка мінімуму локальної координуючої задачі може не бути розв'язком координуючої задачі (10). Тоді, вважаючи отриману точку початковою, треба повторити процедуру спочатку, починаючи з розв'язку блочних підзадач.

Теорема 2. Необхідні та достатні умови того, що точка \bar{p}_{Q+1} є розв'язком координуючої задачі (10), полягають у тому, що ця точка є розв'язком локальної координуючої задачі

$$\min \Phi_J(p_{Q+1})$$

і виконано умови

$$u_{J_i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (19)$$

Доведення. Відповідно до принципів побудови координуючої та локальних координуючих задач умови (19) гарантують збіжність цільових функцій цих задач у точці \bar{p}_{Q+1} .

У процесі пошуку оптимальної точки багаторазово розв'язуються блочні підзадачі (7). Якщо розв'язувати задачі двоїсті до блочних, то можемо застосувати метод спряжених градієнтів для задач з простими обмеженнями, а змінні p_i знаходити за формулами (11).

Алгоритм розв'язання координуючої задачі

1. Обираємо за початкове наближення довільну допустиму точку \bar{p}_{Q+1} .
2. Розв'язуємо задачі двоїсті до блочних підзадач (7)

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} \langle A_i A_i^* u_i, u_i \rangle - \langle A_i c_i - B_i \bar{p}_{Q+1} - b_i, u_i \rangle \right\}, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q.$$

3. Знаючи множники Лагранжа u_i , обчислюємо $p_i(\bar{p}_{Q+1}) = -c_i - A_i^* u_i$ і знаходимо множини індексів активних обмежень $J_i(\bar{p}_{Q+1})$, $i = 1, 2, \dots, Q$.

4. Використовуючи формули (17), (18), будуємо та розв'язуємо локальну координуючу задачу

$$\min \Phi_J(p_{Q+1})$$

методом спряжених градієнтів. На кожному кроці виконуємо перевірку для збереження допустимості розв'язку. Для цього підставляємо вираз $p_{Q+1}^{k+1} = p_{Q+1}^k + \bar{\alpha}_k s^{k+1}$, де p_{Q+1}^k — чергова отримана точка; s^{k+1} — напрямок зсуву за методом спряжених градієнтів на кроці k у ті обмеження блочних підзадач, індекси яких не входять до множин активних обмежень. Знаходимо найменше зі значень $\bar{\alpha}_k$, за якого неактивні обмеження дорівнюють до нуля. Порівнюємо це значення з довжиною кроку спряжених градієнтів α_k . Якщо $\alpha_k < \bar{\alpha}_k$, то $p_{Q+1}^{k+1} = p_{Q+1}^k + \alpha_k s^{k+1}$ і процес розв'язання локальної координуючої задачі потрібно продовжувати. Якщо ж ця нерівність не виконується, то $p_{Q+1}^{k+1} = p_{Q+1}^k + \bar{\alpha}_k s^{k+1}$ і процес застосування методу спряжених градієнтів до цієї локальної координуючої задачі є закінченим. В останньому випадку розширюємо множину J_i , додаючи до неї номер того обмеження, на якому досягнуто мінімальне значення $\bar{\alpha}_k$. Повторюємо крок 4.

Нехай в результаті мінімізації отримано оптимальну точку локальної координуючої задачі $\bar{\bar{p}}_{Q+1}$.

Обчислюємо $u_{J_i} = -(A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} (A_{J_i} c_i - B_{J_i} \bar{\bar{p}}_{Q+1} - b_{J_i})$, $i = 1, 2, \dots, Q$. Якщо всі $u_{J_i} \geq 0$, то точка $\bar{\bar{p}}_{Q+1}$ є розв'язком координуючої задачі (10), а $\bar{\bar{p}} = \{\bar{\bar{p}}_1, \bar{\bar{p}}_2, \dots, \bar{\bar{p}}_Q, \bar{\bar{p}}_{Q+1}\}$, де $\bar{\bar{p}}_i = -c_i - A_{J_i}^* u_{J_i}$ ($i = 1, 2, \dots, Q$), є розв'язком вихідної задачі.

Якщо ж умова $u_{J_i} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, Q$ не виконується, то повертаємося до кроку 2 алгоритму, вважаючи точку $\bar{\bar{p}}_{Q+1}$ новим наближенням і визначаючи нову множину номерів активних обмежень $J' = J'(\bar{\bar{p}}_{Q+1})$, що отримується за результатом розв'язання блочних підзадач за фіксованого $p_{Q+1} = \bar{\bar{p}}_{Q+1}$.

Обґрунтування збіжності

Нехай J_i , $i = 1, 2, \dots, Q$ — вихідні множини індексів активних обмежень і в процесі розв'язання локальної координуючої задачі з цільовою функцією $\Phi_J(p_{Q+1})$ ітераційний процес привів у таку точку \tilde{p}_{Q+1} , у якій одне з обмежень, що не входило раніше до множини активних

$$A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, Q, \quad (20)$$

перетворюються у рівність. Якщо це обмеження має номер j і належить до l -ї локальної задачі, то, починаючи з точки \tilde{p}_{Q+1} , розширюємо індексну

множину $\tilde{J}_l = J_l \cup \{j\}$ і розв'язуємо нову локальну координуючу задачу з цільовою функцією $\Phi_{\tilde{J}}(p_{Q+1})$.

Теорема 3. У разі розширення індексної множини $\tilde{J}_l = J_l \cup \{j\}$ значення цільових функцій локальних координуючих задач у точці переходу збігаються.

Доведення. Випишемо обмеження, що в точці \tilde{p}_{Q+1} перетворюється в рівність.

$$A_l^j p_l + B_l^j \tilde{p}_{Q+1} + b_l^j = 0, \quad j \notin J_l. \quad (21)$$

Верхнім індексом j позначено рядки матриць A_l і B_l і відповідний елемент вектора b_l .

Оскільки точку \tilde{p}_{Q+1} отримано в процесі мінімізації функції $\Phi_J(p_{Q+1})$, то за алгоритмом допустиме значення p_l , що належить грані (20), отримуємо за формулою (16)

$$p_l = -(E - A_{J_l}^* (A_{J_l} A_{J_l}^*)^{-1} A_{J_l}^*) c_l - A_{J_l}^* (A_{J_l} A_{J_l}^*)^{-1} (B_{J_l} \tilde{p}_{Q+1} + b_{J_l}).$$

Підставивши цей вираз у формулу (21), знаходимо вираз для \tilde{p}_{Q+1} і явні вирази для $\Phi_J(p_{Q+1})$ та $\Phi_{\tilde{J}}(p_{Q+1})$. Використовуючи рекурентні формули для обертання матриць [12], можна показати, що виконується рівність

$$\Phi_{\tilde{J}}(\tilde{p}_{Q+1}) = \Phi_J(\tilde{p}_{Q+1}).$$

Наведений алгоритм будує таку послідовність точок $\{p_{Q+1}^k\}$, що, принаймні у тих з них, у яких досягаються мінімуми локальних координуючих задач, значення цільової функції координуючої задачі $\Phi(p_{Q+1})$ монотонно спадає. Дійсно, оскільки в початковій точці p_{Q+1}^0 як набори індексів J_i^0 для побудови локальної координуючої задачі використовуються набори активних обмежень, то в цій точці цільові функції локальної координуючої та координуючої задач збігаються: $\Phi_{J^0}(p_{Q+1}^0) = \Phi(p_{Q+1}^0)$. Метод спряжених градієнтів здійснює монотонну мінімізацію квадратичної функції. Якщо він не приводить до точки мінімуму локальної координуючої задачі, то розширюється одна з множин J_i^0 і відбувається перехід до нової локальної координуючої задачі, причому значення двох локальних координуючих задач, що розв'язуються послідовно, у точці переходу збігаються.

Відповідно до припущення щодо лінійної незалежності векторів обмежень через скінченну кількість кроків, що не перевищує розмірність вектора p , процес розширення індексних множин припиниться і досягається точка мінімуму локальної координуючої задачі. Тобто кількість кроків алгоритму, у результаті яких буде отримано точку мінімуму локальної координуючої задачі, не перевищує n .

Нехай точку p_{Q+1}^l отримано в результаті розв'язання задачі $\min \Phi_{J^l}(p_{Q+1})$. Якщо ця точка не є розв'язком координуючої задачі (10), то виконується нерівність

$$\begin{aligned} \Phi_{J^l}(p_{Q+1}^l) &= F(p_1^l, p_2^l, \dots, p_Q^l, p_{Q+1}^l) > \\ &> F(p_1(p_{Q+1}^l), p_2(p_{Q+1}^l), \dots, p_Q(p_{Q+1}^l), p_{Q+1}^l) = \Phi(p_{Q+1}^l), \end{aligned}$$

оскільки p_i^l , знайдені за формулами (16) для індексних множин J_i^l , є допустимими, а $p_i(p_{Q+1}^l)$ — оптимальні точки блочних підзадач за фіксованих p_{Q+1}^l . Є очевидним, що $\Phi(p_{Q+1}^0) > \Phi(p_{Q+1}^l)$.

Обираючи новою початковою точкою p_{Q+1}^l , повторюємо цю процедуру і отримуємо точку мінімуму локальної координуючої задачі, у якій значення $\Phi(p_{Q+1})$ строго менше за значення цієї функції в точках мінімуму раніше побудованих локальних координуючих задач. Таким чином, значення функції $\Phi(p_{Q+1})$ уздовж послідовності точок мінімуму локальних координуючих задач монотонно спадає. Це означає, що якщо розглядати дві точки мінімуму різних локальних координуючих задач p_{Q+1}^l і p_{Q+1}^k , $l > k$, то множини індексів активних обмежень у таких точках є різними. Якби $J_i(p_{Q+1}^l) = J_i(p_{Q+1}^k)$, $i = 1, 2, \dots, Q$, то $\Phi(p_{Q+1}^l) = \Phi(p_{Q+1}^k)$, а відповідно до побудови процесу $\Phi(p_{Q+1}^l) > \Phi(p_{Q+1}^k)$, $l > k$.

З іншого боку, всі множини індексів активних обмежень є підмножинами скінченної множини номерів усіх обмежень задачі (6) і тому кількість таких підмножин є скінченною. Це означає, що процес повинен завершитися після скінченної кількості в точці мінімуму координуючої задачі, бо якщо отримана точка не є розв'язком координуючої задачі, процес може бути продовжений.

Це означає, що є справедливою така теорема.

Теорема 4. Якщо в точках мінімуму локальних координуючих задач виконуються умови регулярності, то процедура буде знаходити оптимальний розв'язок за скінченну кількість ітерацій.

Припустімо тепер, що точка \bar{p}_{Q+1} , отримана як розв'язок чергової локальної квадратичної задачі і така, що не є розв'язком координуючої задачі, не є регулярною. Це означає, що серед компонентів векторів Лагранжа u_i ($i = 1, 2, \dots, Q$) є від'ємні. Якби це було не так, точка \bar{p}_{Q+1} була б розв'язком координуючої задачі.

Нехай $u_i^j < 0$, $i \in \{1, 2, \dots, Q\}$, $j \in J_i$. Побудуємо нову індексну множину $\tilde{J}_i = J_i / \{j\}$ шляхом відкидання з множини J_i індексу j . Побудуємо локальну координуючу задачу для цієї скороченої індексної множини і припустимо, що знайдено розв'язок цієї нової задачі \tilde{p}_{Q+1} . Локальні координуючі

задачі, побудовані для множин J_i і \tilde{J}_i , є еквівалентними відповідно задачам

$$\min\{F(p) : A_{J_i} p_i + B_{J_i} p_{Q+1} + b_{J_i} = 0, i = 1, 2, \dots, Q\} \quad (22)$$

та

$$\min\{F(p) : A_{\tilde{J}_i} p_i + B_{\tilde{J}_i} p_{Q+1} + b_{\tilde{J}_i} = 0, i = 1, 2, \dots, Q\}. \quad (23)$$

Оскільки допустима множина задачі (22) є більш вузькою порівняно з допустимою множиною задачі (23), то

$$F(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_Q, \bar{p}_{Q+1}) \geq F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_Q, \tilde{p}_{Q+1}),$$

де \bar{p}_i і \tilde{p}_i знаходимо за формулою (16) для множин J_i і \tilde{J}_i відповідно. Остання нерівність може бути переписана у вигляді

$$\Phi_J(\bar{p}_{Q+1}) \geq \Phi_{\tilde{J}}(\tilde{p}_{Q+1}).$$

Треба показати, що точки \bar{p}_{Q+1} і \tilde{p}_{Q+1} не збігаються, інакше процес не зсунувся б з точки \bar{p}_{Q+1} .

Теорема 5. Нехай обмеження локальної координуючої задачі (23) утворені з обмежень іншої локальної координуючої задачі (22) шляхом видалення рівняння, для якого

$$u_i^j < 0, i \in \{1, 2, \dots, Q\}, j \in J_i. \quad (24)$$

Тоді точки мінімуму цих задач не збігаються.

Доведення. Нехай в рівнянні (24) $i = l$, тобто $u_l^j < 0$, а точка мінімуму задачі (22) $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_Q, \bar{p}_{Q+1})$ є оптимальною точкою і для задачі (23). Випишемо необхідні умови екстремуму для цих задач [11]. Вони мають вигляд відповідно

$$F'(\bar{p}) + \sum_{i=1}^Q A_{J_i}^* u_{J_i} = 0, \quad (25)$$

$$A_{J_i} p_i(\bar{p}_{Q+1}) + B_{J_i} \bar{p}_{Q+1} + b_{J_i} = 0, i = 1, 2, \dots, Q$$

та

$$F'(\bar{p}) + \sum_{i=1}^Q A_{\tilde{J}_i}^* w_{\tilde{J}_i} = 0, \quad (26)$$

$$A_{\tilde{J}_i} p_i(\bar{p}_{Q+1}) + B_{\tilde{J}_i} \bar{p}_{Q+1} + b_{\tilde{J}_i} = 0, i = 1, 2, \dots, Q.$$

Тут u_{J_i} та $w_{\tilde{J}_i}$ — вектори множників Лагранжа задач (22) і (23).

Віднімаючи нерівності (25) і (26), дістаємо

$$\sum_{i=1}^Q A_{J_i}^* u_{J_i} - \sum_{i=1}^Q A_{\tilde{J}_i}^* w_{\tilde{J}_i} = u_l^j (A_l^j)^* + \sum_{i=1}^Q \sum_{\substack{t \in J_i \\ t \neq j}} (u_i^t - w_i^t) (A_i^t)^* = 0,$$

що є неможливим, оскільки $u_i^j < 0$, а матриці A_{J_i} є невідродженими. Це і доводить твердження теореми.

Таким чином, процедура відкидання індексу з множини активних обмежень дозволяє продовжувати процес мінімізації і не порушує його монотонності. Це означає, що і в цьому випадку розв'язок буде знайдено за скінченну кількість кроків.

ВИСНОВКИ

Запропонований метод розв'язання нелінійної задачі блочної структури зі зв'язуючими змінними є поєднанням апроксимаційного методу першого порядку та прямого методу декомпозиції.

Декомпозиційний прийом полягає у тому, що для задач блочної структури зі зв'язуючими змінними загальні ресурси змінюються від кроку до кроку таким чином, аби блочні підсистеми (набори блочних підзадач) працювали дедалі ефективніше з точки зору ефективності роботи всієї системи.

На відміну від задачі зі зв'язуючими обмеженнями [7], де швидкість збіжності при розв'язанні двоїстої координуючої задачі залежить від поведінки її цільової функції в околі оптимальної точки, у разі застосування прямої схеми декомпозиції розв'язок координуючої задачі завжди отримується за скінченну кількість кроків, що є важливим з огляду на те, що координуюча задача у запропонованій триступеневій схемі повинна розв'язуватися багаторазово як допоміжна в апроксимаційному процесі найвищого рівня.

Загалом швидкість збіжності для розв'язання вихідної задачі (1) залежить від функцій, що визначають її критерій і обмеження, та обраного методу апроксимації. Для задач із сепарабельними функціями можна використовувати апроксимуючі методи більш високого порядку, беручи у виразі (3) як матрицю D_k деякі наближення до матриці других похідних або функцію Лагранжа задачі (1), як це робиться у методах послідовного квадратичного програмування. Очевидно, що у такому випадку отримаємо швидкість збіжності вищу, ніж у методах першого порядку і побудова таких процедур може стати перспективним напрямом для подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем / Л.С. Лэсдон. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
2. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности / В.И. Цурков. — М.: Наука, 1981. — 352 с.
3. Лаптин Ю.П. Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными / Ю.П. Лаптин, Н.Г. Журбенко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 2. — С. 47–55.
4. Shefi R. Rate of Convergence Analysis of Decomposition Methods Based on the Proximal Method of Multipliers for Convex Minimization / R. Shefi, M. Teboulle // SIAM J. Optim. — 014. — 24, Issue 1. — P. 269–297. DOI: 10.1137/1309.10774.

5. Andersson H. A new decomposition algorithm for a liquefied natural gas inventory routing problem / H. Andersson, M. Christiansen, G. Desaulniers // *International Journal of Production Research*. — 2016. — **54**, Issue 2. — P. 564–578. DOI: 10.1080/00207543.2015.1037024
6. *Лаптин Ю.П.* Точные штрафные функции и выпуклые продолжения функций в схемах декомпозиции по переменным / Ю.П. Лаптин // *Кибернетика и системный анализ*. — 2016. — **52**, № 1. — С. 93–104.
7. *Кірік О.Є.* Підхід до розв'язання нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими обмеженнями / О.Є. Кірік // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. — К., 2015. — № 5. — С. 32–38.
8. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків / О.Є. Кірік // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. — К., 2007. — № 3. — С. 67–73.
9. *Пшеничный Б.Н.* Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. — М.: Наука, 1975. — 319 с.
10. *Александрова В.М.* Оптимізаційні моделі та алгоритми для мережевих задач розподілу ресурсів / В.М. Александрова, О.Є. Кірік // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. — 2014. — № 4. — С. 39–45.
11. *Пшеничный В.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / В.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
12. *Фаддеев Д.К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. — М.: Физматгиз, 1960. — 656 с.

Надійшла 06.04.2016

**АНАЛІЗ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТА ЧУТЛИВОСТІ
ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ
ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ**

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, О.Л. СОПРОНЮК

Анотація. Розглянуто моделі лінійних параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Доведено теореми про практичну стійкість лінійних параметричних систем зі змінною вимірністю. Важливою є отримана обернена теорема про практичну стійкість вказаних систем. Наведено алгоритми та критерії аналізу практичної стійкості лінійних параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору за наявності постійно діючих збурень. Отримано матричні рівняння чутливості таких систем. Показано, що на основі методів практичної стійкості та умов, які задовольняють матриці чутливості, можна ефективно знаходити оцінки параметрів для аналізу чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору. Результати роботи придатні для успішного застосування в задачах цифрового оброблення інформації та розпізнавання образів.

Ключові слова: практична стійкість, чутливість динамічних систем, системи із застосуванням розмірності фазового простору.

ВСТУП

Задачі аналізу параметрів моделей функціонування різноманітних систем постають у різних прикладних галузях. Тут можемо навести моделі медичної діагностики, хімічної промисловості, моделі оцінювання екологічного стану, радіолокації та багато інших, що потребують методик вибору параметрів, які б дозволили в реальному часі розпізнавати певні особливості досліджуваних процесів. Важливими виявляються такі зміни параметрів, які зумовлюють певну властивість стійкості вказаних систем. Одним із підходів до розв'язання проблеми є методи практичної стійкості. Вони дозволяють з єдиних позицій підійти до проблеми аналізу чутливості динамічних систем і отримати ефективні критерії оцінювання параметрів.

У роботі вивчається модель, яка змінює вимірність фазового простору у певні моменти часового параметра і на кожному інтервалі описується системою звичайних диференціальних рівнянь. Для цієї моделі отримано матричні рівняння чутливості і запропоновано використовувати оптимальні оцінки у класі еліпсоїдів, що виводяться за допомогою методів практичної стійкості параметричних систем.

Мета роботи — розроблення ефективних алгоритмів аналізу й оцінювання параметрів моделей систем зі зміною вимірності фазового простору на основі методів практичної стійкості.

ОПИС ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай задано розбиття $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$, $\tau_i = [t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1, N-1}$, $\tau_N = [t_{N-1}, t_N]$ відрізка $[T_0, T_1]$ [1], тобто $t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T_1$, α — вектор параметрів розмірності m , що вибирається з деякої множини G_α ($0 \in G_\alpha$).

На відрізку $[T_0, T_1]$ із заданим розбиттям τ розглянемо динамічну систему, яка залежить від векторного параметра α :

$$\frac{dx^{(i)}(t, \alpha)}{dt} = A_i(t)x^{(i)}(t, \alpha) + B_i(t)\alpha, \quad \alpha \in G_\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (1)$$

за умов зміни вимірності фазового простору

$$x^{(i)}(t_{i-1}, \alpha) = C_i x^{(i-1)}(t_{i-1} - 0, \alpha) + D_i \alpha, \quad \alpha \in G_\alpha, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2)$$

У співвідношенні (1) $A_i(t)$ — квадратні матриці порядку n_i ; $B_i(t)$ — прямокутні матриці розмірності $n_i \times m$, для яких розв'язок системи (1) існує і єдиний для всіх $t \in \tau_i$; $x^{(i)}(t, \alpha)$ — вектор фазового стану системи (1) розмірності n_i ; α — вектор параметрів розмірності m , а у (2) C_i — матриці розмірності $n_{i+1} \times n_i$, причому $C_1 = E_1$, E_1 — одинична матриця розмірності $n_1 \times n_1$ і матриці C_i такі, що $\det(C_i^T C_i) \neq 0$; D_i — матриці розмірності $n_{i+1} \times m$ і, крім цього, D_1 — нульова матриця розмірності $n_1 \times m$.

Легко показати, що за умов, які задовольняють сталі матриці C_i і D_i , розв'язок системи (1), (2) існує і єдиний.

Систему (1) за умов (2) називатимемо лінійною системою, яка змінює вимірність фазового простору в моменти t_i , $i = \overline{1, N-1}$.

ТЕОРЕМИ ПРО ПРАКТИЧНУ СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

На відрізку $[T_0, T_1]$ із заданим розбиттям τ розглянемо лінійну динамічну систему (1) за умов (2), яка залежить від векторного параметра α .

Означення 1. Незбурений рух $x^{(i)}(t, 0) = 0$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$ системи (1) за умов (2) назвемо $\{G_0^{x_0^{(1)}}, G_0^\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}, T_0, T\}$ — стійким, якщо $x^{(i)}(t, \alpha) \in \Omega_t^{(i)}$ при $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$ за початкових умов $x^{(1)}(t_0, \alpha) \in G_0^{x_0^{(1)}}$ і будь-яких $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

В означенні 1 множина G_0^α ($0 \in G_0^\alpha$) — це множина допустимих значень параметрів, які використовуються для аналізу практичної стійкості [2, 3].

