

## СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО–ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 4

2016

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

**М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ**, акад. НАН України

Заступник головного редактора

**Н.Д. ПАНКРАТОВА**, проф., д.т.н., Україна

Члени редколегії:

**П.І. АНДОН**, акад. НАН України

**А.В. АНІСІМОВ**, чл.-кор. НАН України

**Г.-В. ВЕБЕР**, проф., Турція

**О.Д. ГВІШАНИ**, акад. РАН, Росія

**П.О. КАСЬЯНОВ**, проф., д.ф.-м.н.,  
Україна

**В.М. КУНЦЕВИЧ**, акад. НАН України

**О.А. ПАВЛОВ**, проф., д.т.н., Україна

**Т.Л. СААТІ**, проф., США

**Л. САКАЛАУСКАС**, проф., Литва

**А.М. САЛЕМ**, проф., Єгипет

**І.В. СЕРГІЄНКО**, акад. НАН України

**Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ**, проф., Румунія

**Е.О. ФАЙНБЕРГ**, проф., США

**Я.С. ЯЦКІВ**, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

Навчально-науковий комплекс

«Інститут прикладного системного аналізу»

НТУУ «КПІ» МОН та НАН України

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

http://journal.iasa.kpi.ua

### У номері:

• **Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу**

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних та соціальних системах**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
EDUCATIONAL-SCIENTIFIC COMPLEX  
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»  
AT THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE «KPI»  
OF MES AND NAS OF UKRAINE

## SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 4

2016

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

### EDITORIAL BOARD:

#### The editor – in – chief

**M.Z. ZGUROVSKY,** Academician of  
NASU

#### Deputy editor – in – chief

**N.D. PANKRATOVA,** Prof., Ukraine

#### Associate editors:

**F.I. ANDON,** Academician of  
NASU

**A.V. ANISIMOV,** Correspondent  
member of NASU

**E.A. FEINBERG,** Prof., USA

**A.D. GVISHIANI,** Academician of RAS,  
Russia

**P.O. KASYANOV,** Prof., Ukraine

**V.M. KUNTSEVICH,** Academician of NASU

**A.A. PAVLOV,** Prof., Ukraine

**T.L. SAATY,** Prof., USA

**L. SAKALAUSKAS,** Prof., Lithuania

**A.M. SALEM,** Prof., Egypt

**I.V. SERGIENKO,** Academician of NASU

**H.-N. TEODORESKU,** Prof., Romania

**G.-W. WEBER,** Prof., Turkey

**Ya.S. YATSKIV,** Academician of NASU

### THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,  
av. Peremogy, 37, building 35,  
Educational-Scientific Complex  
«Institute for Applied System Analysis» at the  
National Technical University of Ukraine «KPI»  
of MES and NAS of Ukraine  
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**  
E-mail: [journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua](mailto:journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua)  
<http://journal.iasa.kpi.ua>

### In the issue:

• **Theoretical and applied problems and methods of system analysis**

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

## Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України видає міжнародний науково-технічний журнал

### «СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

#### Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

**Головний редактор журналу** — ректор Національного технічного університету України «КПІ», директор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНІТІ РАН, РІНЦ.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**  
Редактор **Р.М. Шульженко**  
Молодший редактор **Л.О. Тарин**  
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

---

Підписано до друку 15.12.2016. Формат 70x108/16.  
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.  
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

---

Видавництво «Політехніка»  
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.  
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15  
Тел. (044) 204-81-78  
Наклад 120 пр. Зам. № 16-163

## **Dear Readers!**

The Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine is published of the international scientific and technical journal

### **«SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

#### **The main thematic sections of the Journal are the following:**

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

**The editor-in-chief of the Journal** is Rector of the National Technical University of Ukraine «KPI», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

# СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

4 • 2016

## ЗМІСТ

### ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

<i>Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.</i> Синтез следящей системы управления неустойчивыми импульсными процессами в иерархических когнитивных картах сложных систем .....	7
<i>Недашківська Н.І.</i> Оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь .....	14

### ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

<i>Зак Ю.А.</i> Вероятностный подход к оценке перспективности покупки бизнеса конкретным инвестором .....	23
<i>Стефанишин Д.В.</i> Ситуаційно-індуктивне моделювання в задачах екстраполяційного прогнозування за даними моніторингу .....	35
<i>Петренко А.И.</i> Процессно-ориентированное проектирование программных комплексов как систем сервисов .....	46
<i>Мартинюк І.А.</i> Перспективи реалізації вбудованих систем автоматичного розпізнавання мови на базі RISC-мікроконтролерів .....	57

### ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

<i>Гаращенко Ф.Г., Дегтяр О.С.</i> Структурно-параметричне подання даних на основі методів оптимізації другого порядку .....	71
<i>Зайченко Е.Ю., Зайченко Ю.П.</i> Многокритериальные задачи принятия решений в нечетких условиях .....	79
<i>Matsukiv Y., Bidyuk P.I.</i> Analysis of the nuclear reactor core of Chernobyl Power Plant for 5 seconds before explosion with the three-dimensional spherical space .....	88
<i>Махорт А.П.</i> Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів .....	95
<i>Гасанов А.С.</i> Интегрированная система анализа и прогнозирование нестационарных процессов .....	108

### МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

<i>Кирилюк В.С., Левчук О.И.</i> Моделирование контактного взаимодействия пьезоэлектрического полупространства и упругой изотропной основы с приповерхностной выемкой кругового сечения .....	120
<i>Бохонов Ю.Є.</i> Знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку із запізненням .....	133
Реферати .....	141
Відомості про авторів .....	147
Зміст журналу «Системні дослідження та інформаційні технології» за 2016 р. ....	148
Автори статей за 2016 р. ....	150

# SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

4 • 2016

## CONTENTS

<b>THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS</b>	
<i>Romanenko V.D., Milyavsky Y.L.</i> Tracking system design for unstable impulse processes in hierarchical cognitive maps of complex systems .....	7
<i>Nedashkovskaya N.I.</i> Stability of local weights of decision alternatives on basis of pairwise comparison method .....	14
<b>PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS</b>	
<i>Zack Yu.A.</i> A probabilistic approach to the assessment of the prospects of buying the business from the point of view of a particular investor .....	23
<i>Stefanyshyn D.V.</i> Situational and inductive modelling in problems of extrapolation forecasting based on monitoring data .....	35
<i>Petrenko A.I.</i> Process-oriented design of software systems as a system service .....	46
<i>Martynyuk I.A.</i> Prospects for implementing embedded automatic speech recognition systems based on the RISC microcontrollers .....	57
<b>DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS</b>	
<i>Garashchenko F.G., Degtiar O.S.</i> Structural and parametric data representation using the second order optimization method .....	71
<i>Zaychenko E.Yu., Zaychenko Yu.P.</i> Multicriteria decision-making problems under fuzzy conditions .....	79
<i>Matsukiv Y., Bidiuk P.I.</i> Analysis of the nuclear reactor core of Chernobyl Power Plant for 5 seconds before explosion with the three-dimensional spherical space .....	88
<i>Makhort A.P.</i> On algorithms of a determination of equilibrium states of an open economy under presence of monopolies .....	95
<i>Gasarov A.S.</i> Integrated system analysis and forecasting of non-stationary processes .....	108
<b>MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH</b>	
<i>Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.</i> Modeling of contact interaction of piezoelectric half-space and elastic isotropic base with surface groove of circular section .....	120
<i>Bokhonov Yu.I.</i> Finding of periodic solutions of the ordinary nonlinear second order differential equation with the delay .....	133
References .....	141
Information about the authors .....	147
Contents of journal «System Research & Information technologies» over 2016 .....	148
Information about the authors over 2016 .....	150

УДК 681.5  
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.4.01

**СИНТЕЗ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
НЕУСТОЙЧИВЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ПРОЦЕССАМИ  
В ИЕРАРХИЧЕСКИХ КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

**В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МИЛЯВСКИЙ**

**Аннотация.** Рассмотрена проблема следящего управления в когнитивных картах иерархических сложных систем. Динамика свободного движения определенного иерархического уровня системы описывается неустойчивым импульсным процессом в когнитивной карте. Задающее воздействие, формирующееся на высшем уровне иерархии, имеет скачкообразный характер. Введена эталонная модель характеристического полинома замкнутой системы по каналу «задающее воздействие — ошибка регулирования». Найден закон управления, позволяющий выходным координатам когнитивной карты отслеживать изменение задающего воздействия. В качестве примера рассматривается управление когнитивной картой коммерческого банка на определенном иерархическом уровне банковской системы. С помощью моделирования показана эффективность предложенного метода.

**Ключевые слова:** когнитивная карта, иерархическая система, следящая система, неустойчивый импульсный процесс.

**ВВЕДЕНИЕ**

В качестве средства моделирования сложных систем используются когнитивные карты (КК), которые представляют собой взвешенные ориентированные графы, вершины которых отражают координаты сложных систем, а ребра — связи между ними. В процессе функционирования сложной системы под влиянием различных возмущений координаты вершин КК изменяются во времени. Процесс распространения возмущений по вершинам КК называется импульсным процессом [1]. Правило изменения значений координат вершин КК при импульсном процессе принято формулировать в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях переменных:

$$\Delta y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta y_j(k), \quad (1)$$

где  $\Delta y_i(k) = y_i(k) - y_i(k-1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В векторной форме выражение (1) записывается следующим образом:

$$\Delta \bar{y}(k+1) = A \Delta \bar{y}(k), \quad (2)$$

где  $A$  — транспонированная весовая матрица смежности КК;  $\Delta \bar{y}$  — вектор приращений значений  $y_i$  вершин КК при  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Модель импульсного процесса КК (2) в полных координатах вершин имеет вид [2]:

$$[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2}] \bar{y}(k) = 0, \quad (3)$$

где  $q^{-1}$  — оператор обратного сдвига на один период дискретизации.

При этом корни  $\det[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2}] = 0$  по модулю могут быть больше единицы, что приводит к неустойчивости выражения (3). Для стабилизации координат процесса (3) формируется вектор внешних управлений, которые в замкнутой системе управления воздействуют непосредственно на вершины КК  $y_i(k)$ . Тогда математическая модель динамики вынужденного движения вершин КК при импульсном процессе под воздействием внешних управлений в работе [2] представлена как

$$[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2}] \bar{y}(k) = Bq^{-1} \bar{u}(k), \quad (4)$$

где диагональная матрица  $B$  выбирается проектировщиком системы управления и на начальном этапе проектирования  $B = I$ .

В работах [2, 3, 4] предложены методы стабилизации неустойчивых импульсных процессов, а также методом управления соотношениями координат вершин одной КК и взаимодействующих КК в режиме импульсных процессов на основе применения эталонных моделей динамики замкнутых систем управления и минимизации квадратичных критериев оптимальности.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [5] рассмотрено теоретико-игровое моделирование взаимодействия сложных систем, представляемых иерархическими когнитивными моделями, на примере системы малого и среднего предпринимательства. Однако задача следящего управления координатами КК на заданном уровне иерархии до настоящего времени не рассматривалась. Актуальность этой задачи является очевидной, поскольку в иерархических когнитивных моделях сложных систем возникает необходимость немедленной реализации на заданном уровне иерархии командных сигналов, которые формируются на более высоком уровне иерархии. Предполагается, что исходная модель импульсного процесса (3), (4) в КК на заданном уровне иерархии является неустойчивой.

**Цель работы** — зная динамику неустойчивого импульсного процесса КК (3) на заданном уровне иерархии, разработать следящую систему управления, которая обеспечивает отслеживание координатами вершин  $y_i$  скачкообразных изменений задающих воздействий  $G_i$ , которые формируются на более высоком иерархическом уровне.



## РАЗРАБОТКА СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Исходная математическая модель управляемого импульсного процесса КК на заданном уровне иерархии имеет вид (4). Эту модель можно представить через оператор прямого смещения  $q$  :

$$[Iq^2 - (I + A)q + A]\bar{y}(k) = qB\bar{u}(k). \quad (5)$$

На основе модели (5) матричная дискретная передаточная функция КК в режиме импульсных процессов будет иметь вид

$$W(z) = [Iz^2 - (I + A)z + A]^{-1}zB. \quad (6)$$

Для реализации следящей системы управления необходимо выполнить синтез замкнутого контура управления координатами вершин на заданном уровне иерархии в виде структурной схемы (рис. 1).

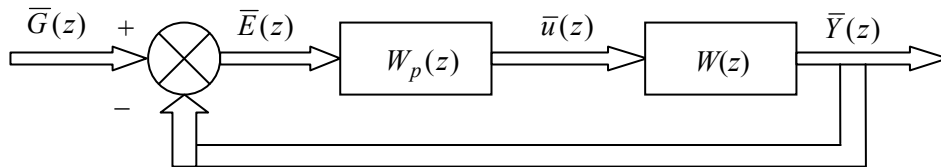


Рис. 1. Контур управления КК:  $W_p(z)$  — дискретная передаточная функция синтезируемого следящего регулятора;  $\bar{G}(z)$  — вектор задающих воздействий, формирующийся на более высоком уровне иерархической когнитивной модели

Составляющие вектора  $\bar{G}(z)$  (рис. 1) изменяются скачкообразно, как командный сигнал. Это изменение задающих воздействий необходимо немедленно выполнять. Математическая модель скачкообразного изменения  $i$ -й составляющей вектора  $\bar{G}(z)$  в форме  $z$ -преобразования имеет такой вид:

$$G_i(z) = \frac{\Delta G_i z}{z - 1}, \quad (7)$$

где  $\Delta G_i$  — величина скачкообразного изменения  $G_i$ . Полюс передаточной функции  $G_i(z)$  равен единице, что характеризует изменение функции  $G_i(t)$  на границе устойчивости. Если учесть то обстоятельство, что импульсный процесс в КК на данном уровне является неустойчивым, то изменение командного сигнала  $G_i(z)$  на границе устойчивости внесет дополнительную дестабилизацию в динамику управляемой системы импульсным процессом КК.

Матричная дискретная передаточная функция замкнутой системы управления по каналу  $\bar{G}(z) \rightarrow \bar{E}(z)$  будет равна

$$W_E(z) = (I + W(z)W_p(z))^{-1}. \quad (8)$$

С учетом (6) функцию (8) можно записать так:

$$W_E(z) = (I + (Iz^2 - (I + A)z + A)^{-1}zBW_p(z))^{-1}. \quad (9)$$

Если принять во внимание, что матричный полином

$$Iz^2 - (I + A)z + A = (z - 1)(zI - A), \quad (10)$$

выражение (9) после преобразований примет вид

$$W_E(z) = ((z - 1)(zI - A) + zBW_p(z))^{-1}(zI - A)(z - 1). \quad (11)$$

Здесь  $(z - 1)(zI - A) + zBW_p(z)$  — характеристический матричный полином замкнутой системы управления.

Введем эталонную модель характеристического полинома

$$A_M(z) = (z - 1)(zI - A) + zBW_p(z), \quad (12)$$

при этом корни  $\det A_M(z) = 0$  должны быть выбраны проектировщиком в пределах  $|z_i| < 1$ . Тогда матричную дискретную передаточную функцию (11) можно записать как

$$W_E(z) = A_M^{-1}(z)(zI - A)(z - 1). \quad (13)$$

Если учесть, что  $\bar{E}(z) = W_E(z)\bar{G}(z)$ , для модели (7) в замкнутой системе (13) будет нейтрализовано влияние корней  $z_i = 1$  составляющих скачкообразного изменения задающих воздействий.

Синтез дискретного регулятора выполняем на основе равенства (8):

$$W_p(z) = W^{-1}(z)W_E^{-1}(z)(I - W_E(z)). \quad (14)$$

Подставляем в равенство (14) выражения (6) и (13) при учете (10) и после преобразований получаем:

$$W_p(z) = z^{-1}B^{-1}(A_M(z) - (zI - A)(z - 1)). \quad (15)$$

В соответствии со структурой характеристического полинома (12) формируем структуру эталонной модели:

$$A_M(z) = z^2I + A_{M_1}z + A_{M_2}.$$

Тогда закон управления дискретного регулятора (15) приобретает форму

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= z^{-1}B^{-1}(z^2I + A_{M_1}z + A_{M_2} - z^2I + (I + A)z - A)\bar{E}(z) = \\ &= B^{-1}((A_{M_2} - A)z^{-1} + (I + A + A_{M_1}))\bar{E}(z). \end{aligned}$$

При выборе  $B = I$  закон управления в следящей системе примет окончательный вид:

$$\bar{u}(z) = ((A_{M_2} - A)z^{-1} + (I + A + A_{M_1}))\bar{E}(z). \quad (16)$$

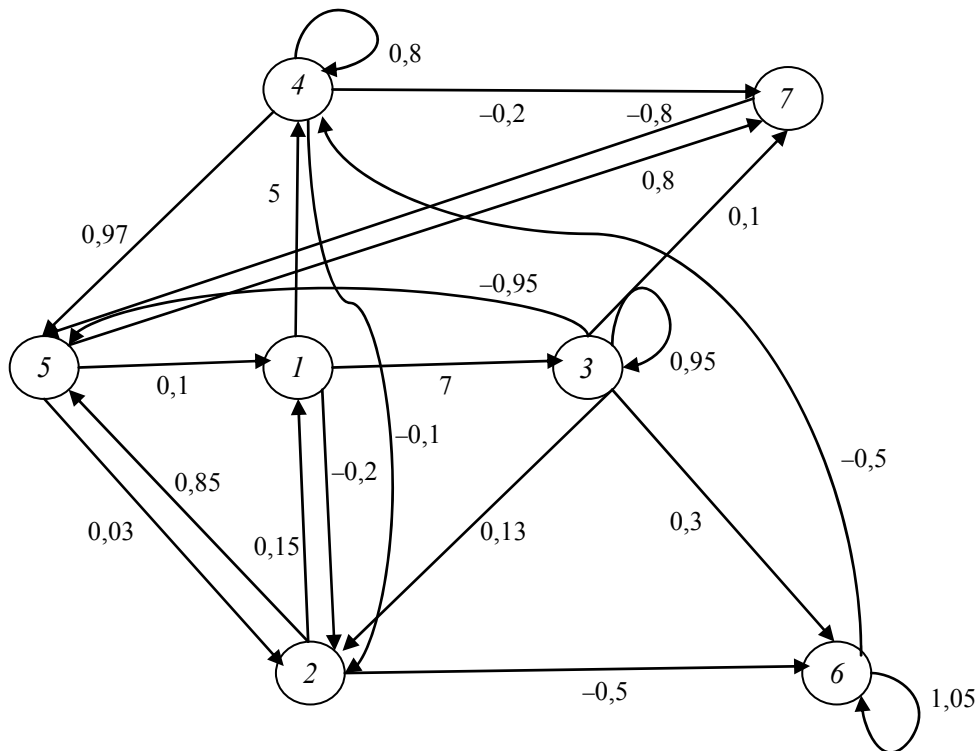


Рис. 2. Когнитивная карта для коммерческого банка: 1 — региональная сеть; 2 — капитал; 3 — кредиты; 4 — депозиты; 5 — ликвидные активы; 6 — мера риска стабильности; 7 — мера риска ликвидности

### ПРИМЕР

Рассмотрим КК [3], описывающую в первом приближении работу коммерческого банка (рис. 2).

Весовая матрица смежности этой КК имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0,85 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,13 & 0,95 & 0 & -0,95 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0,8 & 0,9 & 0 & -0,2 \\ 0,1 & 0,03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 1,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы равны  $0,1127 \pm 0,7289i$ ;  $-0,0873 \pm 0,1701i$ ;  $0,6415$ ;  $1,0538 \pm 0,3134i$  (по модулю больше единицы). Следовательно, система неустойчива. Примем начальные значения вектора координат вершин КК равными 100; 500; 1500; 1000; 200; 150; 250. Изменяемыми и управляемыми являются все вершины. В качестве эталонной модели замкнутой системы возьмем диагональный матричный полином с по-

линомами второго порядка на главной диагонали, имеющими следующие корни: 0,1; 0,1; 0,3; 0,4; 0,2; 0,2; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,1; 0,1; 0,5; 0,6.

Предположим, что КК на рис. 2 описывает отдельный филиал банка или один банк в банковской группе. Тогда ее можно рассматривать как низший уровень иерархии в сложной иерархической системе. Пусть в качестве задающих воздействий, действующих с верхнего уровня иерархии (главного офиса банка или банковской группы) на эту КК, является серия скачкообразных изменений. Тогда можно применить закон управления (16). В итоге получим графики изменения координат вершин КК (рис. 3, сплошная линия) и задающих воздействий (рис. 3, пунктирная линия).

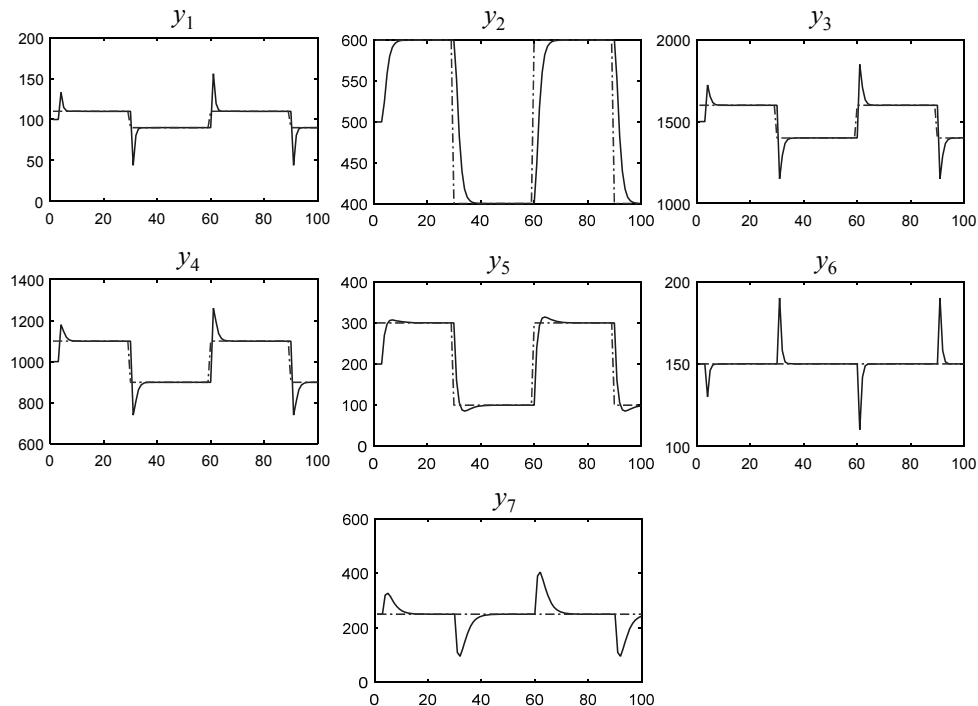


Рис. 3. Графики изменения координат вершин КК

Можно видеть, что все изменения отслеживаются достаточно быстро и точно. Колебания вершин  $y_6$  и  $y_7$ , несмотря на отсутствие изменений задающего воздействия, являются неизбежными ввиду природы этих вершин, поскольку риски стабильности и ликвидности не могут не колебаться при изменении остальных вершин. Однако и они в итоге остаются на исходных стабильных уровнях.

## ВЫВОДЫ

В работе рассмотрены вопросы следящего управления неустойчивыми импульсными процессами на определенном уровне иерархии в КК сложных систем, когда вектор задающих воздействий для замкнутой системы управления изменяется скачкообразно. Основная цель синтеза системы управления состоит в формировании закона управления, который обеспечивает вы-

сокое качество отслеживания вектором выходных координат замкнутого контура скачкообразных изменений вектора задающих воздействий. Для решения этой задачи динамика импульсного процесса КК представлена в форме модели типа «вход – выход» в полных значениях координат вершин КК. Для обеспечения устойчивости замкнутой системы управления, которая представлена матричной дискретной передаточной функцией по каналу «вектор задающих воздействий – вектор ошибок регулирования», сформирована эталонная модель характеристического матричного полинома с наперед заданными значениями корней (поллюсов) замкнутой системы. На основе данной эталонной модели выполнен синтез цифрового регулятора. Рассмотрен практический пример КК функционирования коммерческого банка на определенном иерархическом уровне банковской системы. На основе цифрового моделирования проведено исследование следящей замкнутой системы управления при неустойчивом импульсном процессе в КК путем формирования скачкообразных изменений вектора задающих воздействий на более высоких уровнях иерархии многоуровневой иерархической КК.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф.С. Робертс; пер. с англ. — М.: Наука, 1986. — 496 с.
2. Романенко В.Д. Управление соотношениями координат когнитивной модели сложной системы при неустойчивом импульсном процессе / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 1. — С. 121–129.
3. Романенко В.Д. Метод адаптивного управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах на основе эталонных моделей / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский, А.А. Реутов // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 2. — С. 35–45.
4. Романенко В.Д. Адаптивное координирующее управление соотношениями координат вершин взаимодействующих когнитивных карт в режиме импульсных процессов / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 3. — С. 109–120.
5. Горелова Г.В. Теоретико-игровое моделирование взаимодействия сложных систем, представляемых иерархическими когнитивными картами / Г.В. Горелова, И.С. Горелова, Е.Н. Захарова // Инновационное развитие социально-экономических систем на основе методологий предвидения и когнитивного моделирования. — К.: Наук. думка, 2015. — С. 122–131.

*Поступила 07.10.2016*

## ОЦІНЮВАННЯ СТІЙКОСТІ ЛОКАЛЬНИХ ВАГ АЛЬТЕРНАТИВ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ

Н.І. НЕДАШКІВСЬКА

**Анотація.** Розроблено метод оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень за якісною характеристикою на основі методу парних порівнянь RGMM, який включає оцінювання стійкості локального ранжування альтернатив рішень до змін в експертних оцінках парних порівнянь і оцінювання стійкості узгодженості множини експертних оцінок парних порівнянь до зміни окремих оцінок. Отримано розрахункові формули для інтервалів стійкості елементів матриці парних порівнянь (оцінок експертів) щодо зміни локального ранжування альтернатив рішень. Побудовано інтервали стійкості, що дозволяють знайти критичні елементи задачі, які є експертними оцінками парних порівнянь, чутливими до зміни локального ранжування альтернатив, та експертними оцінками, що характеризуються найбільшою неузгодженістю.

**Ключові слова:** інтервал стійкості експертних оцінок парних порівнянь, узгодженість експертних оцінок парних порівнянь, стійкість ранжування, індекс стійкості, метод RGMM

### ВСТУП

Метод парних порівнянь використовують для розв'язання слабоструктурованих задач підтримання прийняття рішень — для розрахунку відносних ваг альтернатив рішень за якісною характеристикою (критерієм рішень), коли вхідною інформацією є експертні оцінки альтернатив. Цей метод входить до сучасних технологій підтримання прийняття рішень, що ґрунтуються на ієрархічній [1–3] або мережевій [4] структурі критеріїв рішень, технологій PROMETHEE [5], ELECTRE [6] та інших [7], систем підтримання прийняття рішень SuperDecisions [8], Decision Lens [9] та MakeltRational [10].

Суть методу: експерт попарно порівнює всі або окремі пари альтернатив рішень, використовуючи певну шкалу; оцінки експертів організовують у матрицю парних порівнянь (МПП) спеціальної структури і на її основі розраховують коефіцієнти відносних значущостей (локальних ваг) альтернатив.

Умовно можна виокремити дві групи методів парних порівнянь залежно від кількості інформації, яку має надати експерт. Так, методи типу «трикутник» для обчислення ваг  $n$  альтернатив потребують надлишкової кількості  $n(n-1)/2$  експертних оцінок, які використовуються для оцінювання узгодженості знань експерта. До методів парних порівнянь типу «трикутник» належать EM [1, 2] і RGMM [2]. Відповідно до методів типу «лінія» [3, 7] ваги  $n$  альтернатив обчислюються на основі  $n-1$  експертних оцінок парних порівнянь і припускається повна узгодженість знань експерта. Порівняння результатів, отриманих за методами цих двох типів [11] шляхом моделювання діяльності експерта високої компетентності за шкалою Сааті, показало, що вимога повної узгодженості експертних оцінок парних порів-

нянь може внести додаткову помилку в побудову МПП і, як наслідок, у результуючі ваги. Тому методи типу «лінія» в цій роботі не розглядаються.

Метод «трикутник» обґрунтований тільки для МПП з невеликим рівнем неузгодженості [1, 4]. У праці [12] запропоновано метод розрахунку ваг альтернатив рішень за якісним критерієм, який включає етапи оцінювання та коректного підвищення узгодженості МПП залежно від її властивостей.

Для дослідження достовірності отриманого за допомогою методу парних порівнянь розв'язку доцільно визначити залежність між результатами методу та ступенем неточності початкових даних — експертних оцінок. У праці [13] введено поняття інтервалу стійкості (*stability interval*) оцінки експерта, у межах якого може змінюватися ця оцінка так, щоб неузгодженість всієї множини оцінок залишалася прийнятною.

**Мета роботи** — розширення підходу, запропонованого у праці [13], через уведення інтервалів стійкості, які зберігають ранжування альтернатив. У роботі пропонується метод оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь, який включає: 1) оцінювання стійкості локального ранжування альтернатив рішень до змін в експертних оцінках парних порівнянь; 2) оцінювання стійкості узгодженості множини експертних оцінок парних порівнянь до зміни окремих оцінок.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай  $D = \{(d_{ij}) | i, j = 1, \dots, n\}$  — МПП побудована на основі експертних оцінок парних порівнянь альтернатив рішень  $a_1, a_2, \dots, a_n$  щодо спільної для них характеристики (критерію рішень). Використовуючи метод геометричної середньої (RGMM), ненормовані локальні ваги  $v_1, v_2, \dots, v_n$  альтернатив розраховують за формулою

$$v_i = \left( \prod_{k=1}^n d_{ik} \right)^{1/n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

У задачах підтримання прийняття рішень будується локальне ранжування альтернатив у міру спадання цих ваг, де у ранжуванні найкращій альтернативі відповідає найбільша вага. Дослідимо наскільки це ранжування є стійким до зміни оцінок експертів — елементів МПП, зокрема: 1) чи залишається незмінною найкраща альтернатива рішень; 2) чи залишається незмінним усе ранжування альтернатив.

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

**Означення 1.** *Інтервалом стійкості експертних оцінок парних порівнянь щодо збереження ранжування альтернатив (RSInt)* назвемо діапазон, у межах якого може змінюватися оцінка експерта так, щоб локальне ранжування альтернатив залишалася незмінним.

**Означення 2.** *Інтервалом стійкості експертних оцінок парних порівнянь щодо збереження узгодженості (CSIInt)* називається діапазон, у межах якого може змінюватися оцінка експерта так, щоб ступінь неузгодженості всієї множини оцінок не перевищував заданого порогового значення [13].

**Означення 3.** *Інтервалом стійкості (SInt) експертних оцінок парних порівнянь називається інтервал, який є перетином інтервалів RSInt і CSInt.*

Позначимо через  $[\underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij}]$  інтервал стійкості RSInt для оцінки  $d_{ij}$ . Без утрати загальності вважатимемо, що альтернативи перенумеровано в міру спадання значущості, тобто ранжування альтернатив має вигляд

$$a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n, \tag{2}$$

де  $a_1$  і  $a_n$  — найкраща і найгірша альтернативи рішень відповідно. У термінах ваг (2) це означає, що  $v_i > v_j$  для  $i < j$ .

Спочатку розглянемо випадок, коли зі зміною елемента МПП найкраща альтернатива  $a_1$  залишається незмінною. Нехай елемент  $d_{1j}$  МПП,  $j \neq 1$  змінюється в інтервалі  $[\underline{d}_{1j}, \overline{d}_{1j}]$ . Тоді згідно з методом RGMM (1) змінюються ваги альтернатив  $a_1$  і  $a_j$ . Ці нові ваги змінюються в інтервалах; позначимо їх як  $v'_1 = [\underline{v}_1, \overline{v}_1]$ ,  $v'_j = [\underline{v}_j, \overline{v}_j]$ , де

$$\underline{v}_1 = \left(\frac{d_{1j}}{\overline{d}_{1j}}\right)^{1/n} v_1 \quad \text{і} \quad \overline{v}_1 = \left(\frac{\overline{d}_{1j}}{d_{1j}}\right)^{1/n} v_1; \tag{3}$$

$$\underline{v}_j = \left(\frac{d_{j1}}{\overline{d}_{j1}}\right)^{1/n} v_j = \left(\frac{d_{1j}}{\overline{d}_{1j}}\right)^{1/n} v_j \quad \text{і} \quad \overline{v}_j = \left(\frac{\overline{d}_{j1}}{d_{j1}}\right)^{1/n} v_j = \left(\frac{d_{1j}}{\underline{d}_{1j}}\right)^{1/n} v_j. \tag{4}$$

Шукаємо інтервал  $[\underline{d}_{1j}, \overline{d}_{1j}]$  такий, що найкраща альтернатива не змінюється, тобто  $v'_1 > v'_j$ ,  $j \neq 1$  і  $v'_1 > v'_k$ ,  $k \neq j \neq 1$ . Це еквівалентно виконанню двох умов:

$$\underline{v}_1 > \overline{v}_j; \quad \underline{v}_1 > v_k, \tag{5}$$

де  $k \neq j \neq 1$ .