Теорема 1. Якщо для системи (1) за умов (2) знайдуться додатно визначені функції Ляпунова $V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha)$, які задовольняють умови

$$\{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha) < 1\} \subset \Omega_t^{(i)}, \quad \alpha \in G_0^\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad (3)$$

$$\left(\frac{dV_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha)}{dt} \right)_{(1),(2)} \leq 0 \quad (4)$$

при

$$x^{(i)} \in \{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha) < 1\}, \quad \alpha \in G_0^\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N};$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$

$$V_i(x^{(i)}(t_i^-, \alpha), t_i^-, \alpha) - V_{i+1}(x^{(i)}(t_i, \alpha), t_i, \alpha) \geq 0, \quad \alpha \in G_0^\alpha; \quad (5)$$

$$G_0^{x_0^{(1)}} \subset \{x^{(1)} : V_1(x^{(1)}(t, \alpha), t, \alpha) < 1\}, \quad \alpha \in G_0^\alpha, \quad (6)$$

то незбурений рух $x^{(i)}(t_i, \alpha) = 0$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$ системи (1), (2)

$$\{G_0^{x_0^{(1)}}, G_0^\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}, T_0, T_1\} \text{ — стійкий.}$$

Доведення (від супротивного). Нехай виконуються умови (3)–(6) теореми 1, але знайдеться $1 \leq i_0 \leq N$ і таке значення $\bar{t} \in \tau_{i_0}$, за якого траєкторія системи, яка відповідає параметру $\bar{\alpha} \in G_0^\alpha$, не належить множині $\Omega_t^{(i_0)}$, тобто $x^{(i_0)}(\bar{t}, \bar{\alpha}) \notin \Omega_t^{(i_0)}$. Можуть бути два випадки: а) $\bar{t} = t_{i_0-1}$ або б) $\bar{t} \in (t_{i_0-1}, t_{i_0})$.

У випадку а) отримуємо, що $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1}, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}, \bar{\alpha}) \geq 1$. Оскільки для всіх t , $t \in \tau_{i_0}$, маємо $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1}, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}, \bar{\alpha}) < 1$, то порушується умова (5).

У випадку б) з умови (3) і неперервності функції Ляпунова $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t, \bar{\alpha}), t, \bar{\alpha})$ у точці \bar{t} впливає нерівність $V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1}, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}, \bar{\alpha}) \geq 1$.

Розглянемо різницю

$$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t}, \bar{\alpha}), \bar{t}, \bar{\alpha}) - V_1(x^{(1)}(t_0, \bar{\alpha}), t_0, \bar{\alpha}), \text{ яку запишемо у вигляді}$$

$$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t}, \bar{\alpha}), \bar{t}, \bar{\alpha}) - V_1(x^{(1)}(t_0, \bar{\alpha}), t_0, \bar{\alpha}) =$$

$$V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t}, \bar{\alpha}), \bar{t}, \bar{\alpha}) - V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1}, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}, \bar{\alpha}) +$$

$$+ V_{i_0}(x^{(i_0)}(t_{i_0-1}, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}, \bar{\alpha}) - V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-1}^-, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}^-, \bar{\alpha}) +$$

$$+ V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-1}^-, \bar{\alpha}), t_{i_0-1}^-, \bar{\alpha}) - V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-2}, \bar{\alpha}), t_{i_0-2}, \bar{\alpha}) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ V_{i_0-1}(x^{(i_0-1)}(t_{i_0-2}, \alpha), t_{i_0-2}, \alpha) - V_{i_0-2}(x^{(i_0-2)}(t_{i_0-2-}, \alpha), t_{i_0-2-}, \alpha) + \\
 &\quad + V_3(x^{(3)}(t_3-, \alpha), t_3-, \alpha) - V_3(x^{(3)}(t_2, \alpha), t_2, \alpha) + \\
 &\quad + V_3(x^{(3)}(t_2, \alpha), t_2, \alpha) - V_2(x^{(3)}(t_2-, \alpha), t_2-, \alpha) + \\
 &\quad + V_2(x^{(2)}(t_2-, \alpha), t_2-, \alpha) - V_2(x^{(2)}(t_1, \alpha), t_1, \alpha) + \\
 &\quad + V_2(x^{(2)}(t_1, \alpha), t_1, \alpha) - V_1(x^{(1)}(t_1-, \alpha), t_1-, \alpha) + \\
 &\quad + V_1(x^{(1)}(t_1-, \alpha), t_1-, \alpha) - V_1(x^{(1)}(t_0, \alpha), t_0-, \alpha).
 \end{aligned}$$

Ураховуючи (5), маємо

$$\begin{aligned}
 &V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t}, \alpha), \bar{t}, \alpha) - V_1(x^{(1)}(t_0, \alpha), t_0, \alpha) = \\
 &= \sum_{j=1}^{i_0-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{dV_j(x^{(j)}(t, \alpha), t, \alpha)}{dt} \right)_{(3),(4)} dt + \int_{t_{i_0-1}}^{\bar{t}} \left(\frac{dV_1(x^{(1)}(\bar{t}, \alpha), \bar{t}, \alpha)}{dt} \right)_{(3),(4)} dt.
 \end{aligned}$$

Звідси на підставі умови (4) маємо $V_{i_0}(x^{(i_0)}(\bar{t}, \alpha), \bar{t}, \alpha) - V_1(x^{(1)}(t_0, \alpha), t_0, \alpha) \leq 0$, а отже, $V_1(x^{(1)}(t_0, \alpha), t_0, \alpha) \geq 1$, що суперечить умові (6) теореми. Тому таке припущення неправильне.

Теорема 1 доведена.

Нехай початкові умови для системи (1) за умов (2) вибираються з множини $G_0^{x_0^{(1)}} = \{x^{(1)} : x^{(1)T}(t_0, \alpha) H x^{(1)}(t_0, \alpha) < c^2\}$, де H — симетрична додатно визначена матриця.

Означення 2. Незбурений рух $x^{(i)}(t, 0) = 0$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$ системи (1) за умов (2) називатимемо $\{c, H, G_0^\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}, T_0, T_1\}$ — стійким, якщо $x^{(i)}(t, \alpha) \in \Omega_t^{(i)}$ при $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$ для будь-яких початкових умов з множини

$$G_0^{x_0^{(1)}} = \{x^{(1)} : x^{(1)T}(t_0, \alpha) H x^{(1)}(t_0, \alpha) < c^2\} \text{ для всіх } \alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha.$$

Теорема 2. Якщо для системи (1), (2) знайдуться додатно визначені функції Ляпунова $V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha)$, $i = \overline{1, N}$, які задовольняють умови (3)–(5) і

$$\{x^{(1)} : x^{(1)T}(t_0, \alpha) H x^{(1)}(t_0, \alpha) < c^2\} \subset \{x^{(1)} : V_1(x^{(1)}(t_0, \alpha), t_0, \alpha) < 1\}, \quad (7)$$

то незбурений рух $x^{(i)}(t, \alpha) = 0$, $\alpha \in G_0^\alpha$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$, системи (1), (2)

$$\{c, H, G_0^\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}, T_0, T_1\} \text{ — стійкий.}$$

Теорему 2 легко довести за схемою доведення *теореми 1*.

Покажемо, що для системи (1) за умов (2) можна знайти функцію Ляпунова.

Теорема 3. Якщо існує однозначна, неперервна, додатно визначена функція $W(x^{(1)})$ така, що множина $G_0^{x^{(1)}} = \{x^{(1)} : W(x^{(1)}) < 1\}$, то функції Ляпунова для системи (1) за умов (2), що задовольняють усі вимоги теореми 1, можна побудувати так:

$$V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha) = W(x^{(1)}(t, t_0, x^{(i)}(t, \alpha), \alpha)), \quad i = \overline{1, N},$$

де

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t, t_0, x^{(i)}(t, \alpha), \alpha) &= U_{1,i}(t_1, t_i) X_i^{-1}(t, t_{i-1}) x^{(i)}(t) - \\ &- U_{1,i}(t_1, t_{i-1}) X_i^{-1}(t, t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^t X_i(t, s) B_i(s) ds \alpha - \\ &- \sum_{j=1}^{i-1} U_{1,j}(t_1, t_j) X_j^{-1}(t_j, t_{j-1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) B_j(s) ds \alpha - \sum_{j=2}^i U_{1,j}(t_1, t_j) D_j \alpha \end{aligned}$$

розв'язок системи (1), (2), який набуває значення $x^{(i)}$ у момент $t \in \tau_i$, а

$$\begin{aligned} U_{k,j}(t_k, t_j) &= X_k^{-1}(t_k, t_{k-1}) (C_{k+1}^T C_{k+1})^{-1} C_{k+1}^T X_{k+1}^{-1}(t_{k+1}, t_k) (C_{k+2}^T C_{k+2})^{-1} C_{k+2}^T \dots \\ &\dots X_{j-1}^{-1}(t_{j-1}, t_{j-2}) (C_j^T C_j)^{-1} C_j^T, \\ \frac{dX_i(t, t_{i-1})}{dt} &= A_i(t) X_i(t, t_{i-1}), \quad X_i(t_{i-1}, t_{i-1}) = E_i \end{aligned} \quad (8)$$

нормована за моментом t_{i-1} , $i = \overline{1, N}$ фундаментальна матриця задачі Коші (8).

Доведення. Для доведення теореми потрібно перевірити умови (3)–(6).

Умова (3) виконується, оскільки $\{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha) < 1\} = \{x^{(1)} : W(x^{(1)}) < 1\}$ і ця множина належить $\Omega_t^{(i)}$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$. Умова (4) теж виконується, бо

$$\left(\frac{dV_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha)}{dt} \right)_{(1),(2)} = 0,$$

$$x^{(i)} \in \{x^{(i)} : V_i(x^{(i)}(t, \alpha), t, \alpha) < 1\}, \quad a \in G_0^\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Оскільки для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$

$$V_i(x^{(i)}(t_i^-, \alpha), t_i^-, \alpha) - V_{i+1}(x^{(i)}(t_i, \alpha), t_i, \alpha) = 0, \quad a \in G_0^\alpha,$$

то виконується й умова (5). За такого вибору функції Ляпунова умова (6) також справджується.

Теорему доведено.

АЛГОРИТМИ АНАЛІЗУ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Для побудови алгоритмів аналізу практичної стійкості лінійної системи (1) за умов (2) запропонуємо критерій, який ґрунтується на певних припущеннях щодо як областей початкових умов і параметрів, так і конкретних обмежень [3–6] на динаміку фазових станів указаної системи. Нехай $X_i(t, t_{i-1})$ — матричний розв’язок задачі Коші (8). Позначимо:

$$W_{ij}(t, t_j) = X_i(t, t_{i-1})C_i X_{i-1}(t_{i-1}, t_{i-2})C_{i-1} \dots X_j(t_j, t_{j-1})C_j. \quad (9)$$

Тоді розв’язок системи (1) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$, матиме вигляд

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t) = & W_{i1}(t, t_1)x_0^{(1)} + \int_{t_{i-1}}^t X_i(t_i, s)B_i(s)ds\alpha + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)B_j(s)ds\alpha + \\ & + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1})D_j\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (10)$$

Щоб отримати числові оцінки областей практичної стійкості системи (1) за умов (2), множини початкових умов та параметрів задамо у вигляді

$$G_0^{x^{(1)}} = \{x^{(1)} : x^{(1)T}(t_0, \alpha)Hx^{(1)}(t_0, \alpha) \leq c^2\}, \quad G_0^\alpha = \{\alpha : \alpha^T H_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}, \quad (11)$$

де H, H_α — додатно визначені матриці; c, c_α — деякі додатні сталі.

Розглянемо також конкретні динамічні обмеження

$$\Omega_t^{(i)} = \{x^{(i)} : |l_{s_i}^{(i)T}(t)x^{(i)}(t)| \leq 1, s_i = 1, 2, \dots, N_i\}, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (12)$$

де $l_{s_i}^{(i)T}(t), s_i = 1, 2, \dots, N_i\}$ — відомі вектори, $t \in \tau_i, i = \overline{1, N}$.

Якщо введемо позначення $z^{(i)}(t) = W_{i1}(t, t_1)x_0$,

$$\begin{aligned} a^{(i)}(t, \alpha) = & \int_{t_{i-1}}^t X_i(t_i, s)B_i(s)ds\alpha + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)B_j(s)ds\alpha + \\ & + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1})D_j\alpha, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

то на підставі (10) можемо записати

$$x^{(i)}(t) = z^{(i)}(t) + a^{(i)}(t, \alpha), \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Критерій 1. Для того, щоб система (1), (2) була $\{c, H, c_\alpha, H_\alpha, \Omega_i^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}\}$ — стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} \min_{\alpha \in \{\alpha: \alpha^T H_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}} \frac{(1 - |l_{s_i}^{(i)T}(t) a^{(i)}(t, \alpha)|)^2}{l_{s_i}^{(i)T}(t) (Q_i(t))^{-1} l_{s_i}^{(i)}(t)}, \quad (13)$$

$$|l_{s_i}^{(i)T} a^{(i)}(t, \alpha)| < 1. \quad (14)$$

Тут $Q_i^{-1}(t) = W_{i1}(t, t_0) H^{-1} W_{i1}^T(t, t_0)$ виражається через матриці $W_{i1}(t, t_0)$, $t \in \tau_i$, які можна знайти за формулою (9), поклавши $j = 1$.

Доведення. Запишемо розв'язок (1), (2) у вигляді (12) і подамо умову $x^{(i)}(t) \in \Omega_i^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}$ таким чином:

$$z^{(i)}(t) \in \{z^{(i)}(t) : -1 - l_{s_i}^{(i)T} a^{(i)}(t, \alpha) \leq l_{s_i}^{(i)T} z^{(i)}(t) \leq \leq 1 - l_{s_i}^{(i)T} a^{(i)}(t, \alpha)\}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}.$$

Визначаючи екстремуми лінійних форм $l_{s_i}^{(i)T} z^{(i)}(t)$ на еліпсоїдах $(l_{s_i}^{(i)T}(t) (Q_i(t))^{-1} l_{s_i}^{(i)}(t)) \leq c^2, t \in \tau_i, s_i = 1, 2, \dots, N_i, i = \overline{1, N}$, отримуємо справедливність (13), (14).

КРИТЕРІЙ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ ЗА ПОСТІЙНО ДІЮЧИХ ЗБУРЕНЬ

Розглянемо тепер задачу практичної стійкості лінійної системи зі змінною вимірності фазового простору, яка залежить від параметрів та постійно діючих збурень

$$\frac{dx^{(i)}(t, \alpha)}{dt} = A_i(t)x^{(i)}(t, \alpha) + B_i(t)\alpha + f^{(i)}(t), a \in G_\alpha, t \in \tau_i \quad (15)$$

за умов (2).

Тут $A_i(t), B_i(t), t \neq t_i, i = 1, 2, \dots, N$ — матриці з інтегрованими елементами відповідних розмірностей; $x^{(i)}(t_{i-1}) = x^{(i)}((t_{i-1} + 0))$; функції $f^{(i)}(t), t \in \tau_i, t \neq t_i$ або відомі, інтегровані і мають розмірності $n_i, i = \overline{1, N}$, або невідомі, але обмежені за нормою

$$\|f^{(i)}(t)\| = \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} |f_j^{(i)}(s)|^{q_i} \right)^{\frac{\bar{q}}{q_i}} ds \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \leq \bar{R}_i, \quad (16)$$

де $1 \leq \bar{q} < \infty$, $1 \leq q_i < \infty$, $t \neq t_i$, \bar{R}_i — відомі числа, $i = \overline{1, N}$.

Нехай $X_i(t, t_{i-1})$ — матричний розв'язок задачі Коші (8), матриці $W_{ij}(t, t_j)$ мають вигляд (9). Тоді розв'язок системи (15) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}$, можна знайти за формулою

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t) = & W_{i1}(t, t_1)x_0^{(i)} + \int_{t_{i-1}}^t X_i(t_i, s)B_i(s)ds\alpha + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)B_j(s)ds\alpha + W_{ii+1}(t, t_{i+1}) \int_{t_{i-1}}^t X_i(t_i, s)f^{(i)}(s)ds + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)f^{(j)}(s)ds + \\ & + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1})D_j\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (17)$$

Щоб отримати числові оцінки областей практичної стійкості системи (15), (2), задамо множини початкових умов і параметрів у вигляді (11) і розглянемо динамічні обмеження (12).

Подамо розв'язок системи (15) за умов (2) у вигляді (17) і запишемо умову того, що траєкторії системи належать множині $\Omega_t^{(i)}$, $t \in \tau_i$ так:

$$z^{(i)}(t) \in \{z^{(i)}(t) : -1 + l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha) \leq l_{s_i}^{(i)T}(t)z^{(i)}(t) \leq 1 - l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha)\}, \quad (18)$$

де $s_i = 1, 2, \dots, N_i$, $z^{(i)}(t) = W_{i1}(t, t_1)x_0$,

$$\begin{aligned} a^{(i)}(t, \alpha) = & \int_{t_{i-1}}^t X_i(t_i, s)B_i(s)ds\alpha + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)B_j(s)ds\alpha + W_{ii+1}(t, t_{i+1}) \int_{t_{i-1}}^t X_i(t_i, s)f^{(i)}(s)ds + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s)f^{(j)}(s)ds + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1})D_j\alpha, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (19)$$

Зрозуміло, що співвідношення (18) досягаються, якщо виконуються умови

$$\begin{aligned} z^{(i)} \in \{z^{(i)} : z^{(i)T} Q_i(t) z^{(i)} \leq c^2\} \quad & \max_{s_i} l_{s_i}^{(i)T}(t) z^{(i)} \leq L_{1s_i}(t), \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ z^{(i)} \in \{z^{(i)} : z^{(i)T} Q_i(t) z^{(i)} \leq c^2\} \quad & \min_{s_i} l_{s_i}^{(i)T}(t) z^{(i)} \geq L_{2s_i}(t), \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

а вектори $L_{1s_i}(t)$, $L_{2s_i}(t)$ мають відповідно вигляд $L_{1s_i}(t) = 1 - l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha)$, $L_{2s_i}(t) = -1 - l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha)$.

Ураховуючи вираз (19), отримуємо критерій 2.

Критерій 2. Для того, щоб система (15), (2) була $\{c, H, c_\alpha, H_\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}\}$, — стійкою за наявності відомих збурень $f^{(i)}(t)$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} \min_{\alpha \in \{\alpha: \alpha^T H_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}} \frac{(1 - |l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha)|)^2}{l_{s_i}^{(i)T}(t)(Q_i(t))^{-1}l_{s_i}^{(i)}(t)},$$

$$|l_{s_i}^{(i)T}(t)a^{(i)}(t, \alpha)| < 1, \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тут $Q_i^{-1}(t) = W_{i1}(t, t_0)H^{-1}W_{i1}^T(t, t_0)$ виражається через матриці $W_{i1}(t, t_0)$, $t \in \tau_i$, які можна знайти зі співвідношення (9), поклавши $j = 1$.

Нехай при $t \in \tau_i$ постійно діючі збурення невідомі, але задовольняють умову (16), і нехай $Y_{s_i}^{(i)T}(t, t_{i+1}) = l_{s_i}^{(i)T}(t)$, $Y_{s_i}^{(i)T}(t, t_{i+1}) = l_{s_i}^{(i)T}(t)W_{ij+i}(t, t_{j+i})$, $j = 1, 2, \dots, i-1$, тоді

$$\gamma_{is_i}(t) = \max_{\|f^{(i)}(t)\| \leq \bar{R}_i, t \in \tau_i} \left| Y_{s_i}^{(i)T}(t, t_{i+1}) \int_{t_{i-1}}^t X_i(t, s) f^{(i)}(s) ds + \sum_{j=1}^{i-1} Y_{s_i}^{(i)T}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t, s) f^{(j)}(s) ds \right|, \quad i = \overline{1, N}.$$

Використовуючи співвідношення (16), для $\gamma_{is_i}(t)$ дістаємо таку нерівність:

$$\gamma_{is_i}(t) \leq \bar{R}_i \left(\int_{t_{i-1}}^t \left(\sum_{\sigma=1}^{n_i} \left| \sum_{\nu=1}^{n_i} x_{\sigma\nu}^i(t, \nu) y_{\nu s_i}^i(t, t_{i+1}) \right|^{p_i} \right)^{\frac{\bar{p}}{p_i}} d\nu \right)^{\frac{1}{\bar{p}}} + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{R}_j \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_{\sigma=1}^{n_j} \left| \sum_{\nu=1}^{n_j} x_{\sigma\nu}^j(t, \nu) y_{\nu s_i}^j(t, t_{j+1}) \right|^{p_j} \right)^{\frac{\bar{p}}{p_j}} d\nu \right)^{\frac{1}{\bar{p}}},$$

де $X_i(t, \nu) = \{x_{\sigma\nu}^i(t, \nu)\}_{n_i}^{n_i}$, $X_j(t, \nu) = \{x_{\sigma\nu}^j(t, \nu)\}_{n_j}^{n_j}$,

$$Y_{s_i}^{(i)T}(t, t_{i+1}) = (y_{1s_i}^i(t, t_{i+1}), \dots, y_{n_i s_i}^i(t, t_{i+1})) \quad t \in \tau_i,$$

$$\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1, \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} \bar{a}^{(i)}(t, \alpha) = & \int_{t_{i-1}}^t X_i(t, s) B_i(s) ds \alpha + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1}) D_j \alpha + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) B_j(s) ds \alpha. \end{aligned}$$

Якщо виконуються нерівності

$$\begin{aligned} z^{(i)}(t) \in \left\{ z^{(i)}(t) : \left| l_{s_i}^{(i)T}(t) z^{(i)}(t) \right| \leq 1 - \left| l_{s_i}^{(i)T}(t) \bar{a}^{(i)}(t, \alpha) + \gamma_{is_i}(t) \right| \right\}, \\ \left| l_{s_i}^{(i)T}(t) \bar{a}^{(i)}(t, \alpha) + \gamma_{is_i}(t) \right| < 1, \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

то $x^{(i)}(t, \alpha) \in \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}$.

Критерій 3. Для того, щоб система (15), (2) була $\{c, H, c_\alpha, H_\alpha, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}\}$ — стійкою за наявності невідомих, але обмежених збурень $f^{(i)}(t), t \in \tau_i, i = \overline{1, N}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{aligned} c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} \min_{\alpha \in \{\alpha: \alpha^T H_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}} \frac{(1 - |l_{s_i}^{(i)T}(t) \bar{a}^{(i)}(t, \alpha) + \gamma_{is_i}(t)|)^2}{l_{s_i}^{(i)T}(t) (Q_i(t))^{-1} l_{s_i}^{(i)}(t)}, \\ |l_{s_i}^{(i)T}(t) \bar{a}^{(i)}(t, \alpha) + \gamma_{is_i}(t)| < 1, \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ ЧУТЛИВОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Для системи (1) за умов (2) рівняння чутливості [6 – 9] мають вигляд

$$\frac{dU_i(t, \alpha)}{dt} = A_i(t) U_i(t, \alpha) + B_i(t), \quad \alpha \in G_\alpha, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}$$

за умов зміни вимірності фазового простору

$$U_i(t_{i-1}, \alpha) = C_i U_{i-1}(t_{i-1} - 0, \alpha) + D_i, \quad \alpha \in G_\alpha, \quad i = \overline{1, N-1},$$

де

$$U_1(t_0, \alpha) = U_{10} = \frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha} - (A_1(t_0) x^{(1)}(t_0, \alpha) + B_1(t_0) \alpha) \frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U_{i-1}(t_{i-1} - 0, \alpha) = & W_{i-11}(t_{i-1}, t_1) U_{10} + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} W_{i-1j+1}(t_{i-1}, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) B_j(s) ds + \sum_{j=1}^{i-1} W_{i-1j+1}(t_{i-1} - 0, t_{j+1}) D_j. \end{aligned}$$

Щоб отримати початкові умови (20), потрібно диференціювати за α таке інтегральне рівняння:

$$x^{(1)}(t, \alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^t (A_1(s)x^{(1)}(s, \alpha) + B_1(s)\alpha) ds + x_0^{(1)}(t_0, \alpha).$$

У результаті маємо [3, 7]

$$U_1(t, \alpha) = \frac{\partial x^{(1)}(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_{t_0(\alpha)}^t (A_1(s)U_1(s, \alpha) + B(s)) ds + \frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha} - (A_1(t_0)x^{(1)}(t_0, \alpha) + B_1(t_0)\alpha) \frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha}.$$

Поклавши в цій рівності $t = t_0(\alpha)$, знайдемо вираз для обчислення початкових умов матриці $U_{10}^T = U_1^T(t_0, \alpha) = (u_1^{(1)}(t_0, \alpha), u_1^{(2)}(t_0, \alpha), \dots, u_1^{(m)}(t_0, \alpha))$ розмірності $n_1 \times m$ функцій чутливості системи (1) за умов (2).

ОЦІНКИ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ЧУТЛИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай матриці функцій чутливості системи (1), (2) такі, що виконуються умови

$$U_i(t, \alpha) \in \Omega_i = \{U_i(t, \alpha) : \left| \sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) u_i^{(k)}(t, \alpha) \right| \leq 1, t \in \tau_i, s_i = \overline{1, N_i}\}, i = \overline{1, N}. \quad (21)$$

Тут $l_{s_i}^{(k)}(t)$ — відомі вектори розмірності n_i , $t \in \tau_i$; $u_i^{(k)}(t, \alpha)$ — вектори-стовпці матриці $U_i(t, \alpha)$, $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, N}$.

Щоб урахувати обмеження (21), уведемо до розгляду множину початкових умов для функцій чутливості

$$G_0^\alpha = \left\{ \alpha : \sum_{k=1}^m \left(\frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha_k} - (A_1(t_0)x^{(1)}(t_0, \alpha) + B_1(t_0)\alpha) \frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha_k} \right)^T H_{\alpha k} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{dx_0^{(1)}(\alpha)}{d\alpha_k} - (A_1(t_0)x^{(1)}(t_0, \alpha) + B_1(t_0)\alpha) \frac{dt_0^T(\alpha)}{d\alpha_k} \right) \leq c_\alpha^2 \right\},$$

де $H_{\alpha k}$ — додатно визначені квадратні матриці розмірності $m \times m$, $k = \overline{1, m}$.

Використовуючи алгоритми практичної стійкості, знайдемо оцінки значень параметра c_α , за яких виконуватимуться співвідношення (21), а саме:

$$c_\alpha^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} \frac{(1 - \left| \sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) a_i^{(k)}(t) \right|)^2}{\sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) (Q_k(t))^{-1} l_{s_i}^{(k)}(t)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) a_i^{(k)}(t) \right| < 1, \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N},$$

причому $Q_i^{-1}(t) = W_{i1}(t, t_0) H_{\alpha k}^{-1} W_{i1}^T(t, t_0)$, $W_{i1}(t, t_0)$ можна знайти за формулою (9), у яку потрібно підставити $j=1$, $a_i^{(k)}(t)$ — вектори, що визначаються за формулами

$$a_i^{(k)}(t) = \int_{t_{i-1}}^t X_i(t, s) b_i^{(k)}(s) ds + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) b_j^{(k)}(s) ds + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1}) d_j^{(k)};$$

$X_i(t, t_{i-1})$ — матричні розв'язки задачі (8); $b_i^{(k)}$ — k -й стовпець матриці B_i , а $b_j^{(k)}$ і $d_j^{(k)}$ — відповідно k -й стовпець матриці B_j і матриці D_j .

Критерій 4. Для того, щоб функції чутливості системи (1) зі зміною вимірності за співвідношенням (2) задовольняли (21), необхідно і достатньо параметри системи вибирати згідно з нерівностями:

$$c_{\alpha}^2 \leq \min_{i=1, 2, \dots, N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1, 2, \dots, N_i} \frac{(1 - \left| \sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) a_i^{(k)}(t) \right|)^2}{\sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) (Q_k(t))^{-1} l_{s_i}^{(k)}(t)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^m l_{s_i}^{(k)T}(t) a_i^{(k)}(t) \right| < 1, \quad t \in \tau_i, \quad s_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

АЛГОРИТМИ РОЗРАХУНКУ ДОПУСКІВ НА ПАРАМЕТРИ В ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Розглянемо систему (1) за умов (2). Нехай розв'язок цієї системи задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ для всіх $\alpha \in G_0^{\alpha}$. Тоді для векторів $y^{(i)} = x^{(i)} - \bar{x}^{(i)}$, $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$, де $\bar{x}^{(i)}$ — розрахункові значення векторів фазового стану розглядуваної системи при $\alpha = \bar{\alpha}$, $i = \overline{1, N}$, отримаємо

$$\frac{dy^{(i)}(t, \beta)}{dt} = A_i(t) y^{(i)}(t, \beta) + B_i(t) \beta, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (22)$$

за нульових початкових умов, тобто при $t = t_0$, $y^{(1)}(t_0, \beta) = 0$.

Умови (2) набудуть вигляду

$$y^{(i)}(t_{i-1}, \beta) = C_i y^{(i-1)}(t_{i-1} - 0, \beta) + D_i \beta, \quad \beta \in G_{\beta}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (23)$$

Якщо $G_0^\beta = \{\beta : \beta^T H \beta \leq c^2\}$, H — додатно визначена матриця, а $\Omega_i^{(i)}$ має вигляд $\Omega_i^{(i)} = \{y^{(i)} : |l_{s_i}^{(i)T}(t)y^{(i)}(t, \beta)| \leq 1, s_i = 1, 2, \dots, N_i\}$, $t \in \tau_i$, для всіх $i = \overline{1, N}$, то можна на основі дослідження практичної стійкості оцінити множину допустимих параметрів G_0^β для всіх значень β , для яких $y^{(i)}(t, \beta) \in \Omega_i^{(i)}$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$.

Розв'язок (22) за умов (23) і того, що $y^{(1)}(t_0) = 0$, матиме вигляд

$$y^{(i)}(t, \beta) = \int_{t_{i-1}}^t X_i(t, s) B_i(s) ds \beta + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) B_j(s) ds \beta + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1}) D_j \beta, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (24)$$

Із рівняння (24) випливає, що $y^{(i)}(t, \beta) = Y_i(t, t_{i-1}) \beta$, якщо $y^{(1)}(t_0) = 0$, а $Y_i(t, t_{i-1})$ — матриця функцій чутливості системи (22), (23) і має вигляд

$$Y_i(t, t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^t X_i(t, s) B_i(s) ds + \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) B_j(s) ds + \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1}) D_j, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (25)$$

Легко переконатися, що матриця $Y_i(t, t_{i-1})$ у цьому випадку є розв'язком такої задачі:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i(t, t_{i-1})}{dt} &= A_i(t) Y_i(t, t_{i-1}) + B_i(t), \\ Y_i(t_{i-1}, t_{i-1}) &= \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij+1}(t, t_{j+1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} X_j(t_j, s) B_j(s) ds \beta + \\ &+ \sum_{j=1}^i W_{ij+1}(t, t_{j+1}) D_j, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Тому за наявності лінійних обмежень

$$\Omega_i^{(i)} = \{y^{(i)} : |l_{s_i}^{(i)T}(t)y^{(i)}(t, \beta)| \leq 1, s_i = 1, 2, \dots, N_i\}, \quad t \in \tau_i, \quad i = \overline{1, N}$$

стала c , що фігурує в оцінці множини $G_0^\beta = \{\beta : \beta^T H \beta \leq c^2\}$, повинна підпорядковуватися умові $|l_{s_i}^{(i)T}(t)Y(t, t_{i-1})\beta| \leq 1, s_i = 1, 2, \dots, N_i, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}$. Розв'язуючи відповідну оптимізаційну задачу, отримуємо такий критерій.

Критерій 5. Для $\{c, H, \Omega_i^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}\}$ — оцінки параметрів β системи (22), (23) необхідно і достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} (l_{s_i}^{(i)T}(t) Y(t, t_{i-1}) H^{-1} Y^T(t, t_{i-1}) l_{s_i}^{(i)}(t))^{-1}.$$

Припустімо тепер, що початкові умови у системі (1), (2) залежать від вектора параметрів $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}(\alpha)$, $t = t_0$. Для отримання конструктивних алгоритмів візьмемо конкретний тип початкових умов [10 – 16], наприклад, $x_0^{(1)}(\alpha) = X_0 \alpha$, де X_0 — відома матриця розмірності $n_1 \times m$. Тоді вектори розкидів $y^{(i)}(t, \beta)$ і β задовольнятимуть систему (22) за ненульових початкових умов $y^{(1)}(t_0) = X_0 \beta$. При цьому матриця чутливості збігається з матрицею $Y_i(t, t_{i-1})$. Якщо позначити $\tilde{W}_{i1}(t, t_1) = W_{i1}(t, t_1) X_0$, то дістанемо критерій оцінки для лінійних початкових умов.

Критерій 6. Для $\{c, H, \Omega_t^{(i)}, t \in \tau_i, i = \overline{1, N}\}$ — оцінки параметрів β системи (22), (23) необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in (t_{i-1}, t_i)} \min_{s_i=1,2,\dots,N_i} (l_{s_i}^{(i)T}(t) ((\tilde{W}_{i1}(t, t_1) + Y(t, t_{i-1}) H^{-1} \tilde{W}_{i1}(t, t_1) + Y(t, t_{i-1}))^T l_{s_i}^{(i)}(t))^{-1},$$

де $Y_i(t, t_{i-1})$ — матриця чутливості розмірності $n_i \times m$, $t \in \tau_i$, $i = \overline{1, N}$ і має вигляд (25).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто моделі лінійних параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Для такого типу систем доведено теореми про практичну стійкість. Розроблено алгоритми аналізу практичної стійкості для цих систем. Отримано критерії практичної стійкості динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору.

Побудовано матричні рівняння чутливості, на основі яких знайдено оцінки аналізу чутливості параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору. На основі критеріїв розроблено алгоритми розрахунку допусків на параметри лінійних систем зі змінною вимірністю фазового простору.

Запропоновані алгоритми ґрунтуються на побудові систем диференціальних рівнянь і зводяться до розв'язання матричної задачі Коші, розв'язок якої можна знайти за допомогою числових методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур / Ф.О. Сопронюк. — Чернівці: Рута, 1995. — 155 с.
2. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения / Н.Ф. Кириченко. — К.: Вища шк., 1978. — 184 с.

3. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
4. Гаращенко Ф.Г. Аналіз та оцінка параметричних систем / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталієнко. — К.: ІДДО, 1995. — 140 с.
5. Гаращенко Ф.Г. Прикладні задачі теорії стійкості / Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2014. — 125 с.
6. Гаращенко Ф.Г. Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 69–77.
7. Гаращенко Ф.Г. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем: навч. посіб. / Ф.Г. Гаращенко, О.Ф. Швець. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. — 115 с.
8. Гаращенко Ф.Г. Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталиенко // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 1, 2. — С. 145–161.
9. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
10. Гаращенко Ф.Г. Исследование задач теории чувствительности методами практической устойчивости / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталієнко // Изв. АН СССР. — Техническая кибернетика. — 1989. — Вып. 6. — С. 17–25.
11. Швець О.Ф. Моделі для аналізу чутливості розривних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору / Щ.Ф. Швець, О.Л. Сопронюк // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2009. — № 1. — С. 158–162.
12. Сопронюк О.Л. Про матричні моделі для числового аналізу параметричної чутливості систем зі зміною вимірності фазового простору / О.Ф. Швець, О.Л. Сопронюк // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2010. — № 1. — С. 132–136.
13. Гаращенко Ф.Г. Исследование задач расчета допусков на параметры с помощью методов практической устойчивости / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталиенко // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 4. — С. 43–55.
14. Сопронюк О.Л. Оптимальне оцінювання допусків на параметри у динамічних системах зі зміною вимірності фазового простору / О.Л. Сопронюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. — Чернівці: ЧНУ, 2013. — Т. 3, вип. 1. — С. 42–48.
15. Сопронюк О.Л. Оцінювання допусків на параметри у дискретних динамічних системах зі зміною вимірності фазового простору / О.Л. Сопронюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. — 2014. — Т. 5, вип. 1. — С. 81–86.
16. Сопронюк О.Л. Про розрахунок допусків на параметри лінійних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору / О.Ф. Швець // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2015. — № 1. — С. 181–188.

Надійшла 12.05.2016

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Н.В. АНДРЕЕВ, В.М. СТАТКЕВИЧ

Аннотация. Для неоднородных марковских процессов рождения и гибели в случае постоянного отношения c интенсивностей гибели и рождения решены три задачи управления выбором параметра c . Для задачи минимизации вероятности выхода процесса при $t \rightarrow +\infty$ из полосы при помощи метода золотого сечения найдены точки минимума в случае их наличия, зависящие от конкретных значений порога и интегральной интенсивности рождения. Для задачи управления выбором параметра c с учётом стабилизирующей функции найдено точку минимума и доказано условие её существования; рассмотрены важные частные случаи. К этой задаче примыкает задача идентификации параметров для стабилизирующей функции экспоненциального роста. Для задачи минимизации математического ожидания момента вырождения при малой вероятности превышения порога найдены условия сходимости математического ожидания, упрощены условия вероятности превышения порога, а сама задача решена в случае постоянной интенсивности рождения.

Ключевые слова: задача управления, задача стабилизации, неоднородный марковский процесс рождения и гибели, интенсивность рождения, интенсивность гибели, момент вырождения.

ВВЕДЕНИЕ

Ветвящиеся процессы являются математической моделью многих физических, биологических и социальных явлений, например, ливней космических лучей, электронно-фотонных каскадов, ядерных реакций, эволюции биологических популяций, распространения эпидемий и т.д. [1–10]. В работе рассматривается один из классов ветвящихся процессов, а именно неоднородные марковские процессы рождения и гибели (являющиеся частным случаем процессов рождения, иммиграции и гибели). Они встречаются, например, в теории массового обслуживания, в теории надёжности и т.д. Различным аспектам проблем управления такими процессами посвящены работы [11–16].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для неоднородного процесса рождения и гибели в случае постоянного отношения c интенсивностей гибели и рождения рассмотрим следующие задачи управления выбором параметра c :

- 1) задачу минимизации вероятности выхода процесса при $t \rightarrow \infty$ из полосы;
- 2) задачу управления с учётом стабилизирующей функции;
- 3) задачу минимизации математического ожидания момента вырождения процесса при малой вероятности превышения порога.

Эти задачи сформулированы в работе [6]. Указанное постоянное отношение c интенсивностей гибели и рождения возникает, например, при анализе процесса нуклеации ковкого чугуна [4, 5]. Подробнее про механизм и кинетику нуклеации из жидкой фазы изложено, например, в работе [17].

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$ — неоднородный во времени процесс рождения и гибели. Это марковский процесс с состояниями $\{0, 1, 2, \dots\}$, для которого из состояния $\xi(t) = n > 0$ возможны лишь переходы в состояния $n - 1$ и $n + 1$, причём

$$P\{\xi(t + \Delta t) = n + 1 / \xi(t) = n\} = n\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\xi(t + \Delta t) = n - 1 / \xi(t) = n\} = n\mu(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\xi(t + \Delta t) = n / \xi(t) = n\} = 1 - n(\lambda(t) + \mu(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Здесь $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ — положительные непрерывные на $(0; +\infty)$ функции, называемые интенсивностями рождения и гибели соответственно. В начальный момент времени $\xi(0) = 1$, а возможность самозарождения исключается (переход из состояния 0 в состояние 1 невозможен). Обозначим: $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$

— интегральная интенсивность рождения, $\Lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\tau) d\tau$, $P_n(t) = P\{\xi(t) = n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Из второй системы дифференциальных уравнений Колмогорова следует [1, 7]

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = (n + 1)\mu(t)P_{n+1}(t) - n(\lambda(t) + \mu(t))P_n(t) + (n - 1)\lambda(t)P_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = \mu(t)P_1(t).$$

После доопределения $P_n(t) = 0$ для $n < 0$ и введения производящей функции $\varphi(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t)z^n$ эти уравнения эквивалентны задаче Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (z - 1)(\lambda(t)z - \mu(t))\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\varphi(z, 0) = z$ [1]. Действительно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t)z^n \right) = \mu(t)P_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n + 1)\mu(t)P_{n+1}(t)z^n - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n(\lambda(t) + \mu(t))P_n(t)z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n - 1)\lambda(t)P_{n-1}(t)z^n = \\ &= \mu(t)P_1(t) + \mu(t)\frac{\partial}{\partial z} (\varphi(z, t) - P_0(t) - P_1(t)z) - (\lambda(t) + \mu(t)) \times \\ &\quad \times z \frac{\partial}{\partial z} (\varphi(z, t) - P_0(t)) + \lambda(t)z^2 \frac{\partial}{\partial z} (\varphi(z, t) - P_0(t)) = (z - 1)(\lambda(t)z - \mu(t))\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

В работах [1] и [6] получены явные формулы для $P_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а также доказано, что $\varphi(z, t) = 1 + \frac{1}{\frac{e^{\rho(t)}}{z-1} - \int_0^t \lambda(u)e^{\rho(u)} du}$, где $\rho(t) = \int_0^t (\mu(u) - \lambda(u)) du$.

Рассматривается следующий случай: отношение $\frac{\mu(t)}{\lambda(t)} = c > 0$ постоянное для всех $t > 0$. В работах [4, 6] получены формулы:

$$P_0(t) = (1 + \Lambda^{-1}(t))^{-1}, \quad (c = 1), \quad P_0(t) = \frac{c(1 - e^{\rho(t)})}{1 - ce^{\rho(t)}}, \quad (c \neq 1), \quad (1)$$

$$P_n(t) = \frac{e^{\rho(t)}}{c^{n-1}} P_0^{n-1}(t) (1 - P_0(t))^2, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \rho(t) = (c - 1)\Lambda(t). \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $P_0(t) < c$, а функция $P_n(t)$ при фиксированном t непрерывна по c . Первый момент распределения случайной величины $\xi(t)$ [4, 6]

$$\alpha_1(t) = M\xi(t) = e^{-\rho(t)}. \quad (3)$$

Для момента ξ вырождения процесса $\xi(t)$, т.е. момента исчезновения всех частиц, справедливо равенство [6]

$$M\xi = \int_0^{+\infty} t dP_0(t) = \int_0^{+\infty} t \frac{d}{dt} P_0(t) dt. \quad (4)$$

Цель работы — решение задач 1–3.

1. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДА ПРОЦЕССА $\xi(t)$ ПРИ $t \rightarrow +\infty$ ИЗ ПОЛОСЫ

Пусть задано натуральное число N . Рассмотрим задачу управления: минимизировать вероятность выхода процесса при $t \rightarrow +\infty$ из полосы $[1; N - 1]$, управляя параметром c , т.е.

$$P(c) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P\{\xi(t) = 0\} + \lim_{t \rightarrow +\infty} P\{\xi(t) \geq N\} \rightarrow \min_c. \quad (5)$$

Вероятность превысить порог $N - 1$ согласно соотношениям (2) равна

$$P\{\xi(t) \geq N\} = \sum_{k=N}^{+\infty} P\{\xi(t) = k\} = e^{\rho(t)} (1 - P_0(t))^2 \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\frac{P_0(t)}{c} \right)^{N-1}.$$

Вычислив с учётом формулы (2) сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, получим

$$P\{\xi(t) \geq N\} = \frac{\Lambda^{N-1}(t)}{(1 + \Lambda(t))^N}, \quad (c = 1);$$

$$P\{\xi(t) \geq N\} = \frac{(1-c)(1 - e^{\rho(t)})^{N-1}}{(1 - ce^{\rho(t)})^N}, \quad (c \neq 1). \quad (6)$$

Подставив в первое слагаемое критерия (5) формулы (1), а во второе — формулы (6) и перейдя к пределу $t \rightarrow +\infty$, находим эргодическое состояние процесса: при $\Lambda < +\infty$

$$P(c) = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} + \frac{\Lambda^{N-1}}{(1 + \Lambda)^N}, \quad (c = 1),$$

$$P(c) = \frac{c(1 - e^{(c-1)\Lambda})}{1 - ce^{(c-1)\Lambda}} + \frac{(1-c)(1 - e^{(c-1)\Lambda})^{N-1}}{(1 - ce^{(c-1)\Lambda})^N} = P_1(c) + P_2(c), \quad (c \neq 1),$$

а при $\Lambda = +\infty$ $P(c) \equiv 1$. Заметим, что функция $P(c)$ непрерывна на $(0; +\infty)$.

Утверждение 1. $P_1(c)$ — возрастающая функция на $(0; +\infty)$.