Підставимо в нерівності (5) вирази (3) і (4), отримаємо обмеження для лівого кінця інтервалу стійкості RSInt:

$$\underline{d}_{1j} > d_{1j} \left(\frac{v_j}{v_1}\right)^{n/2}; \quad \underline{d}_{1j} > d_{1j} \left(\frac{v_k}{v_1}\right)^n. \tag{6}$$

На правий кінець інтервалу стійкості не встановлено обмежень, тому вважатимемо, що він дорівнює найбільшому допустимому значенню, а саме: найбільшому значенню шкали Сааті, яку експерт використовує для оцінювання:  $\overline{d}_{1j} = 9$ . Порівнюючи праві частини нерівностей (6), сформулюємо твердження 1.

**Твердження 1.** *Інтервал стійкості  $(\underline{d}_{1j}, \overline{d}_{1j}]$  для оцінки експерта  $d_{1j}$ ,  $j \neq 1$ , за якого не змінюється найкраща альтернатива  $a_1$  в ранжуванні альтернатив  $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$ , коли для розрахунку ваг використовується метод RGMM, розраховується за формулами:*



$$\underline{d}_{1j} = \max(L_j^1, L_j^2), \quad \overline{d}_{1j} = 9,$$

$$\text{де } L_j^1 = d_{1j} \left( \frac{v_j}{v_1} \right)^{n/2}, \quad L_j^2 = \max_{k \neq j \neq 1} \left( d_{1j} \left( \frac{v_k}{v_1} \right)^n \right).$$

Використовуючи аналогічні міркування для розрахунку інтервалів стійкості RSInt, отримаємо твердження 2 і 3.

**Твердження 2.** Інтервал стійкості  $(\underline{d}_{kj}, \overline{d}_{kj})$  для оцінки експерта  $d_{kj}$ ,  $k \neq j \neq 1$ , за якого не змінюється найкраща альтернатива  $a_1$  в ранжуванні альтернатив  $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$ , коли для розрахунку ваг використовується метод RGMM:

$$\underline{d}_{kj} = d_{kj} \left( \frac{v_j}{v_1} \right)^n, \quad \overline{d}_{kj} = d_{kj} \left( \frac{v_1}{v_k} \right)^n.$$

**Твердження 3.** Інтервал стійкості  $(\underline{d}_{kj}, \overline{d}_{kj})$  для оцінки експерта  $d_{kj}$ ,  $k < j$ , за якого ранжування альтернатив  $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$  залишається незмінним, коли для розрахунку ваг використовується метод RGMM:

$$\underline{d}_{kj} = d_{kj} \left( \frac{v_j}{v_k} \right)^{n/2}, \quad \text{якщо } k+1 = j;$$

$$\underline{d}_{kj} = \max(L_{kj}^1, L_{kj}^2), \quad \text{якщо } k+1 \neq j, \quad \text{де } L_{kj}^1 = d_{kj} \left( \frac{v_{k+1}}{v_k} \right)^n, \quad L_{kj}^2 = d_{kj} \left( \frac{v_j}{v_{j-1}} \right)^n;$$

$$\overline{d}_{kj} = \min(U_{kj}^1, U_{kj}^2), \quad \text{де } U_{kj}^1 = d_{kj} \left( \frac{v_j}{v_{j+1}} \right)^n, \quad \text{якщо } j < n, \quad U_{kj}^2 = d_{kj} \left( \frac{v_{k-1}}{v_k} \right)^n.$$

**Означення 4.** Індекс стійкості локального ранжування (RSInd) для елемента  $d_{kj}$  МПП  $D$  визначимо як

$$I_{kj} = \min((\underline{d}_{kj})^{-1}, \overline{d}_{kj}).$$

Перейдемо до розрахунку інтервалів стійкості ACSInt експертних оцінок парних порівнянь, які зберігають узгодженість цих оцінок. Як міру незгодженості використаємо геометричний індекс  $GCI$ :

$$GCI = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i < j} (\ln e_{ij})^2,$$

де  $e_{ij} = d_{ij} \frac{v_j}{v_i}$  — помилка апроксимації відношення ваг  $\frac{v_j}{v_i}$  за допомогою елемента  $d_{ij}$  МПП із застосуванням методу RGMM для розрахунку ваг.

Позначимо через  $[\underline{\delta}_{rs}(\Delta), \overline{\delta}_{rs}(\Delta)]$  інтервал стійкості для оцінки експерта  $d_{rs}$  за заданого  $\Delta$ , де  $\Delta$  — обмеження на значення  $GCI$ ,  $GCI' - GCI < \Delta$ ;  $GCI'$  — нове значення  $GCI$  для МПП після зміни оцінки  $d_{rs}$ .

**Означення 5.** Абсолютний інтервал стійкості (*ACSIInt*) для оцінки  $d_{rs}$ ,  $r \neq s \neq 1$ , за заданого  $\Delta$  визначено  $[\underline{\gamma}_{rs}(\Delta), \overline{\gamma}_{rs}(\Delta)]$ , де  $\underline{\gamma}_{rs}(\Delta) = d_{rs} \delta_{rs}(\Delta)$ ,  $\overline{\gamma}_{rs}(\Delta) = d_{rs} \overline{\delta}_{rs}(\Delta)$ .

Інтервали стійкості експертних оцінок щодо їх узгодженості розраховуються на основі таких тверджень.

**Твердження 5** [13]. Якщо елемент  $d_{rs}$  МПП  $D$  змінено і нове значення дорівнює  $d'_{rs}$  ( $r \neq s \neq 1$ ), то геометричний індекс узгодженості *GCI* МПП змінюється на величину

$$GCI' - GCI = \frac{2n}{(n-1)(n-2)} \ln(\rho) \ln((e_{rs})^2 \rho^{n-2}),$$

де  $\rho = \left(\frac{d'_{rs}}{d_{rs}}\right)^{1/n}$ ,  $e_{rs} = d_{rs} \frac{v_s}{v_r}$ .

**Твердження 6** [13]. Відносний інтервал стійкості для елемента  $d_{rs}$  МПП,  $r \neq s \neq 1$ , за заданого рівня  $\Delta$  для *GCI* розраховується таким чином:

$$\underline{\delta}_{rs}(\Delta) = \exp(n \ln(\rho_{\min})), \quad \overline{\delta}_{rs}(\Delta) = \exp(n \ln(\rho_{\max})),$$

де  $[\ln \rho_{\min}, \ln \rho_{\max}]$  — інтервал для  $\ln \rho_{rs}$ , який визначається з нерівності другого порядку:

$$\frac{2n}{(n-1)(n-2)} [(n-2)(\ln \rho_{rs})^2 + 2 \ln e_{rs} \ln \rho_{rs}] \leq \Delta. \quad (7)$$

У нерівності (7) вільний член  $(-\Delta)$  від'ємний, тому гарантується існування розв'язку  $\ln \rho_{\min}$  і  $\ln \rho_{\max}$  цієї нерівності. Позначимо:  $\Delta' = \frac{(n-1)(n-2)}{2n} \Delta$ . Розв'язок останньої нерівності відповідає тим точкам, у яких парабола  $(n-2)(\ln \rho_{rs})^2 + 2 \ln e_{rs} \ln \rho_{rs} - \Delta'$  набуває від'ємних значень. Оскільки вільний член  $-\Delta'$  від'ємний, то гарантовано існує два розв'язки для  $\ln \rho_{rs}$  — додатний і від'ємний — і як наслідок два значення  $\rho_{\min}$  і  $\rho_{\max}$  — більше і менше за одиницю відповідно. Ці значення дозволяють отримати  $\underline{\delta}_{rs}(\Delta)$  і  $\overline{\delta}_{rs}(\Delta)$  на основі твердження 6.

**Означення 6.** Індекс стійкості за узгодженістю (*CSInd*) для елемента  $d_{rs}$  МПП  $D$  за заданого  $\Delta$  [13]

$$\delta_{rs} = \min((\underline{\delta}_{rs})^{-1}, \overline{\delta}_{rs}).$$

Слід зазначити, що для  $n = 3$  за умов твердження 6 індекси стійкості за узгодженістю для трьох елементів  $d_{12}$ ,  $d_{23}$ ,  $d_{13}$  МПП  $D$  збігаються.

## ІНТЕРВАЛИ СТІЙКОСТІ ДЛЯ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ РІЗНОГО РІВНЯ УЗГОДЖЕНОСТІ

Розглянемо декілька МПП, побудованих на основі експертних оцінок парних порівнянь за шкалою Сааті. Для оцінювання узгодженості цих МПП

використаємо показник  $GCI$ , а для розрахунку ваг на основі МПП — метод RGMM. Для елементів кожної з цих МПП знайдемо інтервали стійкості  $RSInt$ ,  $ACSInt$  і  $SInt$  та індекси стійкості  $CSInd$ .

Покажемо, що індекс стійкості  $CSInd$  дозволяє визначити найбільш критичні за критерієм узгодженості елементи МПП.

**Приклад:**

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця парних порівнянь  $D_1$  є узгодженою ( $GCI = 0$ ), а МПП  $D_2$  і  $D_3$  — неузгодженими, побудованими шляхом збурення елементів  $d_{14}$  і  $d_{24}$  МПП  $D_1$  з дотриманням вимоги, щоб ці МПП були слабоузгодженими [14], а також допустимо неузгодженими за показником  $GCI$  (виконується  $GCI < GCI^{пор}$ , де  $GCI^{пор}$  — порогове значення). Значення параметра  $\Delta$  при розрахунку інтервалів стійкості  $ACSInt$  задамо як  $\Delta = GCI^{пор} - GCI(D)$ ,  $\Delta > 0$ .

Інтервали стійкості для елементів МПП  $D_1 - D_3$  наведено в табл. 1–7.

Інтервали  $RSInt$  описують межі, у яких зміни оцінок експерта не призводять до зміни найкращої альтернативи або всього ранжування альтернатив. Інтервали  $ACSInt$  — це межі, у яких можуть змінюватися оцінки експерта, щоб рівень неузгодженості всієї множини оцінок, що описується показником  $GCI$ , залишався допустимим. Більше значення показника  $GCI$  свідчить про більшу неузгодженість оцінок. Порівнюючи значення інтервалів (табл. 1, 3, 5) та індексів (табл. 7) для різних МПП, доходимо висновку, що більш неузгодженим МПП  $D_2$  і  $D_3$  відповідають більш вузькі інтервали стійкості  $ACSInt$  і менші значення індексів стійкості  $CSInd$ . Це означає, що для збереження допустимої неузгодженості елементам більш неузгоджених МПП  $D_2$  і  $D_3$  дозволяється змінюватися в менших інтервалах порівняно з елементами узгодженої МПП  $D_1$ . Більш неузгодженим МПП в основному відповідають і більш вузькі інтервали  $RSInt$  (табл. 1, 3, 5).

Результуючі інтервали стійкості  $SInt$ , які є перетином відповідних інтервалів  $ACSInt$  і  $RSInt$  у табл. 1, 3 і 5, наведено в табл. 2, 4 і 6. Це інтервали, у яких можуть змінюватися елементи МПП так, щоб одночасно зберігалася і допустима неузгодженість усієї МПП, і найкраща альтернатива або все ранжування альтернатив. Найбільш широкі інтервали  $SInt$  має узгоджена МПП  $D_1$ . Можна також стверджувати, що зі збільшенням ступеня неузгодженості ці інтервали стійкості стають вужчими. Так, в узгодженій МПП  $D_1$  елемент  $d_{13}$  може змінюватися в інтервалі  $[1, 9]$  (набувати значень з множини  $\{1, 2, \dots, 9\}$  відповідно до шкали Сааті) (табл. 2). Ці зміни зберігають допустиму неузгодженість МПП  $D_1$  і не призводять до зміни найкращої альтернативи. У більш неузгодженій МПП  $D_2$ , що отримана зміною елементів  $d_{14}$ , і  $d_{41}$  МПП  $D_1$ , елемент  $d_{13}$  може змінюватися в інтервалі  $[1, 7]$  (набувати значень з множини  $\{1, 2, \dots, 7\}$  відповідно до шкали Сааті) (табл. 4). У ще більш неузгодженій МПП  $D_3$  інтервал для елемента  $d_{13}$  звузився до  $[3, 6]$  (табл. 6). Зокрема, у  $D_3$  для збереження всього ранжування і допустимої неузгодженості елементи  $d_{23}$  і  $d_{3,4}$  можуть набувати лише одного значення, що дорівнює 2 (табл. 6).

**Таблиця 1.** Інтервали стійкості ACSInt, RSInt, зведені до шкали Сааті, для узгодженої МПП  $D_1$  ( $GCI=0$ )

Показник	ACSIInt				RSInt (збереження найкращої альтернативи)				RSInt (збереження всього ранжування)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	[1/2, 8]	[1, 9]	[2, 9]	–	[1, 9]	[1/3, 9]	[1, 9]	–	[1, 9]	[1/3, 9]	[1, 9]
$a_2$	–	–	[1/2, 8]	[1, 9]	–	–	[1/9, 9]	[1/9, 9]	–	–	[1, 9]	[1/3, 9]
$a_3$	–	–	–	[1/2, 8]	–	–	–	[1/9, 9]	–	–	–	[1, 9]

**Таблиця 2.** Інтервали стійкості SInt розв’язку, отриманого методом парних порівнянь RGMM для узгодженої МПП  $D_1$

Показник	SInt (збереження найкращої альтернативи)				Показник	SInt (збереження всього ранжування)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	[1, 8]	[1, 9]	[2, 9]	$a_1$	–	[1, 8]	[1, 9]	[2, 9]
$a_2$	–	–	[1/2, 8]	[1, 9]	$a_2$	–	–	[1, 8]	[1, 9]
$a_3$	–	–	–	[1/2, 8]	$a_3$	–	–	–	[1, 8]

**Таблиця 3.** Інтервали стійкості ACSInt, RSInt, зведені до шкали Сааті, для МПП  $D_2$  ( $GCI=0,16$ )

Показник	ACSIInt				RSInt (збереження найкращої альтернативи)				RSInt (збереження всього ранжування)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	[1/2, 3]	[1, 7]	[2, 9]	–	[1, 9]	[1, 9]	[1, 9]	–	[1, 9]	[1, 9]	[1, 9]
$a_2$	–	–	[1, 5]	[1, 7]	–	–	[1/9, 9]	[1/9, 9]	–	–	[1, 9]	[1, 9]
$a_3$	–	–	–	[1/2, 3]	–	–	–	[1/9, 9]	–	–	–	[1, 9]

**Таблиця 4.** Інтервали стійкості SInt розв’язку методом парних порівнянь RGMM для МПП  $D_2$

Показник	SInt (збереження найкращої альтернативи)				Показник	SInt (збереження всього ранжування)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	[1, 3]	[1, 7]	[2, 9]	$a_1$	–	[1, 3]	[1, 7]	[2, 9]
$a_2$	–	–	[1, 5]	[1, 7]	$a_2$	–	–	[1, 5]	[1, 7]
$a_3$	–	–	–	[1/2, 3]	$a_3$	–	–	–	[1, 3]

**Таблиця 5.** Інтервали стійкості ACSInt, RSInt, зведені до шкали Сааті, для МПП  $D_3$  ( $GCI=0.32$ )

Показник	ACSIInt				RSInt (збереження найкращої альтернативи)				RSInt (збереження всього ранжування)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	[2, 9]	[3, 6]	[2, 9]	–	[1/3, 9]	[1/3, 9]	[1/3, 9]	–	[1/3, 7]	[2, 9]	[3, 9]
$a_2$	–	–	[1/2, 2]	[1, 9]	–	–	[1/9, 9]	[1/9, 9]	–	–	[2, 7]	[1/3, 9]
$a_3$	–	–	–	[1/2, 2]	–	–	–	[1/9, 9]	–	–	–	[2, 7]

**Таблиця 6.** Інтервали стійкості SInt розв'язку, отриманого методом парних порівнянь RGMM для МПП  $D_3$

Показник	SInt (збереження найкращої альтернативи)				Показник	SInt (збереження всього ранжування)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	[2, 9]	[3, 6]	[2, 9]	$a_1$	–	[2, 7]	[3, 6]	[3, 9]
$a_2$	–	–	[1/2, 2]	[1, 9]	$a_2$	–	–	2	[1, 9]
$a_3$	–	–	–	[1/2, 2]	$a_3$	–	–	–	2

**Таблиця 7.** Індекси стійкості CSInd для елементів МПП  $D_1$  – МПП  $D_3$

Показник	$D_1$				$D_2$				$D_3$			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	–	4,29	4,29	4,29	–	2,00	2,00	<b>1,61</b>	–	1,14	1,56	1,14
$a_2$	4,29	–	4,29	4,29	2,00	–	2,93	2,00	1,14	–	1,14	<b>1,07</b>
$a_3$	4,29	4,29	–	4,29	2,00	2,93	–	2,00	1,56	1,14	–	1,14
$a_4$	4,29	4,29	4,29	–	<b>1,61</b>	2,00	2,00	–	1,14	<b>1,07</b>	1,14	–

Розглядаючи значення індексу CSInd для різних елементів МПП (табл. 7), можна стверджувати, що найменше значенням цього індексу відповідає *найбільш неузгодженому елементу* МПП. Так, у МПП  $D_2$  найбільш неузгодженим за побудовою є елемент  $d_{14}$ , і цей елемент характеризується найменшим серед усіх інших елементів МПП  $D_2$  значенням CSInd, що дорівнює 1,61. Аналогічно найбільш неузгодженому елементу  $d_{24}$  МПП  $D_3$  відповідає найменше значення CSInd, що дорівнює 1,07 (табл.7).

## ВИСНОВОК

У роботі розроблено метод оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь RGMM, який включає: 1) оціню-

вання стійкості локального ранжування альтернатив рішень до змін в експертних оцінках парних порівнянь; 2) оцінювання стійкості узгодженості множини експертних оцінок парних порівнянь до зміни окремих оцінок. Отримано розрахункові формули для інтервалів стійкості елементів матриці парних порівнянь (оцінок експертів) щодо зміни локального ранжування альтернатив рішень. Побудовано інтервали стійкості, які дозволяють знайти критичні елементи задачі. Цими критичними елементами є експертні оцінки парних порівнянь, чутливі до зміни локального ранжування альтернатив, та експертні оцінки, які характеризуються найбільшою неузгодженістю.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
2. Панкратова Н.Д. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: навч. посіб. / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська. — К: ІВЦ Вид-во «Політехніка», 2010. — 371 с.
3. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев / В.Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — 44, № 7. — С. 1261–1270.
4. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Т.Л. Саати. — 2-е изд. — М.: Книжн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 360 с.
5. Macharis C. PROMETHEE and AHP: The design of operational synergies in multicriteria analysis. Strengthening PROMETHEE with ideas of AHP / C. Macharis, J. Springael, K.D. Brucker, A. Verbeke // European Journal of Operational Research. — 2004. — 153, № 2. — P. 307–317.
6. Corrente Salvatore. Multiple Criteria Hierarchy Process with ELECTRE and PROMETHEE / S. Corrente, S. Greco, R. Słowiński // Omega. — 2013. — 41, Issue 5. — P. 820–846.
7. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект / В.Г. Тоценко. — К.: Наук. думка, 2002. — 381 с.
8. СППР «SuperDecisions» — <http://www.superdecisions.com>.
9. СППР «Decision Lens» — <http://www.decisionlens.com>.
10. СППР «MakeItRational» — <http://makeitrational.com/http://www.transparentchoice.com>.
11. Недашковская Н.И. Сравнительный анализ методов парного экспертного оценивания альтернатив решений / Н.И. Недашковская // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 4. — С. 35–44.
12. Недашківська Н.І. Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм / Н.І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 4. — С. 67–79.
13. Aguarón Juan. Consistency stability intervals for a judgement in AHP decision support systems / J. Aguarón, M.T. Escobar, J.M. Moreno-Jiménez // European Journal of Operational Research. — 2003. — 145, Issue 2. — P. 382–393.
14. Pankratova N. The Method of Estimating the Consistency of Paired Comparisons / N. Pankratova, N. Nedashkovskaya // International Journal «Information Technologies and Knowledge». — 7. — № 4. — 2013. — P. 347–361.

Надійшла 11.10.2016

**ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ  
ПЕРСПЕКТИВНОСТИ ПОКУПКИ БИЗНЕСА  
КОНКРЕТНЫМ ИНВЕСТОРОМ**

**Ю.А. ЗАК**

**Аннотация.** В соответствии с индивидуальными планами инвестора определяется ряд показателей объемов ожидаемых денежных потоков, величин коэффициентов дисконтирования, а также распределения вероятностей каждого из этих значений и величины «дисконтируемого дохода» в каждый год эксплуатации и за весь прогнозируемый период владения бизнесом. Расчетное распределение вероятностей результирующей суммы значений составляющих величин определяет стохастическую оценку стоимости бизнеса для данного конкретного инвестора. Предложенная стохастическая оценка стоимости позволит инвестору более объективно оценить различные показатели риска при покупке предприятия, определив вероятность того, что разность между стоимостью предприятия, предложенной настоящим владельцем, будет не ниже или не выше некоторой наперед заданной величины ожидаемой прибыли.

**Ключевые слова:** стоимость покупки бизнеса, дисконтируемые денежные потоки, остаточные активы предприятия, распределения вероятностей, стохастические оценки риска

**ВВЕДЕНИЕ**

Оценка стоимости предприятия — это процесс определения рыночной стоимости его капитала [1, 2]. Рыночная стоимость предприятия (бизнеса) — наиболее вероятная цена, по которой оно может быть продано и (или) куплено в данный момент времени в условиях конкуренции на открытом рынке, когда стороны сделки разумно и эффективно используют всю доступную им на рынке информацию, не учитывая при этом какие-либо благоприятные и неблагоприятные форс-мажорные и чрезвычайные обстоятельства [6–8].

Стоимость предприятия для инвестора определяется исходя из прогнозов его доходности или дисконтированных денежных потоков с точки зрения конкретного лица или группы лиц в соответствии с его (или их) инвестиционными планами, планами расширения или реорганизации профиля его работы, развития рынка продаж, расширения коммерческих связей, изменения объемов производства, структуры основных фондов, модернизации

структуры менеджмента, объемов интеллектуальной собственности и повышения имиджа на внутреннем и внешнем рынке. Покупатель, как правило, не заплатит за бизнес больше, чем этот бизнес может принести доходов в будущем. Для инвестора важны такие факторы, как риск, масштабы и стоимость финансирования, будущее повышение или снижение стоимости бизнеса и т.д. [3–6].

Поскольку каждый инвестор имеет свои собственные планы развития и функционирования компании в планируемые им годы владения ею, стоимость предприятия для инвестора является величиной субъективной. Для различных инвесторов стоимость компании может колебаться в очень широких пределах.

Наряду с другими методами оценки стоимости бизнеса широкое распространение в практике расчетов и в литературе, в особенности для развивающихся бизнесов, приносящих прибыль, получил метод дисконтирования денежного потока [1–4, 6, 8, 10], который применяется в рамках доходного подхода. Данный метод для оценки стоимости применяется, как правило, для предприятий, находящихся в стадии интенсивного развития бизнеса. Согласно методу дисконтирования денежных потоков стоимость предприятия основывается на будущих, прогнозируемых потоках доходов, а стоимость бизнеса определяется способностью этого бизнеса приносить акционерам свободные денежные потоки. В качестве дисконтируемого дохода используется либо чистый доход, либо денежный поток. Свободный денежный поток рассчитывается после вычета из доходов компании не только необходимых расходов (как при расчете чистой прибыли), но и инвестиций в оборотные и основные средства, которые необходимы для функционирования устойчивого бизнеса [3, 6–8, 10]. При этом денежный поток по годам определяется как баланс между притоком денежных средств (чистого дохода с учетом амортизации) и их оттоком (прирост чистого оборотного капитала и капитальных вложений). Эффективный прогнозируемый срок жизни может рассматриваться как бесконечный, так и ограничен сроком экономической жизни выпускаемой продукции, моральным и физическим износом оборудования и технологий производства, сроками аренды производственных и офисных площадей, перспективами рынка, на котором работает оцениваемый бизнес и т.п. [1, 5]. Прогнозировать поток чистого дохода от деятельности предприятия на несколько лет вперед в условиях нестабильной экономики весьма сложно. Различия в оценках рисков ведут к множеству заключений о стоимости предприятия.

Процент инфляции учитывается в дисконтной ставке с помощью коэффициента дисконтирования [5–10]. С математической точки зрения ставка дисконта — это процентная ставка, используемая для пересчета будущих потоков доходов в единую величину текущей стоимости, и необходимая для определения суммы, которую заплатил бы инвестор сегодня за инвестиционный актив с целью получения в будущем доходов.

Предложенные вероятностные подходы оценки стоимости бизнеса для наиболее вероятного оптимистического и пессимистического вариантов развития экономики в соответствии с конкретными планами каждого конкретного инвестора позволят более объективно оценить все возможные риски.



## АНАЛИЗ ПРИМЕНЯЕМЫХ МЕТОДИК ДИСКОНТИРОВАННЫХ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

Учет рисков инвестирования в бизнес при определении стоимости предприятия методом дисконтирования, на величину которых влияет ряд плохо прогнозируемых факторов, производится в известных методиках [1–4, 8] подбором адекватной рискам ставки капитализации или дисконта, применяемой для определения текущей стоимости ожидаемых от бизнеса денежных потоков. При этом не рассматриваются альтернативные денежные потоки по годам анализируемого периода.

Основными этапами оценки стоимости бизнеса методом дисконтированных денежных потоков в предлагаемых в литературе подходах являются [1–4, 8]:

- выбор модели денежного потока и длительности прогнозируемого периода;
- на основе личных инвестиционных планов инвестора и его представлений о функционировании предприятия в течение прогнозируемого периода оценка доходов или годового оборотного капитала компании, которые получает собственник от владения этой компанией в течение предусмотренных им прогнозных лет;
- оценка этих финансовых показателей, производимая с учетом фактора изменения стоимости денег во времени; выбор нормы дисконтирования;
- применение соответствующей нормы дисконтирования для определения денежных потоков или дохода за каждый планируемый инвестором используемый год;
- определение текущей в каждом году стоимости всех будущих поступлений;
- расчет величины стоимости в постпрогнозный период;
- расчет текущих стоимостей будущих денежных потоков, оценка стоимости в постпрогнозный период, определение итогового результата путем прибавления к текущей стоимости будущих поступлений остаточной стоимости активов за вычетом обязательств.

В качестве альтернативных подходов для предварительной оценки стоимости бизнеса используется сравнительный метод анализа, основанный на вычислении среднего или гармонического среднего значения отраслевых коэффициентов и значений мультипликаторов показателей компаний-аналогов [9–11].

В приведенных ниже заимствованных из литературных источников [1–8] формулах, в которых используются методики и обозначения, принятые в литературе, представлены расчеты свободных денежных потоков:

$$FCFF = EBIT(1 - T) + DA - \Delta WCR - Investment ,$$

где *FCFF* — расчетные объемы свободных денежных потоков (*Free Cash Flow*), показатель финансовой эффективности, рассчитываемый как разница между операционным денежным потоком и капитальными расходами, т.е. наличные средства, которые остаются в распоряжении компании после осуществления расходов; *EBIT* — прибыль до вычета процентов и налога на прибыль; *T* — ставка налога на прибыль; *DA* — амортизация;  $\Delta WCR$  — изменения в требуемом рабочем капитале; *Investments* — объем инвестиций;

$$FCFF = CFO + Invest\ expense (1 - T) - CFI ,$$

где  $CFO$  — денежный поток от операционной деятельности (*Cash Provided by Operating Activities*); *Interest expense* — процентные расходы;  $CFI$  — денежный поток от инвестиционной деятельности (*Cash Provided by Investing Activities*);

$$FCFF = Net\ income + DA - \Delta WCR - Investment + Net\ borrowing ,$$

где *Net income* — чистая прибыль;  $\Delta WCR$  — изменения в требуемом рабочем капитале; *Investments* — объем инвестиций; *Net borrowing* — разница между полученными и погашенными кредитами/займами.

Стоимость акционерного капитала, которую можно получить из стоимости компании, определяется формулой

$$Equity\ value = EV - (Debt - Cash) ,$$

где *Equity value* — стоимость акционерного капитала;  $EV$  — стоимость компании; *Debt* — долги; *Cash* — денежные средства, их эквиваленты и краткосрочные инвестиции.

В литературе [5] приведены два типа оценки стоимости компании на основе денежных потоков  $DCF$  в зависимости от используемых денежных потоков.

Модель оценки компании с учетом долгов имеет вид

$$Equity\ value = \frac{(FCFF)_1}{(1+R)^1} + \frac{(FCFF)_2}{(1+R)^2} + \frac{(FCFF)_3}{(1+R)^3} + \dots + \frac{(FCFF)_n}{(1+R)^n} , \quad (1)$$

а модель оценки акционерного капитала:

$$Equity\ value = \frac{(FCFE)_1}{(1+R)^1} + \frac{(FCFE)_2}{(1+R)^2} + \frac{(FCFE)_3}{(1+R)^3} + \dots + \frac{(FCFE)_n}{(1+R)^n} . \quad (2)$$

Поскольку в формулах (1) и (2) коэффициент дисконтирования стоит в знаменателе, сумма денежных потоков является конечной (хотя период времени, в течение которого приходят денежные потоки, является бесконечным). Формулы (1) и (2) требуют дискретного прогноза на временной период  $n$ . На практике используют прогнозы на 5 или 10 лет. Предлагается также использовать двухстадийную модель оценки, которая содержит промежуточные денежные потоки и терминальную (остаточную) стоимость. Реализация подобной модели возможна с использованием модели роста Гордона [1, 5].

В рассматриваемых в литературе подходах прогнозируемые объемы денежных потоков и значение коэффициентов дисконтирования для каждого года прогнозируемого периода рассчитываются по известным методикам и являются одинаковыми для всех инвесторов с различными возможностями инвестирования и планами развития и реорганизации бизнеса. При этом расчетная величина стоимости бизнеса, выраженная некоторым действительным числом, не учитывает многих важных для конкретного инвестора факторов, а также степени риска принимаемого им решения. Наличие политических, макроэкономических, отраслевых, финансовых, производственных, коммерческих рисков; изменение платежеспособности покупателей, конъюнктуры рынка, курсов национальных валют и другие факторы в прогно-

зируемый период владения компанией оказывают существенное влияние при оценке ее стоимости. Количественная оценка всех выявленных рисков определяется величиной возможных потерь в стоимостном измерении и выражена в рассматриваемых альтернативных величинах ожидаемых доходов или денежных потоков за определенный период времени, которые оцениваются экспертным советом с некоторой заданной вероятностью.

В отличие от известных подходов при вероятностной оценке стоимости бизнеса в процессе расчета инвестор, руководствуясь своими планами развития и ведения бизнеса, на основании мнений некоторых экспертов для каждого года прогнозируемого периода определяет ряд возможных показателей объемов ожидаемых денежных потоков и коэффициент дисконтирования, а также вероятность каждого из этих значений. Инвестор определяет распределение вероятностей величины «дисконтируемого дохода» по каждому году эксплуатации и за весь прогнозируемый период. К этому показателю добавляется показатель, выраженный распределением вероятности суммы остаточных активов, определяемых стоимостью основных фондов, оборудования, применяемых технологий, реорганизацией рынка продаж, расширения коммерческих связей, модернизацией структуры менеджмента, интеллектуальной собственности и повышения имиджа на внутреннем и внешнем рынке. Распределение вероятностей значений стоимости каждой из составляющих этой суммы может строиться на основе расчетных дискретных значений и возможного диапазона этих величин, является в определенной степени субъективной величиной, определяемой экспертным советом инвестора. Расчетное распределение вероятностей результирующей суммы значений этих составляющих величин определяет стохастическую оценку стоимости бизнеса для данного конкретного инвестора, что позволит ему оценить следующие показатели риска при покупке предприятия: моменты распределения (математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, асимметрию распределения), вероятность того, что разность между ожидаемой прибылью и стоимостью предприятия, предложенной ее настоящим владельцем, будет не ниже или не выше некоторой наперед заданной величины. Если экспертным советом инвестора рассматривается некоторый диапазон конечных значений оценки стоимости бизнеса, то этот диапазон может рассматриваться как некоторое равномерное, треугольное или трапецевидная функция распределения значений этой величины.