Доказательство. Производная данной функции имеет вид $P_1'(c) = \frac{1 + e^{(c-1)\Lambda}(c(c-1)\Lambda - 1)}{(1 - ce^{(c-1)\Lambda})^2}$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(\Lambda) = 1 + e^{(c-1)\Lambda}(c(c-1)\Lambda - 1)$. Её производная $g'(\Lambda) = (c-1)^2 e^{(c-1)\Lambda}(c\Lambda + 1) > 0$, поэтому $g(\Lambda) > g(0) = 0$, что доказывает утверждение.

Утверждение 2. $P_2(c)$ — убывающая функция на $(0; +\infty)$.

Доказательство. Вводим вспомогательную функцию $g(c, \tau) = \frac{(1-c)(1-\tau)^{N-1}}{(1-c\tau)^N}$. Тогда, используя равенство $P_2'(c) = \frac{d}{dc} g(c, e^{(c-1)\Lambda})$ и полагая $\tau = e^{(c-1)\Lambda}$, после упрощений получаем

$$P_2'(c) = \frac{(1-\tau)^{N-2}}{(1-c\tau)^N} (-1 + \tau + (1-c)\Lambda\tau) + \frac{\tau N(1-c)(1-\tau)^{N-2}}{(1-c\tau)^{N+1}} (1-\tau - (1-c)\Lambda). \quad (7)$$

Выполняются неравенства $e^{(c-1)\Lambda}(1 - (c-1)\Lambda) - 1 < 0$ и $1 - e^{(c-1)\Lambda} + (c-1)\Lambda < 0$. Действительно, для доказательства первого из них вводим вспомогательную функцию $g_1(y) = e^y(1-y)$, имеющую глобальный максимум в точке $y = 0$, откуда $g_1(y) < g_1(0) = 1$ при $y \neq 0$. Второе неравенство следует из неравенства $e^y > y + 1$ ($y \neq 0$). Поэтому $P_2'(c)$, задаваемая формулой (7), отрицательна, что доказывает утверждение.

Функция $P(c)$ при $\Lambda < +\infty$ может либо иметь единственную точку минимума $c_* > 0$, либо иметь $\inf_{(0; +\infty)} P(c) = \lim_{c \rightarrow 0} P(c) = (1 - e^{-\Lambda})^{N-1}$ в зависимости

от соотношения N и Λ . Для функций на рис. 1 численный подсчёт (например, методом золотого сечения) даёт $\inf_{(0;+\infty)} P(c) = (1 - e^{-3})^{199}$ при $\Lambda = 3$ и точки минимума $c_* \approx 0,117263$, $c_* \approx 0,420581$ и $c_* \approx 0,632043$ при $\Lambda = 5$, $\Lambda = 7$ и $\Lambda = 10$ соответственно.

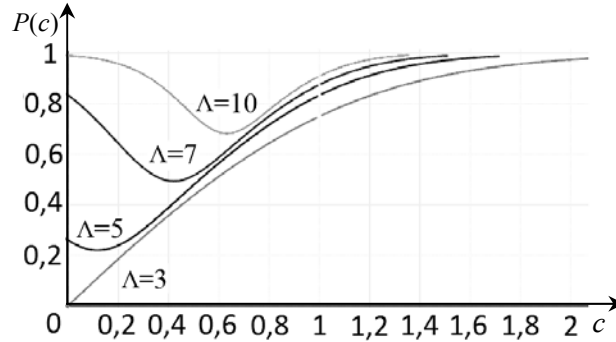


Рис. 1. Графики функций $P(c)$ при $N = 200$

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА c С УЧЁТОМ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Пусть задано число $T > 0$ и некоторая функция $f(t) \in L_2([0;T])$. Напомним, что в пространстве $L_2([0;T])$ скалярное произведение и норма задаются

формулами $(f_1, f_2) = \int_0^T f_1(t)f_2(t)dt$ и $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_0^T f^2(t)dt}$ соответ-

ственно. Рассмотрим задачу управления: минимизировать отклонение в норме пространства $L_2([0;T])$ первого момента $\alpha_1(t)$ (см. формулу (3)) от заданной функции $f(t)$, управляя параметром c . Соответствующий критерий

$J(c) = \int_0^T (f(t) - e^{-\rho(t)})^2 dt \rightarrow \min_c$ (ср. [6]) зависит от c экспоненциально. Из-

меним постановку задачи управления: минимизировать отклонение $\ln f(t)$

от $\ln \alpha_1(t)$, соответствующий критерий $J(c) = \int_0^T (\ln f(t) + \rho(t))^2 dt + \gamma c^2 \rightarrow$

$\rightarrow \min_c$, где $\gamma > 0$ — заданное число, квадратичен относительно c .

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\int_0^T \Lambda(t) \ln f(t) dt < \int_0^T \Lambda^2(t) dt \quad (8)$$

(эквивалентные записи $(\Lambda - \ln f, \Lambda) > 0$ и $(\Lambda, \ln f) < \|\Lambda\|^2$), то $J(c)$ имеет единственную точку минимума

$$c_* = \frac{\int_0^T (\Lambda(t) - \ln f(t))\Lambda(t)dt}{\int_0^T \Lambda^2(t)dt + \gamma} = \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}, \quad J(c_*) = \|\ln f - \Lambda\|^2 - \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}.$$

В противном случае $\inf_{(0;+\infty)} J(c) = \lim_{c \rightarrow 0} J(c) = \|\ln f - \Lambda\|^2$.

Доказательство. Рассмотрим

$$J'(c) = 2c \left(\int_0^T \Lambda^2(t)dt + \gamma \right) - 2 \int_0^T (\Lambda(t) - \ln f(t))\Lambda(t)dt.$$

При выполнении условия (8) критическая точка $c_* > 0$, $J' < 0$ на $(0; c_*)$, $J' > 0$ на $(c_*; +\infty)$. Поэтому c_* является точкой глобального минимума на $(0; +\infty)$, а

$$\begin{aligned} J(c_*) &= \int_0^T ((\ln f(t) - \Lambda(t)) + c_*\Lambda(t))^2 dt + \gamma c_*^2 = \int_0^T (\ln f(t) - \Lambda(t))^2 dt + \\ &+ 2 \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)}{\|\Lambda\|^2 + \gamma} \int_0^T (\ln f(t) - \Lambda(t))\Lambda(t)dt + \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{(\|\Lambda\|^2 + \gamma)^2} \int_0^T \Lambda^2(t)dt + \\ &+ \gamma \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{(\|\Lambda\|^2 + \gamma)^2} = \|\ln f - \Lambda\|^2 - \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}. \end{aligned}$$

При равенстве в условии (8) критической точкой является точка 0, $J' > 0$ на $(0; +\infty)$. При знаке «>» в условии (8) критическая точка отрицательна. Поэтому при невыполнении условия (8) $\inf_{(0;+\infty)} J(c) =$

$$= \lim_{c \rightarrow 0} J(c) = \|\ln f - \Lambda\|^2.$$

Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условия (8) $J(c_*) < \|\ln f - \Lambda\|^2$, а вследствие неравенства Коши–Буняковского

$$J(c_*) = \frac{\|\ln f - \Lambda\|^2 \gamma + \|\ln f - \Lambda\|^2 \cdot \|\Lambda\|^2 - (\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{\|\Lambda\|^2 + \gamma} \geq \frac{\|\ln f - \Lambda\|^2 \gamma}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}.$$

Частный случай 1. Рассмотрим $\lambda(t) \equiv \lambda_0 > 0$. Этот случай предложен В. Феллером, рассмотрен в качестве частного случая в [1] и других работах.

Тогда $\Lambda(t) = \lambda_0 t$, условие (8) принимает вид $\int_0^T t \ln f(t)dt < \frac{\lambda_0 T^3}{3}$. При вы-

полнении этого условия $c_* = \frac{\lambda_0^2 T^3 - 3\lambda_0 \int_0^T t \ln f(t)dt}{\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma}$ (интенсивность гибели

$\mu(t) \equiv \lambda_0 c > 0$), в противном случае $\inf_{(0; +\infty)} J(c) = \|\ln f - \Lambda\|^2$ (интенсивность гибели почти нулевая).

Рассмотрим частный случай $f(t) \equiv a > 0$. Условие (8) принимает вид $a < e^{2\lambda_0 T/3}$, при выполнении этого условия

$$c_* = \frac{2\lambda_0^2 T^3 - 3\lambda_0 T^2 \ln a}{2\lambda_0^2 T^3 + 6\gamma}, \quad J(c_*) = \frac{\lambda_0^2 T^4 \ln^2 a + 4\gamma(\lambda_0^2 T^3 - 3\lambda_0 T^2 \ln a + 3T \ln^2 a)}{4(\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma)}.$$

Рассмотрим частный случай $f(t) = e^{at}$. Такая функция выбрана потому, что это элементарная функция, а при $a < 0$ выполняются $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$,

$\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$. Также можно провести параллель с плотностью экспоненциального распределения случайной величины η с параметром $\lambda > 0$: $f_\eta(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ при $t \geq 0$, $f_\eta(t) = 0$ при $t < 0$. Условие (8) принимает вид

$$a < \lambda_0, \text{ и если оно выполнено, то } c_* = \frac{\lambda_0 T^3 (\lambda_0 - a)}{\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma}, \quad J(c_*) = \frac{(\lambda_0 - a)^2 T^3 \gamma}{\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma}.$$

Заметим, что при выборе a , близких к λ_0 , расхождение между $\ln f(t)$ и $\ln \alpha_1(t)$ малó.

Частный случай 2. Рассмотрим $\lambda(t) = e^{bt}$. Тогда $\Lambda(t) = \frac{1}{b}(e^{bt} - 1)$. Если $b < 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = 0$, а $\Lambda = -\frac{1}{b}$. Условие (8) после упрощения принимает вид

$$\frac{1}{b} \int_0^T (e^{bt} - 1) \ln f(t) dt < \frac{1}{2b^3} e^{2bT} - \frac{2}{b^3} e^{bT} + \frac{3}{2b^3} + \frac{T}{b^2},$$

и если оно выполнено, выполняется равенство

$$c_* = \frac{e^{2bT} - 4e^{bT} + 3 + 2bT - 2b^2 \int_0^T (e^{bt} - 1) \ln f(t) dt}{e^{2bT} - 4e^{bT} + 3 + 2bT + 2b^3 \gamma}.$$

Частный случай 3. Рассмотрим $\lambda(t) = \lambda_0 t + \beta_0$ — процесс линейного роста с иммиграцией [2]. Тогда $\Lambda(t) = \frac{\lambda_0}{2} t^2 + \beta_0 t$, условие (8) после упрощения принимает вид

$$\int_0^T \left(\frac{\lambda_0}{2} t^2 + \beta_0 t \right) \ln f(t) dt < \frac{\lambda_0^2 T^5}{20} + \frac{\lambda_0 \beta_0 T^4}{4} + \frac{\beta_0^2 T^3}{3},$$

и если оно выполнено, выполняется равенство

$$c_* = \frac{3\lambda_0^2 T^5 + 15\lambda_0 \beta_0 T^4 + 20\beta_0^2 T^3 - 30 \int_0^T (\lambda_0 t^2 + 2\beta_0 t) \ln f(t) dt}{3\lambda_0^2 T^5 + 15\lambda_0 \beta_0 T^4 + 20\beta_0^2 T^3 + 60\gamma}.$$

Частный случай 4. В некоторых случаях полезно полагать, что интенсивность рождения допускает всплеск, ограниченный во времени. Простейшая функция такого типа с носителем $[0; a]$ — сплайн степени 1 и дефекта 1, «шапочка» (рис. 2):

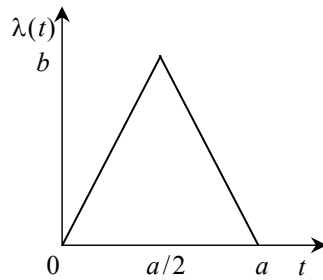


Рис. 2. Функция $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{2b}{a}t, \quad 0 \leq t \leq \frac{a}{2};$$

$$\lambda(t) = -\frac{2b}{a}t + 2b, \quad \frac{a}{2} < t \leq a;$$

$$\lambda(t) = 0, \quad t > a.$$

(здесь полагаем $a > 0, b > 0$). Тогда функция

$$\Lambda(t) = \frac{b}{a}t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{a}{2}; \quad \Lambda(t) = -\frac{b}{a}t^2 + 2bt - \frac{ab}{2}, \quad \frac{a}{2} < t \leq a; \quad \Lambda(t) = \frac{ab}{2}, \quad t > a$$

реализует переход гладкости C^1 с уровня 0 на уровень $\frac{ab}{2}$. Для выполнения условия $\lambda(t) > 0$ полагаем $\frac{a}{2} \leq T < a$. Условие (8) после упрощения принимает вид

$$\frac{b}{a} \int_0^{a/2} t^2 \ln f(t) dt + \int_{a/2}^T \left(-\frac{b}{a}t^2 + 2bt - \frac{ab}{2} \right) \ln f(t) dt <$$

$$< b^2 \left(\frac{T^5}{5a^2} - \frac{T^4}{a} + \frac{5T^3}{3} - aT^2 + \frac{a^2T}{4} - \frac{a^3}{48} \right),$$

а при $T \rightarrow a - 0$ правая часть стремится к $\frac{23a^3b^2}{240}$. При выполнении этого условия имеем

$$c_* = \frac{b^2(48T^5 - 240aT^4 + 400a^2T^3 - 240a^3T^2 + 60a^4T - 5a^5) -}{b^2(48T^5 - 240aT^4 + 400a^2T^3 - 240a^3T^2 + 60a^4T - 5a^5) + 240a^2\gamma}$$

$$\frac{-240ab \int_0^{a/2} t^2 \ln f(t) dt + 120ab \int_{a/2}^T (2t^2 - 4at + a^2) \ln f(t) dt}{},$$

а при $T \rightarrow a - 0$

$$c_* \rightarrow \frac{23a^4b^2 - 240b \int_0^{a/2} t^2 \ln f(t) dt + 120b \int_{a/2}^a (2t^2 - 4at + a^2b) \ln f(t) dt}{23a^4b^2 + 240a\gamma}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ: ЗАДАЧА ИДЕНТИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

Теперь рассмотрим задачу идентификации параметров. Считая, что $f(t)$ является функцией экспоненциального роста, т.е. $f(t) = e^{at+b}$, где $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, находим параметры a и b для указанной функции $f(t)$ при заданном c , минимизируя отклонение $\ln f(t)$ от $\ln \alpha_1(t)$ (см. формулу (3)).

Соответствующий критерий $J(a, b) = \int_0^T (at + b + (c-1)\Lambda(t))^2 dt \rightarrow \min_{(a,b)}$.

Приравнивая частные производные к нулю

$$J'_a(a, b) = \int_0^T 2(at + b + (c-1)\Lambda(t))t dt = 0, \quad J'_b(a, b) = \int_0^T 2(at + b + (c-1)\Lambda(t)) dt = 0,$$

составляем систему линейных уравнений для поиска критической точки:

$$\frac{2T^3}{3}a + T^2b = -2(c-1) \int_0^T t\Lambda(t) dt, \quad T^2a + 2Tb = -2(c-1) \int_0^T \Lambda(t) dt.$$

Определитель данной системы $\frac{T^4}{3} > 0$, поэтому согласно формулам Крамера

$$\begin{aligned} a &= \frac{3(1-c)}{T^3} \left(4 \int_0^T t\Lambda(t) dt - 2T \int_0^T \Lambda(t) dt \right), \\ b &= \frac{3(1-c)}{T^2} \left(\frac{4T}{3} \int_0^T \Lambda(t) dt - 2 \int_0^T t\Lambda(t) dt \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что матрица вторых производных J'' согласно критерию Сильвестра положительно определена, поэтому критическая точка (9) является точкой локального минимума, а в силу единственности – и глобально. Вычислим невязку между $\ln f(t)$ и $\ln \alpha_1(t)$. Подстановка искомых параметров (9) в критерий $J(a, b)$ после упрощений даёт

$$J(a, b) = (c - 1)^2 \left(\|\Lambda\|^2 - \frac{4}{T} \left(\int_0^T \Lambda(t) dt \right)^2 + \frac{12}{T^2} \int_0^T \Lambda(t) dt \int_0^T t \Lambda(t) dt - \frac{12}{T^3} \left(\int_0^T t \Lambda(t) dt \right)^2 \right). \quad (10)$$

В случае малой невязки можно использовать функции экспоненциального роста.

Частный случай 1. Рассмотрим $\lambda(t) \equiv \lambda_0$. Тогда после соответствующих вычислений получаем $a = \lambda_0(1 - c)$, $b = 0$ и $J(a, b) = 0$. Это полностью согласуется с теми «эмпирическими соображениями», что при выборе $f(t) = e^{\lambda_0(1-c)t}$ расхождения между $\ln f(t)$ и $\ln \alpha_1(t)$ нет. Этим, в частности, можно объяснить выбор функций экспоненциального роста, поскольку они подходят для данного частного случая.

Частный случай 2. Рассмотрим $\lambda(t) = \lambda_0 t + \beta_0$ — процесс линейного роста с иммиграцией. Тогда после соответствующих вычислений получаем $a = \frac{(1-c)\lambda_0 T}{2} + (1-c)\beta_0$, $b = -\frac{(1-c)\lambda_0 T^2}{12}$, $J(a, b) = \frac{1}{720}(c-1)^2 \lambda_0^2 T^5$. Это показывает, что лишь при малых $J(a, b)$, т.е. при малых λ_0 или близких к единице c следует пользоваться функциями экспоненциального роста.

Частный случай 3. Рассмотрим $\lambda(t) = \lambda_0 + \tilde{\lambda}(t)$, где $\tilde{\lambda}(t)$ — достаточно малая величина в следующем смысле: $\|\tilde{\Lambda}(t)\| = \left\| \int_0^t \tilde{\lambda}(\tau) d\tau \right\| \leq \varepsilon$. Вследствие неравенства Коши–Буняковского

$$\int_0^T \tilde{\Lambda}(t) dt = (1(t), \tilde{\Lambda}) \leq \|1(\cdot)\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \leq \sqrt{T} \varepsilon, \quad \int_0^T t \tilde{\Lambda}(t) dt = (t, \tilde{\Lambda}) \leq \|t\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \leq T \sqrt{\frac{T}{3}} \varepsilon$$

(здесь $1(t)$ – единичная функция на $[0; T]$), поэтому из формулы (10) получаем

$$J(a, b) = (c - 1)^2 \left(\|\tilde{\Lambda}\|^2 - \frac{4}{T} \left(\int_0^T \tilde{\Lambda}(t) dt \right)^2 + \frac{12}{T^2} \int_0^T \tilde{\Lambda}(t) dt \int_0^T t \tilde{\Lambda}(t) dt - \frac{12}{T^3} \left(\int_0^T t \tilde{\Lambda}(t) dt \right)^2 \right),$$

$$J(a, b) \leq (c - 1)^2 (9 + 4\sqrt{3}) \varepsilon^2.$$

3. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ МОМЕНТА ВЫРОЖДЕНИЯ ξ ПРИ МАЛОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ ПОРОГА

Пусть задано натуральное число N и малое число $\alpha > 0$. Рассмотрим задачу управления: минимизировать математическое ожидание момента ξ вы-

рождения процесса $\xi(t)$ при условии, что для каждого $t > 0$ вероятность превышения порога $N - 1$ не превышает α , т.е.

$$M\xi \rightarrow \min_c, \quad \forall t > 0 \quad P\{\xi(t) \geq N\} \leq \alpha. \quad (11)$$

Здесь $M\xi$ задаётся равенством (4). Из формул (1), (2) следует

$$M\xi = \int_0^{+\infty} \frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2} dt, \quad (c=1);$$

$$M\xi = (c-1)^2 c \int_0^{+\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2} dt, \quad (c \neq 1); \quad (12)$$

$$\forall t > 0 \quad \frac{\Lambda^{N-1}(t)}{(\Lambda(t)+1)^N} \leq \alpha, \quad (c=1);$$

$$\forall t > 0 \quad \frac{(1-c)(1-e^{(c-1)\Lambda(t)})^{N-1}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^N} \leq \alpha, \quad (c \neq 1). \quad (13)$$

В данной работе найдены условия сходимости интеграла $M\xi$ (12), упрощены условия (13), а задача (11) решена в частном случае $\lambda(t) \equiv \lambda_0 > 0$.

Теорема 2. Пусть $\lambda(t) = O(t^\gamma)$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда интеграл $M\xi$

а) сходится на множестве $\{(\gamma, c) \mid (\gamma < -2) \vee ((\gamma > -1) \wedge \neg((-1 < \gamma \leq 0) \wedge (c=1)))\}$;

б) расходится на множестве $\{(\gamma, c) \mid (-2 \leq \gamma < -1) \vee ((-1 \leq \gamma \leq 0) \wedge (c=1))\}$.

Доказательство. Обозначим $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\gamma} = L$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $\gamma < -2$, $c=1$. Интеграл $\int_1^{+\infty} t^\gamma dt$ сходится, поэтому по теореме сравнения интеграл $\Lambda(t)$ также сходится, т.е. $\Lambda < +\infty$. Предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2} / t^{\gamma+1} = \frac{L}{(\Lambda+1)^2}$ существует и ненулевой, интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\gamma+1} dt$ сходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

2. Пусть $-2 \leq \gamma < -1$, $c=1$. В отличие от случая 1 интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\gamma+1} dt$ расходится, поэтому интеграл $M\xi$ также расходится.

3. Пусть $\gamma > 0$, $c=1$. В отличие от случая 1 интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2} / t^{\gamma+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\gamma} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda^2(t)}{(\Lambda(t)+1)^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{\gamma+1}}{\Lambda(t)} \right)^2 =$$

$$= L \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\gamma+1)t^\gamma}{\lambda(t)} \right)^2 = \frac{(\gamma+1)^2}{L}$$

согласно правилу Лопиталья существует и ненулевой, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma+1}}$ сходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

4. Пусть $-1 < \gamma \leq 0$, $c = 1$. В отличие от случая 3 интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma+1}}$ расходится, поэтому интеграл $M\xi$ также расходится.

5. Пусть $\gamma = -1$, $c = 1$. Аналогично случаю 3 интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2} / \frac{1}{\ln^2 t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{1/t} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda^2(t)}{(\Lambda(t)+1)^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{\Lambda(t)} \right)^2 = \\ &= L \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1/t}{\lambda(t)} \right)^2 = \frac{1}{L} \end{aligned}$$

согласно правилу Лопиталья существует и ненулевой; интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\ln^2 t}$ ($a > 1$) сводится заменой $t = e^u$ к расходящемуся интегралу $\int_{\ln a}^{+\infty} \frac{e^u}{u^2} du$, следовательно, расходится; поэтому интеграл $M\xi$ расходится.

6. Пусть $\gamma < -2$, $c \neq 1$. Аналогично случаю 1 интеграл $\Lambda(t)$ сходится. Предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2} / t^{\gamma+1} = \frac{e^{(c-1)\Lambda} L}{(1-ce^{(c-1)\Lambda})^2}$ существует и ненулевой, интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\gamma+1} dt$ сходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

7. Пусть $-2 \leq \gamma < -1$, $c \neq 1$. В отличие от случая 6 интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\gamma+1} dt$ расходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

8. Пусть $\gamma > -1$, $c > 1$. Интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2} / \frac{\Lambda(t)}{e^{(c-1)\Lambda(t)}} &= \\ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\gamma} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{(c-1)\Lambda(t)}}{1-ce^{(c-1)\Lambda(t)}} \right)^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\gamma+1}}{\Lambda(t)} &= \frac{L}{c^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\gamma+1)t^\gamma}{\lambda(t)} = \frac{\gamma+1}{c^2} \end{aligned}$$

согласно правилу Лопиталя существует и ненулевой; интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\Lambda(t)}{e^{(c-1)\Lambda(t)}} dt$ сходится, поскольку $\Lambda(t) = O(t^{\gamma+1})$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

9. Пусть $\gamma > -1$, $c < 1$. Аналогично случаю 8 интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1 - ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2} / \Lambda(t)e^{(c-1)\Lambda(t)} = \\ & = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\gamma} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - ce^{(c-1)\Lambda(t)}} \right)^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\gamma+1}}{\Lambda(t)} = L \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\gamma+1)t^\gamma}{\lambda(t)} = \gamma + 1 \end{aligned}$$

согласно правилу Лопиталя существует и ненулевой; интеграл $\int_0^{+\infty} \Lambda(t)e^{(c-1)\Lambda(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\Lambda(t)}{e^{(1-c)\Lambda(t)}} dt$ сходится (см. случай 8), поэтому интеграл $M\xi$ также сходится. Теорема доказана.

Замечание. Теорема не охватывает случай $\gamma = -1$, $c \neq 1$.

Теперь рассмотрим условия (13). Их проверка для всех $t > 0$ вызывает сложности, поэтому упростим условия (13). $\lambda(t) > 0$, поэтому функция $\Lambda(t)$ монотонно возрастает, следовательно имеет обобщённый предел $\Lambda \leq +\infty$ (конечный или бесконечный).

Теорема 3. Пусть $N \geq 2$. Тогда условия (13) эквивалентны:

- 1) $\frac{\Lambda^{N-1}}{(\Lambda+1)^N} \leq \alpha$, если $c = 1$, $\Lambda \leq N-1$;
- 2) $\frac{(N-1)^{N-1}}{N^N} \leq \alpha$, если $c = 1$, $\Lambda > N-1$ (в том числе и $\Lambda = +\infty$);
- 3) $\frac{(1-c)(1-e^{(c-1)\Lambda})^{N-1}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda})^N} \leq \alpha$, если выполнены условия а) $c > 1$,

$$\Lambda \leq \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c}, \text{ или б) } c < 1, N \geq \frac{1}{1-c}, \Lambda < +\infty, \text{ или в) } c < 1,$$

$$N < \frac{1}{1-c}, \Lambda \leq \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c};$$

$$4) \frac{(N-1)^{N-1}}{c^{N-1}N^N} \leq \alpha, \quad \text{если} \quad \left((c > 1) \vee \left(\left(N < \frac{1}{1-c} \right) \wedge (c < 1) \right) \right) \wedge \left(\Lambda > \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c} \right);$$

- 5) $1-c \leq \alpha$, если $c < 1$, $N \geq \frac{1}{1-c}$, $\Lambda = +\infty$.

Доказательство. Случай 1. Пусть $c = 1$. Вводим вспомогательную функцию $g(t) = \frac{t^{N-1}}{(t+1)^N}$. Тогда $\frac{d}{dt} P\{\xi(t) \geq N\} = g'(\Lambda(t))\lambda(t) = \frac{\Lambda^{N-2}(t)}{(\Lambda(t)+1)^{N+1}} \times$

$\times(N-1-\Lambda(t))\lambda(t)$. Если $\Lambda \leq N-1$, то $P\{\xi(t) \geq N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и условия (13) эквивалентны условию 1 теоремы. Если $\Lambda > N-1$ (в том числе и $\Lambda = +\infty$), то существует единственная точка $t_* > 0$ такая, что $\Lambda(t_*) = N-1$, и условия (13) эквивалентны условию 2 теоремы.

Случай 2. Пусть $c \neq 1$. Вводим вспомогательную функцию $g(t) = (1-c) \frac{(1-t)^{N-1}}{(1-ct)^N}$. Тогда, используя равенство $\frac{d}{dt} P\{\xi(t) \geq N\} = \frac{d}{dt} g(e^{(c-1)\Lambda(t)})$, после упрощений получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P\{\xi(t) \geq N\} = \\ = -(1-c)^2 \frac{(1-e^{(c-1)\Lambda(t)})^{N-2}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^{N+1}} (N(c-1)+1-ce^{(c-1)\Lambda(t)}) e^{(c-1)\Lambda(t)} \lambda(t). \end{aligned}$$

Для определения знака полученной производной рассмотрим уравнение

$$e^{(c-1)\Lambda(t)} = \frac{N(c-1)+1}{c}. \tag{14}$$

Пусть $c > 1$. В предположении $N \geq 2$ правая часть уравнения (14) больше единицы и уравнение (14) принимает вид $\Lambda(t) = \frac{1}{c-1} \ln \frac{N(c-1)+1}{c}$. Если $\Lambda \leq \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c}$, то $P\{\xi(t) \geq N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и условия (13) эквивалентны условию 3 теоремы. В противном случае существует единственная точка $t_* > 0$ – решение уравнения (14) и условия (13) эквивалентны условию 4 теоремы.

Пусть $c < 1$. Если $N \geq \frac{1}{1-c}$, то уравнение (14) не имеет решений и $P\{\xi(t) \geq N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$. Если $\Lambda < +\infty$, то условия (13) эквивалентны условию 3 теоремы; в противном случае – условию 5 теоремы. Если $N < \frac{1}{1-c}$, то $0 < \frac{N(c-1)+1}{c} < 1$ и уравнение (14) принимает вид $\Lambda(t) = \frac{1}{c-1} \ln \frac{N(c-1)+1}{c}$. Если $\Lambda \leq \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c}$, то $P\{\xi(t) \geq N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и условия (13) эквивалентны условию 3 теоремы. В противном случае существует единственная точка $t_* > 0$ — решение уравнения (14) и условия (13) эквивалентны условию 4 теоремы.

Теорема доказана.

Замечание. В условиях 2 и 4 теоремы $3 \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N} \approx \frac{1}{Ne}$ при достаточно больших N .

Частный случай. Рассмотрим $\lambda(t) \equiv \lambda_0 > 0$. В этом случае интеграл $M\xi$, сходящийся при $c \neq 1$ согласно теореме 2, выражается в явном виде.

Действительно, в равенстве (4) применим интегрирование по частям и подставим формулы (1):

$$\begin{aligned} M\xi &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(tP_0(t) \Big|_0^R - \int_0^R P_0(t) dt \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(R \left(\frac{c-1}{1 - ce^{(c-1)\lambda_0 R}} + 1 \right) - \int_0^R \left(\frac{c-1}{1 - ce^{(c-1)\lambda_0 t}} + 1 \right) dt \right) = \\ &= (c-1) \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{R}{1 - ce^{(c-1)\lambda_0 R}} - \int_0^R \frac{dt}{1 - ce^{(c-1)\lambda_0 t}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В случае $c > 1$ первое слагаемое в правой части формулы (15) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, а в интеграле делаем замену $e^{(c-1)\lambda_0 t} = u$ и разлагаем на простые дроби:

$$\begin{aligned} M\xi &= \frac{1}{\lambda_0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^{\exp\{(c-1)\lambda_0 R\}} \left(-\frac{1}{u} + \frac{c}{cu-1} \right) du = \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{ce^{(c-1)\lambda_0 R} - 1}{(c-1)e^{(c-1)\lambda_0 R}} \right| = \frac{1}{\lambda_0} \ln \left(1 + \frac{1}{c-1} \right). \end{aligned}$$

В случае $c < 1$ аналогичной заменой в интеграле и разложением на простые дроби получаем

$$\begin{aligned} M\xi &= \\ &= (c-1) \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{R}{1 - ce^{(c-1)\lambda_0 R}} + \frac{1}{(c-1)\lambda_0} \left(-(c-1)\lambda_0 R + \ln |ce^{(c-1)\lambda_0 R} - 1| - \ln(1-c) \right) \right) = \\ &= -\frac{\ln(1-c)}{\lambda_0} + (c-1) \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{R}{1 - ce^{(c-1)\lambda_0 R}} - R \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln |ce^{(c-1)\lambda_0 R} - 1| = -\frac{\ln(1-c)}{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Поэтому задачу (11) с учётом явного выражения для интеграла $M\xi$ и теоремы 3 удобно рассматривать в виде двух задач.

Первая из задач, отвечающая случаю $c > 1$ и условию 4 теоремы 3,

$$\frac{1}{\lambda_0} \ln \left(1 + \frac{1}{c-1} \right) \rightarrow \min_c, \quad \frac{(N-1)^{N-1}}{c^{N-1} N^N} \leq \alpha$$

решения не имеет: инфимум целевой функции равен нулю, при этом $c \rightarrow +\infty$ (т.е. почти мгновенное вымирание всей популяции).

Вторая из задач отвечает случаю $c < 1$ и условиям 4 и 5 теоремы 3:

$$-\frac{\ln(1-c)}{\lambda_0} \rightarrow \min_c,$$

$$c \geq \frac{N-1}{N^{N-1}\sqrt[N]{\alpha N}}, \text{ если } c > 1 - \frac{1}{N},$$

$$c \geq 1 - \alpha, \text{ если } c \leq 1 - \frac{1}{N}.$$

Решение этой задачи зависит от соотношения N и α . Если $\alpha N \geq 1$, то $c_* = 1 - \alpha$. В противном случае $c_* = \frac{N-1}{N^{N-1}\sqrt[N]{\alpha N}}$.

ВЫВОДЫ

В работе для неоднородного процесса рождения и гибели в случае постоянного отношения c интенсивностей гибели и рождения решено три задачи управления при помощи выбора параметра c .

Для первой задачи минимизации вероятности выхода процесса $\xi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ из полосы $[1; N-1]$ доказано, что критерий является суммой возрастающей и убывающей функций, а для конкретных значений порога N и интегральной интенсивности рождения Λ при помощи метода золотого сечения найдены точки минимума c_* в случае их наличия.

Для второй задачи управления выбором параметра c с учётом стабилизирующей функции $f(t)$ найдена точка минимума c_* и доказано условие её существования. В качестве примеров рассмотрены наиболее интересные (с точки зрения авторов) частные случаи. К этой задаче примыкает задача идентификации параметров a и b для стабилизирующей функции экспоненциального роста e^{at+b} .

Для третьей задачи минимизации математического ожидания момента вырождения ξ при малой вероятности α превышения порога $N-1$ найдены условия сходимости математического ожидания $M\xi$, упрощены условия вероятности превышения порога $N-1$, а сама задача решена в частном случае $\lambda(t) \equiv \lambda_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kendall D.G. On the Generalized «Birth-and-Death» Process / D.G. Kendall // Ann. Math. Statistics. — 1948. — **19**, N 1. — P. 1–15.
2. Бартлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов / М.С. Бартлетт. — М.: ИЛ, 1958. — 384 с.
3. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов / Т. Харрис. — М.: Мир, 1966. — 356 с.
4. Horalek V. Nonhomogeneous birth-death processes with constant ratio of rates / V. Horalek // Aplikace matematiky. — 1966. — **11**, N 4. — P. 296–302.
5. Horalek V. On some types of nonhomogeneous birth-immigration-death processes / V. Horalek // Aplikace matematiky. — 1964. — **9**, N 6. — P. 421–434.
6. Андреев Н.В. О некоторых задачах управления неоднородными процессами рождения и гибели / Н.В. Андреев, Э.С. Штатланд // Труды семинара «Теория оптимальных решений». — Вып. 4. — К., 1968. — С. 42–46.

7. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — 2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
8. Kondratiev Yu. Self-organizing birth-and-death stochastic systems in continuum / Yu. Kondratiev, R. Minlos, E. Zhizhina // *Rev. Math. Phys.* — 2008. — **20**, N 4. — P. 451–492.
9. Сегхайер А. Об интервальной модели для процесса рождения и гибели с гистерезисом / А. Сегхайер, И.И. Цитович // *Информационные процессы.* — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 117–126.
10. Калинин А.В. Уравнения марковского процесса гибели в математической теории надежности / А.В. Калинин // *Инженерный журнал: наука и инновации.* — Вып. 12 (24), 2013. — 7 с. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1150.html>
11. Lefevre C. Optimal Control of a Birth and Death Epidemic Process / C. Lefevre // *Operations Research.* — 1981. — **29**, N 5. — P. 971–982.
12. Serfozo R. Optimal Control of Random Walks, Birth and Death Processes, and Queues / R. Serfozo // *Advances in Applied Probability.* — 1981. — **13**, N 1. — P. 61–83.
13. Kyriakidis E.G. Optimal control of a simple immigration-birth-death process through total catastrophes / E.G. Kyriakidis // *European Journal of Operational Research.* — 1995. — **81**, Issue 2. — P. 346–356.
14. Getz W.M. Optimal control of a birth-and-death process population model / W.M. Getz // *Mathematical Biosciences.* — 1975. — **23**, Issues 1–2. — P. 87–111.
15. Chatwin R.E. Optimal control of continuous-time terminal-value birth-and-death processes and airline overbooking / R.E. Chatwin // *Naval Research Logistics.* — 1996. — **43**, Issue 2. — P. 159–168.
16. Андреев Н.В. О задаче управления неоднородным процессом рождения и гибели / Н.В. Андреев, В.М. Статкевич // *Системный анализ и информационные технологии: материалы 18-й Междунар. научно-техн. конф. SAIT 2016 (Киев, 30 мая – 2 июня 2016 г.)* — К.: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2016. — С. 50.
17. Кидяров Б.И. Механизм и кинетика наноразмерных стадий образования кристаллов из жидкой фазы / Б.И. Кидяров // *Конденсированные среды и межфазные границы.* — 2009. — **11**, № 4. — С. 314–317.

Поступила 25.05.2016

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОЙ ОСНОВЫ С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВЫЕМКОЙ И ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В.С. КИРИЛЮК, О.И. ЛЕВЧУК

Аннотация. Предложена математическая модель контактного взаимодействия при сжатии электроупругого полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную пологую выемку (под внутренним давлением). Модель учитывает связанность системы уравнений электроупругости. Разработан алгоритм решения проблемы. С помощью представления решения связанной системы уравнений электроупругости и гармонических функций специального вида найдено точное решение, определены геометрические размеры зазора между телами при известных сжимающих нагрузках и внутреннем давлении. Выявлен эффект связанности силовых и электрических полей. Как частный случай из полученных выражений найдены параметры контакта для упругого трансверсально-изотропного полупространства.

Ключевые слова: математическая модель, связанная система уравнений, электроупругое полупространство, жесткая основа, пологая осесимметричная выемка, сжатие и внутреннее давление, алгоритм решения задачи, эффект связанности полей.

ВВЕДЕНИЕ

Возрастающее применение пьезоэлектрических материалов вызывает значительный интерес к исследованию распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1 – 6]. Однако изучение пространственных задач для пьезоэлектрических тел сопряжено со значительными математическими трудностями, вызванными необходимостью решения граничных задач для системы уравнений в частных производных, учитывающей связанность силовых и электрических полей в материале [4]. Отметим, что решению контактных задач для электроупругих тел в строгой постановке (с учетом связанности силовых и электрических полей) посвящены работы [4 – 6] и др.

В работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, изучено контактное взаимодействие при сжатии системы «жесткая основа с выемкой — электроупругое полупространство». При постановке задачи предполагается, что поверхность раздела двух тел, входящих в систему, расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала и на ней выполняются условия гладкого (без трения) контакта. Также полагается, что в области выемки находится газообразный наполнитель под давлением P_0 . С помощью общего представления решения уравнений статики

электроупругости и гармонических потенциалов, зависящих от величины зазора между телами при контактном взаимодействии, получено точное решение поставленной математической задачи, найдены геометрические размеры выемки при сжатии тел. Как частные случаи из найденного решения задачи электроупругости следуют соответствующие параметры контакта системы «жесткая основа с выемкой — упругое трансверсально-изотропное полупространство», а также контакта упругого изотропного полупространства с жесткой основой (с выемкой) [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим контактное взаимодействие пьезоэлектрического полупространства (тело 1) с жесткой основой (тело 2) при сжатии, содержащей пологую осесимметричную выемку с газообразным наполнителем под давлением P_0 (рис.1). Полагаем, что форма выемки описывается следующим выражением:

$$f(r) = h_0(1 - r^2/b^2)^{3/2}, \quad r \leq b, \quad (h_0 \ll b). \quad (1)$$

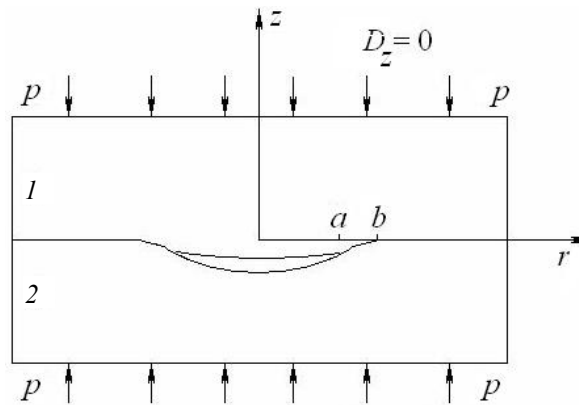


Рис. 1. Контактное взаимодействие жесткой основы с полупространством

Считаем, что плоскость контакта расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала, и поверхность полупространства является неэлектропроводной (не содержит электродного покрытия). Полагаем также, что к телам приложены сжимающие усилия p и между телами возникает гладкий (без трения) контакт. Поскольку в жестком теле содержится выемка (под давлением P_0), то контакт осуществляется не по всей поверхности $z = 0$, а по некоторой ее части $r > a$, где a — неизвестный радиус области контакта (рис. 1), который зависит от значения сжимающих усилий p , давления P_0 , геометрии первоначальной выемки и электроупругих свойств пьезоэлектрического полупространства. Дополнив функцию $f(r)$, выраженной в виде (1), нулевым значением в области $r > b$, получим

$$f(r) = \begin{cases} h_0(1 - r^2/b^2)^{3/2}, & r \leq b; \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

Воспользовавшись суперпозицией состояний, первое из которых — сжатие вдоль оси $0z$, т.е. $\sigma_{zz} = -p$, $D_z = 0$, для второго электроупругого состояния выражения (2) получим следующие граничные условия в плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -P_0 + p, \quad 0 < r < a; \quad u_z^{(1)} = f(r), \quad a \leq r < \infty; \\ \sigma_{zr} &= 0, \quad 0 < r < \infty; \quad D_z = 0, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что граничное условие (3) по электрическому состоянию соответствует случаю неэлектропроводной (без электродного покрытия) поверхности полупространства. При удалении от области контакта выполняются условия на бесконечности

$$\sigma_{zz} \rightarrow -p, \quad D_z \rightarrow 0, \quad \sigma_{zr} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения статики для электроупругого трансверсально-изотропного тела относительно компонентов вектора перемещений и электрического потенциала Ψ имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,xz} + \\ + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} + \\ + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

где $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ — независимые модули упругости; e_{31}, e_{15}, e_{33} — пьезомодули; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ — диэлектрические проницаемости. Следовательно, свойства пьезоэлектрического трансверсально-изотропного материала описываются указанными десятью независимыми постоянными.

Решение системы уравнений (5) согласно работе [4] можно выразить через четыре потенциальные функции Φ_j ($j = \overline{1, 4}$):

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (6)$$

где k_j, l_j — некоторые постоянные, а функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где $\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$, значения ν_i ($i = 1, 2, 3$) являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка [4]:

$$\begin{aligned} & \nu^3(A_1B_2 - C_1D_2) + \nu^2(A_1B_3 + A_2B_2 - C_1D_3 - C_2D_2) + \\ & + \nu(A_2B_3 + A_3B_2 - C_2D_3 - C_3D_2) + A_3B_3 - C_3D_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения k_j, l_j ($j = 1, 2, 3$) в формулах (6) связаны с величинами ν_j следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j; d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

При введении обозначений $z_j = zn_j^{-1/2}$ ($j = \overline{1, 4}$) функции $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ согласно уравнению (7) становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат. Выражения (8)–(10) в дальнейшем используются при проведении вычислений.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

При построении решения граничной задачи электроупругости воспользуемся представлением (6). Потенциальные функции выберем на основе таких гармонических потенциалов:

$$\begin{aligned} & \Phi_i(x, y, z_i) = \\ & = -\frac{\alpha_i^*}{2\pi} \left(\iint_{s_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} + \iint_{s_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$h(\xi_1, \xi_2) = h_1(1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2)^{3/2},$$

$$r(\xi_1, \xi_2) = -h_0(1 - \xi_1^2/b^2 - \xi_2^2/b^2)^{3/2},$$

s_1 и s_0 — круговые площадки радиусов a и b соответственно (рис. 1). Положим также $\Phi_4^{(2)} \equiv 0$. Постоянные α_i^* , что входят в формулы (11), определим из системы трех линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E)(1+k_j) + e_{15} l_j = 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15} l_j) / \sqrt{v_j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) = 0. \quad (12)$$

При таком выборе α_j^* удовлетворяются граничные условия по касательным напряжениям и электрическому состоянию вдоль всей поверхности раздела, а также удовлетворяются условия (4). Неизвестными остаются следующие параметры: a — значения радиуса площадки контакта (рис. 1); h_1 — максимальная высота зазора в результате контакта тел. Значения этих параметров определим из решения контактной задачи.

Идея использования гармонических потенциалов (11), связанных с величиной контактного зазора между электроупругим полупространством и жесткой основой, близка приему применения скачков перемещений для трещины нормального отрыва для изучения напряженного состояния. Однако существенное отличие между ними состоит в том, что поверхность трещины известна заранее, а площадка контакта S_1 и ее радиус a неизвестны и определяются в процессе решения контактной задачи.

С помощью потенциальных функций (11) и соотношений (12), удовлетворяя оставшиеся граничные условия, приходим к решению интегродифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\bar{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} =$$

$$= - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\bar{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} +$$

$$+ 2\pi M^* (p - P_0), \quad (x, y) \in S_1. \quad (13)$$

Значение $M^* = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}$.