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

Для анализа степени риска приобретения бизнеса введем следующие обозначения в применяемых формулах:  $f_i^t$  — некоторое  $i$ -е значение  $FCFF$ , определенное в  $t$ -й год анализа прогнозируемых денежных потоков;  $F^t = \{f_1^t, f_2^t, \dots, f_i^t, \dots, f_n^t\}$  — множество этих значений.

Пусть  $p(f_i^t)$  — оцененная экспертами вероятность того, что  $t$ -й год анализа  $(FCFF)_t = f_i^t$ . Значения  $p(f_i^t)$  должны удовлетворять условиям

$$0 < p(f_i^t) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m^t; \quad \sum_{i=1}^{m^t} p(f_i^t) = 1,$$

где  $R_s^t$  и  $q(R_s^t)$  — соответственно некоторое прогнозируемое  $i$ -е значение ставки дисконтирования в  $t$ -й год анализа прогнозируемых денежных потоков и вероятность этого значения, причем  $0 < p(R_s^t) \leq 1$ ,  $s = 1, 2, \dots, S^t$ ;

$$\sum_{s=1}^{S^t} q(R_s^t) = 1.$$

$$F_j^t = F_{is}^t = \left[ \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} \right]_{is} = \left( \frac{f_i^t}{(1+R^t)_s} \right), \quad j = 1, 2, \dots, M^t = m^t S^t,$$

где  $0 < p(F_j^t) \leq 1$ ,  $\sum_{j=1}^{M^t} p(F_j^t) = 1$ .

Поскольку функции распределения  $p(f_i^t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m^t$ , и  $q(R_s^t)$ ,  $s = 1, 2, \dots, S^t$  зависят от состояния экономики в рассматриваемые годы владения бизнесом и взаимное влияние их прогнозировать весьма сложно, представляется возможным допустить, что они являются статистически независимыми. Тогда распределение вероятностей значений  $\frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} P_j \left[ \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} \right]_{is} &= P_j \left( \frac{f_i^t}{[(1+R)^t]_s} \right) = \\ &= \sum_{(f_i^t, R_s^t) \in \tilde{G}_j^t} \{ p(f_i^t) q(R_s^t) | (f_i^t, R_s^t) \in \tilde{G}_j^t \}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\tilde{G}_j^t = \left\{ f_i^t, R_s^t \mid f_i^t + R_s^t = \frac{f_i^t}{[(1+R)^t]_s} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, M^t = m^t S^t; \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Распределение вероятностей суммарных значений дисконтированных денежных потоков в планируемые им годы владения бизнесом определяется выражением

$$\begin{aligned} P_k \left( \sum_{t=1}^n \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} \right)_k &= P_k \left( \sum_{t=1}^n F_j^t \right)_k = P_k(\bar{Q}_k) = \\ &= \sum_{(F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^t, \dots, F_j^n) \in \tilde{\Omega}_k} \left\{ \prod_{t=1}^n p(F_j^t) | (F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^t, \dots, F_j^n) \in \tilde{\Omega}_k \right\}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_k &= \left\{ (F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^t, \dots, F_j^n) \mid \sum_{t=1}^n \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=1}^n F_j^t = H_k \right\}, \\ k &= 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_l \left( B_l^1 \leq \sum_{t=1}^n \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} \leq B_l^2 \right) = P_l \left( B_l^1 \leq \sum_{t=1}^n F_j^t B_l^1 \leq B_l^2 \right)_k =$$

$$= \sum_{(F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^t, \dots, F_j^n) \in \tilde{\Psi}_l} \left\{ \prod_{t=1}^n p(F_j^t) \mid (F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^t, \dots, F_j^n) \in \tilde{\Psi}_l \right\}; \quad (7)$$

$$\tilde{\Psi}_l = \left\{ (F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^t, \dots, F_j^n) \mid B_l^1 \leq \sum_{t=1}^n \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=1}^n F_j^t < B_l^2 \right\}, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (8)$$

Значения  $K$  в выражении (6) и  $L$  в формуле (8) определяют количество расчетных значений в дискретном распределении вероятностей.

Для значения индекса  $l=L$  в выражении (8) знак « $<$ » должен быть заменен на знак « $\leq$ ». В соответствии с выражениями (7), (8) значения  $\bar{Q}_k$  определены в диапазоне  $\bar{Q}_k \in [\bar{Q}_1 = \bar{Q}_{\min}, \bar{Q}_{\max} = \bar{Q}_K]$ , где  $\bar{Q}_{\min} = \sum_{t=1}^n \min_j F_j^t$ ,

$\bar{Q}_{\max} = \sum_{t=1}^n \max_j F_j^t$ , т.е.  $\bar{Q}_{\min}$  и  $\bar{Q}_{\max}$  — соответственно минимальное и максимальное значения соответствующих диапазонов возможных значений.

Экспертный совет и инвестор могут оценить распределение вероятностей суммы остаточных активов, определяемых стоимостью основных фондов, оборудования, применяемых технологий; реорганизацией рынка продаж; расширением коммерческих связей; модернизацией структуры менеджмента, интеллектуальной собственности и повышения имиджа на внутреннем и внешнем рынке в постпрогнозный период. Введем обозначения этих распределений вероятностей  $E_\lambda^v$  и  $p(E_\lambda^v)$ ,  $\lambda=1, \dots, w$ ;  $v=1, \dots, V$ .

Распределение вероятностей прогнозируемой суммы остаточных активов в постпрогнозный период можно рассчитать по формуле

$$P_\xi \left( \sum_{v=1}^V E_\lambda^v \right) = P_\xi \left[ \left( \sum_{v=1}^V E_\lambda^v \right) = \bar{E}_\xi \right] =$$

$$= \sum_{(E_\lambda^1, E_\lambda^2, \dots, E_\lambda^v, \dots, E_\lambda^V) \in \tilde{Z}_\xi} \left\{ \prod_{v=1}^V p(E_\lambda^v) \mid (E_\lambda^1, E_\lambda^2, \dots, E_\lambda^v, \dots, E_\lambda^V) \in \tilde{Z}_\xi \right\}, \quad (9)$$

$$\xi = 1, \dots, \Phi,$$

$$\tilde{Z}_\xi = \left\{ (E_\lambda^1, E_\lambda^2, \dots, E_\lambda^v, \dots, E_\lambda^V) \mid \sum_{v=1}^V E_\lambda^v = \bar{E}_\xi \right\}, \quad \xi = 1, \dots, \Phi, \quad (10)$$

где  $\Phi$  — количество дискретных величин суммы остаточных активов.

В соответствии с выражениями (9), (10) значения  $\bar{E}_\xi$  определены в диапазоне  $\bar{E}_\xi \in [\bar{E}_1 = \bar{E}_{\min}, \bar{E}_{\max} = \bar{E}_\Phi]$ , где  $\bar{E}_{\min} = \sum_{v=1}^V \min_{1 \leq \lambda \leq L} E_\lambda^v$ ,  $\bar{E}_{\max} = \sum_{v=1}^V \max_{1 \leq \lambda \leq L} F_\lambda^v$ .

Функция распределения показателя эффективной с точки зрения конкретного инвестора стоимости бизнеса определяется выражением

$$P_{\delta}(\bar{W}_{\delta} = \bar{E}_{\xi} + H_k) = \sum_{(\bar{E}_{\xi}, H_k) \in \bar{\Gamma}_{\delta}} \{P_{\xi}(\bar{E}_{\xi})P_k(H_k) | (\bar{E}_{\xi}, H_k) \in \bar{\Gamma}_{\delta}\}, \delta = 1, \dots, \Delta; \quad (11)$$

$$\bar{\Gamma}_{\delta} = \{\bar{E}_{\xi}, H_k | (\bar{E}_{\xi} + H_k) = \bar{W}_{\delta}\}, \delta = 1, \dots, \Delta. \quad (12)$$

В соответствии с формулами (11), (12) значения  $\bar{W}_{\delta}$  определены в диапазоне

$$\bar{W}_{\delta} \in [\bar{W}_1 = \bar{W}_{\min}, \bar{W}_{\max} = \bar{W}_{\Delta}],$$

где  $\bar{W}_{\min} = \min_{1 \leq k \leq K} H_k + \min_{1 \leq \xi \leq \Phi} \bar{E}_{\xi}$ ,  $\bar{W}_{\max} = \max_{1 \leq k \leq K} H_k + \max_{1 \leq \xi \leq \Phi} \bar{E}_{\xi}$ .

Математическое ожидание и стандартное квадратичное отклонение показателя эффективной определяются по формуле

$$M[\bar{W}] = \sum_{\delta=1}^{\Delta} \bar{W}_{\delta} P_{\delta}(\bar{W}_{\delta}), \quad \sigma[\bar{W}] = \sqrt{\sum_{\delta=1}^{\Delta} P_{\delta}(\bar{W}_{\delta}) (M[\bar{W}] - \bar{W}_{\delta})^2}. \quad (13)$$

Поскольку  $\sum_{\bar{W}_{\delta} = \bar{W}_1}^{M[\bar{W}]} P_{\delta}(\bar{W}_{\delta}) = \sum_{\bar{W}_{\delta} = M[\bar{W}]}^{\bar{W}_{\Delta}} P_{\delta}(\bar{W}_{\delta}) = 0,5$  с вероятностью не ниже,

чем  $P = 0,5$ , суммарная прибыль инвестора за годы владения компанией и последующей ее продажи будет не ниже величины  $M[\bar{W}]$ .

Пусть владелец бизнеса назначил определенную цену продажи компании, равную  $\bar{A}$ . Если установленная цена продажи бизнеса равна  $\bar{A}$ , то значение  $\bar{W}_{\delta_i} - \bar{A}$  определяет величину прибыли, а значение  $\bar{A} - \bar{W}_{\delta_i}$  — величину потерь инвестора при покупке этого бизнеса в случае получения им прибыли в объеме  $\bar{W}_{\delta_i}$ . Определим вероятность того, что фактическая прибыль, полученная инвестором за годы владения бизнесом и последующей его продажи, будет меньше выставленной цены продажи на заданную установленную величину,  $\mathbf{a}_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ :

$$P\{\bar{W} - \bar{A} \geq \mathbf{a}_l\} = \sum_{\delta=\delta_1}^{\Delta} P_{\delta}\{\bar{W}_{\delta_1} | \bar{W}_{\delta_1} \geq (\bar{A} + \mathbf{a}_l)\}, \quad l = 1, \dots, L;$$

вероятность потерь инвестора на величину, большую установленной величины,  $\mathbf{b}_q$ ,  $q = 1, \dots, Q$ :

$$P\{\bar{A} - \bar{W} \geq \mathbf{b}_q\} = \sum_{\delta=1}^{\delta_2} P_{\delta}\{\bar{W}_{\delta_2} | \bar{W}_{\delta_2} \leq (\bar{A} - \mathbf{b}_q)\}, \quad q = 1, \dots, Q. \quad (14)$$

Часто в процессе переговоров удается прийти к соглашению о снижении цены продажи бизнеса. Предположим, что дискретное распределение вероятностей цены, по которой может быть продан бизнес данному инвестору, определяется как  $P(\bar{A}_1), P(\bar{A}_2), \dots, P(\bar{A}_p), \dots, P(\bar{A}_r)$ , где  $\bar{A}_1 < \bar{A}_2 < \dots < \bar{A}_p < \dots < \bar{A}_r$ , а  $\bar{A}_r \leq \bar{A}$ .

Математическое ожидание и стандартное отклонение от математического ожидания цены продажи в этом случае рассчитывают таким образом:

$$M(\mathbf{A}) = \sum_{\rho=1}^r \bar{A}_{\rho} P(\bar{A}_{\rho}), \quad \sigma(\mathbf{A}) = \sqrt{\sum_{\rho=1}^r P(\bar{A}_{\rho}) \cdot [\bar{A}_{\rho} - M(\mathbf{A})]^2}.$$

Значения  $P\{\bar{W} - \bar{A} \geq \mathbf{a}_l\}$  и  $P\{\bar{A} - \bar{W} \geq \mathbf{b}_q\}$  соответственно находят по формулам:

$$P\{\bar{W} - \bar{A} \geq \mathbf{a}_l\} = \sum_{\delta=\delta_1}^{\Delta} P_{\delta} \{\bar{W}_{\delta_1} | \bar{W}_{\delta_1} \geq (\bar{A} + \mathbf{a}_l)\} \sum_{\rho=1}^{r_1} P\{\bar{A}_{\rho} | \bar{A}_{\rho} \leq \bar{A}\},$$

$$l = 1, \dots, L; \quad (15)$$

$$P\{\bar{A} - \bar{W} \geq \mathbf{b}_q\} = \sum_{\delta=1}^{\delta_2} P_{\delta} \{\bar{W}_{\delta_2} | \bar{W}_{\delta_2} \leq (\bar{A} - \mathbf{b}_q)\} \sum_{\rho=\rho_2}^r P\{\bar{A}_{\rho} | \bar{A}_{\rho} \geq \bar{A}\},$$

$$q = 1, \dots, Q. \quad (16)$$

Приведенные в выражениях (14), (16) вероятности возможных значений потерь определяют все риски инвестора, связанные с покупкой этого бизнеса. На основании вычисленных вероятностных оценок инвестор может принять взвешенное решение о целесообразности покупки предлагаемого ему бизнеса.

### ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Необходимо оценить эффективность покупки бизнеса, относительно которого известна следующая информация. Продажная цена, назначенная владельцем бизнеса, равна 30 млн дол. Инвестор предполагает владеть бизнесом в течение трех лет. Экспертным советом потенциального инвестора определены прогнозируемые значения ожидаемых денежных потоков (млн дол.) и коэффициентов дисконтирования по каждому из этих трех лет владения бизнесом, а также вероятности этих значений, которые соответственно равны:

**1-й год:**  $f_1^1 = 15,0$ ,  $p(f_1^1) = 1,0$ ;  $R_1^1 = 0,1$ ,  $p(R_1^1) = 0,6$ ;  $R_2^1 = 0,2$ ,  $p(R_2^1) = 0,4$ ;

**2-й год:**  $f_1^2 = 16,0$ ,  $p(f_1^2) = 0,2$ ;  $f_2^2 = 18,0$ ,  $p(f_2^2) = 0,8$ ;  $R_1^2 = 0,12$ ,  $p(R_1^2) = 0,5$ ;  $R_2^2 = 0,2$ ,  $p(R_2^2) = 0,5$ ;

**3-й год:**  $f_1^3 = 17,0$ ,  $p(f_1^3) = 0,5$ ;  $f_2^3 = 20,0$ ,  $p(f_2^3) = 0,5$ ;  $R_1^3 = 0,15$ ,  $p(R_1^3) = 0,4$ ;  $R_2^3 = 0,2$ ,  $p(R_2^3) = 0,6$ .

Прогнозируемые стоимости (млн дол.) зданий и сооружений ( $E_{\lambda}^1$ ), оборудования и используемых технологий ( $E_{\lambda}^2$ ), а также коммерческих связей предприятия и его имиджа на внутреннем и внешнем рынке ( $E_{\lambda}^3$ ) и вероятности этих значений ( $p(E_{\lambda}^v)$ ,  $v = 1, 2, 3$ ) оцениваются экспертным советом следующим образом:

$$E_1^1 = 2,7, \quad p(E_1^1) = 0,2; \quad E_2^1 = 3,0, \quad p(E_2^1) = 0,3; \quad E_3^1 = 3,7, \quad p(E_3^1) = 0,3;$$

$$E_4^1 = 4,0, \quad p(E_4^1) = 0,2;$$

$$E_1^2 = 1,8, \quad p(E_1^2) = 0,3; \quad E_2^2 = 2,2, \quad p(E_2^2) = 0,5; \quad E_3^2 = 2,5, \quad p(E_3^2) = 0,2;$$

$$E_1^3 = 1,0, \quad p(E_1^3) = 0,4; \quad E_2^3 = 1,3, \quad p(E_2^3) = 0,6.$$

Значения прогнозируемых дисконтируемых денежных потоков  $F_j^t = F_{is}^t = \left[ \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} \right]_{is} = \left( \frac{f_i^t}{(1+R^t)_s} \right)$  по каждому предполагаемому инвестором году владения бизнесом и вероятности этих значений, вычисленные по формулам (3), (4), приведены в таблице.

Прогнозируемые денежные потоки

Основные показатели	Числовые значения		
	1-й год	2-й год	3-й год
$F_1; p(F_1)$	13,64; 0,6	12,76; 0,1	11,18; 0,2
$F_2; p(F_2)$	12,5; 0,4	14,35; 0,4	13,15; 0,2
$F_3; p(F_3)$	–	11,11; 0,1	9,84; 0,3
$F_4; p(F_4)$	–	12,5; 0,4	11,57; 0,3

Дискретное распределение вероятности значений суммарного дисконтированного денежного потока  $\sum_{t=1}^3 \frac{(FCFF)_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=1}^3 F_j^t$  за три предполагаемые года владения бизнесом (млн дол.), вычисленное по формулам (7), (8), представлено в виде

$$P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [32,2; 33,1)\right) = 0,012; \quad P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [33,1; 34,0)\right) = 0,068;$$

$$P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [34,0; 34,9)\right) = 0,018; \quad P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [34,9; 35,8)\right) = 0,1;$$

$$P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [35,8; 36,7)\right) = 0,128; \quad P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [36,7; 37,6)\right) = 0,14;$$

$$P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [37,6; 38,5)\right) = 0,226; \quad P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [38,5; 39,35)\right) = 0,144;$$

$$P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [39,35; 40,25)\right) = 0,0084; \quad P\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t \in [40,25; 41,14)\right) = 0,08.$$

Математическое ожидание суммарного дисконтированного денежного потока за три предполагаемые года владения бизнесом (млн дол.) равно

$$M\left(\sum_{t=1}^3 F_j^t\right) = 37,451.$$



Дискретное распределение вероятностей ожидаемой стоимости бизнеса в постпрогнозный период ( млн дол.) вычислено по формулам (15), (16):

$$P(\bar{E} \in [5,3; 5,8)) = 0,1 ; P(\bar{E} \in [5,8; 6,3)) = 0,226 ; P(\bar{E} \in [6,3; 6,8)) = 0,186 ;$$

$$P(\bar{E} \in [6,8; 7,3)) = 0,39 ; P(\bar{E} \in [7,3; 7,8)) = 0,098 .$$

Математическое ожидание стоимости бизнеса в постпрогнозный период (млн дол.) равно  $P(\bar{E}) = 7,03$  .

Дискретное распределение вероятностей прогнозируемой суммарной стоимости бизнеса (млн дол.) с позиций конкретного инвестора вычислено по формулам (11), (12):

$$P(\bar{W} \in [37,55; 38,8)) = 0,004 ; P(\bar{W} \in [38,8; 39,9)) = 0,049 ;$$

$$P(\bar{W} \in [39,9; 41,0)) = 0,058 ; P(\bar{W} \in [41,0; 42,1)) = 0,069 ;$$

$$P(\bar{W} \in [42,1; 43,2)) = 0,144 ; P(\bar{W} \in [43,2; 44,3)) = 0,211 ;$$

$$P(\bar{W} \in [44,3; 45,4)) = 0,194 ; P(\bar{W} \in [45,4; 46,5)) = 0,161 ;$$

$$P(\bar{W} \in [46,5; 47,65)) = 0,07 ; P(\bar{W} \in [47,65; 48,94)) = 0,04 .$$

Математическое ожидание и дисперсия прогнозируемой суммарной стоимости бизнеса (млн дол.), вычисленные по формулам (13), соответственно равны:  $M(\bar{W}) = 44,031$  ,  $\sigma(\bar{W}) = 2,1182$  .

Следовательно, с вероятностью, равной 1, инвестор за три года владения бизнесом и последующей продажи его получит прибыль не ниже 7,55 млн дол.

Вероятность того, что фактическая прибыль инвестора в случае продажи бизнеса через три года будет выше цены его покупки не менее, чем на 11,5 и 15,4 млн дол.:

$$P(\bar{W} - \bar{A} \geq 11,0) = 0,069 + 0,144 + 0,211 + 0,194 + 0,161 + 0,07 + 0,04 = 0,889 ;$$

$$P(\bar{W} - \bar{A} \geq 15,4) = 0,161 + 0,07 + 0,04 = 0,271 .$$

На основании рассчитанных данных инвестор может принять объективное решение о целесообразности покупки этого бизнеса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рассматриваемых в литературе подходах прогнозируемые объемы денежных потоков и значения коэффициентов дисконтирования для каждого года прогнозируемого периода рассчитываются по известным методикам и являются одинаковыми для всех инвесторов с различными возможностями инвестирования и планами развития и реорганизации бизнеса. Расчетная величина стоимости бизнеса, выраженная некоторым действительным числом, не учитывает ряда важных для конкретного инвестора факторов и степени риска принимаемого им решения.

Предложенные в работе вероятностные подходы к оценке стоимости бизнеса в соответствии с конкретными планами каждого конкретного инвестора и предусматривающие субъективные оценки дисконтированных денежных потоков позволят более обосновано принять решение о целесообразности покупки компании, оценив все риски, связанные с изменениями политической и экономической ситуации в отрасли, на рынках сбыта, покупки сырья, в стране и в мире, а также с темпами инфляции. Рассмотрение в условиях нестабильной экономики с некоторой вероятностью различных случайных событий, связанных с вложением инвестиций, изменениями объемов производства, совершенствованием технологий, стоимостью рабочей силы и энергоресурсов, которые могут оказывать как положительные, так и отрицательные воздействия на результаты работы компании, даст возможность инвестору более детально оценить все возможные обстоятельства и проанализировать все риски, связанные с принятием решений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Gordon M. J. Dividends, Earnings and Stock Price* / M.J. Gordon // *The Review of Economics and Statistics*. — 1959. — **41**, N 2. — P. 99–105.
2. *Modigliani F. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment* / F. Modigliani, M.H. Miller // *American Economic Review*. — 1958. — **48**. — P. 261–297.
3. *Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и методы оценки любых активов* / А. Дамодаран. — Альпина Паблишер, 2010.
4. *Мерсер З.К. Интегрированная теория оценки бизнеса* / З.К. Мерсер, Т.У. Хармс; под науч. ред. В.М. Рутгаузера. — Изд-во Маросейка, 2008.
5. *Шарп У.Ф. Инвестиции* / У.Ф. Шарп, М.Й. Гордон, Дж.В. Бейли. — М.: Инфра-М, 2009.
6. *Косорукова И.В. Оценка стоимости бизнеса: консп. лекции* / И.В. Косорукова. — М.: ИФРУ, 2012.
7. *Косорукова И.В. Оценка стоимости ценных бумаг и бизнеса* / И.В. Косорукова, С.А. Секачев, М.А. Шуклина. — М.: МФПА, 2011.
8. *Грязнова А.Г. Оценка стоимости предприятия (бизнеса)* / А.Г. Грязнова, М.А. Федотова, М.А. Эскиндаров и др. — М.: Интерреклама, 2003. — 544 с.
9. *Liu J. Equity valuation using multiples* / J. Liu, D. Nissim, J. Thomas // *Journal of Accounting Research*. — 2002. — **40**, N 1. — P. 135–172.
10. *Ballwieser W. Unternehmensbewertung: Prozeß, Methoden und Probleme* / W. Ballwieser. — 3. — 2011. — Stuttgart: Aufl.
11. *Зак Ю.А. Об одном подходе к выбору значений мультипликаторов и отраслевых коэффициентов при сравнительном методе предварительной оценки стоимости бизнеса* / Ю.А. Зак // *Менеджмент сегодня*. — 2015. — № 6. — С. 326–333.

Поступила 24.09.2016

## СИТУАЦІЙНО-ІНДУКТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ЕКСТРАПОЛЯЦІЙНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА ДАНИМИ МОНІТОРИНГУ

Д.В. СТЕФАНИШИН

**Анотація.** Запропоновано підхід до екстраполяційного прогнозування явищ та процесів за даними моніторингу, що ґрунтується на ідеї ситуаційно-індуктивного моделювання. Згідно з цим підходом результати ситуаційного моделювання в межах вибіркового ряду динаміки, яким властива монотонність трендів або квазістаціонарність поведінки змінних моделей на відповідних часових інтервалах, формують підґрунтя для наступної побудови індуктивних моделей. Індуктивні моделі виконуються як моделі «рівнів» за результатами ситуаційного моделювання. На основі ситуаційних моделей в межах інтервалів часу, де ситуаційні моделі вважаються адекватними, здійснюється оперативне прогнозування (в режимі реального часу), а на основі індуктивних моделей, за допомогою яких у межах спостережених даних відслідковується еволюція ситуаційних моделей, виконується строкове прогнозування зі встановленням ситуаційних моделей для майбутніх часових періодів.

**Ключові слова:** екстраполяція, індуктивні та ситуаційні моделі, моделювання та прогнозування за даними моніторингу, оперативні та строкові прогнози.

### ВСТУП

Прогнозування як процес наукового передбачення майбутніх станів систем процесів, явищ тощо покладено в основу більшості прикладних задач прийняття рішень, які розв'язуються в різних сферах життєдіяльності людини.

Розрізняють неформальні (якісні) та формальні (кількісні) методи прогнозування. Вважається, що кількісні прогнози, що ґрунтуються на математичному моделюванні, заслуговують на більшу довіру фахівців для прийняття зважених рішень [1, 2]. Тому розробленню формальних методів прогнозування з використанням математичного моделювання та кількісних оцінок приділяють особливу увагу.

Проблемами прогнозування займаються фахівці різних галузей знань (математики, економісти, інженери, екологи, політологи, соціологи), представники різних наукових напрямів та наукових шкіл. Із 70-х років минулого століття набула розвитку і окрема наукова дисципліна — прогностика [3], серед фундаторів якої були Д. Белл, Г.М. Добров, Г. Кан, В.О. Лисичкін, Дж. Мартіно, О. Хелмер. Значний внесок у розвиток кількісних методів прогнозування зробили також вітчизняні фахівці в галузі математичного моделювання та системного аналізу, зокрема, праці П.І. Бідюка, О.Г. Івахненка, М.З. Згуровського, М.М. Мойсеєва, Н.Д. Панкратової, В.С. Степашка та ін. [4–8].

Прикладні дослідження щодо кількісного прогнозування реальних систем, процесів, явищ тією чи іншою мірою передбачають використання

у моделюванні історичних, експериментальних або натурних даних — даних спостережень (моніторингу). Моніторинг, згідно з яким проводяться і систематичні спостереження за визначеними компонентами або параметрами об'єкта досліджень, спеціальним чином організовані в просторі та часі, а також комплекс методів оброблення й аналізу даних [9], відкриває принципово нові можливості для здобування знань та прогнозування поведінки досліджуваної системи, процесу, явища за отриманими даними спостережень на основі математичних моделей з метою прийняття відповідних рішень. Сучасні комп'ютеризовані й автоматизовані системи моніторингу (АСМ) дозволяють збирати необхідні дані у вигляді рядів динаміки для визначених параметрів у будь-яких обсягах, які можуть бути цілком достатніми для побудови адекватних математичних моделей за даними спостережень.

### ДЕЯКІ ПРИНЦИПОВІ ЗАУВАЖЕННЯ ЩОДО СИТУАЦІЙНОГО ТА ІНДУКТИВНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Під ситуаційним моделюванням зазвичай розуміють спосіб моделювання, в основу якого покладено відтворення певних ситуацій (збігів умов і обставин функціонування системи) з метою розв'язання задач керування складними системами [10, 11]. Основна ідея ситуаційного моделювання полягає в тому, що повний опис нескінченної множини всіх можливих ситуацій функціонування реальної системи за певними правилами замінюється певною кількістю (скінченною множиною) узагальнених ситуацій, кожна з яких деякою мірою вірогідності відтворює один з можливих її станів. Ситуаційне моделювання набуло поширення в економіці, медицині, військовій справі, криміналістиці, політиці та в інших подібних сферах, а також у штучному інтелекті.

Зокрема, у штучному інтелекті розвиток логічного підходу до моделювання поведінки складних систем та процесів дав поштовх до створення ситуаційного числення — логічного формалізму, основними елементами якого є ситуації, дії та змінні [12]. Ситуаційне числення можна вважати математичною теорією ситуаційного моделювання. Найвагомий внесок у розвиток ситуаційного числення зробили такі відомі вчені в галузі штучного інтелекту, як Р. Рейтер, Дж. Маккарті, Р. Міллер і М. Шенехен. Згідно з цією теорією еволюція динамічної системи моделюється в розрізі її «пересування» по серії ситуацій, котрі є результатами різних дій. При цьому ситуації (Р. Рейтер) не відтворюють стани системи, а відображають історію певних подій як завершених послідовностей дій в певні періоди часу. Оскільки ситуації неможливо описати повністю, а лише деякі їх аспекти, то для опису еволюції системи використовується правило немонотонного виводу. Під час моделювання припускається (Дж. Маккарті), що на підставі минулих фактів, якими описують минулі ситуації, і загальних законів (або припущень), які задають виконання дій і виникнення подій в межах ситуацій, можна описати (передбачити) і деякі ситуації, що виникають у майбутньому.

Під індуктивним моделюванням розуміють насамперед новий напрям у моделюванні складних процесів і систем, який пов'язує із працями О.Г. Івахненка та його численних учнів і послідовників, що знайшов своє

теоретичне та практичне відображення в методі групового врахування аргументів [5, 6]. Це оригінальний метод моделювання за експериментальними даними, який відрізняється від інших методів побудови моделей за даними спостережень активним застосуванням принципів автоматичної генерації варіантів структур моделей, яка імітує процес біологічної селекції з попарним врахуванням послідовних ознак, неостаточних рішень і послідовної селекції за зовнішніми критеріями для побудови моделей оптимальної складності. Для порівняння і вибору кращих моделей застосовуються зовнішні критерії, що ґрунтуються на поділі вибірки на дві і більше частин, причому оцінювання параметрів і перевірка якості моделей виконуються на різних підвибірках. Замість традиційного дедуктивного шляху структурно-параметричної ідентифікації моделей за даними спостережень «від загальної теорії – до конкретної моделі» пропонується новий, індуктивний підхід «від конкретних даних – до загальної моделі». Згідно з цим підходом на підставі наявних даних спостережень висувається гіпотеза про можливий клас моделей, формується процедура автоматичної генерації тисяч і десятків тисяч альтернативних моделей у цьому класі та задається критерій вибору найкращої моделі з усіх генерованих. Оскільки найбільш трудомістка, рутинна робота виконується на ЕОМ, це дозволяє обійтись без обтяжливих апріорних припущень, з'являється можливість мінімізувати вплив суб'єктивних факторів, урахувати різні види апріорної невизначеності під час побудови моделі. Натепер метод групового врахування аргументів розглядають як одну з найбільш передових інформаційних технологій здобуття знань з даних спостережень, або як один з найбільш ефективних методів інтелектуального аналізу даних.

## **ПРОБЛЕМИ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА ДАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ТА МЕТА РОБОТИ**

Коли дані збиралися без застосування АСМ, то, на думку фахівців, обсяги необхідних для моделювання даних спостережень завжди вважалися недостатніми для побудови кращих, більш адекватних математичних моделей. Однак, як показує, наприклад, багаторічний досвід використання АСМ на гідроспорудах київського гідровузла [13], завдяки цій системі можна нагромадити надзвичайно багато даних, кількість яких може вважатися більш ніж достатньою для моделювання, але, як виявилось, велика кількість даних не завжди сприяє підвищенню якості традиційних математичних моделей, навіть найпростіших моделей регресійного типу, структура яких може дуже ускладнюватися. І чим складнішою виявляється структура математичної моделі, що будується за даними моніторингу, тим важче забезпечити її адекватність для цілей прогнозування.

У більшості практичних випадків прогнозування за даними моніторингу виконується у формі екстраполяцій з виявленням усталених тенденцій в розвитку системи або процесу та їх перенесенням на майбутнє методами, що ґрунтуються на аналізі часових рядів та казуальному (причинно-наслідковому, регресійному) моделюванні. Серед найбільш використовуваних математичних моделей виділяються різні статистично-імовірнісні моделі, за якими можуть виконуватися екстраполяції: тренди, регресії, функції

розподілу ймовірності тощо [1, 4, 14–16]. Такий підхід до прогнозування за даними спостережень поведінки систем в умовах усталених, еволюційних режимів розвитку та в разі обмежень, що не допускають різких змін у поведінці системи, біфуркацій і катастрофічних сценаріїв, може вважатися цілком виправданим [17].

Утім, як відомо, традиційні методи побудови статистичних моделей за даними спостережень не завжди відповідають граничним обмеженням, які на такі моделі накладаються [13, 14, 17]. Практика показує, що зі збільшенням кількості нагромаджених даних спостережень проблеми, пов'язані з розв'язанням оптимізаційної задачі, можуть виникати навіть у випадках використання відносно простих статистичних моделей. При цьому ускладнення структури статистичної моделі за рахунок врахування додаткових факторів та параметрів, нелінійних ефектів тощо можуть підвищувати її якість як інтерпретаційної моделі в межах спостережуваних даних, але погіршувати її якість як прогностичної моделі екстраполяції.

**Мета роботи** — презентація нового підходу до екстраполяційного прогнозування поведінки систем, явищ та процесів за даними моніторингу, що ґрунтується на ідеї комбінованого ситуаційно-індуктивного моделювання з формулюванням основних його положень та реалізацією на реальному прикладі.

## ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ СИТУАТИВНО-ІНДУКТИВНОГО ПІДХОДУ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ДАНИМИ МОНІТОРИНГУ

Під ситуаційною моделлю надалі будемо розуміти модель, яка адаптована до певної ситуації (відповідні обставини адаптації назвемо прогнозним фоном) і яка може вважатися адекватною лише в ситуації, що розгортається протягом обмеженого періоду часу. Прогнозний фон характеризуватимемо як сукупність зовнішніх і/або внутрішніх умов, істотних для вибору структури відповідної ситуаційної моделі, яка розробляється за даними спостережень з метою прогнозування.

Ситуаційні моделі будуються на основі вибіркового ряду динаміки належним чином організованих актуальних (фактичних) даних спостережень для залежних і незалежних змінних моделей, де вибіркові ряди динаміки (кластери) відповідають деяким установленим критеріям однорідності, які формулюються з урахуванням поведінки значень рядів динаміки, змінних на відповідних часових інтервалах:

- нестационарні коливання з монотонно зростаючим трендом; можуть також виділятися інтервали відносно повільного і відносно швидкого зростання трендів;

- нестационарні знакозмінні коливання з монотонно зростаючим трендом;

- нестационарні коливання з монотонно спадним трендом; можуть також виділятися інтервали відносно повільного і відносно швидкого спадання трендів;

- нестационарні знакозмінні коливання з монотонно спадним трендом;

- випадкові стаціонарні коливання значень ряду (з «нульовим» трендом).

Припускається, що побудовані на відповідних вибіркових рядах динаміки ситуаційні моделі можуть відображати окремі фазові стани динамічної системи на різних інтервалах часу. При цьому перехід від однієї ситуаційної моделі до іншої, які визначають сусідні фазові стани системи, може відбуватися немонотонно (рис. 1).

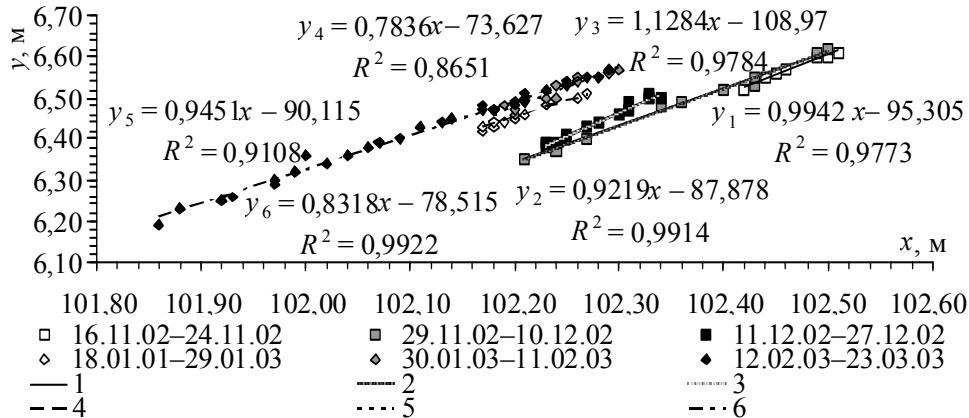


Рис. 1. Приклад побудови ситуаційних моделей у вигляді простих лінійних регресій (за даними [13])

За такої постановки задачі ситуаційного моделювання за даними моніторингу як рівняння зв'язку можуть використовуватися відносно прості залежності, що легко адаптуються до змін у рядах динаміки, пов'язаних у тому числі і зі змінами прогнозного фону, які можуть зумовлюватися факторами, що з тих чи інших причин не враховуються в ситуаційній моделі безпосередньо.

Під індуктивною моделлю будемо розуміти модель, отриману з узагальнення (ансамблю) кількох моделей (ситуаційних або індуктивних). По суті, у розгляданому випадку індуктивні моделі являють собою моделі «рівнів», які визначають поведінку залежних змінних за деяких фіксованих значень незалежних змінних. Індуктивні моделі будуються на основі рядів модельних даних, що являють собою результати статистичного оброблення актуальних даних і/або результати ситуаційного моделювання. Індуктивна модель, яка вибудовується на основі узагальнення сім'ї ситуаційних моделей і охоплює кілька кластерів актуальних даних, може відображати еволюцію відповідних ситуаційних моделей як еволюцію фазових станів динамічної системи в часі (рис. 2).

Індуктивні моделі можна будувати за результатами ситуаційного моделювання за весь період спостережень, або за результатами ситуаційного моделювання на кластерах одного виду. Структура індуктивних моделей визначається особливостями рядів динаміки результатів ситуаційного моделювання, що можуть бути нестационарними або стаціонарними (квазі-стаціонарними). У випадку стаціонарних рядів динаміки, поданих результатами ситуаційного моделювання, індуктивні моделі зазвичай виконуються у вигляді регресій, а у випадку нестационарних рядів за високих коефіцієнтів детермінації трендів їх можна виконувати у вигляді відповідних трендів. У більш складних випадках індуктивні моделі виражають як композиції трендів і регресій «залишків» вилучення трендів тощо. У разі потреби для побу-

дови як ситуаційних, так і індуктивних моделей можна враховувати транспортні лаги між змінними моделей та застосовувати прийоми адаптаційного моделювання.

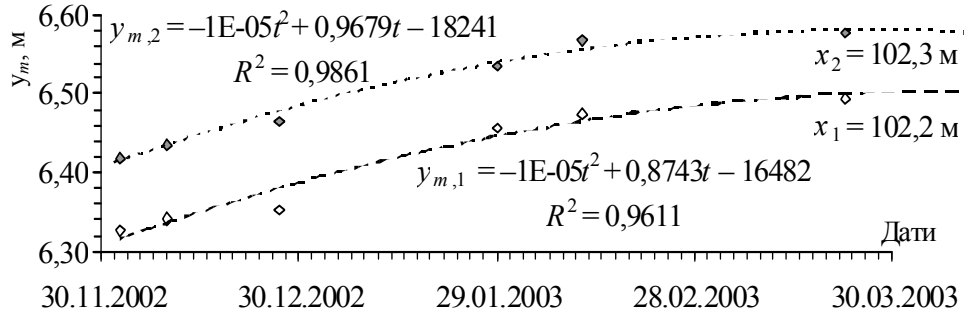


Рис. 2. Приклад побудови індуктивних моделей «рівнів» у вигляді трендів (за даними рис. 1)

### ЕКСТРАПОЛЯЦІЙНЕ ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ СИТУАТИВНО-ІНДУКТИВНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ДАНИМИ МОНІТОРИНГУ

Установлюються два основні види прогнозів-екстраполяцій на основі ситуативно-індуктивного моделювання: оперативні прогнози і строкові прогнози.

Оперативні (у режимі реального часу) прогнози-екстраполяції виконують на основі нових даних, які потребують ретельного коригування попередніх ситуаційних моделей (моделей минулого періоду). Можна виконувати також серію оперативних прогнозів у міру надходження нових даних.

Строкові прогнози-екстраполяції виконують на основі індуктивних моделей. Прогнозування зводиться до встановлення ситуаційних моделей, що можуть відповідати очікуваним ситуаціям (у майбутні періоди). Точність строкових прогнозів істотно підвищується, якщо індуктивні моделі будуються на основі ситуаційних моделей минулих періодів, дані яких належать спорідненим кластерам актуальних даних (з урахуванням сезонного фактора, характеру поведінки вибірових рядів динаміки і т. ін.).

#### Приклад прогнозування ймовірних втрат від повеней в басейні р. Тиса (Закарпатська область) за даними моніторингу збитків та витрат води

Ряди динаміки максимальних витрат води паводків на р. Тиса (заміряні на гідрометричному посту у створі Вилок) та збитків від руйнівних повеней в її басейні в межах Закарпатської області, що використовувалися під час моделювання та прогнозування ймовірних утрат, зображено на рис. 3. Маємо ряд динаміки збитків (рис. 3, б), який в цілому є нестационарним і характеризується загальною тенденцією до наростання збитків у часі на фоні стаціонарного, без вираженого тренда, ряду максимальних витрат води р. Тиса (рис. 3, а). Імовірні втрати визначалися як добутки значень збитків та емпіричних ймовірностей перевищення відповідних їм значень максимальних витрат води, що при цьому спостерігалися [18].



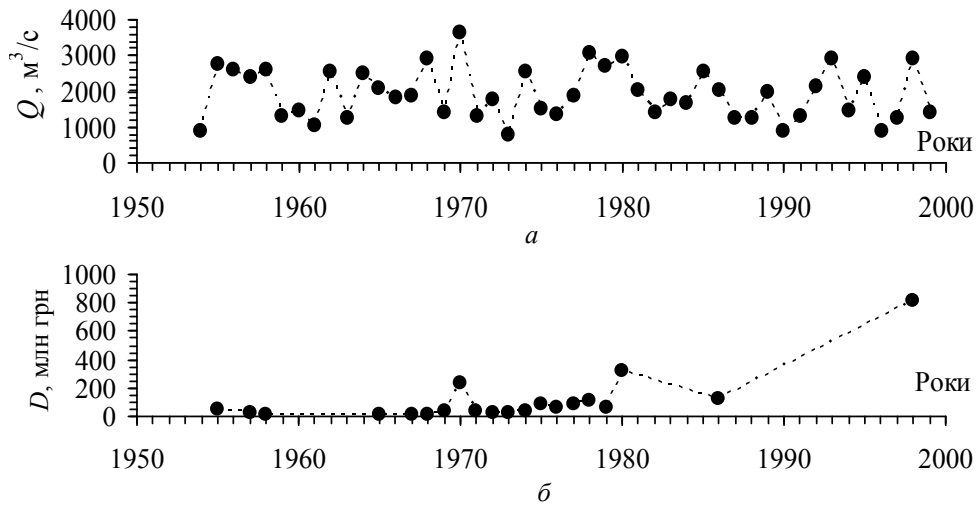


Рис. 3. Ряди динаміки: а — максимальних витрат води  $Q$  паводків на р. Тиса (гідрометричний створ Вилोक); б — збитків  $D$  від руйнівних повеней в басейні р. Тиса (Закарпатська область)

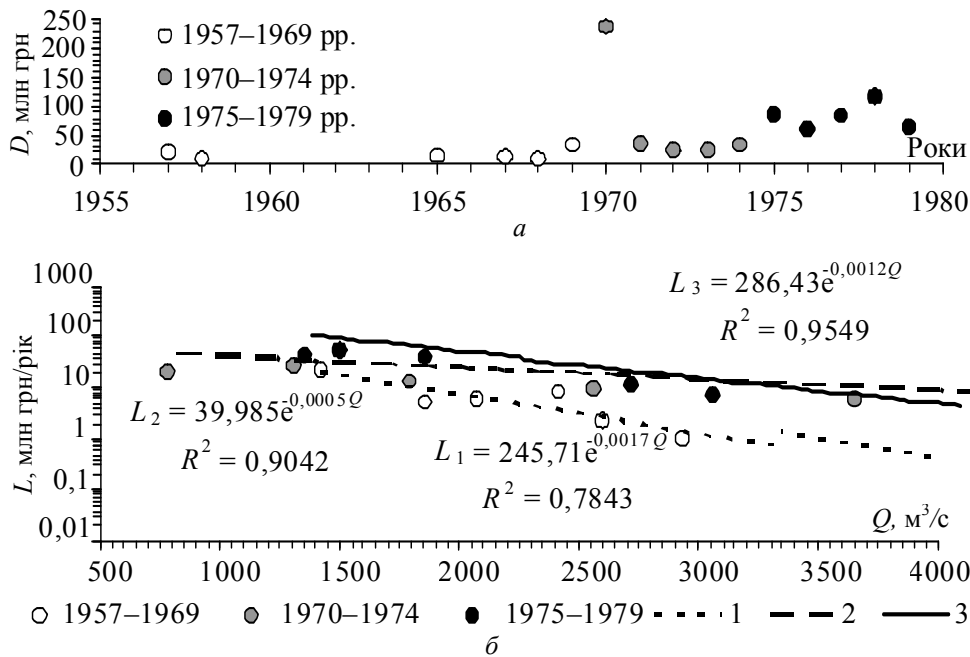


Рис. 4. Виділення модельних кластерів у ряду динаміки збитків (а) та ситуаційні моделі ймовірних втрат  $L$  (б) від максимальних витрат  $Q$  повеней в басейні р. Тиса (Закарпатська область) в інтервалі 1957–1979 рр.

Три модельні кластери в ряду динаміки збитків показано на рис. 4, а, результати ситуаційного моделювання залежності ймовірних втрат (ризиків збитків) від максимальних витрат води — на рис. 4, б, а результати індуктивного моделювання та прогнозування ймовірних втрат — на рис. 5 і 6.

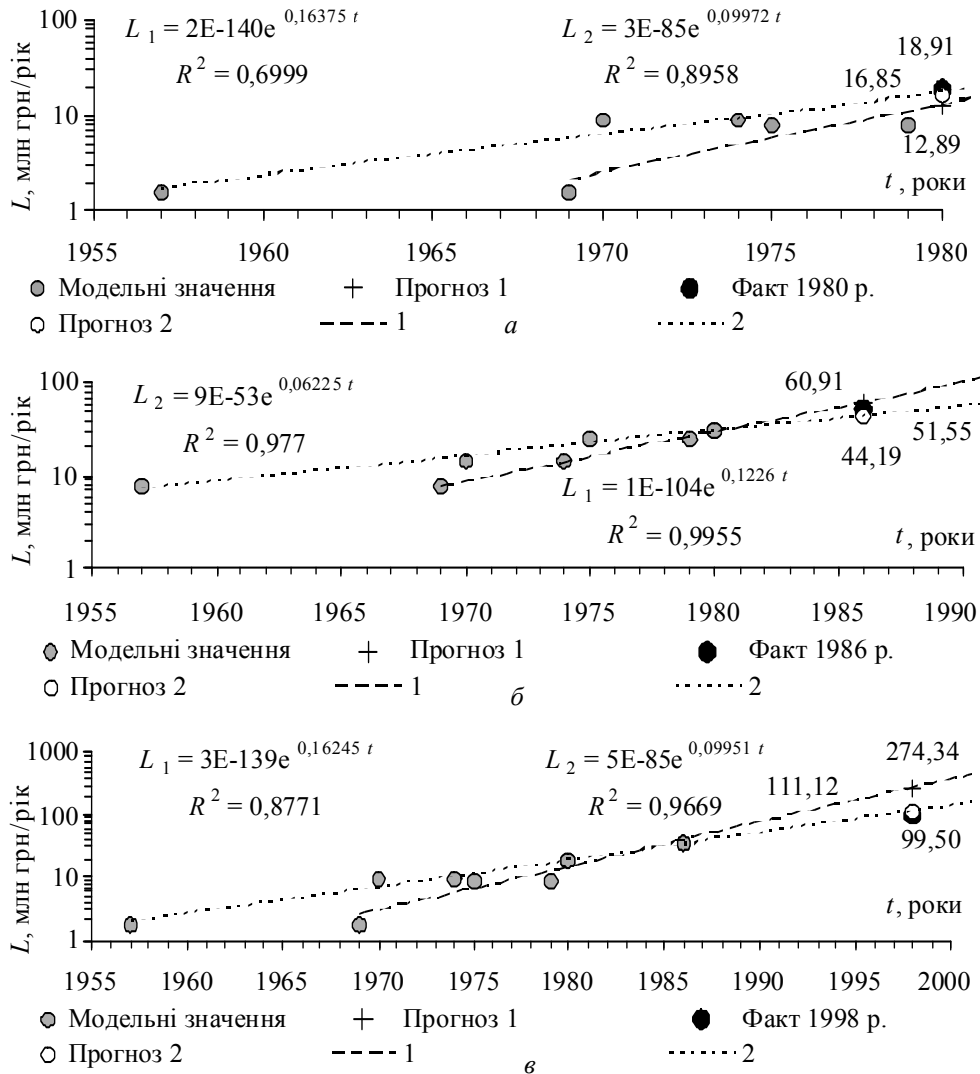


Рис. 5. Зіставлення фактичних значень імовірних втрат  $L$  від великих повеней 1980 р. (а), 1986 р. (б), 1998 р. (в) у басейні р. Тиса (Закарпатська область) з результатами їх ретроспективного прогнозування з використанням індуктивних моделей

Результати тестування адекватності індуктивних моделей імовірних втрат як функцій часу при визначених витратах води, що будувалися на підставі результатів ситуаційного моделювання, показано на рис. 5. Виконувалися по два ретроспективні прогнози ймовірних втрат унаслідок великих повеней 1980, 1986, 1998 рр., що завдали значних збитків (325, 127,9, 810 млн грн відповідно): схема 1 — як для останнього року на відповідному ситуаційному інтервалі; схема 2 — як для першого року на відповідному ситуаційному інтервалі. Оскільки результати ретроспективного прогнозування за схемою 2 точніше відповідали фактичним значенням імовірних втрат (відносні похибки прогнозів становили не більше як 11%, 15%, 12% відповідно), то надалі індуктивні моделі будували зі встановленням ситуаційних моделей наступних періодів за схемою прогнозу 2.

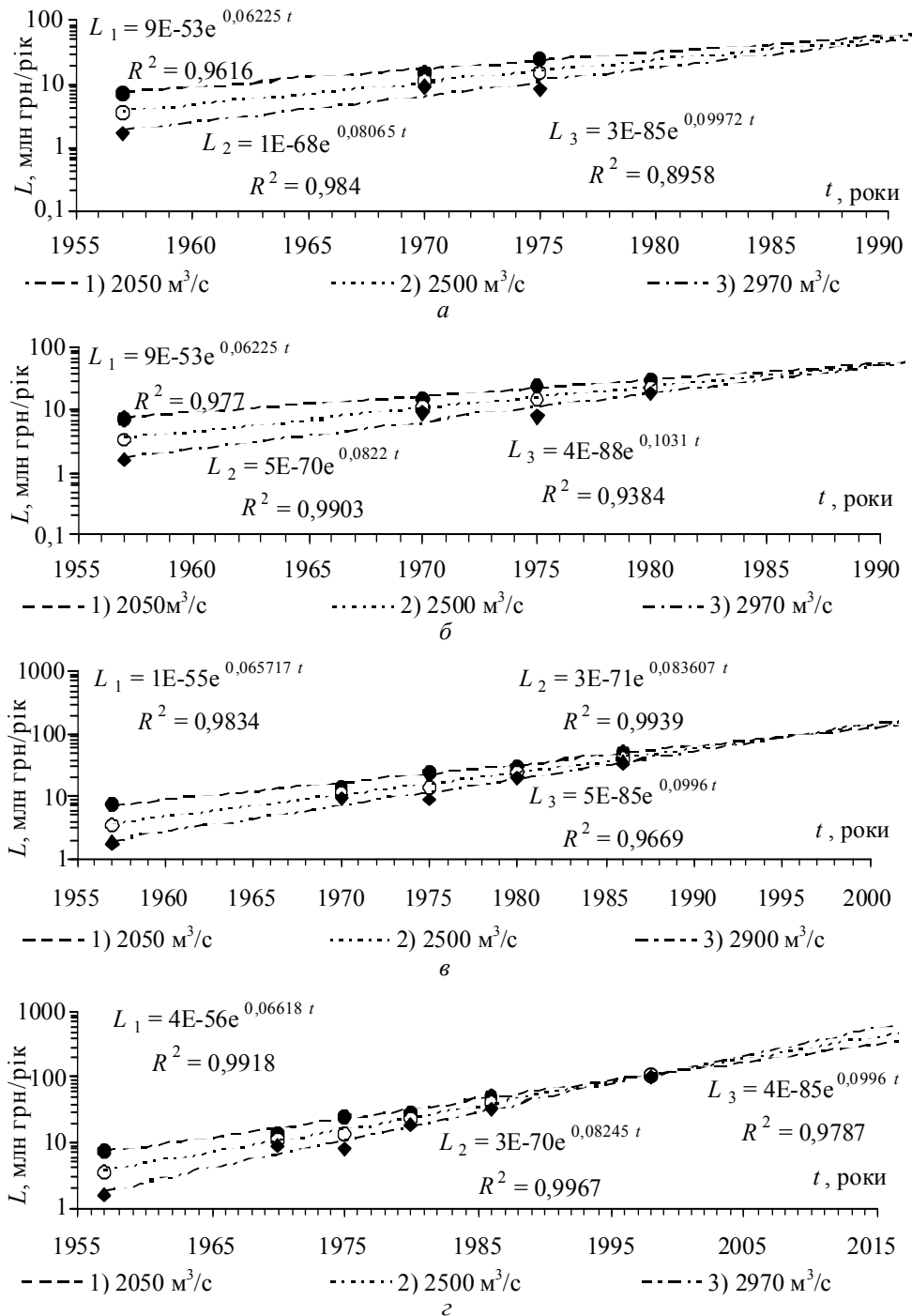


Рис. 6. Індуктивні моделі ймовірних втрат  $L$  від повеней за результатами ситуаційного моделювання в інтервалі 1957–1979 рр. (див. рис. 4 б, а) та в 1980 (б), 1986 (в), 1998 (з) рр. (рис. 7)

Строкові прогнози за допомогою індуктивних моделей на 1980 р. (рис. 5, а і б, а) виконувалися за результатами ситуаційного моделювання, наведеними на рис. 4, б. Під час прогнозування ймовірних утрат в 1986 і 1998 рр. відповідні результати, отримані за допомогою індуктивних моделей

(рис. 5, б, в та рис. 6, б, в), коригувалися з урахуванням фактичних значень імовірних втрат на 1980 і 1986 рр. відповідно. Побудовані ситуаційні моделі показано на рис. 7 (моделі 4, 5), а результати прогнозування до 2015 р., отримані в ході ситуаційно-індуктивного моделювання за всіма наявними даними, — на рис. 3.

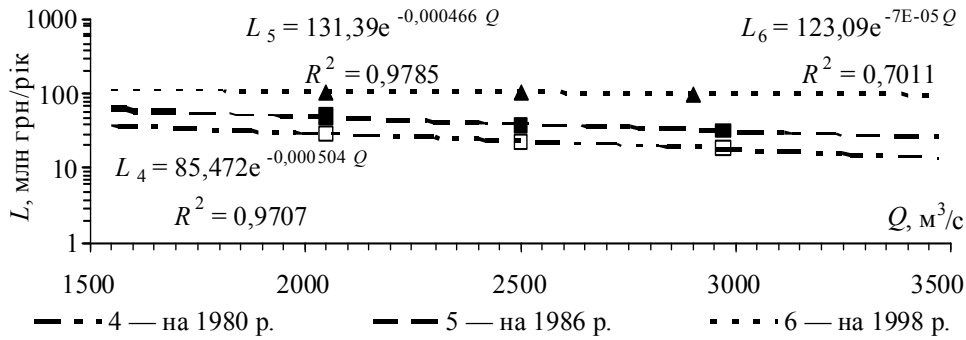


Рис. 7. Ситуаційні моделі ймовірних втрат  $L$  від максимальних витрат  $Q$  паводків у басейні р. Тиса (Закарпатська область), побудовані за допомогою індуктивних моделей на 1980 р. (рис. 6, а), 1986 р. (рис. 6, б) та 1998 р. (рис. 6, в)

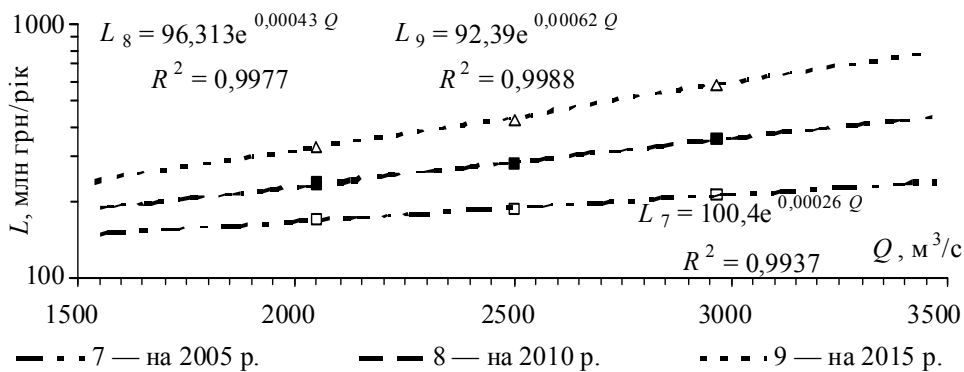


Рис. 8. Результати прогнозування ймовірних втрат  $L$  від максимальних витрат  $Q$  паводків у басейні р. Тиса (Закарпатська область) на 2005, 2010 та 2015 рр. за даними рядів динаміки, показаними на рис. 3

Розглянутий приклад показав принципову можливість екстраполяційного прогнозування за даними моніторингу на основі ситуаційно-індуктивного моделювання. Показано, що таке моделювання дозволяє реалізувати основні ідеї сучасного адаптаційного підходу до моделювання і прогнозування за даними спостережень, зокрема забезпечити постійне коригування індуктивних моделей у міру надходження нових даних для підвищення якості строкових прогнозів.

## ВИСНОВКИ

Запропоновано підхід до екстраполяційного прогнозування за даними моніторингу, що ґрунтується на ідеї ситуаційно-індуктивного моделювання, згідно з яким результати ситуаційного моделювання в межах вибіркового ряду динаміки, які характеризуються монотонністю в трендах або квазістаціонарністю поведінки змінних моделей на відповідних часових інтервалах, фор-

мують підгрунтя для наступної побудови індуктивних моделей. Індуктивні моделі можна виконувати за результатами ситуаційного моделювання як моделі «рівнів». На основі ситуаційних моделей в межах інтервалів часу, де ситуаційні моделі вважаються адекватними, може виконуватися оперативне прогнозування з використанням індуктивних моделей, за допомогою яких у межах спостережених даних відслідковується еволюція ситуаційних моделей, — строкове прогнозування зі встановленням ситуаційних моделей майбутніх періодів. У подальших дослідженнях на реальних прикладах передбачається проаналізувати вплив на якість строкових прогнозів, виконаних за допомогою індуктивних моделей, результатів ситуаційного моделювання.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Довгий С.О. Методи прогнозування в системах підтримки прийняття рішень / С.О. Довгий, П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук, О.І. Савенков. — К.: Азимут-Україна, 2011. — 608 с.
2. Бернстайн П. Против богов: Укрощение риска / П. Бернстайн // Пер. с англ. — М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2000. — 400 с.
3. Горбатенко В.П. Еволюція прогностики як системи наукових знань про майбутнє / В.П. Горбатенко // Стратегічні пріоритети. — № 1(2). — 2007. — С. 11–17.
4. Бідюк П.И. Сравнение некоторых методов прогнозирования на нестационарных процессах / П.И. Бідюк, А.В. Федоров // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 2. — С. 130–139.
5. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А.Г. Ивахненко. — К.: Наук. думка, 1982. — 296 с.
6. Ивахненко А.Г. Помехоустойчивость моделирования / А.Г. Ивахненко, В.С. Степашко. — К.: Наук. думка, 1985. — 216 с.
7. Згуровский М.З. Системный анализ / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. — К.: Наук. думка, 2011. — 900 с.
8. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. — М.: Наука, 1981. — 487 с.
9. Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной среды / Ю.А. Израэль. — Л.: Гидрометеоиздат, 1979. — 376 с.
10. Клыкков Ю.И. Ситуационное управление большими системами / Ю.И. Клыкков. — М.: Энергия, 1974. — 134 с.
11. Поспелов Д.А. Ситуационное управление. Теория и практика / Д.А. Поспелов. — М.: Наука, 1986. — 284 с.
12. Рассел С. Искусственный интеллект: современный подход / С. Рассел, П. Норвиг. — 2-е изд. // Пер. с англ. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. — 1410 с.
13. Стефанишин Д.В. Про один підхід до оцінки стану земляної греблі, що перебуває в постійній експлуатації, за даними регулярних п'єзометричних спостережень / Д.В. Стефанишин // Гідроенергетика України. — 2012. — № 3. — С. 27–32.
14. Kuhn M. Applied Predictive Modeling / M. Kuhn, K. Johnson. — New York: Springer Science+Business Media, 2013. — 600 p.
15. Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д. Використання нечіткої міри для подолання невизначеності довгострокових прогнозів на основі екстраполяцій / Ю.Д. Стефанишина-Гаврилюк, Д.В. Стефанишин // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 4. — С. 99–110.
16. Brockwell P.J. Time series: Theory and methods / P.J. Brockwell, R.A. Davis // Second edition. Springer. — 1991. — 567 p.
17. Stefanyshyn D.V. A Method of Forecasting of Indexes of Dynamic System that evolves slowly, based on Time Series Analysis / D.V. Stefanyshyn // ICIM 2013. Proc. of 4<sup>th</sup> Int. Conf. on Inductive Modelling. — Kyiv, Ukraine, September 16–20, 2013. — P. 221–224.
18. Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д. Прогнозування ризиків збитків від повеней на ріках за даними моніторингу / Ю.Д. Стефанишина-Гаврилюк, Д.В. Стефанишин, О.М. Трофимчук // Екологічна безпека та природокористування: зб. наук. праць. — К.: ІТІП НАНУ, КНУБА. — 2015. — Вип. 18. — С. 37–48.

Надійшла 01.09.2016

## ПРОЦЕССНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ КАК СИСТЕМ СЕРВИСОВ

А.И. ПЕТРЕНКО

**Аннотация.** Идея перехода на новую парадигму программирования, связанную не с объектами, а с бизнес-процессами и их составной частью — бизнес-функциями, — компоновка приложений путем обнаружения и вызова сервисов, доступных в сети, для выполнения необходимой задачи. Этот подход не зависит от конкретных языков программирования и операционных систем и предполагает использование сервис-ориентированной архитектуры (SOA) приложений, построенной на основе формализованных бизнес-процессов, функции которых представлены в виде многократно используемых сервисов с прозрачно описанными интерфейсами. Рассмотрено построение систем сервисов для реализации бизнес-процессов с помощью процессно-ориентированных моделей функций предприятия и онтологий соответствующих предметных областей.

**Ключевые слова:** сервис-ориентированная архитектура, семантические сервисы, модельно-управляемое моделирование, онтология, онтолого-управляемое моделирование, бизнес-модель, универсальный язык моделирования UML.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возникла *необходимость интеграции и взаимодействия приложений* в рамках совокупности большого количества информационных систем предприятия или нескольких предприятий. Наблюдаются тенденции перехода к бизнесу реального времени и созданию систем расширенного предприятия, объединяющего само предприятие, его поставщиков, партнеров и клиентов в единую систему. Поэтому требуется *взаимодействие приложений* как в одной информационной системе, так и между системами отдельных участников бизнес-процесса.

Выход из создавшегося положения, активно развиваемый ведущими поставщиками информационных технологий, такими как IBM, Microsoft, Oracle и другими, состоит в переходе от централизованной инфраструктуры информационных технологий и замкнутого на себе функционала прикладных систем к архитектуре, обеспечивающей возможности быстрого создания новых систем из набора доступных сервисов, т.е. переходе на **сервисные модели взаимодействия** между приложениями общей системы в рамках сервис-ориентированной архитектуры (**Service-oriented Architecture SOA**) и ее реализации с помощью модельно-ориентированных архитектурных решений (**Model-driven Architecture MDA**).

**Сервис-ориентированная архитектура (SOA)** является стилем архитектуры программного обеспечения, которая обеспечивает использование информационных технологий в виде модульных бизнес-сервисов для достижения конкретных бизнес-целей. Архитектура SOA — концептуальная архитектура бизнеса, где бизнес-функциональность, или логика приложе-

ний, становится доступной для пользователей SOA, как и множество многократно совместно используемых сервисов в ИТ-сети. Сервисы в SOA соответствуют модулям бизнес-процесса, или модулям функциональности приложения с открытыми интерфейсами, вызываемыми с помощью сообщений. Основная мотивация появления SOA — желание индустрии программирования заменить «ручное» кодирование программ «от и до» на «промышленную» сборку приложений из «стандартных комплектующих», как это происходит в автомобильной или других «традиционных» отраслях промышленности. Компоненты программы могут размещаться на различных узлах сети и представлять собой независимые, слабосвязанные, заменяемые сервисы-приложения.