После дифференцирования согласно (13) воспользуемся такими интегралами [9]:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}} d_{\xi} S = -\frac{\pi^2}{a};$$

$$\iint_S \frac{\xi_1^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}} d_{\xi} S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 33x^2 - 3y^2);$$

$$\iint_S \frac{\xi_2^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}} d_{\xi} S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 3x^2 - 33y^2).$$

Алгоритм решения задачи. Приравняем коэффициенты при вторых степенях декартовых координат, находим $h_1/h_0 = (a/b)^3$. Из равенства коэффициентов при однородных слагаемых приходим к квадратному уравнению относительно значения неизвестного радиуса a , из которого получаем значения неизвестных параметров контакта

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0)bM^*}{3\pi h_0}}; \quad h_1 = h_0 \left(1 - \frac{4(p - P_0)bM^*}{3\pi h_0} \right)^{3/2}. \quad (14)$$

Таким образом, из выражений (14) по известным размерам первоначальной выемки (параметры b и h_0), значению сжимающих усилий p и давлению P_0 , десяти независимым значениям электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала (входят посредством величины M^*) находим значение радиуса контакта a и максимальную высоту зазора (после контактного взаимодействия) h_1 . Приравняв значение a к нулю, находим значение силы сжатия $p^* = P_0 + \frac{3\pi h_0}{4bM^*}$, при которой выемка в жестком теле полностью заполняется пьезоэлектрическим материалом. Следовательно, при сжатии $p = p^*$ исходная приповерхностная выемка в жесткой основе полностью наполнена материалом.

При переходе к чисто упругому трансверсально-изотропному материалу имеем

$$M^* \rightarrow M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})},$$

где n_1, n_2 — корни квадратного уравнения $c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0$, которые зависят от упругих свойств трансверсально-изотропного материала. Заменив в выражениях (14) значение M^* величиной M^{Trans} , получим параметры контакта системы «упругое трансверсально-изотропное полупространство — жесткая основа с выемкой». Последующий предельный переход от трансверсально-изотропного материала к упругому изотропному материалу приводит к переходу от значения M^{Trans} к $(1 - \nu)/\mu$. При взаимодействии упругого изотропного полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную выемку (частный случай рассмотренной контактной задачи электроупругости), заменив в формулах (14) величину M^* значением $(1 - \nu)/\mu$, приходим к полному совпадению результатов с данными работы [7], найденными с помощью применения другого математического аппарата (на основе решения парных интегральных уравнений).

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 2 приведена зависимость радиуса зазора между жесткой основой (с приповерхностной выемкой) и пьезоэлектрическим полупространством от

действующих нагрузок согласно формулам (14). На рисунке использовано обозначение $N^* = 4bM^* / (3\pi h_0)$. Показано изменение радиуса зазора от значения сжимающей нагрузки при известных значениях внутреннего давления P_0 , геометрических параметров выемки (b, h_0), десяти электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала (через величину M^*). Приповерхностная выемка полностью заполняется электроупругим материалом при $p \geq P_0 + \frac{1}{N^*} = p^*$. Для значений нагрузок $P_0 \leq p \leq p^*$ радиус зазора между телами показан на рис. 2. Важно отметить влияние эффекта связанности силовых и электрических полей на параметры контакта в рассматриваемой проблеме взаимодействия тел. После проведенных вычислений для пьезокерамических материалов BaTiO₃, PZT-5H, PZT-7A имеем $M^* / M^{\text{Trans}} = 0,854, 0,784, 0,737$ соответственно. Согласно выражению p^* это означает, что для полного заполнения выемки чисто упругим трансверсально-изотропным материалом (с теми же упругими постоянными, что и соответствующий пьезокерамический материал) величина усилий $p - P_0$ меньше, чем для пьезоэлектрического материала BaTiO₃, PZT-5H, PZT-7A в 1,171, 1,276, 1,357 раза соответственно. Следовательно, в рассматриваемой проблеме связанность силовых и электрических полей препятствует закрытию выемки при сжатии электроупругого полупространства с жесткой основой.

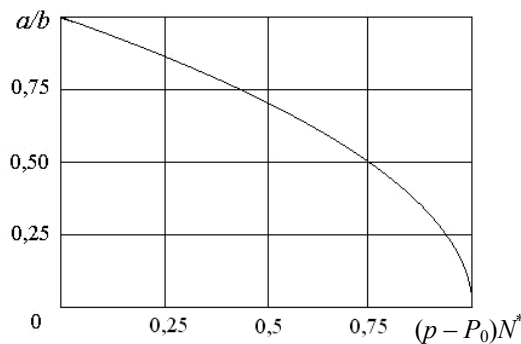


Рис. 2. Зависимость радиуса зазора от действующих нагрузок, геометрии параметров и свойств материала

ВЫВОДЫ

В работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале рассмотрена проблема контактного взаимодействия в системе «жесткая основа с выемкой — электроупругое полупространство». Исследуемое контактное взаимодействие зависит от 14 независимых параметров (значения сжимающей нагрузки p и давления P_0 , двух геометрических параметров исходной выемки и десяти значений электроупругих постоянных), что входят в систему связанных уравнений статики электроупругости и граничные условия. Пред-

ложен алгоритм решения задачи, позволивший получить точное ее решение. В явном виде определены основные параметры контактного взаимодействия, найдены геометрические размеры зазора между телами системы (радиус контакта, высота зазора), значение нагрузки полного закрытия зазора. Выявлен эффект связанности силовых и электрических полей. Решение задачи контактного взаимодействия упругого трансверсально-изотропного полупространства с жесткой основой получено как частный случай исследуемой проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang Ch.-R.* Eshelby's tensor for cubic piezoelectric crystals and its application to cavity problems / Ch.-R. Chang // *Eng. Frac. Mech.* — 2016. — **155**. — P. 119–129.
2. *Kaloerov S.A.* Determination of intensity factors for stresses, induction and field strength in multi-connected electro-elastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, № 6. — P. 77–84.
3. *Xu C.H.* Electroelastic singularities and intensity factors for an interface crack in piezoelectric–elastic bimaterials / C.H. Xu, Z.H. Zhou, X.S. Xu, A.Y.T. Leung // *Appl. Math. Model.* — 2015. — **39**. — № 9. — P. 2721–2739.
4. *Podil'chuk Yu.N.* Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Yu.N. Podil'chuk // *Int. Appl. Mech.* — 2003. — **39**, № 2. — P. 132–170.
5. *Кирилюк В.С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / В.С. Кирилюк // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2009. — Вып.46. — С. 29–35.
6. *Кирилюк В.С.* О расклинивании пьезокерамических материалов / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // *Прикладная механика.* — 2010. — **46**, № 5. — С. 46–57.
7. *Монастирський Б.Є.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні / Б.Є. Монастирський // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 1999. — № 6. — С. 22–26.
8. *Кіт Г.С.* Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками / Г.С. Кіт, Р.М. Мартиняк // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 1999. — **42**, № 6. — С. 7–11.
9. *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения / М.В. Хай. — К.: Наук. думка, 1993. — 256 с.

Надійшла 29.02.2016

CLASSIFICATION OF METHODS FOR RISK MEASURES VaR AND CVAR CALCULATION AND ESTIMATION

N.G. ZRAZHEVSKA, A.G. ZRAZHEVSKY

Abstracts. A systematic classification of the existing approaches for popular risk measures VaR and CVaR calculating and estimating is fulfilled. A review of the most used methods is done. For convenience, the considered methods are reduced to common econometric designations and concepts, guidance on the use of the methods is proposed. The correctness of the considered methods is numerically confirmed.

Keywords: estimation, value-at-risk, conditional value-at-risk, structural-hierarchical scheme, systematization, classification.

INTRODUCTION

Financial and economic crises of the end of the XX-beginning of the XXI century shows the necessity of further development of the risk theory. Determination and estimation of the possible risk arising from operational, financial and other activity of the company are among the main objectives of the risk management. Risk measures VaR and CVaR are widely used to solve this problem.

There are many works dedicated to risk measure VaR. They analyze its properties, advantages and disadvantages, the methods for its estimating [1–4]. VaR has become a standard, widely used risk measure because of its conceptual simplicity, ease of calculation and the availability of a sufficiently large number of standardized formulas and methods for calculation. At the same time, this risk measure has two major drawbacks: VaR is not coherent in the sense of [5], it does not have the sub-additivity property and VaR does not allow to determine the size of the potential losses that exceed the given level [6]. CVaR (Conditional VaR) or, as it is called ES (Expected Shortfall), has been introduced to solve these problems [5, 6]. Unlike VaR, CVaR is a coherent measure. Being a convex function, CVaR can be used in the optimization procedures [6]. The article [7] describes the methods, based on analytical expressions for CVaR calculation. The articles [8, 9] provide a detailed comparative analysis of risk measures VaR and CVaR. The large number of approaches and methods complicates the selection of the optimal way for solving the problem. Systematization, classification and comparison of different methods for risk measures evaluation lead to the use of systematic methodology [10].

This paper discusses the main approaches for risk measures VaR and CVaR evaluation for a random variable, based on different statistical and econometric methods. Prices and other characteristics of financial instruments are usually considered as random variables. It allows to use random models.

The methods of risk measures estimations may be classified on the basis of statistical and stochastic approaches. This paper proposes the structural — hierarchical scheme (Fig. 1) with classification of the most popular methods. The scheme helps the user to choose a particular method.

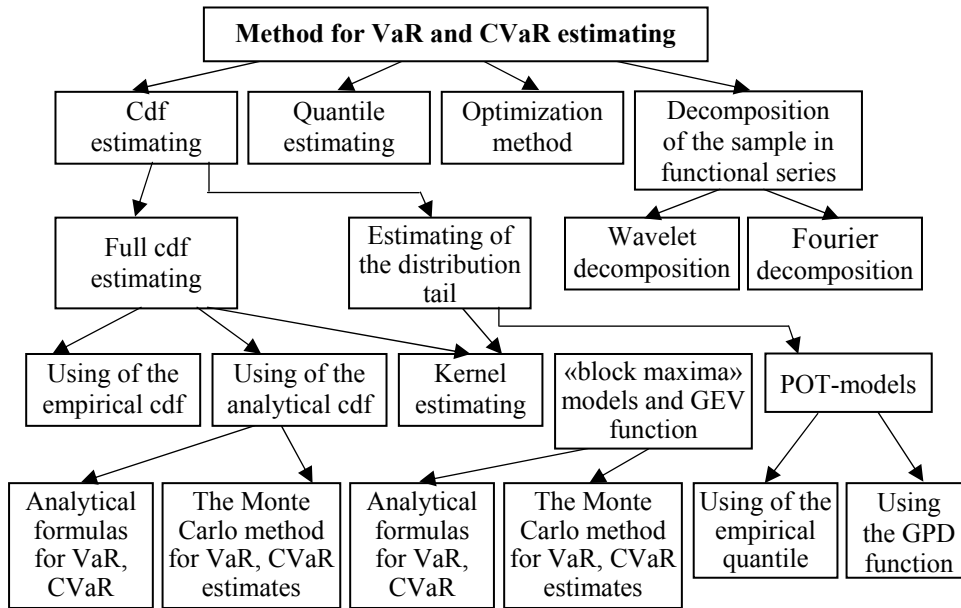


Fig.1. The structural — hierarchical scheme for VaR and CVaR estimating

Analysis of methods for VaR and CVaR estimating allowed to formulate the decision-making procedure for the choice of the method of static VaR and CVaR evaluation, depending on the research objectives and the characteristics of the analyzed data (Fig. 2).

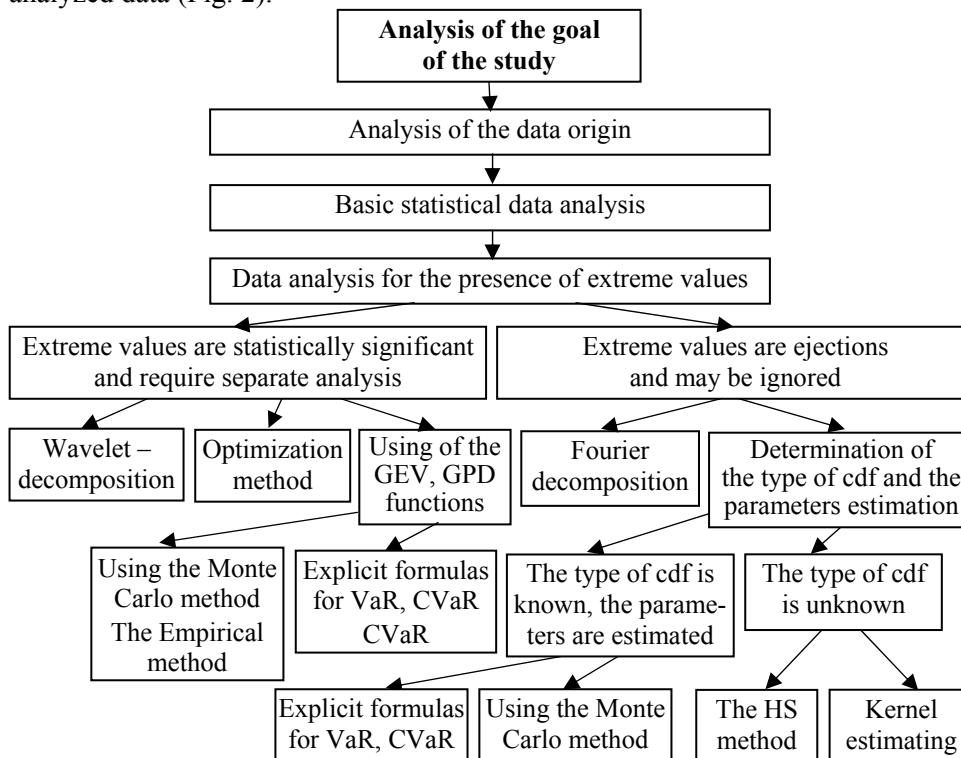


Fig. 2. The decision-making procedure for the choice of the method of static VaR and CVaR evaluation

Sections 2–4 contain the mathematical methods that we use to concretize the methods of static VaR and CVaR estimating (Fig.1). Sections 5 and 6 show the results of numerical testing of the methods and the comparative analysis of the results.

KEY DEFINITIONS

Let Y be a random variable describing the portfolio returns. For a given confidence level $\alpha \in (0;1)$ let us consider the $(1 - \alpha)$ th quantile of the returns distribution:

$$y^{(1-\alpha)}(Y) = \sup \{y \mid P(Y \leq y) \leq 1 - \alpha\}.$$

From the viewpoint of econometric $y^{(1-\alpha)}(Y)$ determines the minimum value of the returns Y with probability $(1 - \alpha)$. If, for example, $\alpha = 0,95$ then $y^{(1-\alpha)}(Y)$ (may be negative) with probability 95%, determines the minimum returns. For ease of understanding econometrics operate with the concept $\text{VaR}_\alpha(Y)$, defined as:

$$\text{VaR}_\alpha(Y) = -y^{(1-\alpha)}(Y).$$

So, $\text{VaR}_\alpha(Y)$ with probability $(1 - \alpha)$ defines the limit value of the loss (the sign « \rightarrow »).

Some works operate with losses. Let X denotes a random variable describing the portfolio losses. Then $X = -Y$, the quantile of the cumulative distribution function (cdf) of the loss function is defines as $x^{(\alpha)}(X) = \inf \{x \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}$ and

$$\text{VaR}_\alpha(X) = x^{(\alpha)}(X). \tag{1}$$

So $\text{VaR}_\alpha(Y) = \text{VaR}_\alpha(X)$, $x^\alpha(X) = -y^{(1-\alpha)}(Y)$.

From the viewpoint of statistics from (1) we see that:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha), \tag{2}$$

where $F_X^{-1}(\cdot)$ is the inverse function of the cdf of the random variable X .

For a given confidence level $\alpha \in (0;1)$ the risk measure $\text{CVaR}_\alpha(X)$ can be defined as an average expected value of the loss with probability α :

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = E[X \mid X > \text{VaR}_\alpha(X)]. \tag{3}$$

In the case if $\text{VaR}_\gamma(X)$, ($\gamma \in (0;\alpha)$) is integrability, $\text{CVaR}_\alpha(X)$ may be defined as:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\gamma(X) d\gamma.$$

The paper [11] gives the following definition of CVaR:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha} [E[X \cdot I\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}] + \\ &+ \alpha \text{VaR}_\alpha(X) - \text{VaR}_\alpha(X)P(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))], \end{aligned}$$

where $I\{\cdot\}$ denotes the indicator function.

Consider an alternative definition of the risk measures [6]. Let X be a random variable with the probability density function (pdf) $p(x)$, $\xi \in R$ is a scalar, the function $f(\xi, x)$ for each fixed ξ is a random variable with pdf $p(x)$. Let us introduce the function $\psi(\xi, \gamma)$ — the probability that $f(\xi, x)$ will not exceed the given level γ :

$$\psi(\xi, \gamma) = \int_{f(\xi, x) \leq \gamma} p(x) dx.$$

Here $\psi(\xi, \gamma)$ is a loss distribution function. Then $\text{VaR}_\alpha(X)$ and $\text{CVaR}_\alpha(X)$ may be defined as:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \min \{ \gamma \in R \mid \psi(\xi, \gamma) \geq \alpha \}, \quad (4)$$

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(\xi, x) \geq \text{VaR}_\alpha(X)} f(\xi, x) p(x) dx. \quad (5)$$

Comments. A great number of mathematical and econometric studies on VaR and CVaR, leads to a problem of a confidence level α choice. Note that the events «loss is larger than given level» and «loss do not achieve the level» are a complete group of events with probabilities α and $1-\alpha$ respectively. In this paper, the confidence level is the α th quantile of the loss function (1), measures of risk are designated as VaR_α , CVaR_α . In practice, the level is $\alpha \in [0,9; 1)$.

Nowadays there are many methods of VaR and CVaR estimating. In this paper we have no goal to review all of them. We propose a classification system of the best known and most commonly used approaches (Fig. 1) and briefly give the mathematical methods (description) that is required for the hierarchical scheme (Fig. 2) specification.

THE METHODS OF VAR AND CVAR ESTIMATING USING THE CDF OF A RANDOM VARIABLE

Let X be a random variable. X_1, X_2, \dots, X_n is a sample of its values, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ is the order statistics in ascending order. We assume that the distribution function of X can be defined in an analytical or empirical form. Then definitions of VaR and CVaR (2) or (3) are used respectively.

VaR and CVaR estimating using the full CDF

Methods with the use of the empirical CDF

This group of methods includes, first of all, the Historical Simulation methods - HS [7]. This method is based on the construction of empirical distribution function using historical data. Then:

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha = X_{([n\alpha]/n)}, \tag{6}$$

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \left(\sum_{i=[n\alpha]}^n X_{(i)} \right) / (n - [n\alpha]). \tag{7}$$

Estimate (7) can be modified. The paper [12] proposes the following estimate:

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{1 + [n\alpha]} \sum_{i=1}^n X_i I\{X_i \geq X_{([n\alpha]+1)}\};$$

the paper [13] (for returns) gives the estimate:

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = - \left(\frac{1}{[n(1-\alpha)]} \sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]} Y_{(i)} + \left(1 - \frac{[n(1-\alpha)]}{n(1-\alpha)} \right) Y_{([n(1-\alpha)]+1)} \right);$$

and the paper [14] (for returns):

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \begin{cases} -\bar{Y}_{n(1-\alpha):n}, & n(1-\alpha) \in Z, \\ -\alpha \bar{Y}_{n(1-\alpha):n} - (1-\alpha) \bar{Y}_{n(1-\alpha)+1:n}, & n(1-\alpha) \notin Z, \end{cases}$$

where $\bar{Y}_{k:n} = \frac{1}{k}(Y_{(1)} + \dots + Y_{(k)})$, $k = \bar{1}, n$.

The advantage of the HS method is its simplicity in realization. Furthermore, the method does not require a prior assumptions about the type of the cdf. The HS method is very popular among economists and is implemented in many standard packages for risk measures calculating, such as Matlab, PSG. However, using the empirical cdf we suppose that the statistical characteristics of a random variable will be stable. Empirical distribution function is smooth enough in the vicinity of the mean value, and demonstrates jumps at the tails due to the relatively small number of extreme values in the sample. To overcome this problem the large volume samples must be analyzed. The Bank of International Settlements recommends to use samples consisting of not less than 250 data [15].

Let us consider the Rockafellar–Uryasev discrete method [16], based on the empirical distribution. Let for a random variable we have a variation row $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ with corresponding empirical probabilities $p_k > 0$. Let k_α

is a single index such that $\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k$. Then:

$$\text{VaR}_\alpha = X_{(k_\alpha)}, \text{ CVaR}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) X_{(k_\alpha)} + \sum_{k=k_\alpha+1}^{k_\alpha} p_k X_{(k)} \right].$$

Methods with the use of the analytical cdf

If we can assume that a random variable has a certain type of cdf and we can evaluate the parameters of the distribution, analytic formulas can be used to find VaR and CVaR estimates.

Let X denote a standard normal random variable with mean μ and variance σ^2 . Then [17]:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha), \text{CVaR}_\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}. \quad (8)$$

Hereinafter, $\phi(\cdot)$ is the standard normal pdf and $\Phi(\cdot)$ is the standard normal cdf.

The standard normal pdf is symmetrical. At the same time, many financial instruments demonstrate the skewness of the distribution. The most popular and the most widely used of skewed extensions of the normal distribution is the skew-normal distribution due to Azzalini [18]. The cdf of this distribution is given by:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - 2T\left(\frac{x-\mu}{\sigma}, \lambda\right),$$

$$\text{where } x \in R, \mu \in R, \sigma > 0, \lambda \in R, T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\exp\{-h^2(1+x^2)/2\}}{1+x^2} dx.$$

For a skew normal random variable, VaR_α is defined as the unique root of the equation $F(x) = \alpha$, and the CVaR_α can be expressed as:

$$\text{CVaR}_\alpha = \mu + \frac{\delta\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{\pi}} \left[\lambda \Phi(z_\alpha) - \sqrt{2\pi} \phi(y_\alpha) \Phi(\lambda y_\alpha) \right],$$

$$\text{where } \delta = \lambda / \sqrt{1+\lambda^2}, y_\alpha = \frac{\text{VaR}_\alpha - \mu}{\sigma}, z_\alpha = \sqrt{1+\lambda^2} y_\alpha.$$

If X is a random variable with the pdf: $f(x) = \frac{2}{\sigma} \sum_{i=1}^L \eta_i \varphi\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) \times \Phi\left(\lambda_i \frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)$, where the weights η_i are non-negative and sum to one ($\eta_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \eta_i = 1$), for CVaR_α takes place the formula:

$$\text{CVaR}_\alpha = \sum_{i=1}^L \pi_i \left\{ \mu_i + \frac{\sigma_i \sqrt{2}}{\alpha \sqrt{\pi}} \left[\lambda_i \Phi(z_{\alpha,i}) - \sqrt{2\pi} \phi(y_{\alpha,i}) \Phi(\lambda_i y_{\alpha,i}) \right] \right\},$$

$$\text{where } \sigma_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}, z_{\alpha,i} = \sqrt{1+\lambda_i^2} y_{\alpha,i}, y_{\alpha,i} = \frac{x_{\alpha,i} - \mu_i}{\sigma_i}, x_{\alpha,i} \text{ is the root of}$$

$$\Phi\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) - 2T\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}, \lambda_i\right) = \alpha,$$

$$\pi_i = \frac{\eta_i}{\alpha} \left[\Phi\left(\frac{\text{VaR}_\alpha - \mu_i}{\sigma_i}\right) - 2T\left(\frac{\text{VaR}_\alpha - \mu_i}{\sigma_i}, \lambda_i\right) \right].$$

As before VaR_α is the root of $F(x) = \alpha$.