Для бизнеса SOA означает ускоренное удовлетворение потребностей клиентов, реальную гибкость бизнеса, быстрое время выхода на рынок, простоту сотрудничества и низкую стоимость бизнеса. Для ИТ-организаций SOA — это повышение производительности, снижение затрат на ИТ-решения за счет ускорения разработки приложений, повторное использование сервисов, улучшение качества приложений, и в целом быстрое реагирование на запросы бизнес-клиентов для модификации системы. Дополнительно к этому существует возможность использования сервисов независимых поставщиков, что обеспечивает еще большую ценность SOA. Более того, даже интеграцию *унаследованных приложений (legacy)* целесообразно проводить с применением данной технологии, когда определенная, наиболее важная часть существующей функциональности как бы «инкапсулируется» и обеспечивается стандартизированным интерфейсом. В случаях, когда сервисы представляют собой реализации вычислительных процедур, говорят о системах *сервис-ориентированных вычислений SOC (Service-oriented Computing)*.

**Цель работы** — теоретическое обоснование, разработка и развитие сервис-ориентированной архитектуры и моделей систем сервисов для решения задачи поиска web-сервисов в репозиториях, композиции и оркестровки сервисов и построения их рабочих потоков (workflows) для поддержки определенных бизнес-процессов.

## **НАУКА О СЕРВИСАХ, МЕНЕДЖМЕНТЕ И ИНЖИНИРИНГЕ**

Усилиями ведущих ИТ-компаний мира созданы методология и инструментарий проектирования сервис-ориентированных систем, наиболее полно отраженные в многосерийной публикации [1]. Они ориентированы на разработку приложений в основном с использованием *web-сервисов* (служб). Под web-сервисами понимаются программные системы, которые используют *XML (Extensible Markup Language)* в качестве формата данных, стандарты *Web Services Description Language (WSDL)* для описания своих интерфейсов, *Simple Object Access Protocol (SOAP)* для описания формата принимаемых и посылаемых сообщений и стандарт *Universal Description, Discovery and Integration (UDDI)* для создания каталогов доступных сервисов. Для комбинирования сервисов в необходимые приложения предложены процедуры *хореографии* и *оркестровки*, при этом хореография web-сервисов определяет взаимодействие между сервисами с помощью обменных уведомле-

ний, а оркестровка описывает взаимодействие сервисов в рамках одного бизнес-процесса, в частности, с использованием языка типа *WS-BPEL (Web Services Business Process Execution Language)*. Наиболее просто бизнес-процесс можно представить в качестве простой оркестровки web-сервисов, которая составляет **поток задач (workflows)**, согласно которому последовательно подключаются сервисы, при этом каждый сервис следует за предыдущим без промедления или пробела и его действие заканчивается как раз перед началом действия следующего сервиса [2–5].

Компанией IBM для удовлетворения потребностей сервис-ориентированного ИТ-предприятия предложена операционная среда реализации компонентов SOA (ODOE — On Demand Operating Environment). Приведем ее основные составляющие [6]:

**Сервисы приложений (Application Services)** — все компоненты, необходимые для построения скомпонованной информационной системы.

**Сервисная шина предприятия (Enterprise Service Bus — ESB)** — интеллектуальный слой для подключения информационных систем, различных данных и других сервисов, которые обычно распределены по всей ИТ среде предприятия.

**Бизнес-сервисы (Business Services)** — открытая часть бизнес-процессов и бизнес-функциональности, к которой обращаются и которая обеспечивает реализацию заданной ценности на запрос.

**Общие сервисы (Common Services)** — обеспечение доставки и индивидуальной обработки данных, а также других утилит, таких как формирование отчетности. Эти сервисы позволяют определять и выполнять рабочие потоки, в основном для логических сервисов бизнес-функций.

**Сервисы информационного менеджмента (Business Performance Management)** — унифицированный способ представления, доступа, поддержания, управления, анализа и интеграции данных и контента из гетерогенных информационных источников.

**Сервисы инфраструктуры (Infrastructure Services)** — набор независимых от платформы сервисов, который позволяет всем другим сервисам быть установленными, выполняться и контролироваться в конкретной инфраструктуре, составленной из операционных систем и сетевых и аппаратных систем.

Информация о наиболее известных средствах разработки сервисов приведены в табл. 1. На сегодня существует ряд известных репозитариев сервисов общего назначения, например:

Amazon Web Service Developer Connection (<http://Developer.amazonwebservices.com>);

XML Web Services Repository ([www.xmlwebservices.cc](http://www.xmlwebservices.cc));

UDDI service registry ([www.uddi.org](http://www.uddi.org));

Xmethod service registry ([xmethods.net/](http://xmethods.net/));

IBM UDDI (<http://www-306.ibm.com/software/solutions/webservices/uddi/>);

Internet of Things ([www.fi-ppp.eu/projects/](http://www.fi-ppp.eu/projects/)).



**Таблица 1.** Наиболее известные средства разработки SOA и SOC

Средство	Реализуемые функции SOA	Компания	Комментарий
Web-sphere	Композиция сервисов, их поиск и моделирование	IBM	Флагман SOA инструментария компании IBM. Требует значительных знаний SOA
.NET	Создание сервисов, их обнаружение, композиция, развертывание	Microsoft	Основной продукт компании Microsoft для SOA. Основан на системе Windows и использует C# как основной язык программирования
HP SOA Center	Композиция сервисов, моделирование, интеграция, менеджмент	HP	Базовый SOA инструментарий компании HP. Требует значительных знаний SOA
Weblogic	Развертывание сервисов, их композиция, менеджмент, политика использования	BEA	Основной продукт компании BEA для SOA. Предназначен для профессионального использования
Oracle SOA Suite	Создание сервисов, развертывание, композиция, оркестровка	Oracle	Флагманский продукт Oracle для SOA. Требует использования высококачественных серверов, а не настольных компьютеров
Enterprise SOA	Создание сервисов, развертывание, композиция	SAP	Продукт компании SAP интегрирован со многими из существующих продуктов SAP. Достаточно сложный и часто требует, чтобы пользователь знал о SAP продуктах

## ТИПЫ СЕРВИС-ОРИЕНТИРОВАННОЙ АРХИТЕКТУРЫ

С увеличением внимания предприятий к web-основанным решениям и сервисам наблюдается повышение спроса на бизнес-сервисы и бизнес-функциональность. Крайне необходимы исследования по выявлению возможного выбора **инвариантных сервисов для систем**, которые фокусируются на человеческой деятельности (электрические сети, системы водоснабжения, транспортные системы, система здравоохранения, система образования, банковско-финансовые системы, сети розничной торговли, системы туризма, медиа и развлечений и др.). Это позволит создать **репозитарий междисциплинарных инвариантных сервисов как строительных блоков** соответствующих систем сервисов. Объем исследований настолько велик, что требует коллективных усилий многих партнеров и соучастников.

Такой репозитарий мог бы стать основой для *создания среды знаний о сервисах*, или *Service Science Knowledge Environment*, которая объединит научные круги, промышленность и правительство, а также другие европейские институты. При этом первоначальные ресурсы знаний могут относиться к различным доменным приложениям, таким как *электронная администрация, электронное правительство, электронное здравоохранение, производство, энергопотребление с акцентом на возможности SmartGrid сети, пе-*

редовые программные сервисы, цепочки поставок и логистики, сервисы туризма и отдыха, передовые сервисы в области телекоммуникаций. Список сервисных секторов, обеспечивающих реальный вклад в современную экономику, не ограничивается перечисленными приложениями. Умный транспорт, умные здания, интеллектуальное водоснабжения — это только некоторые дополнительные сервисные сектора возможного применения, для которых новые сервисы могут быть задуманы и разработаны.

Web-сервисы, описанные на языке WSDL, содержат преимущественно синтаксическую информацию, и это затрудняет организацию автоматического поиска web-сервиса и выполнение композиции сервисов. Поэтому (кроме введения в описания семантических аннотаций) предложено непосредственно использовать семантическую информацию в web-сервисах, в результате чего появилось понятие *семантических web-сервисов (SWS)* со своими языками описания, представителями которых являются *OWL-S (Web Ontology Language for Web Services)* и *WSMO (Web Service Modeling Ontology)*. Сервисы SWS создаются на базе существующей технологии web-сервисов для обеспечения динамического поиска сервисов, их композиции, вызова web-сервисов. Результатом этого является возможность автоматизации процедур, которые требуют вмешательства разработчиков программного обеспечения. Это может быть достигнуто использованием более точных описаний *семантических web-сервисов, которые понятны для компьютера.*

SOA с помощью web-сервисов становится основой для объединения разнородных бизнес-систем через Интернет. С помощью SOA функциональные потребности предприятия в корпоративных системах удовлетворяются набором сервисов, а не отдельным приложением, что фундаментально меняет подходы разработчиков к реализации. Конфигурация и координация сервисов в архитектуре, основанной на сервисах, и композиция сервисов и процессов одинаково важны в современных системах сервисов [7]. Сервисы взаимодействуют друг с другом с помощью сообщений. Сообщение можно осуществить с помощью *шаблона «запрос–ответ»*, когда в определенный момент времени только один из конкретных сервисов вызывается одним потребителем (связь «один-к-одному», или синхронная модель); с использованием шаблона *«публикация / подписка»*, когда на одно конкретное событие может откликнуться много сервисов (связь «один-ко-многим», или асинхронная модель); с *привлечением интеллектуальных агентов (MAS)*, которые определяют координацию сервисов, поскольку каждый агент имеет в своем распоряжении определенные знания о бизнес-процессе и может обмениваться этими знаниями с другими агентами. Такая система способна сочетать качества SOC, такие как *функциональная совместимость* и *открытость*, со свойствами MAS, такими как *гибкость* и *автономия*. Но необходимы дополнительные исследования по созданию практических механизмов для управления агентными сервисами и их коммуникации в интернет-среде.

В ИПСА НТУУ «КПИ» исследуются гибридные *сервис-ориентированные архитектуры, управляемые событиями (EDSOA)*, в которых сервисы генерируют события и тем самым переводят бизнес-процесс из одного состояния в другое. В свою очередь, благодаря событиям сервисы подключаются для передачи состояния процесса и данных от одного сервиса, который об-

наружил и опубликовал событие, к другим сервисам, запускаемым при появлении конкретных событий. Такое формирование бизнес-сервисов и бизнес-событий, а затем их целевая увязка для решений задач бизнеса позволяют добиться стратегических преимуществ для предприятия. При этом необходимо «накинуть» на всю программную инфраструктуру организации «сеть» программных датчиков, программных агентов и аппаратных датчиков, которые отслеживают события во всех аппаратных и программных компонентах, а также значимые для бизнеса события и передают в центр принятия решений сигналы, ассоциированные с этими событиями. Это позволяет технологически управлять бизнесом не вслепую, а иметь четкое представление о всем происходящем в данный момент времени на предприятии.

При проектировании систем сервисов важное значение имеет *зернистость* сервисов, т.е. уровень детализации обслуживания. Обычно используют модули бизнес-логики достаточно высокого уровня, благодаря чему взаимодействие между ними сводится к ограниченному количеству сообщений, при этом снижается нагрузка на сеть. Но в последнее время широкое распространение получают *микросервисы*, реализующие только одиночные функции [8]. Микросервисы представляют собой бизнес-функции, а не общие функции программного обеспечения, например, поиск в базе данных. Они являются логическими компонентами, развернутыми в виде RESTful сервисов и доступными через HTTP и URL.

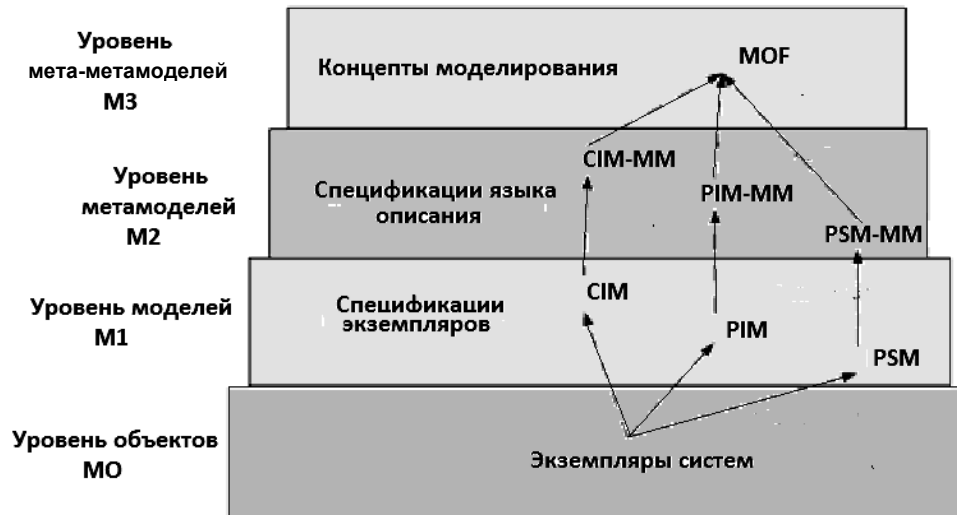
## **РАЗРАБОТКА СИСТЕМ СЕРВИСОВ НА ОСНОВЕ ОНТОЛОГИЙ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ**

В последние годы исследуется концепция разработки систем сервисов на базе *онтологий* разного уровня (*Domain, Application, Task Ontologies*). Онтологии, описанные на языке OWL, — это формальное явное описание понятий в данной предметной области. В центре большинства онтологий находятся *классы*. Например, класс *Action* включает все процедуры (запуск задач, передача данных, контроль потока данных и т.д.). Конкретные процедуры — это *экземпляры* этого класса. Класс имеет подклассы, которые содержат более конкретные понятия, чем сверхкласс. *Слоты* описывают свойства классов и экземпляров: процедура Task может содержать файл (*containsFile*), создавать ресурс (*createsResource*) или зависеть от определенных условий (*hasDependency*).

Слоты могут иметь различные *фацеты*, которые описывают тип значения, числовые значения, разрешенные пределы их изменения и др. Онтология вместе с набором индивидуальных экземпляров классов образует *базу знаний*. Но определить, где заканчивается онтология и где начинается база знаний, трудно. Группой управления объектами OMG (Object Management Group) [9] предложена иерархическая система уровней описания семантики системы сервисов при ее моделировании, которая состоит из *информационного уровня* (M0), *уровня моделей* (M1), *уровня метамодели* (M2) и *уровня мета-метамодели* (M3), который часто называют *Meta Object Facility* (MOF) (см. рисунок).

Процесс проектирования системы сервисов может быть сведен к *процессу преобразований моделей*, начиная с метамодели в качестве входных

данных и используя набор правил преобразования [9–14]. При этом преобразование само по себе является также моделью. Модели преобразования имеют различные области применения:



Связь между моделями MDA и метамоделями

- создание моделей нижнего уровня и в итоге **программного кода**, двигаясь от моделей более высокого уровня;
- отображение и синхронизация между моделями на том же уровне или на различных уровнях абстракции;
- создание представления о системе на базе запросов;
- эволюция задач модели, таких как рефакторинг модели, т.е. изменение внутренней структуры системы с целью сделать её проще для понимания и внесения дальнейших изменений, не изменяя существующей функциональности;
- обратное проектирование от моделей нижнего уровня или кода до модели более высокого уровня.

Преобразование моделей является ключевым элементом в проектировании систем сервисов для обеспечения плавного средства обработки входных онтологических моделей с целью генерирования, фильтрации и обновления целевых моделей. Языки преобразования моделей реализуют различные типы преобразования, такие как **модель-модель (ММ)** или **модель-код (МК)**. Особенностью данного подхода является то, что разработчик большую часть времени работает не с кодом, а с моделями.

Для трансформации моделей предложен **модельно-управляемый подход (MDA)**. MDA использует MOF-основанные модели для создания и манипулирования точными, подробными, компьютерно-считываемыми описаниями структуры приложений, не зависящими от языков программирования, операционных систем или баз данных, которые могут быть использованы для их реализации. Ключевым стандартом MDA является **MOF**, а не **UML**, как считают до сих пор некоторые пользователи.

Подход MDA можно использовать для получения контроля и систематического улучшения всего жизненного цикла ИТ-решений: от моделирова-

ния общего бизнеса (содействия эффективной связи между бизнес-аналитиками и ИТ-разработчиками и выполнения конкретных требований к решению) до разработки, внедрения, интеграции и управления многими видами программных артефактов. MDA на основе трехслойного подхода обеспечивает такие типы моделей:

**Вычислительная независимая модель CIM** (Computing Independent Model) — описывает систему с вычислительной независимой точки зрения, освещая структурные аспекты системы, изменяя акцент от моделирования домена на моделирование архитектуры.

**Независимая от платформы модель PIM** (Platform Independent Model) — может рассматриваться как определение системы с точки зрения технологии нейтральной виртуальной машины или вычислительной абстракции.

**Модель для конкретной платформы PSM** (Platform Specific Model) — охватывает технические концепции и сервисы, составляющие платформу реализации. Эта модель направлена на конкретную технологию реализации системы сервисов.

Мета модель описывает свойства и конструкции каждой из CIM, PIM и PSM моделей точно (см. рисунок). В контексте работы выбирается платформа на основе web-сервисов. Поставщик сервисов создает абстрактное описание интерфейса сервиса, который может быть использован потенциальными пользователями сервисов для поиска и вызова этого сервиса с помощью сообщений на основе XML. Параметры web-сервисов при обращении к репозиторию, в котором потенциальные пользователи могут искать соответствующие сервисы и протоколы для связи сервисов и их клиентов, образуют платформу реализации как сервис-ориентированную архитектуру.

Различные типы платформы могут отличаться друг от друга. Общим свойством платформы является ее сервис-ориентированная архитектура, а конкретными технологиями реализации — сами web-сервисы и сервисные механизмы (например, Apache Axis или Oracle BPEL). Мета моделирование является одним из самых важных понятий MDA. **Онтологии рассматриваются как CIM модели**, поэтому концептуальные модели PIM и PSM также отражают семантику для данного домена приложений, соответствующую семантике доменов реального мира (Real World) независимо от конкретных потребностей приложений. Таким образом, онтология выступает в качестве основы метамодели для генерирования концептуальных моделей для реализации конкретных информационных систем.

Возможное слияние онтологического и MDA подходов приводит к следующему возможному процессу разработки программного обеспечения:

- построить независимые общую (GO) и доменную (DO) онтологии. Часть DO использовать в качестве вычислительной независимой модели (CIM);
- преобразовать CIM в независимую от платформы модель (PIM);
- преобразовать PIM в модель конкретной платформы (PSM) и артефакт зависимых моделей (например, модель схемы базы данных); определить методологию сравнения и поиска сервисов;
- превратить части онтологий DO и GO в онтологию контекста (CO);
- применить преобразования PSM в коды приложений и программных артефактов [15].

При создании модели конкретной платформы (PSM) осуществляется поиск необходимых сервисов [16, 17] в сети, при этом используются онтологии для повышения точности поиска сервиса и открытие такого сервиса, в котором упоминается в точности искомое понятие, а не произвольных сервисов, в описаниях которых встретилось заданное ключевое слово. Известно, что в различных предметных областях одни и те же понятия могут быть представлены различными терминами. Механизм онтологии в этих случаях позволяет формировать осмысленные иерархические взаимосвязи между сервисами, т.е. реализовать композицию сервисов, способную удовлетворить запрос пользователя, хотя в ее описании может не быть некоторых ключевых слов из входного запроса.

Рассмотренный подход к проектированию систем сервисов хорошо адаптируется к особенностям *современных распределенных вычислительных сред* (типа мультиоблака или грид), когда web-сервисы находятся в различных географически разделенных репозиториях (возможно, что в нескольких эквивалентных вариантах реализации), а их композиции в виде созданных приложений выполняются на различных вычислительных узлах среды, ресурсы которых освободились к моменту начала выполнения очередного сервиса композиции. В результате реализованное *приложение имеет динамически изменяемую архитектуру и переменный компонентный состав*.

## ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Применительно к разработке программных приложений особенности процессно-ориентированного проектирования обобщены в табл. 2

**Таблица 2.** Сравнение различных подходов к разработке программного обеспечения

№ п/п	Объектно-ориентированный	Процессно-ориентированный
1	<b>ОТВЕТСТВЕННЫЕ ИСПОЛНИТЕЛИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ</b>	
	<i>Разработчики программного обеспечения, большую часть времени работающие с кодом</i>	<i>Архитекторы программного обеспечения, большую часть времени работающие совместно с экспертами предметной области с онкологиями и моделями</i>
2	<b>ЭТАП АНАЛИЗА ТЕХНИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ</b>	
	Требования приведены на естественном языке для системных аналитиков, которые преобразовывают их технические характеристики для разработчиков	Анализ домена выполнен поставщиками сервисов, что позволяет разработчикам приложений сосредоточиться только на поиске и комбинировании сервисов, которые отвечают бизнес-техническим характеристикам

Продолжение табл. 2

3	<b>ЭТАП ПРОЕКТИРОВАНИЯ</b>	
	Уточнение структуры классов, проектирование архитектуры системы (структуры компонентов и модулей), выбор строительных блоков. Обновление их с учетом технических изменений является сложной задачей	Выбор или построение онтологии прикладного домена и проектируемого приложения, выбор репозитария сервисов
4	<b>ЭТАП РЕАЛИЗАЦИИ</b>	
	Кодирование на конкретном языке программирования (Java, C ++, C #). Разработка выполняется одной (виртуальной или физической) командой, которая создает функции, классы, модули	Модели сервисов представлены в машиночитаемой форме, что позволяют разработчикам сервисов автоматически перевести их в исполняемый код (CIM-> PIM -> PSM->UML). Новые сервисы динамически создаются с использованием существующих
5	<b>ЭТАП ТЕСТИРОВАНИЯ И ПОДДЕРЖКИ</b>	
	Тестирование обычно проводится тестировщиками в той же организации на основе исходного кода и функциональных спецификаций. Тестовые сценарии определяются разработчиками / тестировщиками	Тестирование разделяется между поставщиком сервисов, брокером и клиентом без взаимодействия между ними. Сервисы могут быть проверены до их регистрации и использования. Тестовые сценарии могут быть автоматически сгенерированы на месте совместно брокером и клиентом на основе сервисных метаданных и спецификаций
6	<b>ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕНИЙ</b>	
	Проектно-зависимые решения, которые трудно использовать повторно, с относительно краткосрочным изолированным применением в выбранном домене	Кросс-проектные решения, обслуживающие несколько доменов и предназначенные для повторного долгосрочного совместного использования многими проектантами и организациями

## ВЫВОДЫ

Ориентация мировой экономики на индустрию сервисов, появление междисциплинарной науки о сервисах, распространение сервисных подходов на технические системы (в частности, структуры программного обеспечения) мотивируют экономистов, социологов, математиков, программистов и законодателей сотрудничать для достижения очень важной цели: анализа, построения, управления и развития сложных систем сервисов. Главная задача состоит в выявлении логики сложных систем сервисов и внедрении общей методологии их моделирования. Решение этой задачи требует специалистов нового типа — сервисных специалистов, о которых в Украине почти ничего неизвестно [17]. Для ее решения в 2015 г. в ИПСА НТУУ «КПИ» введена специализация «Системное проектирование сервисов» в рамках новой специальности 122 «Компьютерные науки и информационные технологии». Наука о сервисах (которая развивается довольно активно) имеет несомненные междисциплинарные признаки с долгосрочной целью стать действительно междисциплинарной отраслью.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Jürgen Kress*. Industrial SOA / Jürgen Kress, Berthold Maier, Hajo Normann, Danilo Schmeidel, Guido Schmutz, Bernd Trops, Clemens Utschig-Utschig, Torsten Winterberg. — Available at: <http://www.oracle.com/technetwork/articles/soa/ind-soa-toc-1934143.html>.
2. *Handbook of Service Science*. Service Science: Research and Innovations in the Service Economy / P. Maglio, C.A. Kieliszewski, J. Spohrer // Springer, New York, 2010.
3. *Service Systems Implementation*. Service Science: Research and Innovations in the Service Economy / H. Demirkan, J. Spohrer, V. Krishna // Springer, New York, 2011.
4. *Services Science: Fundamentals, Challenges and Future Developments* / B. Stauss, K. Engelmann, A. Kremer, A. Luhn // Springer, Berlin, 2007.
5. *Петренко А.А.* Объекты и методы науки о сервисах / А.А. Петренко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 2. — С. 75–82.
6. *Succeeding through service innovation: A service perspective for education, research, business and government*, ISBN: 978-1-902546-65-0. // University of Cambridge Institute for Manufacturing (IfM) and International Business Machines Corporation (IBM), April 2008. — 30 p.
7. *Петренко О.О.* Порівняння типів архітектури систем сервісів / О.О. Петренко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 4. — С. 48–62.
8. *Newman Sam*. Building Microservices: Designing Fine-Grained Systems / Sam Newman // O'REILLY, 2014. — 182 p.
9. *World Wide Web Consortium*. Web Services Architecture. — Available at: <http://www.w3.org/TR/ws-arch>, 2006.
10. *Valiente María-Cruz*. An Ontology-Based and Model-Driven Approach for Designing IT Service Management Systems / María-Cruz Valiente, Cristina Vicente-Chicote, Daniel Rodríguez // International Journal of Service Science, Management, Engineering, and Technology, 2(2), 65–81, April-June 2011.
11. *Alahmari S*. A Model-Driven Architecture Approach to the Efficient Identification of Services on Service-oriented Enterprise Architecture / S. Alahmari, D. De Roure, Ed. Zaluska // At The Second Workshop on Service oriented Enterprise Architecture for Enterprise Engineering in conjunction with the 14th IEEE International Enterprise Distributed Object Computing Conference, Vitória, Brazil, 2010.
12. *Pahl Claus*. Semantic Model-Driven Architecting of Service-based Software Systems / Claus Pahl. — Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-244/paper3.pdf>
13. *Pahl C*. An Ontology for Software Component Matching / C. Pahl // International Journal on Software Tools for Technology Transfer, Special Edition on Component-based Systems Engineering. — 2006. — № 7. — P. 1–10.
14. *Петренко А.А.* Семантическое модельно-управляемое моделирование архитектуры системы сервисов на основе доменных онтологий / А.А. Петренко, А.И. Петренко // Electronic Modeling. 2016. — 38, — № 5. — ISSN 0204–3572.
15. *Kalyanpur A*. Automatic mapping of OWL ontologies into Java / A. Kalyanpur, D. Pastor, S. Battle, J. Padget // Proceedings of the International Conference on Software Engineering & Knowledge Engineering (SEKE), 2004.
16. *Петренко І.А.* Автоматизовані методи пошуку і відкриття необхідних сервісів / І.А. Петренко, О.О. Петренко // Вісник Університету «Україна». Серія «Інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика». — 2015. — №1 (17). — С. 55–64.
17. *Андон П.* Роль семантики в интеграції приложений на основі веб-сервісів / П. Андон, В. Дерезький // Проблеми програмування. — 2010. — № 2–3. Спец. вип. — С. 469–478.
18. *Петренко О.О.* Підготовка кадрів для індустрії сервісів / О.О. Петренко // Information Technologies in Education. — 2015. — № 22. — С. 158–164. — DOI: 10.14308/ite000528

Поступила 28.10.2016



## ПЕРСПЕКТИВИ РЕАЛІЗАЦІЇ ВБУДОВАНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ МОВИ НА БАЗІ RISC-МІКРОКОНТРОЛЕРІВ

І.А. МАРТИНЮК

**Анотація.** Реалізація систем автоматичного розпізнавання мови як складової частини звукового інтерфейсу керування інформаційними інтелектуальними системами сприяє підвищенню ефективності взаємодії людини з такими системами. Особливо актуальними на тепер є дослідження в галузі вбудованих систем автоматичного розпізнавання. Проаналізовано перспективи реалізації вбудованих систем автоматичного розпізнавання мови на базі високопродуктивних RISC-мікроконтролерів. Обґрунтовано переваги такої реалізації порівняно з іншими рішеннями в цій галузі. Здійснено порівняльну характеристику високопродуктивних серій мікроконтролерів. Досліджено перспективи реалізації кожного етапу задачі розпізнавання за допомогою мікроконтролерної системи.

**Ключові слова:** автоматичне розпізнавання мови, вбудовані системи, мікроконтролерні системи.

### ВСТУП

На сучасному етапі розвитку комп'ютерних технологій постає проблема зручного та ефективного способу взаємодії людини з інформаційними інтелектуальними системами. Оскільки усне мовлення є природним способом спілкування для людини, то технології автоматичного розпізнавання мови дозволяють їй найбільш ефективно взаємодіяти з такими системами.

Використання систем автоматичного розпізнавання мови (САРМ) відкриває широкий спектр застосувань: від додатків для автоматичного набору тексту і транскрибації аудіозаписів до керування бортовими пристроями автомобілів та автоматизації процесів систем масового обслуговування (наприклад, збирання показників лічильників для комунальних служб).

Типово САРМ реалізуються у вигляді програмних додатків для персональних комп'ютерів чи серверів (хмарні обчислення), оскільки потребують значних обчислювальних потужностей та ресурсів для розпізнавання мови в реальному часі. Проте така реалізація накладає ряд обмежень, зокрема щодо портативності та автономності пристроїв, які використовують таку технологію.

Реалізація вбудованих систем розпізнавання мови у вигляді автономних портативних модулів дозволить уникнути указаних обмежень та ефективно використовувати ці системи у таких галузях, як автотранспорт, авіація, соціальна сфера, робототехніка тощо.

Сфери застосування САРМ показано на рис. 1.

Як приклади застосування таких систем можна навести: голосове керування функціоналом автомобіля (для якого помилка розпізнавання не при-

зведе до аварійної ситуації), тим самим розвантажити водія для сконцентрування його увагу на дорозі; реалізацію мовного інтерфейсу в інвалідних кріслах для людей з обмеженими можливостями.



Рис. 1. Основні сфери застосувань CAPM

## АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Ураховуючи основні проблеми [1] та аналізуючи останні дослідження в галузі розроблення вбудованих CAPM [2–12], варто відзначити, що реалізація технологій автоматичного розпізнавання мови для таких систем має обмеження, зокрема щодо економії обчислювальних ресурсів та пам'яті, які значно менші порівняно з персональними комп'ютерами. Також актуальною, особливо для систем з батарейним живленням, є проблема помірного споживання електроенергії.

Можна виділити такі основні напрями реалізації вбудованих CAPM за допомогою:

- програмованих вентильних матриць (FPGA);
- одноплатних комп'ютерів;
- цифрових сигнальних процесорів (DSP).

Грунтуючись на дослідженнях з побудови вбудованих CAPM на базі FPGA [2–6], зокрема враховуючи праці В. Schrauwen, S. J. Melnikoff та ін. [2, 3], варто зазначити, що такі рішення ефективні для процесу цифрового оброблення сигналів і мають низький рівень споживання електроенергії. Проте вони не достатньо ефективні для оброблення чисел з плаваючою точкою та вирішення інших завдань процесу розпізнавання. Матриці FPGA мають низький рівень інтеграції, тому такі системи потребують додаткових зовнішніх модулів, зокрема аналого-цифрового перетворювача (АЦП) та модуля доступу до зовнішньої постійної пам'яті для збереження бази слів. Це, у свою чергу, призводить до підвищення собівартості та ускладнює проектування і розроблення цих систем.

Системи автоматичного розпізнавання мови з використанням DSP-мікропроцесорів дозволяють реалізовувати лише окремі перетворення на етапі цифрового оброблення звукового сигналу. Тому для реалізації повного процесу розпізнавання потрібно використовувати додаткові зовнішні модулі. Цей напрям розвинено в дослідженні А. Aldahoud з побудови гібридних DSP-FPGA систем розпізнавання [7]. Такі реалізації більш ефективні, проте мають недоліки, притаманні системам на базі FPGA (крім оброблення чисел з плаваючою точкою).

Варто відзначити також дослідження в галузі CAPM [8, 9] на базі одно-платних комп'ютерів. Такі системи керуються в основному операційною системою Linux, що має значні переваги під час розроблення CAPM завдяки достатній кількості програмних інструментів та бібліотек. Але такі системи потребують наявності дисплея або терміналу для розроблення та керування, мають значно більшу вартість, показники споживання електроенергії та менший рівень відмовостійкості порівняно з апаратною (низькорівневою) реалізацією.

Найперспективнішою, на мою думку, є реалізація вбудованих систем розпізнавання мови на базі сучасних високопродуктивних RISC-мікроконтролерів завдяки збільшеним обчислювальним ресурсам, високому рівню інтеграції, низькому рівню енергоспоживання та невисокій собівартості.

Переваги і недоліки апаратної бази для вбудованих CAPM наведено в табл. 1.

**Таблиця 1.** Порівняльна характеристика апаратної бази для вбудованих CAPM

<b>Апаратна база</b>	<b>Переваги</b>	<b>Недоліки</b>
FPGA	Низький рівень енергоспоживання	Низький рівень інтеграції (необхідність підключення зовнішньої пам'яті та інших модулів)
DSP-процесори	Невисока собівартість. Низький рівень енергоспоживання	Низький рівень інтеграції. Вузкоспеціалізовані (реалізують тільки основні алгоритми процесу розпізнавання)
Одноплатні комп'ютери	Значний запас обчислювальних ресурсів. Велика ємність пам'яті Зручність програмування	Висока собівартість. Високий рівень енергоспоживання
Високопродуктивні мікроконтролери	Достатня кількість обчислювальних ресурсів. Високий рівень інтеграції. Низький рівень енергоспоживання. Невисока собівартість	Обмежена ємність пам'яті (можна розширити)

**Мета роботи** — дослідження перспектив реалізації вбудованих CAPM на базі передових RISC-мікроконтролерів шляхом оцінювання найбільш продуктивної технічної бази та визначення способів оптимального використання ресурсів системи в процесі розв'язання задачі розпізнавання.

## **ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ ДОСЛІДЖЕННЯ**

### **Порівняльна характеристики RISC-мікроконтролерів на базі мікропроцесорного ядра Cortex®-M7**

Оскільки ресурси мікроконтролерної системи для вбудованих рішень обмежені, розглянемо найбільш прогресивну архітектуру для використання та оцінимо її можливості.

Завдяки науково-технічному прогресу з'являються дедалі більш продуктивні мікропроцесорні системи. Найефективнішим ядром для мікропроцесорних систем натеper є Cortex®-M7 [14], розроблене ARM Holdings. Це ядро порівняно з аналогами дозволяє значно підвищити продуктивність побудованих на його базі мікроконтролерних систем не тільки в обчисленнях, але й у цифровому обробленні сигналів. Компанія-розробник позиціонує Cortex®-M7 для вбудованих рішень, зокрема у сфері розпізнавання мови, і передбачає, що підвищена продуктивність даного ядра дозволить підвищити швидкість аналізу звукової інформації для завдань розпізнавання [13]. Ядро включає DSP-модуль, що дозволяє ефективно використовувати можливості алгоритмів цифрового оброблення сигналів як на рівні даних, так і на рівні операцій, зокрема для вейлвет-перетворень та швидкого перетворення Фур'є.

Оскільки ліцензії на використання Cortex-M7 у своїх розробках мають лише три компанії (STMicroelectronics, NXP та Atmel), то аналізуємо їх рішення щодо використання ядра, розглянувши найбільш перспективні серії мікроконтролерів цих виробників — STM32F7 (STMicroelectronics), KV5x (NXP), SAM V (Atmel) [15–17] — та оцінимо їх характеристики.

*Продуктивність.* Мікроконтролери серії SAMV мають найвищі показники продуктивності порівняно з аналогами. За даними синтетичних тестів Dhrystone продуктивність зазначених мікроконтролерів досягає 645 DMIPS за максимальної тактової частоти ядра 300 МГц. Найнижчі показники за цим параметром мають мікроконтролери серії STM32F7 – 462 DMIPS за тактової частоти 216 МГц.

*Ємність постійної пам'яті.* Ємність постійної пам'яті мікроконтролерів усіх трьох серій становить не менше одного мегабайта, що є достатнім для розроблення та програмування більшості складних програмних систем. Проте серія KV5x удвічі поступається аналогам.

*Швидкість доступу до постійної пам'яті.* Крім ємності, важливим критерієм ефективності є швидкість зчитування даних з пам'яті, оскільки більшість типів flash-пам'яті не в змозі забезпечити безперервний доступ до даних за максимальної тактової частоти мікроконтролера.

Компанія STMicroelectronics використовує у своїй серії мікроконтролерів ART Accelerator власного виробництва, який забезпечує доступ до даних постійної пам'яті без затримок за максимальної тактової частоти, що дозволяє ефективно використовувати ресурси системи, запобігаючи простоям у роботі мікроконтролера.

У серії KV5x використовується 128-бітний інтерфейс, що мінімізує кількість станів очікування доступу до пам'яті під час виконання швидких контурів керування, проте повністю не запобігає таким ситуаціям.

Компанія Atmel у своїй серії контролерів забезпечує доступ з нульовим очікуванням лише для частини постійної пам'яті (для 384 кбайт з доступних 2 Мбайт).

*Оперативна пам'ять.* Мінімальну ємність оперативної пам'яті мають мікроконтролери серії KV5x, яка становить 256 кбайт, максимальна — мікроконтролери серії STM32F7 (512 кбайт).

Незважаючи на велику ємність вбудованої оперативної пам'яті (порівняно з більшістю мікроконтролерів), для задач розпізнавання такої ємності

може буди недостатньо. Тому важливо, щоб була можливість збільшувати ємність оперативної пам'яті за допомогою зовнішніх модулів. Виробники наведених серій мікроконтролерів забезпечили їх модулем доступу до зовнішньої пам'яті, який дозволяє розширювати оперативну пам'ять за допомогою окремих інтегральних схем.

У всіх цих серіях підтримуються модулі зовнішньої пам'яті типу SRAM. Серії STM32F7 і SAMV також підтримують модулі типу SDRAM, які значно дешевші і розраховані на більші ємності пам'яті порівняно з аналогами.

*Зовнішня пам'ять.* Оскільки для задачі розпізнавання необхідно зберігати великий обсяг даних, у тому числі бази слів, важливим показником розширюваності мікроконтролерної системи є можливість підключення зовнішньої постійної пам'яті. Мікроконтролери серій STM32F7 і SAMV мають спеціальні модулі, що підтримують SDIO-інтерфейс, який дозволяє підключити зовнішню пам'ять (SD і MMC) до мікроконтролера. За допомогою цих модулів і з використанням файлової системи FAT з'являється можливість зручного зберігання, записування та зчитування бази даних фонем і транскрипцій слів із зовнішньої карти пам'яті.

Мікроконтролер KV5x за цим параметром дещо поступається аналогам, оскільки не підтримує SDIO-інтерфейс. Зазвичай карти пам'яті підтримують доступ за допомогою SPI інтерфейсу, але така реалізація значно зменшить швидкість передавання даних і потребуватиме додаткових затрат обчислювальних ресурсів ядра мікропроцесорної системи.

*Аналого-цифровий перетворювач.* Цей модуль призначено для перетворення аналогового сигналу в дискретну форму, оскільки подальше оброблення даних у мікропроцесорній системі здійснюється в цифровій формі.

Мікроконтролери серій STM32F7 і SAMV мають у своєму складі АЦП модулі з максимальною розрядністю 12 біт. На відміну від них мікроконтролери серій KV5x мають також додатково модуль АЦП з розрядністю 16 біт.

Загалом для всіх серій максимальна частота вибірок за розрядності 12 біт становить понад 2 Мвибірок/с. Для 16-бітного режиму АЦП мікроконтролерів серії KV5x максимальна частота вибірок досягає 460 квибірок/с.

*Рівень енергоспоживання.* Цей параметр дуже залежить від тактової частоти системи та кількості запущених додаткових модулів. Найвищий рівень споживання мають мікроконтролери серії STM32F7 170 мА на частоті 216 МГц та з увімкненою всією периферією. Приблизно один рівень мають мікроконтролери серій KV5x і SAMV — їх рівень споживання становить 50 мА за тактової частоти 220 МГц з увімкненою периферією.

*Ціна.* Точно оцінити вартість різних серій мікроконтролерів важко, оскільки ціна конкретного екземпляра залежить від багатьох параметрів: ємності вбудованої пам'яті, периферійних пристроїв, кількості виводів тощо.

Ціна мікроконтролерів серії STM32F7 в середньому становить 6–9 дол. Вартість серій KV5x і SAMV оцінити не вдалось, оскільки на час написання роботи такі мікроконтролери не потрапили в продаж. Доступні тільки тестові макетні плати на їх основі.

Результати порівнянь розглянутих серій мікроконтролерів наведено в табл. 2.

**Таблиця 2.** Порівняльна характеристика серій мікроконтролерів на базі ядра Cortex-M7

Мікроконтролери	STM32F7	KV5x	SAMV
Максимальна тактова частота ядра, МГц	216	220	300
Продуктивність, DMIPS	462	473	645
Максимальна ємність ПЗП, Мбіт	2	1	2
Максимальна ємність ОЗП, кбайт	512	256	384
Прискорення ПЗП	+	–	+ (частково)
Розрядність АЦП, біт	12	12/16	12
Підтримання SDIO	+	–	+
Підтримання зовнішньої оперативної пам'яті	+	+	+
Оцінний рівень енергоспоживання за робочої частоти 200 МГц, мА	155	45	45
Середня вартість, дол. США	7,5	–	–

### Загальна схема процесу автоматичного розпізнавання мови

Для того щоб оцінити перспективи реалізації вбудованих САРМ за допомогою мікроконтролерної системи, необхідно розглянути загальну схему процесу розпізнавання (рис. 2), дослідити переваги підходів та визначити шляхи ефективної реалізації кожного етапу.

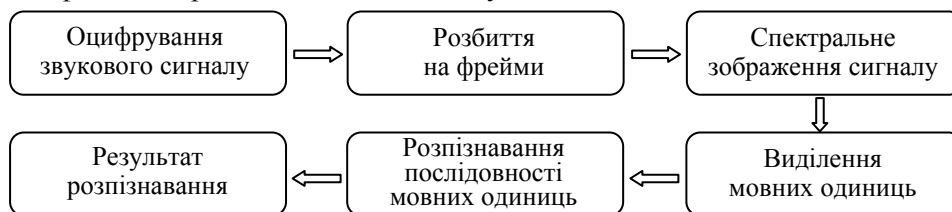


Рис. 2. Послідовність ключових етапів процесу розпізнавання мови

### Оцифрування звукового сигналу

Оскільки звукові коливання являють собою аналоговий сигнал, то для оброблення їх мікропроцесорною системою необхідно перевести його у цифровий вигляд. На цьому етапі потрібно визначити оптимальну частоту вибірок та глибину дискретизації звукового сигналу, урахувавши при цьому можливість використання вбудованого АЦП-модуля мікроконтролера, щоб спростити проектування системи та отримати відповідний економічний ефект.

*Частота дискретизації (вибірок) звукового сигналу.* Надто мала частота вибірок призведе до недостачі інформації про характер сигналу та втрати відмінностей між деякими частинами мови. Так, наприклад, загальноприй-

нята частота вибірок звукового сигналу для завдань розпізнавання становить 8 кГц [18], проте в результаті досліджень виявлено, що за такої частоти дещо втрачається інформація про деякі фонемі української мови. Підвищивши частоту дискретизації до 16 кГц, можна зберегти додаткову інформацію, яка допоможе краще розпізнати конкретну частину мови в невизначеній ситуації. Проте надвелика частота вибірок призведе до надлишковості інформації, що потребуватиме більше обчислювальних ресурсів та пам'яті.

*Глибина дискретизації (розрядність).* Оскільки в процесі розпізнавання важливі тільки характерні значення форми звукового сигналу, то 8-бітної розрядності цифрового сигналу достатньо для вирішення цього завдання. Таким чином, можна мінімізувати потребу в оперативній пам'яті, обмежившись одним байтом на вибірку.

Отже, для збереження однієї секунди запису за мінімальних значень параметрів цифрового сигналу необхідно  $\frac{8 \cdot 8000}{8} = 8000$  байт оперативної пам'яті за максимальних —  $\frac{8 \cdot 16000}{8} = 16000$  байт.

Для оптимізації потреб в оперативній пам'яті необхідно встановити значення частоти дискретизації 12 кГц, затративши при цьому  $\frac{8 \cdot 12000}{8} = 12000$  байт пам'яті для однієї секунди запису, тим самим зберегти баланс між достатньою інформативністю звукового сигналу і потрібною ємністю пам'яті для його зберігання.

Максимальна розрядність вбудованого АЦП більшості мікроконтролерів становить 12 біт. Цей модуль спроможний забезпечити частоту вибірок понад 16 кГц. Тому можливостей вбудованого АЦП усіх серій мікроконтролерів достатньо для якісного оцифрування звукового сигналу.

### Розбиття на фрейми

Оскільки форма мовного сигналу на коротких часових проміжках може повторюватись і кожен такий проміжок має певні характерні ознаки, то такий сигнал розбивають на фрейми. Ширина фрейму повинна охоплювати одну повторювану частину. Дослідним шляхом встановлено ширину 5 мс (рис. 3).

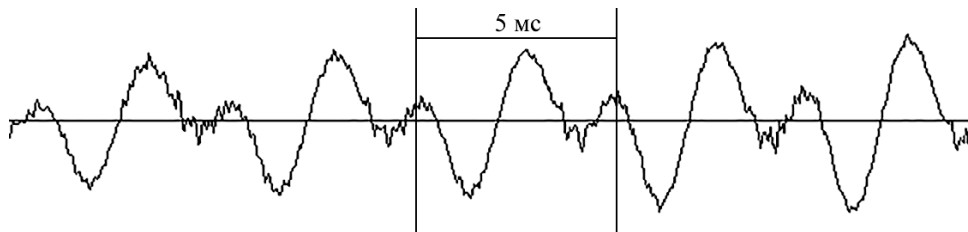


Рис. 3. Період звукової хвилі фонемі

Оскільки початок фрейму не завжди збігається з початком конкретної базової одиниці (наприклад, фонемі) з бази зразків, то фрейми накладають один на одного з деяким зсувом. Таку систему фреймів можна розглядати як «плаваюче вікно» відносно вхідного звукового сигналу.

Накладати фрейми один на одного необхідно з мінімальним «захопленням» — 50% від розміру фрейму. Чим більшим буде таке «захоплення», тим точніше можна визначити відповідність фрейму конкретній базовій одиниці. Максимальний розмір «захоплення» доцільно встановити в межах 90%, оскільки подальше уточнення не призводить до значного підвищення ефективності розпізнавання.

Проте збільшення кількості фреймів зумовить підвищення витрат обчислювальних ресурсів і пам'яті. Так, на збереження одного фрейму за оптимальних значень частоти і глибини вибірок сигналу (оцифрування звукового сигналу) потрібно затратити  $\frac{8 \cdot 12000 \cdot 0,5}{8} = 6000$  байт оперативної пам'яті. Умовно визначимо середню довжину слова рівною 0,5 с. Тоді за мінімального накладання на слово припадає  $\frac{500 \cdot 2}{5} = 200$  фреймів, що потребуватиме близько 11,7 кбайт оперативної пам'яті, за максимального — 58,6 кбайт.

Можна дійти висновку, що ресурсів мікроконтролерної системи достатньо для збереження навіть максимальної кількості фреймів, проте збільшення кількості фреймів спричинить також додаткові затрати обчислювальних ресурсів. Тому доцільно встановити накладання фреймів на рівні 70%, щоб зберегти баланс між якісним рівнем розпізнавання та затратами ресурсів системи.

### Спектральне зображення сигналу

Інформації про амплітуду і форму сигналу не достатньо для виділення з мовного сигналу лексичних елементів. Залежно від різних обставин форма звукового сигналу може змінюватись у широких межах. Спектральне зображення звукового сигналу є одним з найбільш важливих інструментів аналізу й оброблення мовного сигналу, оскільки, крім важливої інформації у звуковому сигналі, наявні й інші елементи, які не є значущими для вирішення цього завдання і негативно впливають на процес розпізнавання.

Спектральне зображення сигналу ілюструє рис. 4.

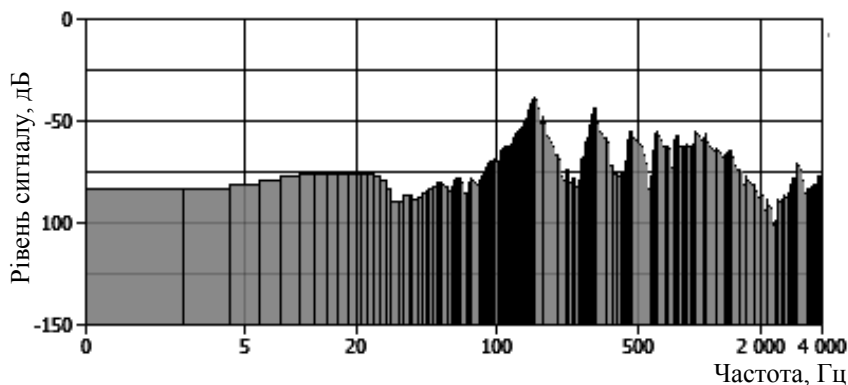


Рис. 4. Спектральне зображення сигналу

Для спектрального зображення сигналу використовують здебільшого *перетворення Фур'є* [19], яке полягає в розкладанні ряду на функції синусів



та косинусів різних частот для виявлення найбільш значущих із них. Для зменшення затрат процесорного часу розроблено алгоритми швидкого перетворення Фур'є (FFT), які дозволяють отримати амплітудний спектр та інформацію про фазу сигналу, «проріджуючи» дані за часом та частотою.

Перевагою такого методу є те, що його реалізація у вигляді FFT є досить простою і не потребує значних затрат ресурсів системи. Проте для аналізу звукової інформації перетворення Фур'є має низку недоліків, які спричиняють втрату інформації про часові характеристики оброблюваних сигналів, оскільки цей метод припускає використання штучних прийомів, за допомогою яких здійснюється частотно-часова локалізація.

Для спектрального зображення сигналу також використовують *вейвлет-аналіз*, за допомогою якого вхідний сигнал розкладається в базис функцій, що характеризують частоту і час. Таким чином, метод дає змогу проаналізувати властивості звукового сигналу одночасно у фізичному та частотному просторах.

Вейвлет-перетворення дозволяють уникнути недоліків, притаманних перетворенню Фур'є [19], зберігаючи при цьому всі його переваги. Недоліком вейвлет-аналізу є відносна складність перетворення, що накладає додаткові витрати ресурсів мікроконтролерної системи. Крім того, для отримання оптимальних алгоритмів перетворення розроблені певні критерії, які не можна вважати остаточними, бо вони не враховують зовнішніх критеріїв, пов'язаних із сигналами та цілями їх перетворення. Тому під час практичного використання вейвлет-перетворень належить приділяти достатню увагу перевірці їх працездатності та ефективності порівняно з іншими методами.

Оскільки DSP-модуль мікроконтролера зазвичай оптимізований для FFT перетворень, то використання перетворень Фур'є є найбільш оптимальним для розпізнавання за допомогою мікроконтролерної системи.

### **Виділення мовних одиниць**

*Виділення слів як базової одиниці.* У найпростішому випадку за базову одиницю обирають слово або навіть цілу фразу. Для виділення такої одиниці потрібно визначити граничне значення, яке відділяє слово (команду) від тиші. Для цього необхідно визначити фіксоване граничне значення рівня сигналу або кластеризовані значення сигналу (для виділення множини значень, що відповідають тиші). Проте такі методи не досить точні. Для більш якісного результату потрібно розрахувати інформаційну двійкову ентропію за допомогою такої формули:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i),$$

де  $x$  — незалежні випадкові стани;  $i$  — конкретний стан системи,  $n$  — кількість розглянутих варіантів;  $p$  — апіорна ймовірність.

Тут ентропія буде вказувати на те, на скільки сильно змінюється сигнал в межах одного фрейму.

Перевагою цього методу є те, що за його допомогою можна досить просто реалізувати командні системи розпізнавання з обмеженим розміром словника (одиниці або десятки команд).

Серед недоліків методу варто відзначити такі:

- у разі «просідання» сигналу на середині слова неможливо правильно визначити його межі;
- за допомогою методу можна розпізнавати тільки роздільне мовлення (не придатний для систем розпізнавання суцільного мовлення);
- такі системи не зручні для користувача, оскільки потребують неприродного способу спілкування — з паузами між словами;
- метод придатний для розпізнавання лише невеликого набору команд, оскільки збільшення їх кількості зумовлює значні витрати обчислювальних ресурсів системи.

*Виділення частини мови як базової одиниці.* Оскільки командні системи дозволяють розпізнавати лише роздільне мовлення, то в системах розпізнавання суцільного мовлення доцільно використовувати мінімальні частини мови (фонем, алофони) як базової мовної одиниці, що дозволяє розробляти гнучкі та дикторонезалежні САРМ із середнім та великим розмірами словника. У простому випадку достатньо зробити базу фонем із записів голосу різних дикторів та базу слів.

Проте для реалізації таких систем потрібно використовувати складні алгоритми визначення ймовірних послідовностей мовних одиниць. Крім того, існують ситуації, коли неможливо правильно визначити конкретну мовну одиницю у звуковому потоці, у результаті чого багато років ведуться дослідження в цьому напрямі.

### Основні методи розпізнавання мови

*Алгоритм динамічної трансформації часової шкали (DTW).* Цей метод був одним із перших, що використовувався для автоматичного розпізнавання мови [20]. Суть його полягає в розтягуванні або звужуванні часових рамок звукового сигналу, щоб зробити його схожим за характеристиками із зразком з бази даних (рис. 5).

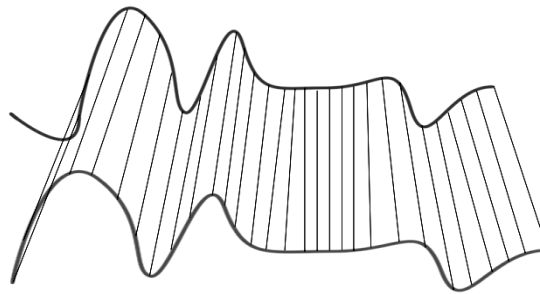


Рис. 5. Зіставлення сигналу за допомогою DTW

Шкала DTW добре підходить для задач розпізнавання ізольованих слів з малим розміром словника (наприклад, голосового набору на мобільних телефонах). Цей алгоритм найменш ресурсомісткий, тому придатний для вбудованих систем з обмеженими обчислювальними ресурсами.

Серед недоліків DTW-алгоритму слід відзначити, що в деяких випадках він може видавати неправильні результати (може спробувати визначити непостійність осі  $y$  за допомогою осі  $x$ ). Це може зумовити вирівнювання, за якого одній точці першої послідовності відповідає велика підгрупа точок іншої послідовності. Інший недолік методу — алгоритм може не знайти очевидного вирівнювання двох рядів унаслідок того, що особлива точка од-

ного ряду міститься дещо вище або нижче відносно відповідної їй точки іншого ряду.

*Приховані марковські моделі (ПММ).* Метод прихованих марковських моделей (рис. 6.) застосовується здебільшого для розпізнавання безперервного мовлення, коли модель стану системи невідома [21].

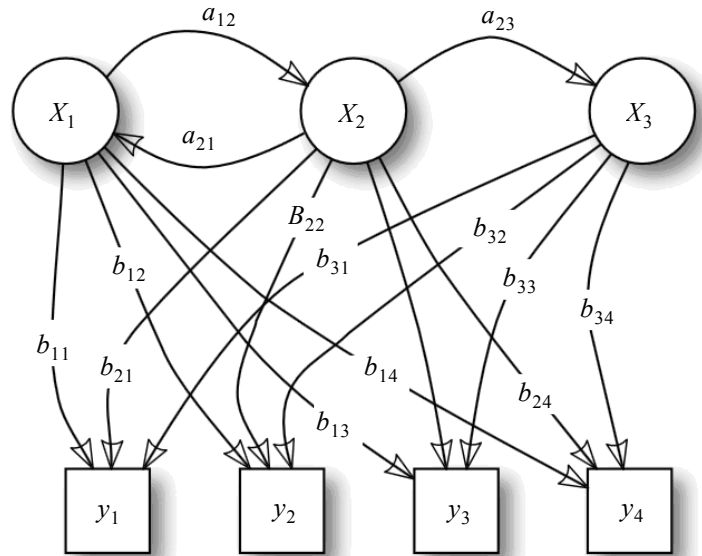


Рис. 6. Імовірнісні параметри прихованої марковської моделі:  $X$  — стани;  $y$  — можливі спостереження;  $a$  — імовірності переходів станів;  $b$  — імовірності виходів

У задачах розпізнавання окремі ПММ асоціюються з базовою частиною мови (фонемою, алофоном тощо). Далі виконуються обчислення для кожної моделі, щоб визначити, яка послідовність ПММ найбільш точно відповідає вхідному мовному сигналу. Оскільки ПММ еквівалентні частинам мови, які необхідно визначити, то процес розпізнавання зводиться до визначення послідовності ПММ.

Переваги методу:

- ефективне моделювання часових та спектральних варіацій мовного сигналу;
- легкість використання фонологічних та синтаксичних правил;
- розроблено навчальні алгоритми, що забезпечують ефективне навчання у разі великих розмірів словника;
- існують дикторонезалежні алгоритми розпізнавання як ізольованих слів, так і безперервного мовлення.

Серед недоліків слід відзначити такі:

- марковська модель покладається на модель першого порядку, тобто її стан у певний момент часу залежить тільки від попереднього стану системи;
- відсутність ефективних моделей тривалості станів та їх реалізації в межах ПММ;
- навчання лінгвістичної моделі відбувається окремо від акустичних моделей;

- слабкі дискримінантні можливості;
- частково-сталий характер моделі — кожний стан має стаціонарну статистику.

Ці недоліки значно обмежують можливості методу ПММ.

*Штучні нейронні мережі (ШНМ).* Нейронні мережі використовуються в задачах розпізнавання мови схожим із ПММ способом [22]. За основу процесу розпізнавання береться спектральне зображення фрейму звукового сигналу у вигляді набору чисел. Кількість вхідних і вихідних нейронів невідома. Кожен із вхідних нейронів відповідає одному набору чисел. На вихідному рівні існує тільки один нейрон, вихід якого відповідає бажаному значенню слова, що розпізнається (рис. 7). Нейронна мережа, яка має максимальне вихідне значення, є відповідно мережею розпізнавання цього слова. А таке слово вважається результатом розпізнавання.

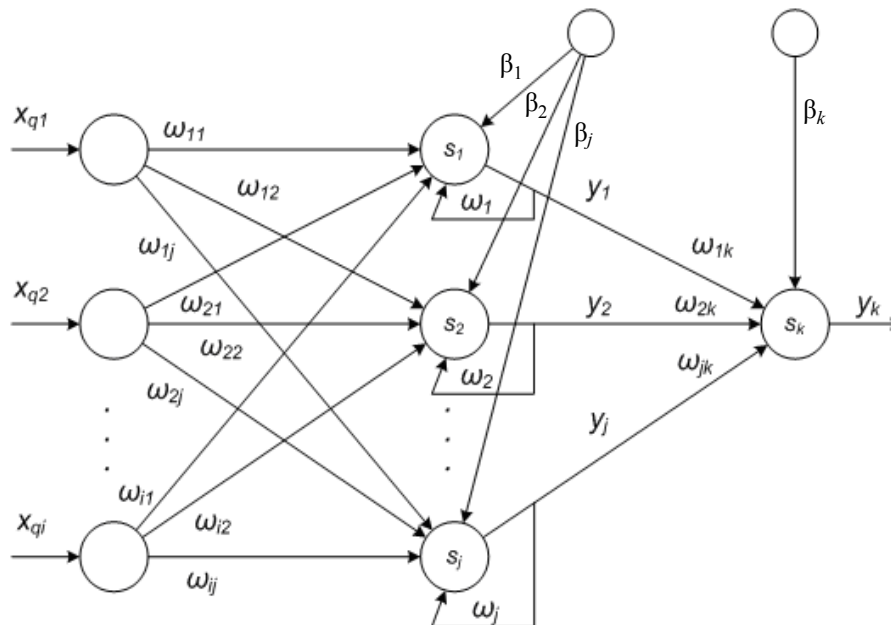


Рис. 7. Структура нейронної мережі зі зворотним зв'язком:  $x_{qi}$  —  $i$ -е вхідне значення  $q$ -го набору чисел;  $y_j$  — вихід  $j$ -го нейронного шару;  $\omega_{ij}$  — ваговий коефіцієнт зв'язку, що об'єднує  $i$ -й та  $j$ -й нейрони;  $\omega_j$  — ваговий коефіцієнт зворотного зв'язку  $j$ -го нейрона;  $\beta_j$  — зміщення  $j$ -го нейронного шару

Основною перевагою використання ШНМ є можливість їх навчання. Штучні нейронні мережі стійкі до шумів, які трапляються у вхідному звуковому сигналі, і легко адаптуються до змін навколишнього середовища. Слід відзначити потенційно високу відмовостійкість апаратної реалізації ШНМ.

Недоліки використання ШНМ для задач розпізнавання мови:

- не мають механізмів, які б адекватно відображали часову варіативність і послідовну природу мовного сигналу;
- не існує теоретичних основ для цілого ряду параметрів, що визначають динаміку і топологію ШНМ;
- більшість підходів до проектування ШНМ є евристичними і часто призводять до неоднозначних розв'язків;

– процес навчання є досить ресурсомістким процесом.

Хоча нейронні мережі були джерелом великої кількості досліджень, метод ПММ витісняє їх у задачах розпізнавання мови для вбудованих систем, передусім через потребу у великій кількості ресурсів для реалізації та навчання ШНМ. Так, наприклад, словник з кількістю 60 тисяч слів потребує оперативної пам'яті ємністю сотні мегабайтів.

## **ВИСНОВКИ**

Проаналізовано найбільш продуктивну і технологічну базу для розроблення вбудованих САРМ та шляхів ефективного розв'язання задачі автоматичного розпізнавання мови в умовах обмежених ресурсів.

У процесі дослідження виявлено, що можливостей сучасних RISC-мікроконтролерів достатньо для оптимального розв'язання більшості задач розпізнавання.

Найпростішою та найменш ресурсомісткою реалізацією вбудованих САРМ є командні системи, побудовані на базі DWT-методу зі словом як базовою мовною одиницею. Проте такі системи залежні від диктора і не досить зручні для кінцевого користувача, оскільки не можуть розпізнавати суцільне мовлення.

Найбільш складною та ресурсомісткою для вбудованих систем є реалізація САРМ за допомогою ШНМ.

Оптимальним для розпізнавання суцільного мовлення у вбудованих дикторонезалежних системах є ПММ метод. Проте недоліки цього методу спонукають до проведення додаткових досліджень для пошуку шляхів підвищення якості розпізнавання в умовах обмежених обчислювальних ресурсів.

## **ЛІТЕРАТУРА**

1. *Мартинюк І.А.* Актуальність та основні проблеми реалізації технологій автоматичного розпізнавання мови для вбудованих систем / І.А. Мартинюк, В.А. Лахно // Інформаційна безпека та комп'ютерні технології: зб. тез доп. міжнар. наук.-практ. конф., 24–25 берез. 2016 р. — Кіровоград: КНТУ, 2016. — С. 112–113.
2. *Compact hardware liquid state machines on FPGA for real-time speech recognition [Text] / [B. Schrauwen, M. D'Haene, D. Verstraeten et al.] // Neural Networks. — 2008. — 21, № 2–3. — P. 511–523.*
3. *Speech recognition on an FPGA using discrete and continuous Hidden Markov Models [Text] / S.J. Melnikoff, S.F. Quigley, M.J. Russell // Lecture Notes in Computer Science. — 2002. — № 2438. — P. 202–211.*
4. *Pan Shing-Tai.* The implementation of speech recognition systems on FPGA-based embedded systems with SOC architecture [Text] / Shing-Tai Pan, Chih-Chin Lai, Bo-Yu Tsai // International journal of innovative computing, information and control. — 2011. — 7, № 11. — P. 6161–6175.
5. *Hu X.* Isolated word speech recognition system based on FPGA [Text] / X. Hu, H. Zhang, L. Zhan et al // Journ. of Computers. — 2013. — 8, № 12. — P. 3216–3222.
6. *Li J.* Embedded speaker recognition system design and implementation based on FPGA [Text] / J. Li, D. An, L. Lang et al. // Procedia Engineering. — 2012. — 29. — P. 2633–2637.