Consider another version of representation of analytic formulas for VaR and CVaR.

Consider a random variable $\bar{X} = \frac{X - \mu}{\sigma}$, where a random variable X has *t-local-scaled* distribution with parameters μ, σ and $\nu > 2$ degrees of freedom, \bar{X} has the standard Student's t distribution with ν degrees of freedom and $E(\bar{X}) = 0, \text{var}(\bar{X}) = \frac{\nu}{\nu - 2}$. Then [17]:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma t_\nu^{-1}(\alpha), \text{CVaR}_\alpha = \mu + \sigma \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \cdot \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1}, \quad (9)$$

where $g_\nu(\cdot), t_\nu(\cdot)$ denote, respectively, the pdf and the cdf of a Student's t random variable.

To take into account skewed of the pdf the article [19] proposes the Azalini's skewed t distribution. This distribution is given by the pdf

$$f(x) = 2t_\nu(x)g_{\nu+1}\left(\lambda x \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2 + \nu}}\right), \quad x \in R; \nu > 0.$$

Let $F(x)$ be a corresponding cdf. Then VaR_α is the root of $F(x) = \alpha$, and

$$\text{CVaR}_\alpha = 2 \int_{\text{VaR}_\alpha}^{+\infty} x t_\nu(x) g_{\nu+1}\left(\lambda x \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2 + \nu}}\right) dx.$$

A more complete list of analytical formulas for VaR and CVaR, for different types of pdf can be found in [7].

The advantage of this approach is the availability of analytical formulas for risk measures calculating. However, the definition of the type of the pdf and estimation of its parameters may require considerable efforts.

Monte Carlo and Richardson's method for risk measures estimating

If we know the type of a random variable distribution and can estimate its parameters the Monte Carlo method can be used for VaR and CVaR estimating. The Monte Carlo method is based on the obtaining of a large number of realizations of a random variable such that their probability characteristics coincide with the estimates obtained by other methods. The principal difference between the Monte Carlo method and the method of historical simulation is that the original sample is generated on the basis of a model.

The Richardson's method for $\overline{\text{CVaR}}_\alpha$ estimating on the basis of the Monte Carlo method is described in [7]. The method is formulated as the following algorithm.

1. Using the known cdf generate samples X_1, \dots, X_N by the Monte Carlo method.
2. Estimate the $\overline{\text{CVaR}}_\alpha^1$ by the HS method.

3. Repeat steps 1 and 2 M times and compute the estimates $\overline{\text{CVaR}}_\alpha^j$, $i = \overline{1, M}$ (M is the number of simulated samples).

4. Compute the mean: $m_N = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \overline{\text{CVaR}}_\alpha^i$.

5. Set $S_n = m_{N_n}$, $n = \overline{1, k+1}$ for some k and $N_1, N_2 \dots N_{k+1}$.

6. Estimate $\overline{\text{CVaR}}_\alpha$ as:

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{k+1} \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \end{vmatrix}}.$$

Kernel method

The kernel method and its modifications are nonparametric methods of pdf estimation. They are based on the integral smoothing with a given kernel of empirical histogram and do not require a priori information about the type of distribution. The advantage of kernel methods is their independence from any information about the data source, as well as the availability of simple semi-analytic expressions for the estimates [12].

Let $K(\cdot)$ denote a symmetric kernel, smoothing function $G(t) = \int_t^\infty K(u) du$, $G_h(t) = G(t/h)$, where h is a suitable bandwidth. Then the smoothed estimate of the loss distribution function is $\overline{F}_X(x) = 1 - S_h(x)$, where $S_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n G_h(x - X_t)$. The kernel estimation for $\overline{\text{VaR}}_\alpha$ is a root of equation: $S_h(x) = 1 - \alpha$, and $\overline{\text{CVaR}}_\alpha$ estimation can be written as:

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{t=1}^n X_t G_h(\overline{\text{VaR}}_\alpha - X_t).$$

The Trimmed kernel method [7] gives the following estimate for $\overline{\text{CVaR}}_\alpha$. Let $X_t^+ = X_t I\{X_t > 0\}$, a sequence $\{k_n\}$ is such that, $k_n \rightarrow \infty$ and $\frac{k_n}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Then:

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n X_i I\{\overline{\text{VaR}}_\alpha(X) \leq X_i \leq X_{(k_n)}^+\}.$$

Application of the extreme value theory to the risk measures var and cvar assessment

As VaR is the quantile (and CVaR is the mean quantile), it is sufficient to study only the right tail of the pdf to get their estimations. Very often loss distributions are skewed and have so-called fat tails. In this case, the use of methods based on a priori assumptions about the normal distributions is untenable, and it makes sense to use Extreme Value Theory (EVT). EVT allows to analyze the extreme, and therefore relatively rare events in the historical data array.

Describe the mathematical formulation of EVT ([20]). Let we have a random variable X with cdf $F(x)$, its sample (X_1, \dots, X_n) and $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

The EVT goal is to find a function $G(x)$, such that, $P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G(x)$, $n \rightarrow \infty$, where $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ are the sequences of constants. According to the Fisher–Tippett theorem, function $G(x)$ belongs to the generalized extreme value (GEV) family of distributions. These distributions have the form:

$$G_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

GEV involves three distributions: the Frechet distribution with «fat» tail if $\xi > 0$, the Gambela distribution with «thin» tail if $\xi < 0$ and the Weibull distribution if $\xi = 0$. The parameter $\alpha = 1/\xi$ is called the tail index (for $\xi > 0$).

A popular method of parameter ξ estimating is the Hill’s non-parametric method [20]. Consider a sample of losses and define the order statistics as $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Then for integer $l > 0$ we have the estimation for ξ as:

$$\widehat{\xi}^{Hill}(l) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l (\ln X_{(n-j+1)} - \ln X_{(n-l)}). \quad \text{It can be shown [3], that}$$

$\sqrt{k} \left[\widehat{\xi}^{Hill}(l) - \xi \right]$ is asymptotically normally distributed $N(0; \xi^2)$. Parameter l can

be found from the plot $(k, \widehat{\xi}^{Hill}(l))$: we select the value of l such that the evaluation $\widehat{\xi}^{Hill}(l)$ appears stable. A more accurate method for finding l using the bootstrap procedure is described in [21]

The following formulas for risk measures estimating can be used [22]:

$$\text{VaR}_\alpha = \exp\left(-\left(\frac{l_{n,\alpha}}{n(1-\alpha)}\right)^{\widehat{\xi}} X_{(l_{n,\alpha})}\right) - 1,$$

$$\text{CVaR}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \exp\left(-\left(\frac{l_{n,\alpha}}{nq}\right)^\xi X_{(l_{n,\alpha})}\right) dq - 1,$$

where $l_{n,\alpha} = [n(1,05 - \alpha)]$.

Block maxima method

According to the block maxima method [20], the sample is divided into m non-overlapping subsamples. For each subsample we find the maximum value $M_n^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$. It is assumed that m is sufficiently large so that the Fisher–Tippett theorem holds for $\{M_n^{(i)}\}$ and the function $GEV_{\mu,\xi,\sigma}(x)$ is the distribution function of maximum values in the sample. To find the estimates of parameters μ, σ, ξ maximum likelihood method can be used. Knowing the $GEV_{\mu,\xi,\sigma}(x)$ distribution the Monte Carlo method or analytical formulas can be used. For example the article [23] presents the next formulas:

$$\text{VaR}_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - \{-\ln \alpha\}^{-\xi}], \tag{10}$$

$$\text{CVaR}_p = \frac{1}{\sigma} \int_{\text{VaR}_p}^{+\infty} x \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi - 1} \exp\left\{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right\} dx, \tag{11}$$

where $p = 1 + (\alpha - 1) \frac{m}{n}$.

The disadvantage of the block maxima method is a potential shortage of extreme values because a single value is determined in each block. The POT (Peaks Over Thresholds) method uses more complete information about the extreme values.

POT–method

In the POT method [20] we choose some high enough threshold u and consider only the sample values above it: $X_i > u$. It can be shown [20], that for large enough u the excess distribution $F_u(y) = P\{X - u \leq y | x > u\}$, $y > 0$ is well approximated by the Generalized Pareto Distribution (GPD) given as:

$$G_{\xi,\beta(u)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - u}{\beta(u)}\right), & \xi = 0; \end{cases} \quad x \in \begin{cases} [u, \infty), & \xi \geq 0, \\ \left[u, u - \frac{\beta(u)}{\xi}\right], & \xi < 0, \end{cases} \quad \beta(u) > 0.$$

The advantage of the POT approach is that the method gives the explicit formulas for VaR and CVaR [20]:

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi} \left[\left(\frac{n(1-\alpha)}{k} \right)^{-\xi} - 1 \right], \quad \overline{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{1-\xi} \text{VaR}_\alpha + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}.$$

The article [24] proposes the POT method with the use of the empirical distribution function. The main idea of the method: the threshold value is displayed as a horizontal line on the plot of sampled values, connected successively. The extreme values are taken as the peak values between two distinct upcrossings. So we get the extreme value sample $\{X_i\}$, $i = \overline{1, N}$. To analyze the getting sample we divide the whole interval into m intervals of the same length so that each interval has at least one peak. Then $n = \frac{N}{m}$ is the average number of peaks for one interval. So we can consider n independent, identically distributed random variables, for which we have N realizations. Then the cdf of all peaks above u is:

$$\overline{F}_\xi(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = [F_{\text{pot}}(x)]^n.$$

The function $F_{\text{pot}}(x)$ can be constructed as an empirical cdf and can be used for VaR and CVaR estimating.

QUANTILE ESTIMATION

Empirical quantile estimation is one of the classic nonparametric methods for VaR and CVaR estimating [3]. As before let X be a random variable. X_1, X_2, \dots, X_n is a sample of its values, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ is the order statistics in ascending order, $f(x)$ and $F(x)$ are the pdf and the cdf respectively. The method is based on the following theoretical result. If $x^{(\alpha)}$ is the α th quantile of $F(x)$ and $f(x^{(\alpha)}) \neq 0$ then

$$X_{(l)} \sim N \left\{ x^{(\alpha)}, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n[f(x^{(\alpha)})]^2} \right\}, \quad l \rightarrow \infty, \quad (12)$$

where $l = n\alpha$. Taking into account (1), the VaR_α estimate can be obtained from (12) using $X_{(l)}$.

If $l = n\alpha$ is not integer, the interpolation can be used for quantile estimation. Let l_1, l_2 be the two neighbouring positive integers such $l_1 < n\alpha < l_2$ and $p_i = \frac{l_i}{n}$, $i = 1, 2$. Then:

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha = \frac{p_2 - \alpha}{p_2 - p_1} X_{(l_1)} + \frac{\alpha - p_1}{p_2 - p_1} X_{(l_2)},$$

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{N_\alpha(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n X_{(i)} I \{X_{(i)} > \overline{\text{VaR}}_\alpha\},$$

where N_α is the number of order statistics larger than $\overline{\text{VaR}}_\alpha$.

If the values of order statistics have different probabilities the risk measures estimates can be obtained as follows. We consider the order statistics:

$\{X_{(1)}, P_{(1)}\}, \dots, \{X_{(n)}, P_{(n)}\}$, $\sum_{i=1}^n P_{(i)} = 1$. Define $p = 1 + (\alpha - 1) \frac{n}{N}$, $\bar{p}^- = \sum_{i=1}^{k^-} P_{(i)} \leq p$, $\bar{p}^+ = \sum_{i=1}^{k^-+1} P_{(i)} \geq p$. Then:

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha = X_{(k^-)} + \frac{X_{(k^-+1)} - X_{(k^-)}}{\bar{p}^+ - \bar{p}^-} (p - \bar{p}^-),$$

$$\overline{\text{CVaR}}_\alpha = \overline{\text{VaR}}_\alpha \cdot \frac{\bar{p}^+ - \bar{p}^-}{p - \bar{p}^-} + \frac{1}{n - k^- - 1} \sum_{i=1}^{n-k^-+1} X_{(k^-+i)} P_{(k^-+i)}.$$

Advantages of the empirical quantile estimation are its simplicity and using no specific distributional assumption. However it has some drawbacks. It assumes that the distribution under sample remains unchanged, that is often not so in practice. Furthermore, if α is close enough to 1 the empirical quantile is not efficient estimate of the theoretical quantile. In practice, $\overline{\text{VaR}}_\alpha$ obtained by the empirical quantile can serve as a lower bound for this risk measure.

ROCKAFELLAR-URYASEV OPTIMIZATION METHOD

Using the definition of VaR_α and CVaR_α in the form of (4) and (5), respectively, the paper [6] proposes the algorithm in the form of the optimization problem for risk measures estimating.

Define the function:

$$F_\alpha(\xi, \beta) = \beta + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{x \in R} [f(\xi, x) - \beta]^+ p(x) dx, \text{ where } [t]^+ = \begin{cases} t, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

It is shown that $F_\alpha(\xi, \beta)$ is a convex and continuously differentiable at β function. In this case:

$$\text{VaR}_\alpha \in \underset{\beta \in R}{\text{argmin}} F_\alpha(\xi, \beta), \quad \text{CVaR}_\alpha = \min_{\beta \in R} F_\alpha(\xi, \beta).$$

$(\text{VaR}_\alpha(X))$ is the left point of the solution set of $\underset{\beta \in R}{\text{argmin}} F_\alpha(\xi, \beta)$.

The integral in (13) can be calculated approximately or exactly. For example, in the case of a discrete sample $\{X_i\}$, $i = 1, n$ the rectangles method will lead to the following formula: $F_\alpha(x, \beta) = \beta + \frac{1}{N(1 - \alpha)} \sum_{k=1}^N [f(\xi, x_k) - \beta]^+$. To solve the optimization problems standard optimization packages such as PSG, Gurobi can be used.

The optimization method can be used with practically no restrictions on the type of the distribution, the sample size, noisy empirical data. However, the use of optimization procedures requires high qualification of the user and access to specialized software (eg PSG). Unfortunately, the well-known packages Matlab and Mathematica allow to solve effectively only linear problems.

APPLICATION OF METHODS OF VAR AND CVAR ESTIMATING

In this section we apply the methods described above for obtaining numerical values of VaR and CVaR for artificial data. The first group of data (N) was modeled on assumption of normal distribution with parameters: $\mu = 0,5; \sigma = 5$. For the second group (T) we use the *t-local-scaled* distribution with the parameters $\mu = 0,5; \sigma = 5, \nu = 4$. 10,000 values were generated in each group, the confidence level was taken as $\alpha = 0,95; \alpha = 0,99$. The results are shown in Tables 1, 2.

Table 1 shows the evaluations of the risk measures obtained with the use of the full cdf. The column Exact in the table shows the exact values (formulas (8), (9)). As representatives of the methods based on the empirical distribution function we use the Historical Simulated method (formulas (6), (7)) — HS, and the Rockafellar–Uryasev discrete method ((9)) — R–U. Estimations PE we receive using (8), where the parameters of the normal distribution are estimated with the maximum likelihood method. Using the estimated distribution for the Monte Carlo method we get the estimates PEMC, and The Richardson's method gives us the estimates PEMCR.

Table 1. The results for VaR_{α} and $CVaR_{\alpha}$ estimating for different methods using the full cdf for different confidence levels

Method/Risk	Exact	HS	R-U	PE	PEMC	PEMCR
VaR _{0,95} (N)	8,72	8,57	8,57	8,52	8,35	8,50
RE	0,00	0,02	0,02	0,02	0,04	0,03
CVaR _{0,95} (N)	10,81	10,57	10,57	10,58	10,49	10,56
RE	0,00	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02
VaR _{0,99} (N)	12,13	12,26	12,25	12,13	12,11	12,17
RE	0,00	-0,01	-0,01	0,00	0,00	0,00
CVaR _{0,99} (N)	13,83	13,93	13,93	13,82	13,95	13,84
RE	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,01	0,00
VaR _{0,95} (T)	11,16	10,99	10,98	11,02	10,95	11,05
RE	0,00	0,02	0,02	0,01	0,02	0,01
CVaR _{0,95} (T)	16,51	15,95	15,95	16,03	16,00	16,11
RE	0,00	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02
VaR _{0,99} (T)	19,23	19,65	19,65	19,07	19,06	19,09
RE	0,00	-0,02	-0,02	0,01	0,01	0,01
C VaR _{0,99} (T)	26,60	26,67	26,67	26,17	26,92	26,12
RE	0,00	0,00	0,00	0,02	-0,01	0,02

Table 2 shows the results obtained by the methods based on the analyzes of the tail of the distribution. Using the method of maximum likelihood we estimate the parameters for GEV (GPD) function. Estimates GEVQ (GPDQ) we get using formulas (10), (11), and the Monte Carlo method gives the estimates GEVMC (GPDMC). The empirical POT method gives POTE estimates.

RE means a relative error.

Table 2. The results for VaR_α and $CVaR_\alpha$ estimating for different methods using the tail of cdf for different confidence levels

Method/Risk	GEVQ	GEVMC	GPDQ	GPDMC	POTE
$VaR_{0,95}$ (N)	7,89	7,88	8,83	8,90	8,71
RE	0,10	0,10	-0,01	-0,02	0,00
$CVaR_{0,95}$ (N)	10,33	10,28	10,96	10,92	10,71
RE	0,05	0,05	-0,01	-0,01	0,01
$VaR_{0,99}$ (N)	12,13	12,19	12,51	12,54	12,45
RE	0,00	-0,01	-0,03	-0,03	-0,03
$CVaR_{0,99}$ (N)	13,82	13,79	13,88	13,78	14,10
RE	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02
$VaR_{0,95}$ (T)	10,96	10,91	11,72	11,83	11,08
RE	0,02	0,02	-0,05	-0,06	0,01
$CVaR_{0,95}$ (T)	15,92	15,95	16,60	16,49	16,06
RE	0,04	0,03	-0,01	0,00	0,03
$VaR_{0,99}$ (T)	19,30	19,30	19,79	19,66	19,67
RE	0,00	0,00	-0,03	-0,02	-0,02
$CVaR_{0,99}$ (T)	24,26	24,71	24,73	24,35	26,79
RE	0,09	0,07	0,07	0,08	-0,01

All calculations performed with Matlab package. The results indicate the correctness of the formulas given in the article. The calculation error is caused by the limited sample and data discretization. It should be noted that the existence of analytical formulas allows to speed up the computation of risk measures, but does not significantly reduce the accuracy of the calculations. For real data results may vary, because of a priori hypotheses about the type of distributions (which can be wrong) and limited sample data.

CONCLUSIONS

The article systematizes and classifies the most common used methods of the risk measures VaR and CVaR calculation and estimation. In recent years, these risk measures have been used to analyze a wide class of data, that caused to a large number of different methodologies giving the ready formulas for their calculating or indicating an algorithm for estimating. However, in most studies, these methods are applied to concrete data with own specifics. That's why despite their universality VaR and CVaR have got a tough bind to specific data. In this paper we describe the methods without reference to the concrete data.

Classification of methods presented in the form of a hierarchical table, that helps to determine the sequence of operations required to obtain VaR and CVaR values depending on the available information about analyzed data, the purpose of analysis and the availability of information and computing resources needed to get the result. Econometric concepts and designations are taken as a basis that helps to use the results of the article in solving applied problems. The analysis allowed to formulate the decision-making procedure for the choice of the method of static VaR and CVaR evaluation. The procedure includes all necessary steps to make a decision, from general statistical data analysis to the choice of a particular method for risk measures estimating.

REFERENCES

1. *RiskMetrics*. Technical Document, 4-th Edition / J.P. Morgan, December 1996. — 296 p.
2. *Dowd K. Measuring Market Risk* / K. Dowd // Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2005. — 410 p.
3. *Tsay R.S. Analysis of Financial Time Series* / R.S. Tsay. — Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2010. — 714 p.
4. *Embrechts P. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. Risk Management: Value at Risk and Beyond* / P. Embrechts, A.J. McNeil, D. Straumann // Cambridge: Cambridge University Press, 2002. — P.176–223.
5. *Artzner P. Coherent measures of risk* / P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath // *Mathematical Finance*. — 1999. — № 9. — P. 203–228.
6. *Rockafellar R.T. Optimization of conditional value-at-risk* / R.T. Rockafellar, S.P. Uryasev // *Journal of Risk*. — 2000. — 2. — P. 21–42.
7. *Nadarajah S. Estimation methods for expected shortfall* / S. Nadarajah, Zhang Bo, S. Chan // *Quantitative Finance*. — 2014. — 14. — P. 271–291.
8. *Yamai Y. Comparative analysis of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition and optimization* / Y. Yamai, T. Yoshida // *Monetary and Economic Studies*. — 2002. — 20(1). — P. 57–86.
9. *Sarykalin S. VaR vs.CVaR* / S. Sarykalin, G. Serraino, S. Uryasev // *Risk Management and Optimization* *Tutorials in Operations Research INFORMS*. — 2008. — P. 270–294.
10. *Згуровський М.З. Основи системного аналізу* / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. — К.: BHV, 2007. — 544 с.
11. *Acerbi C. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk* / C. Acerbi, D. Tasche // *Economic Notes*. — 2002. — 31. — P. 379–388.
12. *Chen S.X. Nonparametric estimation of expected shortfall* / S.X. Chen // *Journal of Financial Econometrics*. — 2008. — 6. — P. 87–107.
13. *Peracchi F. On estimating the conditional expected shortfall* / F. Peracchi, A.V. Tanase // *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. — 2008. — 24. — P. 471–493.
14. *Inui K. On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure* / K. Inui, M. Kijima // *Journal of Banking and Finance*. — 2005. — 29. — P. 853–864.