7. *Aldahoud A.* Robust automatic speech recognition system implemented in a hybrid design DSP-FPGA [Text] / A. Aldahoud, H. Atoui, M. Fezari // International Journal of signal processing, image processing and pattern recognition. — 2013. — 6, № 5. — P. 333–342.
8. *Bourke P.J.* A Low-Power Hardware Architecture for Speech Recognition Search : thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy / P.J. Bourke. — Pittsburgh, PA : Carnegie Mellon University, 2011. — 166 p.
9. *Wei Z.* Embedded system for speech recognition and image processing [Text] / Z. Wei, J. Liang // Journal of electrical and electronic engineering. — 2015. — 2, № 6. — P. 89–93.
10. *Varshney N.* Embedded speech recognition system [Text] / N. Varshney, S. Singh // International journal of advanced research in electrical, electronics and instrumentation energy. — 2014. — 3, № 4. — P. 9218–9227.
11. *Moving Speech Recognition from Software to Silicon: the In Silico VoxProject : research report (final) : 888.012 / C.L. Edward, K. Yu, R.A. Rutenbar, C. Tsuhan.* — Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2006. — 4 p.
12. *Suryawanshi U.J.* Hardware implementation of speech recognition using mfcc and euclidean distance [Text] / U.J. Suryawanshi, prof. dr. S.R. Ganorkar // International journal of advanced research in electrical, electronics and instrumentation engineering. — 2014. — 3, № 8. — P. 11248–11254.
13. *Lippman R.P.* An introduction to computing with neural nets [Text] / R.P. Lippman // IEEE Acoustics, speech and signal processing magazine. — 1987. — 4, № 2 — P. 4–22.
14. *Cortex-M Series* [Electronic resource]. — Access mode: <http://www.arm.com/products/processors/cortex-m/>
15. *STMicroelectronics STM32F7 Series* [Electronic resource]. — Access mode: <http://www.st.com/web/en/catalog/mmc/FM141/SC1169/SS1858/>
16. *NXP Kinetis V Series* [Electronic resource]. — Access mode: <http://www.nxp.com/products/microcontrollers-and-processors/arm-processors/kinetis-cortex-m-mcus/v-series>
17. *Atmel SAM V Series* [Electronic resource]. — Access mode: <http://www.atmel.com/ru/ru/products/microcontrollers/arm/sam-v-mcus.aspx>
18. *Пресняков И.Н.* Автоматическое распознавание речи в каналах передачи [Текст] / И.Н. Пресняков, А.В. Омельченко, С.В. Омельченко // Радиоэлектроника и информатика. — 2002. — № 1. — С. 26–31.
19. *Зубаков А.П.* Фурье и вейвлет-преобразования в проблеме распознавания речи [Текст] / А.П. Зубаков // Вестн. Тамб. ун-та. Серия: Естественные и технические науки. — 2010. — 15, № 6. — С. 1893–1899.
20. *Мещеряков Р.В.* Структура систем синтеза и распознавания речи / Р.В. Мещеряков // Известия Томск. политехн. ун-та. — 2009. — № 5. — С. 121–126.
21. *Rabiner L.R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition [Text] / L.R. Rabiner // Proceedings of the IEEE. — 1989. — 77, № 2. — P. 257–286.
22. *Алимурадов А.К.* Обзор и классификация методов обработки речевых сигналов в системах распознавания речи [Текст] / А.К. Алимурадов, П.П. Чураков // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. — 2015. — № 2. — С. 27–35.

Надійшла 31.05.2016

## **СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНЕ ПОДАННЯ ДАНИХ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

**Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, О.С. ДЕГТЯР**

**Анотація.** Для роботи з різного типу даними в режимі реального часу виникає потреба використовувати адаптивні підходи, що здатні налаштовувати параметри моделі у міру надходження нової інформації. Запропоновано алгоритми подання динамічних потоків даних у заданих структурах, що базуються на оптимізації певних типів нев'язок. Для побудови моделей використано метод Ньютона як ефективний через його високу збіжність. Такі підходи мають на меті коригування вектора невідомих параметрів на підставі нових спостережень шляхом розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь. Початкові дані обрано з урахуванням оцінок, виведених на основі теорії практичної стійкості. Проведено обчислювальний експеримент, у якому порівнюються моделі, побудовані на методах оптимізації першого та другого порядків, що підтверджує доцільність використання розроблених підходів.

**Ключові слова:** оброблення даних, структурно-параметрична оптимізація, градієнтні методи, метод Ньютона, збіжність, динамічна модель.

### **ВСТУП**

Задачі оброблення даних постають у різних галузях: медичній діагностиці, хімічній промисловості, екології, радіолокації та в багато інших галузях і потребують методик оброблення сигналів, які б дозволили в реальному часі розпізнавати певні особливості досліджуваних даних. Особливо важливими є властивості адаптації та високої швидкодії таких алгоритмів.

Одним з підходів, що дозволяє ефективно розв'язувати подібного роду задачі, є адаптивна апроксимація даних з метою їх структурно-параметричного подання. Це дає змогу адаптивного коригування вектора невідомих параметрів у міру надходження нових спостережень. Сама модель являє собою неперервну за часовою змінною ітераційну схему, що є системою звичайних диференціальних рівнянь з деякими початковими даними.

Розв'язання задачі апроксимації в заданих структурних формах потребує аналізу збіжності побудованої ітераційної процедури. Для цього в роботі пропонується використовувати оптимальну оцінку збіжності у класі еліпсоїдів за розкидами початкових даних, що виводиться за допомогою аналізу практичної стійкості параметричних систем.

**Мета роботи** — розроблення універсального методу адаптивного оброблення даних, у якому б урахувувалась специфіка роботи з динамічними потоками даних.

## ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНИХ СИГНАЛІВ

Нехай ставиться задача подання неперервного скалярного сигналу  $x = \varphi(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  у деякому структурному вигляді

$$x(t) \approx \psi(t, \alpha) = \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Одним з підходів до знаходження вектора невідомих параметрів  $\alpha$  є його адаптивне налаштування таким чином, щоб мінімізувати деяку нев'язку [1]. У найпростішому випадку як нев'язку можна брати середньо-квадратичне відхилення сигналу від його апроксимації безпосередньо в момент часу  $t$ :

$$I_1(\alpha) = (\psi(t, \alpha) - \varphi(t))^2.$$

Тоді вектор невідомих параметрів коригується лише на підставі даних, що надходять у поточний момент часу. Такий підхід застосовується досить обмежено, проте для деяких задач, де спостерігається однотипність даних (наприклад, гармонічні сигнали), вдається досягати результатів за рахунок високої швидкодії алгоритму. Прикладом ефективного застосування алгоритму може бути звукова інформація, температурні графіки тощо.

Запишемо неперервну за часовою змінною ітераційну процедуру на основі методів оптимізації першого порядку (градієнтного спуску). Вона матиме вигляд

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\nabla_{\alpha} I_1(\alpha) = -2(\psi(t, \alpha) - \varphi(t)) \nabla_{\alpha} \psi(t, \alpha). \quad (1)$$

Тут і далі вважатимемо  $\nabla_{\alpha} f(\alpha) = \left( \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha_n} \right)^T$ , де  $T$  — знак транспонування.

Після задання початкових даних

$$\alpha(t_0) = \alpha^{(0)} \quad (2)$$

вектор невідомих параметрів коригуємо шляхом розв'язання задачі Коші (1)–(2) [2]. У випадку, коли параметр збігається до певних значень у міру надходження нових даних, його можна вважати розв'язком задачі параметричної ідентифікації в цілому.

Аналогічно до випадку з використанням методу градієнтного спуску можна побудувати ітераційну процедуру на основі методів оптимізації другого порядку, зокрема методу Ньютона. Як недоліки такого методу слід відзначити необхідність існування другої похідної нев'язки за  $\alpha$  і те, що на кожному кроці алгоритму потрібно виконувати більшу кількість операцій. Проте остаточний розв'язок знаходиться за меншу кількість ітерацій.



У загальному випадку ітераційна схема, що ґрунтується на методі Ньютона, матиме вигляд [3]

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_1(\alpha))\nabla_{\alpha}I_1(\alpha).$$

Для розглянутого типу нев'язки гесіан матриці набуде вигляду

$$H(I_1(\alpha)) = 2(\nabla_{\alpha}\psi(t, \alpha)\nabla_{\alpha}^T\psi(t, \alpha) + (\psi(t, \alpha) - \varphi(t))H(\psi(t, \alpha))).$$

Ітераційну процедуру, побудовану на основі методу Ньютона, запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -(\nabla_{\alpha}\psi(t, \alpha)\nabla_{\alpha}^T\psi(t, \alpha) + (\psi(t, \alpha) - \\ & - \varphi(t))H(\psi(t, \alpha)))^{-1}(\psi(t, \alpha) - \varphi(t))\nabla_{\alpha}\psi(t, \alpha). \end{aligned}$$

Разом із початковими умовами це є задача Коші, розв'язок якої знаходиться одним із числових методів.

Досить ефективним способом для численних задач є пошук апроксимації у формі лінійної комбінації заданих базисних функцій:

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \quad t \geq t_0.$$

Апроксимацію сигналу шукатимемо у вигляді

$$\psi(t, \alpha) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t).$$

Шляхом підстановки будемо ітераційні процедури з урахуванням вигляду функції апроксимації.

Окремо для зручності запишемо градієнт та гесіан нев'язки. Градієнт нев'язки являтиме собою  $n$ -вимірний вектор-стовпчик з координатами

$$\frac{\partial I_1(\alpha)}{\partial \alpha_i} = 2 \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t) - \varphi(t) \right) \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Гесіан є квадратною матрицею розмірності  $n \times n$  з елементами:

$$H(I_1(\alpha)) = \begin{pmatrix} 2\varphi_1^2(t) & 2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & \dots & 2\varphi_1(t)\varphi_n(t) \\ 2\varphi_1(t)\varphi_2(t) & 2\varphi_2^2(t) & \dots & 2\varphi_2(t)\varphi_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\varphi_1(t)\varphi_n(t) & 2\varphi_2(t)\varphi_n(t) & \dots & 2\varphi_n^2(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді для методів, що будуються на основі методу градієнтного спуску, система звичайних диференціальних рівнянь перетвориться до вигляду

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -2 \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t) - \varphi(t) \right) \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Її можна переписати у векторно-матричній формі

$$\frac{d\alpha}{dt} = A(t)\alpha + f(t), \quad t \geq t_0. \quad (3)$$

Тут  $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $f^T(t) = 2\varphi(t)\phi^T(t)$ , де  $\phi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ ,  $A(t) = H(I_1(\alpha))$ .

Використовуючи формулу Коші, запишемо розв'язок задачі (3), (2):

$$\alpha(t) = K(t, t_0)\alpha^{(0)} + \int_{t_0}^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau,$$

де  $K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ ,  $\Phi(t)$  — фундаментальна матриця системи;  $K(t, \tau)$  — фундаментальна матриця однорідної системи, що відповідає виразу (3), нормована за моментом часу  $\tau$ . Тобто

$$\frac{dK}{dt} = A(t)K, \quad K(\tau, \tau) = I_n.$$

Запишемо неперервну ітераційну процедуру у векторно-матричній формі:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_1(\alpha)) \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t) - \varphi(t) \right) 2\phi(t);$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_1(\alpha))(A(t)\alpha - f(t)) = -H^{-1}(I_1(\alpha))H(I_1(\alpha))\alpha + H^{-1}(I_1(\alpha))f(t).$$

Ітераційна схема, що ґрунтується на методі Ньютона, набуде вигляду

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha + H^{-1}(I_1(\alpha))f(t). \quad (4)$$

Якщо не існує оберненої до  $(I_1(\alpha))$  матриці, можна скористатися апаратом псевдообернення матриць.

Запишемо розв'язок задачі Коші (4), (2) у такій формі:

$$\alpha(t) = K(t, t_0)\alpha^{(0)} + \int_{t_0}^t K(t, \tau)H^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Оскільки нев'язка у фіксований момент часу може бути застосована до обмеженого класу задач, то розглянемо випадок, коли цільовою функцією є інтегральні нев'язки на всьому проміжку та на часовому вікні  $[t - \Delta t, t]$ .

Наприклад, інтегральну нев'язку на часовому проміжку  $[t_0, t]$  подамо як

$$I_2(\alpha) = \int_{t_0}^t (\psi(\tau, \alpha) - \varphi(\tau))^2 d\tau.$$

Тоді система звичайних диференціальних рівнянь на основі методів оптимізації другого порядку в матричній формі набуде вигляду

$$\frac{d\alpha}{dt} = -H^{-1}(I_2(\alpha)) \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(\tau) - \varphi(\tau) \right) \varphi_i(\tau) d\tau,$$

де  $H(I_2(\alpha)) = \int_{t_0}^t H(I_1(\alpha))d\tau.$

Після перетворень ітераційну процедуру, побудовану за допомогою методу Ньютона, записуємо у такій формі

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha + H^{-1}(I_2 I_1(\alpha))g(t).$$

Тут  $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — вектор невідомих параметрів розмірності  $n$ ,

$$g(t) = 2 \int_{t_0}^t \varphi(\tau) \phi(\tau) d\tau, \quad \phi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \text{ — відомі.}$$

### ВИПАДОК СИГНАЛІВ З РОЗРИВАМИ ПЕРШОГО РОДУ

Нехай задано кусково-неперервний сигнал  $x = \varphi(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Цей інтервал розбивається на підінтервали точками  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ , де  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$  — невідомі точки розриву функції  $\varphi(t)$  (розриву першого роду). Ставиться задача апроксимації сигналу на інтервалах  $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{N-1}, T)$ , на кожному з яких функція є неперервною [4].

Розглянемо один з підінтервалів  $(t_{i-1}, t_i)$ . На ньому апроксимуємо

$$x(t) \approx \psi_i(t, \alpha^{(i)}) = \psi_i(t, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}),$$

де  $t \in (t_{i-1}, t_i)$ .

Переходити на наступний крок пропонується на підставі дослідження практичної стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь. Зупинемося детальніше на основних означеннях, що використовуються у праці [5].

Нехай процес розглядається на скінченному відрізку часу  $t \in [t_0, T]$ , початкові дані належать обмеженій множині  $\alpha_0 \in G_0$ ,  $\alpha(t) \in \Phi_t$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $\Phi_t$  — фазові обмеження, які визначають характер збіжності ітераційної процедури.

**Означення 1.** Неперервну ітераційну процедуру (3) називатимемо  $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ -збіжною, якщо для будь-яких початкових умов  $\alpha_0 \in G_0$  відповідні розв'язки системи (3)  $\alpha(t) \in \Phi_t$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

**Означення 2.** Неперервну ітераційну процедуру (3) називатимемо асимптотично  $\{G_0, \Phi_t, t_0, \infty\}$ -збіжною, якщо, крім умов  $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ -збіжності, для будь-якого  $T < \infty$  виконується  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t, t_0, \alpha_0) \rightarrow \alpha^*$  для будь-яких  $\alpha_0 \in G_0$ .

Розглянемо більш конкретні випадки застосування теорії практичної стійкості. Виберемо множину початкових даних  $G_0$  у формі  $G_0 = E_c(\alpha^c, B)$ , де  $E_c(\alpha^c, B)$  — еліпсоїд радіуса  $c$  із центром в точці  $\alpha^c$ , тобто

$$E_c(\alpha^c, B) = \{\alpha \in R^n : (\alpha - \alpha^c)^T B (\alpha - \alpha^c) \leq c^2\},$$

де  $B$  — додатно визначена симетрична матриця розмірності  $n \times n$ ;  $c$  — параметр, який необхідно оцінити.

**Означення 3.** Неперервну ітераційну процедуру (3) називатимемо  $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$ -збіжною, якщо для будь-яких початкових даних  $\alpha_0 \in G_0 = E_c(\alpha^c, B)$  відповідні траєкторії системи (3)  $\alpha(t) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$ .

Нехай множина фазових обмежень має вигляд багатокутника  $\Phi_t = \left\{ \alpha : \max_{k=1, \overline{N}} |l_k^T(t)\alpha| \leq 1 \right\}$ , де  $l_k(t)$  —  $n$ -вимірні неперервні вектор-функції;  $t \in [t_0, T], k = \overline{1, N}, N$  — кількість фазових обмежень.

Припустімо, що відомий розв'язок  $\alpha^*$  системи (3),  $\alpha^* \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$ . Тоді можна отримати оптимальну оцінку  $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$ -збіжності у класі еліпсоїдів  $G_0 = E_c(\alpha^c, B)$ :

$$c_{\text{opt}} = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, n} \frac{1 - |l_s^T(t)(\Theta(t, t_0)\alpha^c + a(t))|}{\sqrt{l_s^T(t)Q(t)l_s(t)}},$$

де  $a(t)$  — частинний розв'язок (3), що відповідає  $\alpha(t_0) = \alpha_0$ ;  $\Theta(t, t_0)$  — фундаментальна матриця однорідної системи;  $Q(t) = \Theta(t, t_0)\Theta^T(t, t_0)$  задовольняє матричне диференціальне рівняння Ляпунова  $\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^T$  з умовою  $Q(t_0) = B^{-1}$ .

Така оцінка впливає з вибору функції Ляпунова в спеціальному вигляді з використанням теореми про достатні умови практичної стійкості. Більш детально подібні підходи описано у праці [6].

Остаточно запишемо алгоритм знаходження адаптивної апроксимації сигналів у заданих структурних формах:

**Крок 1:** задаємо систему з  $n$  базисних функцій  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ .

**Крок 2:** задаємо множини  $G_0^{(0)}, \Phi_t^{(0)} \{G_0^{(0)}, \Phi_t^{(0)}, t_0, t_1\}$ -збіжності.

**Крок 3:** задаємо початкові дані  $\alpha(t_0) = \alpha_0$ .

**Крок 4:** запускаємо ітераційну процедуру, розв'язуючи відповідні системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою числових методів. Відслідковуємо збіжність процедури на основі методів практичної стійкості:

а) якщо ітераційна процедура є збіжною, продовжуємо налаштування вектора невідомих параметрів;

б) у момент часу, коли не виконується означення практичної стійкості, покладемо  $t_i := t_{i+1}$ , повертаємося до кроку 3.

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Продемонструємо роботу алгоритму для випадку побудови системи диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на мінімізації інтегральної нев'язки на всьому часовому проміжку.

Нехай вимірювальний сигнал є гармонічним:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2 \cos(3t), & 0 \leq t < 4,45; \\ 3 \cos(3t) + 0,8 \sin(t), & 4,45 \leq t < 9,9; \\ 0,5 \cos(3t) + 2 \sin(t), & 9,9 \leq t < 16; \\ 3 \sin(t), & 16 \leq t < 20. \end{cases}$$

Для його апроксимації виберемо дві базисні функції  $\varphi_1(t) = \cos(3t)$ ,  $\varphi_2(t) = \sin(t)$  і задамо початкові дані:  $\alpha_1^{(0)} = 1$ ,  $\alpha_2^{(0)} = 5$ .

Графіки налаштування невідомих параметрів  $\alpha_1, \alpha_2$  показано на рис. 1, 2.

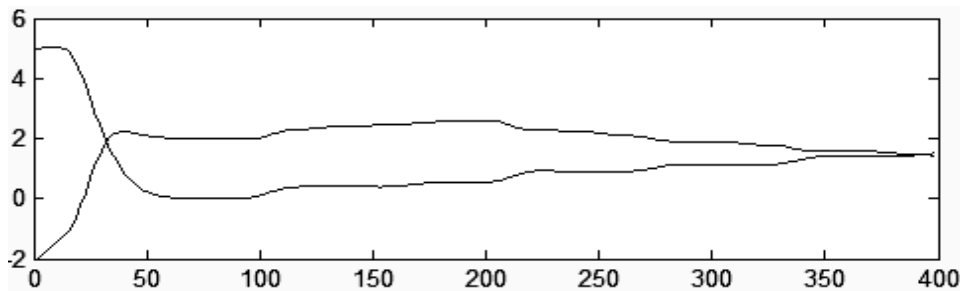


Рис. 1. Графіки налаштування невідомих параметрів. Метод градієнтного спуску

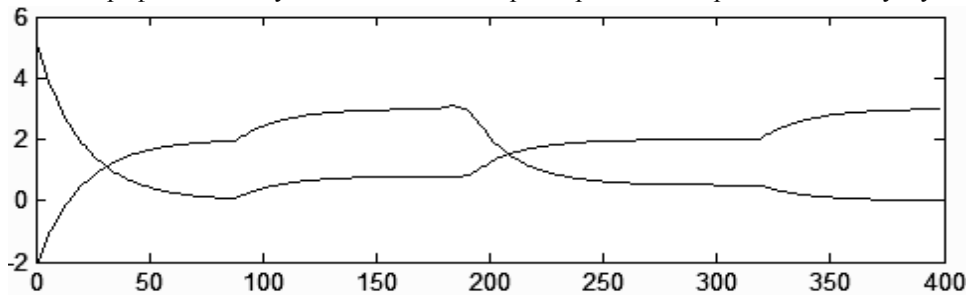


Рис. 2. Графіки налаштування невідомих параметрів. Метод Ньютона

Графіки середньоквадратичного відхилення знайденої апроксимації від сигналу, що демонструють ефективність застосування розроблених підходів до даних змінної структури, показано на рис. 3. Коли параметри, знайдені на основі методу градієнтного спуску, не встигають збігатися до шуканих значень, параметри, знайдені за методом Ньютона, досить швидко до них збігаються.

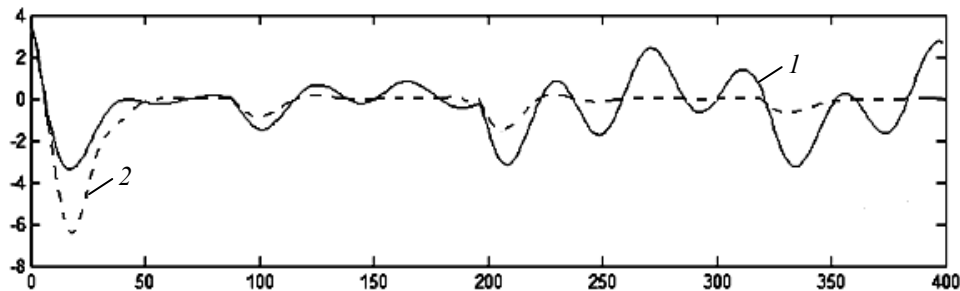


Рис. 3. Збіжність методів: графік середньоквадратичного відхилення сигналу від апроксимації: 1 — градієнтний спуск; 2 — метод Ньютона

Таким чином, використання методів оптимізації першого порядку призводить до значних відхилень апроксимації від сигналу з надходженням нових спостережень, тоді як методи другого порядку показують високу збіжність і ефективність роботи з динамічними потоками даних.

## ВИСНОВКИ

Розглянуто алгоритми апроксимації даних у заданих формах з метою подання динамічних потоків даних у певних структурах, якими є задані базисні функції. У прикладних задачах такими функціями можна обирати відомі фрагменти спостережень, що дає змогу відслідковувати їх входження з певною точністю у досліджуваній сигнал.

Запропоновані алгоритми ґрунтуються на побудові систем звичайних диференціальних рівнянь, що разом із заданими початковими даними являють собою задачу Коші, яку можна розв'язати за допомогою числових методів. Такі системи разом із початковими даними далі вважаються неперервними за часом ітераційними процедурами, за якими коригується вектор невідомих параметрів.

Для побудови систем звичайних диференціальних рівнянь запропоновано використовувати методи оптимізації (зокрема, в роботі порівнюються результати, отримані на основі методів оптимізації першого та другого порядків), де цільовими функціями є три типи нев'язок між сигналом та його апроксимацією: у фіксований момент часу, інтегральна нев'язка на всьому часовому проміжку або на його фрагменті.

Висока збіжність схем, побудованих на основі методів оптимізації другого порядку, дозволяє ефективно застосовувати їх для випадку сигналів з розривами першого роду. Збіжність пропонується досліджувати за допомогою методів практичної стійкості. Наведено оцінку практичної збіжності у класі еліпсоїдів.

Справедливість теоретичних досліджень продемонстровано за допомогою модельного прикладу, у якому наводиться порівняння роботи алгоритмів, побудованих на основі методів градієнтного спуску та Ньютон.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гаращенко Ф.Г. Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 69–77.
2. Еругин Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало. — К.: Вища шк., 1974. — 472 с.
3. Дегтяр О.С. Адаптивні підходи до апроксимації сигналів, що базуються на градієнтних методах другого порядку / О.С. Дегтяр // Фізико-технологічні проблеми радіотехнічних пристроїв, засобів телекомунікацій, нано- та мікроелектроніки: IV міжнар. конф., 23–25 жовт. 2013 р.: тези доп. — Чернівці, 2014.
4. Дегтяр О.С. Про один адаптивний алгоритм апроксимації кусково-неперервних сигналів / О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2008. — № 3. — С. 192–198.
5. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
6. Башняков О.М. Практична стійкість, оцінки та оптимізація / О.М. Башняков, Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. — 383 с.

Надійшла 24.03.2016

## МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Е.Ю. ЗАЙЧЕНКО, Ю.П. ЗАЙЧЕНКО

**Аннотация.** Рассмотрены многокритериальные задачи нечеткого математического программирования. Введены понятия парето-оптимального решения и наилучшего компромиссного решения уровня  $\alpha$  МКНП-задачи. Сформулированы и доказаны теоремы, устанавливающие взаимосвязи между ними. Предложен метод решения МКНП-задачи на основе поиска компромиссных решений уровня  $\alpha$ . Приведен пример решения многокритериальной задачи линейного программирования с нечеткими условиями, иллюстрирующими предложенный подход и проведено его сравнение с компромиссным решением этой задачи в четкой постановке.

**Ключевые слова:** многокритериальные задачи, нечеткое математическое программирование, парето-оптимальные решения уровня  $\alpha$ , наилучшее компромиссное решение уровня  $\alpha$ .

### ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальные задачи оптимизации составляют широкий класс задач принятия решений. Для их решения в четких условиях разработано значительное количество методов и алгоритмов, среди которых подходы, методы и алгоритмы, изложенные в работах [1–4]. Обзор современных методов многокритериальной оптимизации в четких условиях приведен в учебнике [5].

Однако задача принятия МК-решений существенно усложняется в условиях неопределенности, когда ряд параметров и критериев являются нечеткими. Для таких задач требуется разработка специальных подходов и методов решения.

Цель работы — исследование многокритериальных задач нелинейного программирования (МКНП) в нечетких условиях и разработка метода их решения на основе введения компромиссных решений МКНП-задачи уровня  $\alpha$ .

### ПОСТАНОВКА МКНП-ЗАДАЧИ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим задачу принятия решений с несколькими критериями в нечетких условиях

$$\max \{f_i(X, C_i), i = \overline{1, m}\}$$

при

$$X \in G(A) = \{X : g_k(X, a_k) \leq 0, k = \overline{1, K}\},$$

где  $X = [x_j]$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $C_i = [c_{ij}]$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $a_k = [a_{kr}]$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $r = \overline{1, R}$ ,  $c_{ij}$  — нечеткие числа (НЧ) с известной функцией принадлежности (ФП)  $\mu(c_{ij})$ ,  $a_k = [a_{kr}]$  — НЧ с ФП  $\vartheta(a_{kr})$ .

Такую задачу назовем многокритериальной задачей нечеткого математического программирования (МК НМП). Введем в рассмотрение подмножества уровня  $\alpha_i$ :

$$C_{ij}^\alpha = \{c_{ij} : \mu(c_{ij}) \geq \alpha\}, a_{kr}^\alpha = \{a_{kr} : \vartheta(a_{kr}) \geq \alpha\}, \text{ где } \alpha \in (0, 1),$$

а также нечеткие матрицы уровня  $\alpha$ :

$$C^\alpha = \{\|c_{ij}\| : \mu(c_{ij}) \geq \alpha\}, A^\alpha = \{\|a_{kr}\| : \vartheta(a_{kr}) \geq \alpha, k = \overline{1, K}, r = \overline{1, R}\}.$$

По аналогии с четкими задачами введем понятие парето-оптимального решения уровня  $\alpha$  [5].

**Определение 1.** Парето-оптимальным решением уровня  $\alpha$  назовем такое решение  $X^*$  со значениями нечетких параметров  $C^*$ ,  $A^*$ , для которого не существует другого решения  $\tilde{X}$  со значениями нечетких параметров  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{A}$ , такого, что

$$f_i(\tilde{X}, \tilde{C}) \geq f_i(X^*, C^*), \quad i = \overline{1, m} \tag{1}$$

при условиях  $C^* \in C^\alpha$ ,  $\tilde{C} \in C^\alpha$  и хотя бы одно неравенство (1) будет строгим.

Парето-оптимальное решение уровня  $\alpha$  обладает следующим свойством.

Пусть  $\alpha_1 < \alpha_2$ , а  $X_{\alpha_1}^*$  и  $X_{\alpha_2}^*$  — парето-оптимальные решения уровней  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно. Тогда  $f_i(X_{\alpha_1}^*, C_{\alpha_1}) \geq f_i(X_{\alpha_2}^*, C_{\alpha_2})$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Поскольку множество парето-оптимальных решений уровня  $\alpha$  достаточно велико, в общем случае может быть несчетным множеством, то возникает проблема выбора одного из них (в некотором смысле наилучшего).

С этой целью осуществим эквивалентное преобразование критериев и приведем их к безразмерному виду (нормирование):

$$f_i^H(X, C_i^\alpha) = \frac{f_i(X, C_i^\alpha) - f_{i \min}^\alpha}{f_{i \max}^\alpha - f_{i \min}^\alpha},$$

где  $f_{i \max}^\alpha = \max f(X, C_i)$ ,  $f_{i \min}^\alpha = \min f(X, C_i)$ ,  $C_i \in C_i^\alpha$ . При этом  $X \in G(A)$ .

Введем веса критериев  $\{w_i\} : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^m w_i = 1$ . Будем искать такой вектор  $X^0$ , для которого

$$\min_i w_i f_i^H(X, C_i^\alpha) = \max_x \tag{2}$$

Условие (2) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$w_i f_i^H(X, C_i^\alpha) \geq k_{0 \max}, \quad i = \overline{1, m} \tag{3}$$



Назовем решение, удовлетворяющее условие (3) при максимальном значении  $k_{0\max}$ , наилучшим компромиссным решением (НКР) МК НМП задачи уровня  $\alpha$ .

### ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМОСВЯЗИ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ И КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ УРОВНЯ $\alpha$

Справедливы следующие теоремы, устанавливающие связь между парето-оптимальными решениями уровня  $\alpha$  и НКР.

**Теорема 1.** Если существует единственное решение  $X^*$  системы нестрогих равенств (3), то это решение будет парето-оптимальным решением уровня  $\alpha$  МКНМП-задачи.

Таким образом, единственное компромиссное решение уровня  $\alpha$  будет обязательно и парето-оптимальным решением.

Если же существует несколько решений системы (3), то для нахождения парето-оптимального решения необходимо использовать дополнительный критерий

$$F_1(X, C^\alpha) = \sum_{i=1}^m w_i f_i^H(X, C_i^\alpha)$$

и найти максимизирующее решение. Оно и будет парето-оптимальным.

**Доказательство.** Предположим, что единственное решение  $X^*$  системы неравенств (3) не является парето-оптимальным уровня  $\alpha$ , и пусть решение  $\tilde{X}_\alpha$  является парето-оптимальным со значениями параметров целевой функции  $\tilde{C}^\alpha$ . Тогда

$$f_i(\tilde{X}, \tilde{C}_i^\alpha) \geq f_i(X^*, C_i^{*\alpha}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Следовательно,

$$f_i^H(\tilde{X}, \tilde{C}_i^\alpha) \geq f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha}), \quad i = \overline{1, m}$$

$$w_i f_i^H(\tilde{X}, \tilde{C}_i^\alpha) \geq w_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha}) \geq k_{0\max}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом,  $\tilde{X}$  является также решением системы неравенств (3) при максимальном  $k_0$ , что противоречит условиям теоремы 1. Остается принять, что  $x^*$  является парето-оптимальным решением уровня  $\alpha$  МКНМП-задачи.

**Теорема 2 (обратная).** Пусть  $X^*$  является парето-оптимальным решением уровня  $\alpha$ . Тогда существуют такие веса  $\{w_i\}$ , что  $X^*$  будет наилучшим компромиссным решением МК НМП-задачи уровня  $\alpha$ .

**Доказательство (от противного).** Допустим, что  $X^*$  не является НКР. И пусть веса  $\{w_i\}$  выбраны так, что выполняется условие

$$w_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha}) < k_{0\max} \quad \text{для всех } i, j.$$

Пусть  $\tilde{X}$  является НКР задачи МКНП. Тогда  $w_i f_i^H(X, C_i^\alpha) \geq k_{0\max}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Следовательно  $w_i f_i^H(\tilde{X}, \tilde{C}_i^\alpha) \geq w_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha})$  для всех  $i = \overline{1, m}$  и хотя бы одно неравенство будет строгим. Но тогда  $f_i^H(\tilde{X}, \tilde{C}_i^\alpha) \geq_i f_i^H(X^*, C_i^{*\alpha})$  и соответственно

$$f_i(\tilde{X}, \tilde{C}_i^\alpha) \geq f_i(X^*, C_i^{*\alpha}), i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

и хотя бы одно из неравенств (4) будет строгим.

Тогда решение  $X^*$  не может быть парето-оптимальным уровня  $\alpha$ , что противоречит условиям теоремы 2. Тогда остается принять, что  $X^*$  является НКР уровня  $\alpha$  МКНП-задачи.

**Пример.** Пусть задана многокритериальная задача линейного программирования с нечеткими параметрами:

$$\begin{cases} \max F_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \max F_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases}$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{12}x_2 \geq a_{11}x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq 7, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq 4, \\ a_{42}x_2 \leq 10, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \leq 24, \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

где  $c_{ij}$  — НЧ с ФП  $\mu(c_{ij}) = \frac{1}{1 + (c_{ij} - \bar{c}_{ij})^2}$ ;  $\bar{c}_{11} = 1$ ,  $\bar{c}_{12} = 4$ ,  $\bar{c}_{21} = 3$ ,  $\bar{c}_{22} = -2$ ;

$a_{ij}$  — НЧ с ФП  $\mu(a_{ij}) = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{ij}}\right)^2}$ ;  $\bar{a}_{11} = \frac{1}{6}$ ,  $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \bar{a}_{22} = 1$ ,

$\bar{a}_{31} = -2$ ,  $\bar{a}_{42} = 1$ ,  $\bar{a}_{51} = 1$ ,  $\bar{a}_{52} = 2$ .