15. *Меньшиков И.С.* Рыночные риски, модели и методы / И.С. Меньшиков, Д.А. Шелагин. — М.: Росс. академия наук. Вычислит. центр, 2006. — 55 с.
16. *Rockafellar R.T.* Conditional value-at-risk for general loss distributions / R.T. Rockafellar, S.P. Uryasev // *Journal of Banking & Finance*. — 2002. — **26**. — P. 1443–1471.
17. *Kjellson B.* Forecasting Expected Shortfall / B. Kjellson // *Bachelor's Theses in Mathematical Sciences*. — 2013. — K7. — P. 1–39.
18. *Bernardi M.* Risk measures for skew normal mixtures // *Statistics & Probability Letters*. — 2013. — **83** (8). — P. 1819–1824.
19. *Broda S.A.* Expected shortfall for distributions in finance / S.A. Broda, M.S. Paoletta // *Statistical Tools for Finance and Insurance*. — 2011. — P. 57–99.
20. *Zivot E.* Modeling Financial Time Series with S-PLUS / E. Zivot, J. Wang. — New York: Springer-Verlag, 2003. — 705 p.
21. *Danielsson J.* Value at Risk and Extreme Returns / J. Danielsson, C.G. de Vries // *Annales d'economie et de Statistique*. — 2000. — **60**. — P. 236–269.
22. *Embrechts P.* Strategic long-term financial risks: single risk factors / P. Embrechts, R. Kaufmann, P. Patie // *Computational Optimization and Applications*. — 2005. — **32**. — P. 61–90.
23. *Ou S.* Robustness analysis and algorithm of expected shortfall based on extreme-value block minimum model / S. Ou, D. Yi // *Proceedings of the 2009 International Conference*. — 2009.
24. *Rinker J.* Peak-over-Threshold Method for Extreme Values / J. Rinker // *Duke University*. — 2013. — **22**. — P. 1–6.

Resieved 14.06.2016

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 533.9.07:537.533

Моделирование и аппроксимация зависимости тока электронной пушки высоковольтного тлеющего разряда от напряжения на обмотке электромагнитного натекателя как элемента газодинамической системы управления / Мельник И.В., Тугай Б.А., Тугай С.Б. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 7–18.

Рассмотрен метод численного расчета зависимости тока электронной пушки высоковольтного тлеющего разряда от параметров электромагнитного натекателя как элемента газодинамической системы управления. Найдено аналитическое соотношение, с помощью которого можно с высокой точностью аппроксимировать зависимость тока пушки от напряжения на обмотке электромагнитного натекателя. Полученные результаты представляют интерес для проектировщиков электронно-лучевого технологического оборудования. Рис.: 5. Библиогр.: 14.

UDC 533.9.07:537.533

Simulation and approximation of dependence of the current of the high voltage glow discharge electron gun from the voltage on the coil of electromagnetic valve as the element of a gas-dynamic control system / Melnyk I.V., Tuhai B.A., Tuhai S.B. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 3. — P. 7–18.

In the article, the method of numerical calculation of dependence of the current of a high voltage glow discharge electron gun from the parameters of the electromagnetic valve as the element of a gas-dynamic control system is considered. The analytical relation has been obtained which allows to approximate with the high accuracy the dependence of the current of an electron gun from the voltage on the coil of an electromagnetic valve. Obtained results are very interesting to the engineers in the area of designing of electron-beam equipment. Fig.: 5. Refs.: 14 titles.

УДК 681.3

Использование онтологического анализа для оценивания компетентности специалистов по разработке национальных стандартов / Гладун А.Я., Рогущина Ю.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 19–32.

Необходимость и актуальность внедрения национальных стандартов и их гармонизации с международными проанализирована на примере области информационных технологий и тех специфичных проблем, которые возникают при этом. Предложены объективные методы оценки компетентности экспертов и разработчиков национальных стандартов Украины. Представленные методы базируются на семантическом сопоставлении описания стандарта и документов, которые характеризуют компетентность его разработчиков в избранной сфере. Предложено использовать знания, которые приобретаются из открытой среды Web: Wiki-справочники, наукометрические базы, официальные сайты организаций и сопроводительные метаданные, онтологии предметных областей. Для интеграции этих информационных ресурсов разработана специализированная онтология научной деятельности, которая позволяет стандартизировать терминологическую базу описания квалификации потенциальных экспертов. Рис.: 3. Библиогр.: 17.

UDC 681.3

Use of ontological analysis for evaluation of expert competences in the domain of national standards development / Gladun A.Ya., Rogushina J.V. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 3. — P. 19–32.

The necessity and urgency of the implementation of standards and their harmonization with international ones are analyzed using the information technology domain and problems related to it as an example. Objective methods of competence evaluation of experts and developers of Ukrainian national standards are proposed. The methods presented in this article are based on the semantic matching of the standard description with documents that characterize developer expertise in the chosen domain. In addition, we propose to use the knowledge acquired from the open Web environment: Wiki resources, scientometric databases, official sites of organizations and accompanying metadata, domain ontologies, etc. These informational resources are integrated based on the specialized ontology of a scientific activity which allows to standardize the terminology systems of potential experts qualifications. Fig.: 3. Refs.: 17 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND
SOCIAL SYSTEMS

УДК 519.004.942

Емпіричний аналіз активної зони ядерного реактора ЧАЕС за 5 секунд до вибуху / Мацуки Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 33–41.

У дослідженні використано методологію емпіричного аналізу для вивчення перехідних процесів активної зони ядерного реактора за кілька секунд до вибуху під час аварії на Чорнобильській АЕС. Параметри вибрано з опублікованих робіт [1]. Сценарієм цього аналізу передбачено зниження швидкості потоку основного циркуляційного насоса та побудовано регресивні моделі для вивчення цього сценарію. Розглянуто результати застосованої моделі і зроблено висновки про зменшення витрат головного циркуляційного насоса та реактивності протягом останніх кількох секунд до вибуху. Табл.: 8. Бібліогр.: 2.

УДК 519.004.942

Эмпирический анализ активной зоны ядерного реактора ЧАЭС за 5 секунд до взрыва / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 33–41.

В исследовании использована методология эмпирического анализа для изучения переходных процессов активной зоны ядерного реактора за несколько секунд до взрыва во время аварии на Чернобыльской АЭС. Параметры выбраны из опубликованных работ [1]. Сценарием этого анализа предположено снижение скорости потока основного циркуляционного насоса и построены регрессионные модели для изучения этого сценария. Рассмотрены результаты примененной модели и сделаны выводы об уменьшении расходов главного циркуляционного насоса и реактивности в течение последних нескольких секунд до взрыва. Табл.: 8. Библиогр.: 2.

УДК 004.383

Динамічний розподіл робіт по ресурсах в неоднорідній системі з обмеженнями реального часу / Сімоненко В.П., Сергієнко А.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 42–50.

Запропоновано метод динамічного розподілу робіт у неоднорідній обчислювальній системі в реальному часі. Основою методу є попередня підготовка вихідної інформації з урахуванням тривалості планування, складності виконуваних робіт, а також індивідуальних характеристик ресурсів, таких як продуктивність, ємність пам'яті, наявність завантажених математичного забезпечення та початкових даних. Алгоритм такої підготовки полягає у формуванні матриці запасів часу виконання робіт на ресурсах і в послідовності перетворень цієї матриці у матрицю вартостей із застосуванням матриці перевірки конфліктності призначень. Після підготовки інформації завдання планування вирішується угорським алгоритмом пошуку максимального паросполучення у графі. Рис.: 11. Бібліогр.: 8.

UDC 004.383

Dynamical task scheduling in the heterogeneous system with the real time limitations / Simonenko V.P., Sergiyenko A.M. // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 3. — P. 42–50.

A method of dynamic real time scheduling of tasks in a heterogeneous system is considered. The method consists in a preliminary preparation of the initial information set, taking into account the duration of the scheduling, the complexity of tasks, as well as individual resource characteristics such as performance, memory capacity, availability of downloaded software and initial data. The algorithm of this preparation consists in forming a job time reserve matrix and performing a sequence of transformations of this matrix to the cost matrix taking into account the assignment conflict matrix. After preparation of the initial information set, the planning problem is solved by the Hungarian algorithm of finding the maximum bipartite matching. Fig.: 11. Refs.: 8 titles.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМКИ
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF
INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION
MAKING SUPPORT

УДК 519.8:502.3

Принятие решений в природопользовании с учетом риска неиспользованных возможностей на основе попарного сравнения альтернатив / Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д., Стефанишин Д.В. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 3. — С. 51–62.

Обоснована необходимость учета риска неиспользованных возможностей как составляющей полного риска при принятии решений в природопользовании в условиях риска. Сформулированы общие положения и правила и приведены принципиальные обобщения – определения и утверждения, касающиеся принятия решений в природопользовании с учетом риска неиспользованных возможностей. Предложены функции полного риска альтернатив в виде линейных комбинаций, сочетающих системные (собственные) риски альтернатив и риски неиспользованных возможностей, где последние трактуются как выигрышные эффекты отбрасываемых альтернатив. Сформулировано утверждение о том, что множество оптимальных альтернатив по критерию минимального риска как результат решения задачи принятия решений с учетом риска неиспользованных возможностей совпадает с множеством оптимальных альтернатив по критерию максимальной полезности. Приведены способы определения компонент полного риска для заполнения таблиц решений при попарном сравнении альтернатив и предложены алгоритмы выбора оптимальной альтернативы с учетом риска неиспользованных возможностей. Рис.: 4. Табл.: 1. Библиогр.: 14.

UDC 519.8:502.3

Decision-making in natural resources use taking into account the risk of lost opportunities based on pairwise comparison of alternatives / Stefanyshyna-Gavryliuk Yu.D., Stefanyshyn D.V. // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 3. — P. 51–62.

The necessity of consideration of the risk of lost opportunities as a component of the total risk in decision-making in environmental management at risk has been justified. The general terms and regulations are formulated and fundamental generalizations, definitions and assertions regarding decision-making in natural resources use taking into account the risk of lost opportunities are presented. The functions are proposed of the total risk of alternatives as linear combinations that combine system (own) risks of alternatives and risks of lost opportunities where last ones are treated as advantageous effects of alternatives that are rejected. The assertion has been formulated that the set of optimal alternatives on the criterion of minimal risk as a result of solving the problem of decision-making while taking into account the risk of lost opportunities coincides with the set of optimal alternatives on the criterion of the maximum utility. It is shown how to determine

the components of the total risk of alternatives when filling decision tables on pairwise comparisons of alternatives and algorithms are proposed for choosing the optimal alternative in view of the risk of lost opportunities. Fig.: 4. Tabl.: 1. Refs.: 14 titles.

УДК 519.7

Анализ распределения электоральных полей с использованием сетевых структур / Терпиль Е.А., Макаренко А.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 63–71.

Исследованы подходы на основе математического моделирования для анализа распределения электоральных полей. Рассмотрены модели на основе клеточных автоматов и сложных сетей. Клеточные автоматы объясняют образования устойчивых электоральных регионов, однако мало пригодны для реального прогнозирования. Из-за возможности учета неравномерного распространения общественного мнения преимущество отдано сложным сетям. Рассмотрена связь между сообществами в сети и образованием устойчивых электоральных регионов. Предложено использовать модулярность для нахождения границ сообществ и благодаря которым объяснить существующие электоральные поля и предсказать места образования границ новых электоральных регионов. Для верификации выбранного подхода проанализировано распределение электорального поля юга Украины на основе данных парламентских выборов 2014 г. Рис.: 7. Библиогр.: 14.

UDC 519.7

Analysis of the distribution of electoral fields using network structures / Terpil I.O., Makarenko O.S. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 3. — P. 63–71.

Approaches based on mathematical modeling to analyze the distribution of electoral fields were studied. Cellular automata and complex network models were analyzed. Cellular automata explain the formation of stable electoral regions, but are poorly suited for the real prediction. The advantage was given to the networks due to the possibility of taking into account the uneven spread of the public opinion. The connection between network communities and formation of stable electoral regions was considered. It is proposed to use the modularity to find the community boundaries which can explain existed electoral fields and predict the distribution of new electoral regions. To verify the selected approach, the distribution of electoral fields of the south of Ukraine was analyzed using data from parliamentary elections in 2014. Fig.: 7. Refs.: 14 titles.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ
УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM
CONTROL AND THEORY OF GAMES

УДК 519.8

Решение нелинейных оптимизационных задач распределения ресурсов в больших блочно-структурированных системах со связывающими параметрами / Кирик Е.Е. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 72–85.

Решение нелинейных оптимизационных задач блочной структуры со связывающими параметрами (переменными) реализуется путем комбинации аппроксимационного и декомпозиционного подходов. Аппроксимационный метод выбран таким образом, чтобы декомпозицию задачи математического программирования можно было выполнять без каких-либо предположений относительно выпуклости или аддитивной сепарабельности функций критерия и ограничений. Координирующая и блочные подзадачи, служащие вспомогательными в аппроксимационном методе, решаются за конечное число шагов. В ходе вычислений связывающие переменные изменяются от шага к шагу итерационного процесса, обеспечивая монотонное уменьшение значения целевой функции координирующей задачи, т.е. количество общих ресурсов изменяется таким образом, чтобы блочные подсистемы работали все эффективнее с точки зрения эффективности работы всей системы. Библиогр.: 12.

UDC 519.8

Solving resource distribution nonlinear optimization problems in large block-structured systems with binding parameters / Kirik O.E. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 3. — P. 72–85.

Solving non-linear optimization problems with a block structure and binding parameters (variables) is realized by a combination of the approximation and decomposition approaches. The approximation method is chosen so that the decomposition of the mathematical programming problem can be performed without making any assumptions about the convexity or additive separability of objective functions and constraints. The coordinating and block sub-problems that are auxiliary in the approximation method, are solved using a finite number of steps. In the course of calculation, binding variables vary from step to step of the iterative process, providing a monotonic decrease of the value of the coordinating problem objective function; in other words, the amount of shared resources is changed in such a way that block subsystems operate more and more efficiently in terms of the efficiency of the whole system. Refs.: 12 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 681.5.07

Анализ практической устойчивости и чувствительности линейных динамических систем с изменением размерности фазового пространства / Гарашенко Ф.Г., Сопронюк О.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 86–100.

Рассмотрены модели линейных параметрических систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной размерностью фазового пространства. Доказаны теоремы о практической устойчивости линейных параметрических систем с переменной размерностью фазового пространства. Важной есть обратная теорема о практической устойчивости указанных систем. Наведены алгоритмы и критерии анализа практической устойчивости линейных параметрических систем с переменной размерностью фазового пространства при наличии постоянно действующих возмущений. Получены матричные уравнения чувствительности таких систем. Показано, что на основании методов практической устойчивости и условий, которым удовлетворяют матрицы чувствительности, можно эффективно находить оценки параметров для анализа чувствительности систем с переменной размерностью фазового пространства. Результаты работы пригодны для успешного использования при решении задач цифровой обработки информации и распознавания образов. Библиогр.: 16.

UDC 681.5.07

Analysis of the practical stability and sensitivity of linear dynamical systems with change of phase space measurability / Garashenko F.G., Soproniyk O.L. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 3. — P. 86–100.

In this work, the models of linear parametric systems of ordinary differential equations with variable measurability of phase space are investigated. The theorems about the practical stability of linear parametrical systems with variable measurability are proved. It is important that the reverse theorem about practical stability of indicated systems is obtained. The algorithms and criteria of analysis of practical stability of linear parametrical systems with variable measurability of phase space at the presence of constantly occurring perturbations are shown. The matrix equations of sensitivity of linear parametrical systems with variable measurability of the phase space are researched. It was investigated that on the basis of methods of practical stability and conditions which satisfied sensitivity matrices it was possible to effectively find the estimations of parameters for an analysis of the system sensitivity with variable measurability of the

phase space. Results of given investigations can be successfully applied in the tasks of digital data processing and pattern recognition. Refs.: 16 titles.

УДК 519.218.23+517.977.5

Деякі задачі керування неоднорідними процесами народження та загибелі / Андрєєв М.В., Статкевич В.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 101–117.

Для неоднорідних марковських процесів народження та загибелі у випадку постійного відношення c інтенсивностей загибелі та народження розв'язано три задачі керування вибором параметра c . Для задачі мінімізації ймовірності виходу процесу при $t \rightarrow \infty$ зі смуги за допомогою методу золотого перерізу знайдено точки мінімуму у випадку їх наявності, які залежать від конкретних значень порога та інтегральної інтенсивності народження. Для задачі керування вибором параметра c з урахуванням стабілізуючої функції знайдено точку мінімуму та доведено умову її існування; розглянуто важливі окремі випадки. Разом з цією задачею природно розглянуто задачу ідентифікації параметрів для стабілізуючої функції експоненційного зростання. Для задачі мінімізації математичного сподівання моменту виродження за малої ймовірності перевищення порога знайдено умови збіжності математичного сподівання, спрощено умови ймовірності перевищення порога, а сама задача розв'язана у випадку постійної інтенсивності народження. Рис.: 2. Бібліогр.: 17.

UDC 519.218.23+517.977.5

Some control problems for non-homogeneous birth-death processes / Andreev N.V., Statkevych V.M. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 3. — P. 101–117.

We consider non-homogeneous Markov birth-death processes in a case of the constant ratio c of death and birth intensities. We solve three control problems by choosing the parameter c for such processes. We solve the problem of minimizing the probability of moving out of range as $t \rightarrow \infty$. We use the golden section search to find the existing minima, which depend on a threshold value and an integral birth intensity value. We solve the control problem by choosing the parameter c using the stabilization function. The existence of a minimum is proved and the minimum is found; also, important selected cases are considered. The parameter identification problem for an exponential stabilization function is also solved. We solve the problem of minimizing the mean of an extinction time with a small probability of exceeding the threshold. The convergence conditions for the mean are found, the conditions of the threshold exceeding probability are simplified, the problem is solved under an assumption of a constant birth intensity. Fig.: 2. Refs.: 17 titles.

УДК 539.3

Математичне моделювання контактної взаємодії жорсткої основи з приповерхневою осесиметричною виїмкою і електропружного півпростору / Кирилюк В.С., Левчук О.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С. 118–125.

Запропоновано математичну модель контактної взаємодії при стисканні електропружного півпростору з жорсткою основою, що містить осесиметричну положу виїмку (під внутрішнім тиском). Модель враховує зв'язність системи рівнянь електропружності. Розроблено алгоритм розв'язання проблеми. За допомогою подання розв'язання зв'язаної системи рівнянь електропружності та гармонічних функцій спеціального виду знайдено точний розв'язок, визначено геометричні розміри зазору між тілами за відомих стискальних навантажень і внутрішнього тиску. Виявлено ефект зв'язності силових і електричних полів. Як окремий випадок з отриманих виразів знайдено параметри контакту для пружного трансверсально-ізотропного півпростору. Рис.: 2. Бібліогр.: 9.

UDC 539.3

Mathematical modeling of contact interaction of rigid base with surface axially-symmetric groove and electroelastic half-space/ Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 3. — P. 118–125.

The mathematical model of the contact interaction under compression of electroelastic halfspace with the rigid base which contains an axially symmetric sloping groove (under inner pressure) was considered. The model takes into account the connectedness of the electroelastic equation system. The algorithm for solving this problem was developed. By means of solving the coupled equations system of electroelasticity and harmonic functions of a special kind, the explicit solution was found, geometrical parameters of clearance between bodies under known compressure and inner pressure were found. The connectedness effect of force and electric fields was revealed. As a particular case from obtained expressions, the contact parameters for elastic transversally isotropic half-space were found. Fig.: 2. Refs.: 9 titles.

УДК 519.6:519.81

Класифікація методів обчислення та оцінювання мір ризику VaR і CVaR / Зражевська Н.Г., Зражевський О.Г. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 3. — С. 126–141.

Проведено системну класифікацію існуючих підходів знаходження і оцінювання популярних мір ризику VaR і CVaR. Проведено огляд найбільш поширених методів. Для зручності користування розглянуто методи, зведені до спільних економічних позначень і понять, наведено рекомендації щодо використання методів. Коректність розглянутих методів підтверджено в результаті числової апробації. Рис.: 2. Табл.: 2. Бібліогр.: 24.

УДК 519.6:519.81

Классификация методов вычисления и оценивания мер риска VaR и CVaR / Зражевская Н.Г., Зражевский А.Г. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 3. — С. 126–141.

Проведена системная классификация существующих подходов нахождения и оценивания популярных мер риска VaR и CVaR. Проведен обзор наиболее используемых методов. Для удобства пользования рассмотренные методы сведены к общим экономическим обозначениям и понятиям, приведены рекомендации по использованию методов. Корректность предложенных методов подтверждена в результате численной апробации. Рис.: 2. Табл.: 2. Библиогр.: 24.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Андрєєв Микола Варфоломійович,

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу прикладного нелінійного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Гарашенко Федір Георгійович

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Гладун Анатолій Ясонович,

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій і систем Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН України та МОН України, Київ

Зражевська Наталія Григорівна,

аспірантка Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Зражевський Олексій Григорович,

кандидат технічних наук, начальник аналітичного відділу в American Optimal Decisions, Флорида, США

Кирилюк Віталій Семенович,

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАНУ, Україна, Київ

Кірік Олена Євстафіївна,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, вчений секретар Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Левчук Ольга Іванівна,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАНУ, Україна, Київ

Макаренко Олександр Сергійович,

професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу прикладного нелінійного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Мацукі Йошію,

доктор технічних наук, завідувач лабораторії з економетрики і прогнозування у Світовому центрі даних з геоінформатики і сталого розвитку НТУУ «КПІ» України, Київ

Мельник Ігор Віталійович,

доктор технічних наук, доцент кафедри електронних приладів та пристроїв факультету електроніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Рогущина Юлія Віталіївна,

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу інтелектуальних інформаційних систем Інституту програмних систем НАН України, Київ

Сергієнко Анатолій Михайлович,

старший науковий співробітник, доктор технічних наук, старший науковий співробітник кафедри обчислювальної техніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Сімоненко Валерій Павлович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри обчислювальної техніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Сопронюк Ольга Лук'янівна,

аспірантка, асистентка кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Україна, Київ

Статкевич Віталій Михайлович,

кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник відділу прикладного нелінійного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Стефанишин Дмитро Володимирович,

доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

Стефанишина-Гаврилюк Юлія Дмитрівна,

аспірантка Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

Терпіль Євген Олександрович,

аспірант Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Тугай Борис Андрійович,

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Інституту прикладної електроніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ

Тугай Сергій Борисович,

кандидат технічних наук, асистент кафедри електронних приладів та пристроїв факультету електроніки НТУУ «КПІ», Україна, Київ