Необходимо найти парето-оптимальные решения и наилучшие компромиссные решения уровня  $\alpha$ , где  $\alpha = 0,8$ .

#### ЧЕТКАЯ МКЛП-ЗАДАЧА

Сначала решаем четкую задачу МКЛП

$$\begin{cases} \max f_1(x) = \max(x_1 + 4x_2), \\ \max f_2(x) = \max(3x_1 - 2x_2) \end{cases}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_2 \geq \frac{1}{6}x_1, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Строим область допустимых решений (ОДР), которая определяется условиями (5). Ее вид изображен на рис. 1. Находим крайние точки ОДР и их координаты  $A(1;6)$ ,  $B(3;10)$ ,  $C(4;10)$ ,  $D(18;3)$ ,  $E(6;1)$ .

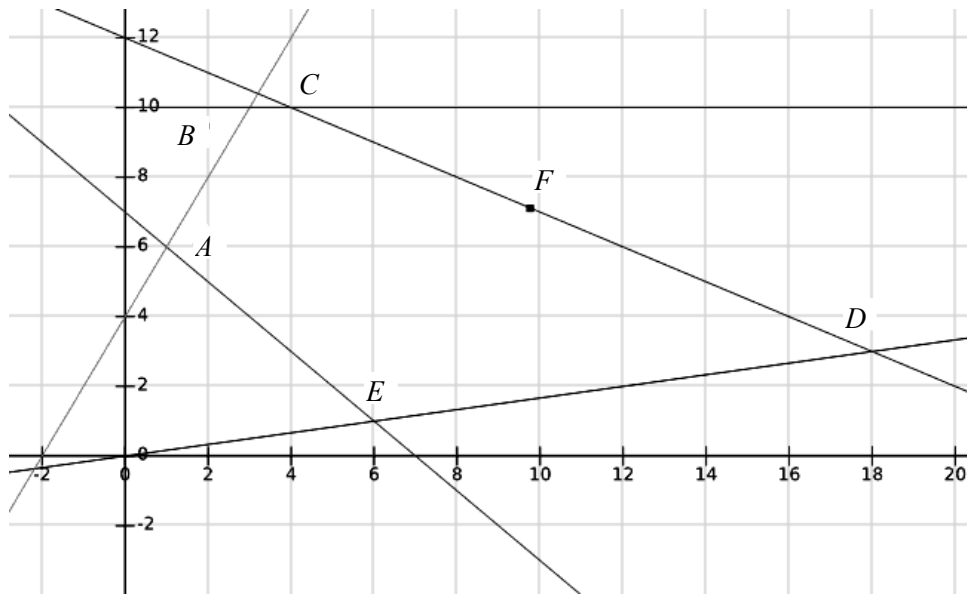


Рис. 1. Область допустимых решений и НКР четкой МКЛП задачи

Решаем задачу графоаналитически, находим  $f_{1\max} = f_1(C) = 44$ ;  $f_{1\min} = f_1(A) = 10$ ;  $f_{2\max} = f_2(D) = 48$ ;  $f_{2\min} = f_2(B) = -11$ .

Поскольку  $\max f_1$  достигается в точке  $C$ , а  $\max f_2$  — в точке  $D$ , парето-оптимальные решения четкой МКЛП-задачи находятся на отрезке  $CD$ .

Найдем НКР, для этого переходим к безразмерным критериям

$$f_1^H(x) = \frac{f_1(x) - f_{1\min}}{f_{1\max} - f_{1\min}} = \frac{1x_1 + 4x_2 - 10}{44 - 10} = \frac{1x_1 + 4x_2 - 10}{34};$$

$$f_2^H(x) = \frac{3x_1 - 2x_2 + 11}{59}.$$

Пусть веса таковы:  $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ .

Найдем четкое НКР, для чего решаем задачу  $\max k_0$  при условиях  $x_1^* \approx 9,74$ :

$$\begin{aligned} w_1 f_1(x) &\geq k_0; \\ w_2 f_2(x) &\geq k_0. \end{aligned}$$

Поскольку всего 2 критерия, можно найти НКР  $\mathbf{x}^*$  из системы уравнений:

$$\begin{cases} w_1 f_1^H(x) = w_1 f_1^H(x); \\ x_1 + 2x_2 = 24, \text{ т.к. } x \in CD. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \frac{1x_1 + 4x_2 - 10}{34} = \frac{3x_1 - 2x_2 + 11}{59}, \\ x_1 + 2x_2 = 24. \end{cases}$$

Решение этой системы:  $x_1^* \approx 9,74$ ;  $x_2^* \approx 7,13$ .

Соответствующая точка  $F$  показана на рис. 1.

### НЕЧЕТКАЯ МКЛП-ЗАДАЧА

Необходимо найти парето-оптимальные решения и НКР уровня  $\alpha = 0,8$  МКЛП-задачи. Для этого необходимо сначала найти интервалы принадлежности уровня  $\alpha$ :  $C_{ij}^\alpha$  и  $a_{ij}^\alpha$ .

Решаем неравенство:

$$\mu(c_{ij}) = \frac{1}{1 + (c_{ij} - \bar{c}_{ij})^2} \geq 0,8.$$

Отсюда

$$(c_{ij} - \bar{c}_{ij})^2 \leq 0,25 \Rightarrow |c_{ij} - \bar{c}_{ij}| \leq 0,5 \text{ и } \bar{c}_{ij} - 0,5 \leq c_{ij} \leq \bar{c}_{ij} + 0,5.$$

Находим соответствующие интервалы для  $c_{ij}$

$$0,5 \leq c_{11} \leq 1,5; \quad 3,5 \leq c_{12} \leq 4,5;$$

$$2,5 \leq c_{21} \leq 3,5; \quad -2,5 \leq c_{22} \leq -1,5.$$

Записываем критерии оптимиста  $f_{1U}(x)$  и пессимиста  $f_{1L}(x)$

$$f_{1U}(x) = 1,5x_1 + 4,5x_2,$$

$$f_{2U}(x) = 3,5x_1 - 1,5x_2,$$

$$f_{1L}(x) = 0,5x_1 + 3,5x_2,$$

$$f_{2L}(x) = 2,5x_1 - 2,5x_2.$$

Построим ОДР для нечетких ограничений уровня  $\alpha = 0,8$ . Решаем неравенства

$$\mu(a_{ij}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{ij}}\right)^2} \rightarrow 4 \left(\frac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{ij}}\right)^2 \leq 0,25$$

или  $2 \left| \frac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{ij}} \right| \leq 0,5$ , откуда  $0,75 \bar{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq 1,25 \bar{a}_{ij}$ .

Находим интервалы для нечетких параметров  $a_{ij}$

$$0,125 \leq a_{11} \leq 0,21; \quad 0,75 \leq a_{12} \leq 1,25; \quad 0,75 \leq a_{21} \leq 1,25;$$

$$0,75 \leq a_{22} \leq 1,25; \quad 1,5 \leq a_{31} \leq 2,5; \quad ; 0,75 \leq a_{32} \leq 1,25$$

$$0,75 \leq a_{42} \leq 1,25; \quad 0,75 \leq a_{51} \leq 1,25; \quad 1,5 \leq a_{52} \leq 2,51.$$

Построим ОДР уровня  $\alpha$  оптимиста (т.е. расширеную). Для этого для ограничений вида

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \leq b_j, \text{ где } a_{ijL}^\alpha \leq a_{ij} \leq a_{ijU}^\alpha.$$

Выбираем границы интервалов так:

а) если  $a_{1j} > 0$ , то  $a_{1j} = a_{ijL}^\alpha = a_{ij \min}^\alpha$ ,

б) если  $a_{1j} < 0$ , то  $a_{1j} = a_{ijU}^\alpha = a_{ij \max}^\alpha$ .

Для ограничений вида

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \geq b_j,$$

наоборот:

а) если  $a_{1j} > 0$ , то  $a_{1j} = a_{ijU}^\alpha$ ;

б) если  $a_{1j} < 0$ , то  $a_{1j} = a_{ijL}^\alpha$ .

В соответствии с этими правилами записываем ограничения, определяющие максимальную ОДР уровня  $\alpha$ .

$$\begin{cases} 1,25x_2 \geq 0,125x_1, \\ 1,25x_1 + 1,25x_2 \geq 7, \\ -1,5x_1 + 0,75x_2 \leq 4, \\ 0,75x_2 \leq 10, \\ 0,75x_1 + 1,5x_2 \leq 24, \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Находим ОДР уровня  $\alpha = 0,8$  согласно уравнениям (6). Ее вид изображен на рис. 2

Находим кратчайшие точки ОДР и их координаты:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 = 0,07 \\ x_2 = 5,5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{40}{3} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} x_1 = \frac{16}{3} \\ x_2 = \frac{40}{3} \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} x_1 = 26,6 \\ x_2 = 2,66 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} x_1 = 5,1 \\ x_2 = 0,51 \end{pmatrix}.$$

Строим вектора нормалей: к целевой функции  $f_1(x)$  — вектор  $N_1$  и к  $f_2(x)$  —  $N_2$  соответственно.

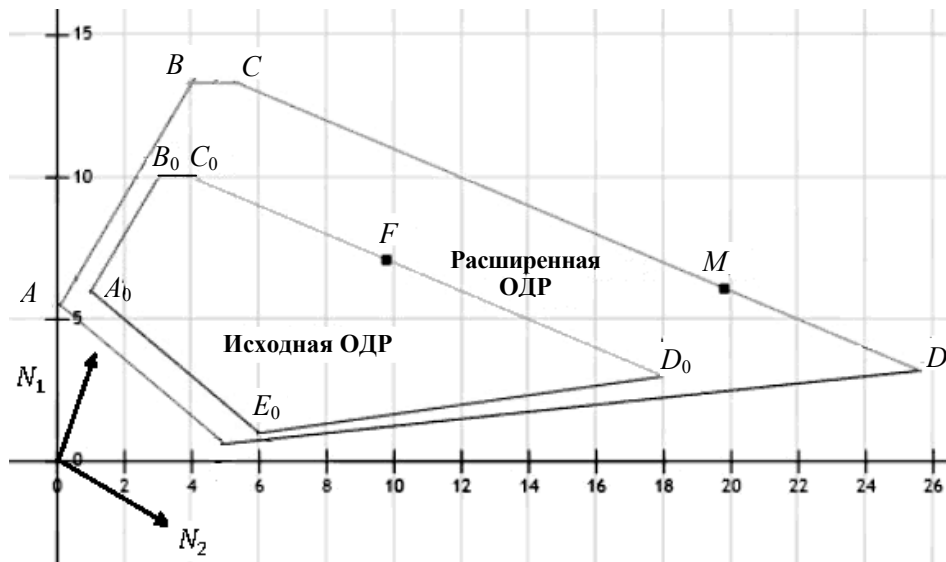


Рис. 2. Область допустимых решений и НКР уровня  $\alpha$  в нечеткой МКЛП задачи

Для нахождения НКР уровня  $\alpha = 0,8$  находим точки и значения  $f_{1\max}$  и  $f_{1\min}$  графоаналитически:

$$f_{1\max}(X, C_\alpha) = \max(1,5x_1 + 4,5x_2) = f_1(C) = 66;$$

$$f_{1\min}(X, C_\alpha) = f_1(E) = 9,95;$$

$$f_{2\max}(X, C_\alpha) = \max(3,5x_1 - 1,5x_2) = f_2(D) = 89,9;$$

$$f_{2\min}(X, C_\alpha) = f_2(A) = -7,94.$$

Парето-оптимальное решение уровня  $\alpha = 0,8$ , как и в частном случае, находится на отрезке  $CD$ , который описывается уравнением  $0,75x_1 + 1,5x_2 \leq 24$ .

Найдем НКР уровня  $\alpha = 0,8$ .

Для этого переходим к нормированным критериям

$$f_1^H(X) = \frac{1,5x_1 + 4,5x_2 - 9,95}{66 - 9,95} = \frac{1,5x_1 + 4,5x_2 - 9,95}{56,5};$$

$$f_2^H(X) = \frac{3,5x_1 - 1,5x_2 + 7,94}{89,9 + 7,94} = \frac{3,5x_1 - 1,5x_2 + 7,94}{97,84}.$$

Далее необходимо найти НКР из условий решения задачи  $\max k_0$  (5) при условиях  $w_1 f_1^H(X, C_\alpha) \geq k_0$ ;  $w_2 f_2^H(X, C_\alpha) \geq k_0$ .

Как и в четком случае, НКР уровня  $\alpha = 0,8$  лежит на отрезке  $CD$  и, кроме того,

$$w_1 f_1^H(X, C_\alpha) = w_2 f_2^H(X, C_\alpha).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1,5x_1 + 4,5x_2 - 9,95}{56,5} = \frac{3,5x_1 - 1,5x_2 + 7,94}{97,84}, \\ 0,75x_1 + 1,5x_2 \leq 24. \end{cases} \quad (7)$$

откуда

$$x_1 = \frac{(24 - 1,5x_2)4}{3} = \frac{96 - 6x_2}{3} = 32 - 2x_2.$$

Решая систему (7) после подстановки  $x_1 = 32 - 2x_2$ , находим

$$x_2 \approx 9,44; \quad x_1 = 32 - 2x_2 \approx 13,12.$$

Таким образом, НКР уровня  $\alpha = 0,8$  данной задачи:

$$x_2 = 9,44; \quad x_1 = 13,12.$$

Соответствующая точка  $M$  показана на рис. 2. Для сравнения на этом же рисунке приведено ОДР и НКР для четкой задачи  $(\cdot, F)$  (пятиугольник  $A_0B_0C_0D_0F_0$ ).

## ВЫВОДЫ

Рассмотрена многокритериальная задача принятия решений в нечетких условиях (МКНП). Для ее решения введены понятия парето-оптимального решения и наилучшего компромиссного решения уровня  $\alpha$  МКНП-задачи. Доказаны теоремы, устанавливающие их взаимосвязи.

Предложен метод нахождения НКР уровня  $\alpha$  МКНП-задачи.

Приведен пример, иллюстрирующий предлагаемый метод для случая МКЛП-задачи в нечетких условиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука. — 1971. — 383 с.
2. Волкович В.Л. Проблемы создания интеллектуальных систем поддержки принятия решений. — К., 1990. — 190 с.
3. Подиновский В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: — 1975. — 360 с.
4. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. — М., 2002. — 302 с.
5. Зайченко Ю.П. Теорія прийняття рішень, підруч. / Ю.П. Зайченко. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — 412 с.
6. Згуровский М.З. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях / М.З. Згуровский. — К.: Наук. думка, 2011. — 352 с.

Поступила 06.10. 2016

## **ANALYSIS OF THE NUCLEAR REACTOR CORE OF CHERNOBYL POWER PLANT FOR 5 SECONDS BEFORE EXPLOSION WITH THE THREE-DIMENSIONAL SPHERICAL SPACE**

**Y. MATSUKI, P.I. BIDYUK**

**Abstracts.** This research analyzed the water flow and bubble (void) of nuclear reactor core of Chernobyl Power Plant, for 5 seconds before the explosion, using a mathematical model of two-dimensional spherical coordinates. To solve the problem, we considered this phenomenon as an analogy of Newtonian gravity theory, which had been solved in Schwarzschild Solution. As a result, the calculated radius of the spherical space of water and bubble indicated the maximum limit, at which the reactor core lost the control of reactor power. And, then, a regression analysis, with exponential model, confirmed the influence of bubble and water to the reactor's power.

**Keywords:** nuclear power plant, Chernobyl disaster, critical operation mode, regression analysis, void and water environment.

### **INTRODUCTION**

During a few seconds before the explosion of the reactor core of the Chernobyl Nuclear Plant in April 1986, the flow rate of the Main Circulation Pump (MCP) was reduced, and void (bubble) increased in the water flow. Our previous research [1] suggested that the water flow and void explain the process of these five seconds, while reactor's power immensely increased toward the explosion. From this previous result [1], we continued the investigation with the same data, in order to find a rule, which may explain how the water and void were related to the sudden increase of the reactor power, what resulted in an explosion.

For the further analysis, we assumed the followings: 1) the nuclear reactor core has potential to control its power; and, such a potential has an analogy from the gravity force in the space; 2) when the condition of water and void are out of the reach of the hypothetical gravity, the nuclear reactor loses its control over its power. Fig. 1 shows the scatter plots of water and void in time series. This figure shows the decreasing MCP flow rate and increasing void, over time.

### **METHODOLOGY**

#### **Two-dimensional spherical model**

Schwarzschild solution [2] of two-dimensional rectangular coordinates is:

$$ds^2 = (1 - 2V)dr^2 - (1 - 2V)^{-1}dr^2 - r^2d(\sin \theta),$$



where  $ds^2$  of this equation (1) is a geodesic, which indicates the status of the reactor core in hypothetical coordinates,  $V$  is potential of gravity,  $r$  is the radius, and  $\theta$  is the angle of the radius in the two-dimensional spherical coordinates.

If it is applied to the Newton's gravity,  $V$  is inversely proportional to the radius,  $r$ . We take the same assumption in this analysis:

$$V = W / r,$$

where  $W$  is unknown scalar value, which is specific to the two dimensional space of this analysis.

Then  $r = 2W$  is a singular point, where  $ds^2 = \infty$ .

In this analysis, the coordinates of Fig. 1 are converted to a two-dimensional spherical coordinate as well as the time coordinate. In this analysis, the gravity is static; therefore, time is independent from the special coordinates.

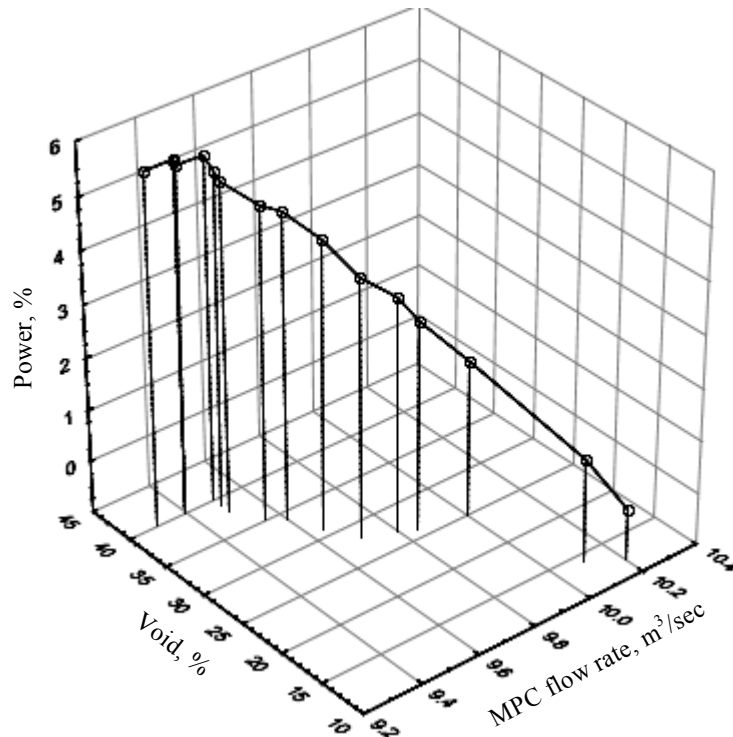


Fig. 1. Geodesic trajectory of MCP flow rate and void

Main circulation pump flow rate ( $x$ -coordinate in Fig. 1) and Void ( $y$ -coordinate in Fig.1) are converted to the two-dimensional spherical coordinates with the following equations:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

In this analysis, units of MCP flow rate and void are different; therefore, the coordinates in the two-dimensional spherical space is purely hypothetical. No attempt is made to find theoretical connection to the nuclear reactor theory; but,

rather, an attempt is made to find the singular point in the hypothetical space, which could lead to the explosion. Therefore, only equation (1) is considered.

### Exponential model for regression analysis

After the above analysis, if a singular point of the hypothetical spherical space is identified, regression analysis of the data will be carried out, with the exponential model:

$$Y_j = a + \exp\left(b + \sum_{i=1}^n c_i X_{i,j}\right),$$

where  $a$ ,  $b$ ,  $c_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) are positive constants, and  $n$  is number of independent variables.  $j=1,2,\dots,m$ , the suffices,  $j$ , means  $j$ -th observation of the variable,  $X_{i,j}$ , and  $m$  is number of observations.

These coefficients,  $a$ ,  $b$ ,  $c_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) are calculated numerically, which are to minimize  $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m U_j^2$ , where

$$U_j = Y - \left\{ a + \exp\left(b + \sum_{i=1}^n c_i X_{i,j}\right) \right\}.$$

In this analysis, one more model is also tested:

$$Y_j = a + b \exp\left(\sum_{i=1}^n X_{i,j}\right), \quad (2)$$

where  $a$  and  $b$  are positive constants,  $i=1,2,3,\dots,n$ , and  $j=1,2,3,\dots,m$ .

### Method to test the fitting (predictability) of the exponential model with sampled data

a) calculate the predicted value of  $Y$  (i.e.,  $\hat{Y}$ ) with the following equation:

$$\hat{Y}_j = a + \exp\left(b + \sum_{i=1}^n c_i X_{i,j}\right).$$

b) calculate the value of  $R^2$  by the following equation:

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (\hat{Y}_j - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2},$$

where  $\bar{Y} = 1/m \sum_{j=1}^m Y_j$ .

For the model (2), the same rule applies.

The value of  $R^2$  represents the fitting and predictability of the given exponential model upon the given data, and when  $R^2 = 1,0$ , it is the perfect match,

while the level of the matching is lower when the value of  $R^2$  is lower. In practice, if  $R^2 \geq 0,8 \sim 0,6$ , the fitting of the model in the data is significant. However, the threshold value depends on the topic and the data of the concerned research question, therefore the values of  $R^2$  need to be considered on the comparative manner.

### Data

The data was taken from Martines, et.al 1989 [3], which we used in [1]. The descriptive statistics are shown in Table 1. Reactor power, MCP flow rate and void during the time period of 5 seconds before the explosion (between 01h 23 min 38 sec and 01 h 23 min 42, 71 sec on 25 April 1986) are analyzed in this research.

**Table 1.** Descriptive Statistics of Parameters (taken from Fig. 3 of [3])

Parameter	Power (% nominal power)	MCP flow rate m <sup>3</sup> /sec	Void, %
Mean	67442,4	9,653	31,819
Median	13220	9,575	34,500
Maximum	227186,7	10,200	40,050
Minimum	0	9,3	12,000
Std. Dev.	90122,460	0,269	9,202
Skewness	0,872	0,713	-0,947
Kurtosis	2,039	2,396	2,837
Observations	16	16	16

Note: Max.: maximum value. Min.: minimum value. Std. Dev.: standard deviation. Skewness: the measure of the probability distribution leaning to one side of the mean. Kurtosis: “peakedness” of probability distributions. Observation: number of observations.

## RESULT

### Geodesic trajectory of MCP flow rate and void in two-dimensional spherical coordinates

Fig. 2 shows the calculated radius of the hypothetical two-dimensional spherical coordinates of MCP flow rate and void, in comparison with the reactor power. When the hypothetical radius reached the length of 40, the reactor power increased immensely<sup>1</sup>. We assume that this is the singular point, where  $r = 2W$ , and  $ds^2 = \infty$ .

This observation suggests that there is a potential, which is an analogy from the earth’s gravity, but it is only in a hypothetical two-dimensional spherical coordinates of water and void in the reactor core. That is, when the geodesic is far from the center of the coordinates, the gravity force becomes weaker, and then, the reactor core cannot control its power.

<sup>1</sup> Here, the radius doesn’t have unit; because, this coordinate is purely hypothetical.

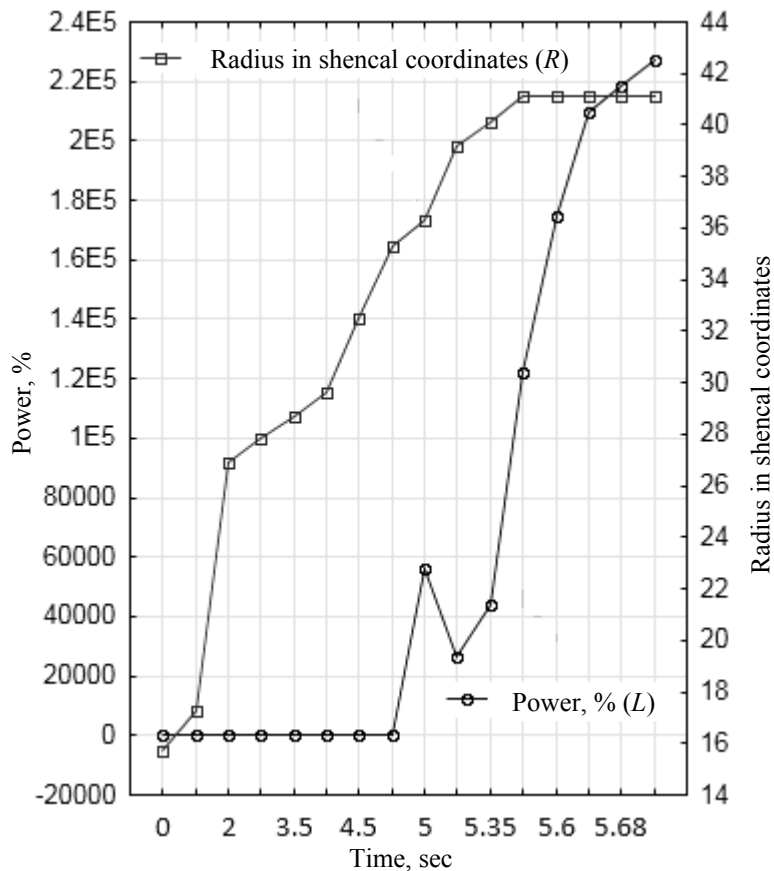


Fig. 2. Power and the radius in hypothetical spherical coordinates of water and bubble

### Exponential models to explain the explosion

The next step is to describe the sudden increase of reactor power by MCP flow rate and void.

In our previous study [1], we calculated the first-order estimate with a linear model. However, upon the observation above in this research, we assumed that the reactor suddenly increased its power immensely, when the size of radius reached the singular point in the hypothetical two dimensional space of water and void of the reactor core, as if the reactor core lost its control over its power. And, then, we thought that we cannot describe the process of increasing reactor power with the standard model for the first order estimation, but with exponential models.

Table 2 shows the results of the regression analysis with two exponential models and a linear model. The fittings of the exponential models are much better than the linear model's, as indicated by the values of  $R^2$ . Fig. 3 shows the comparison between the calculated reactor power and the observed reactor power. The figure also shows that the exponential models fit well with the observed power, than the linear model.

This result shows that MCP flow rate and void can explain the increase of reactor power.

**Table 2.** Calculated reactor power by two exponential models and a linear model

Model	Linear models and calculated coefficients	$R^2$
Exponential model 1	Power = 6353,2 + exp(-14,561 - 2,2701MCPflowrate + 1,1997void)	0,9587
Exponential model 2	Power = 4451,7 + 6,24 · 10 <sup>-17</sup> exp(MCPflowrate + void)	0,8819
Linear [1]	Power = 4875626 - 475560,6 × MCPflowrate - 6836,794 × void	0,5712

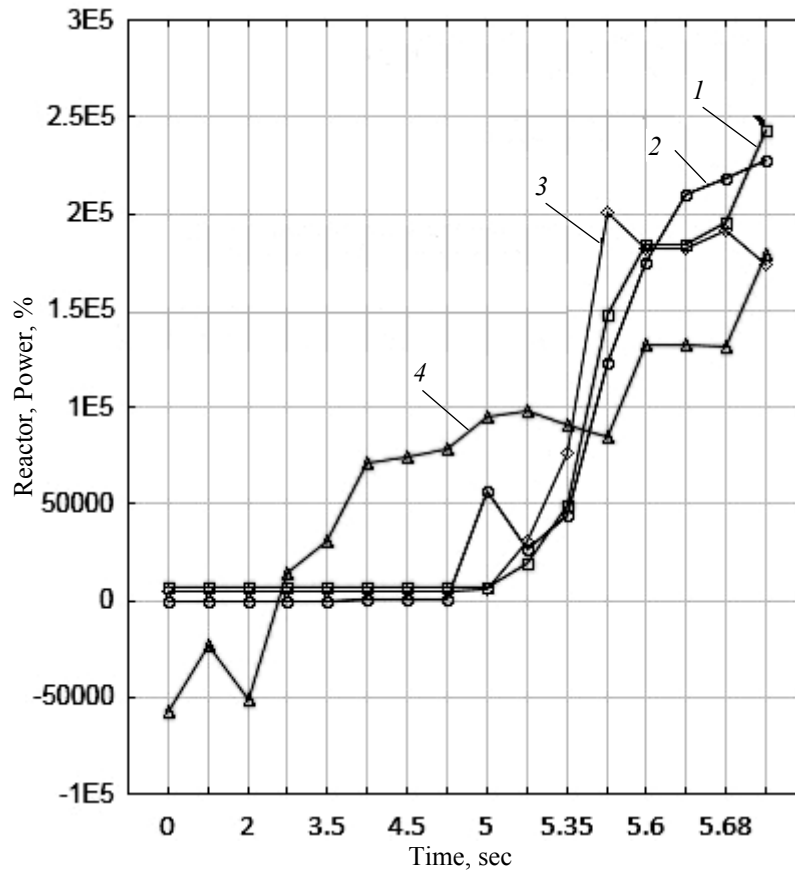


Fig. 3. Comparison of observed reactor power with calculated reactor power: 1 — calculated power by model-1, %; 2 — power, %; 3 — calculated power by model-2; 4 — calculated power by model

### CONCLUSION AND RECOMMENDATION

In case of the explosion of Chernobyl nuclear reactor, both MCP flow rate and void showed unusual behaviors. And, then the reactor power increased suddenly. The exponential curve showed the immense increase of the reactor power, what resulted in an explosion.

If the reactor core had a capability to control its power, the occurrence of the explosion suggests that there is a point that led to the explosion. The result of this research also suggests that there was a limit for controlling the reactor power, and

the limit existed at the singular point of the hypothetical three-dimensional spherical space of water and void in the reactor core.

#### **REFERENCE**

1. *Matsuki Y.* Empirical Analysis of Chernobyl Nuclear Reactor Core for 5 seconds before the Explosion / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology. — 2016. — P. 33–42.
2. *Dirac P.A.M.* General Theory of Relativity / P.A.M. Dirac // A Wiley-Interscience Publication. — New York: John Wiley & Sons, 1975. — Available at: <http://amarketplaceofideas.com/wp-content/uploads/2014/08/P%2520A%2520M%2520Dirac%2520-%2520General%2520Theory%2520Of%2520Relativity1.pdf>
3. *Martinez J.M.* An Analysis of the Physical Causes of the Chernobyl Accident / Jose M. Aragonéz, Emilio Minguez, Jose M. Peri, Guillermo Velarde // Nuclear Technology. — 1990. — Vol. 90. — P. 371–399.

*Received 12.07.2016*

---

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

## ПРО АЛГОРИТМИ ВИЗНАЧЕННЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ МОНОПОЛІСТІВ

А.П. МАХОРТ

**Анотація.** Досліджено відкриту економічну систему, сформовану споживачами, що є ненасичуваними. Частина споживачів спроможна виробляти товари. Застосовано принципи рівноваги вальрасового типу. Використано наближення моделі економіки з постійними інтересами споживачів. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про економічну рівновагу, який враховує можливість залежності споживчих уподобань суб'єктів економічної системи від додаткових характеристик. Отримано обмеження на модельні характеристики, які забезпечують існування рівноваги такої економічної системи. Знайдено стани рівноваги з характеристиками, що належать заданим інтервалам значень. Указано на зв'язок між вибором стратегії оподаткування та реалізацією конкретного стану рівноваги економічної системи.

**Ключові слова:** рівновага, попит, пропозиція, рівноважні ціни.

### ВСТУП

Дослідження рівноваги економічних систем, зокрема рівноваги за Вальрасом [1, 2], дає змогу отримати достатньо інформації про можливості їх функціонування. Перебування в деякому стані рівноваги означає для економічної системи певний баланс і стабільність значень характеристик системи. На поведінку економічних систем впливають різні чинники. Зміна стану рівноваги зумовлена зміною економічних характеристик, що спричиняють впливи цих чинників. За значеннями економічних характеристик можна виявити, чи призводить дія чинників до дестабілізації і погіршення умов функціонування, або ж навпаки, їх дія корисна для економічної системи і сприяє зростанню.

Урахування у моделі економіки наявності певних чинників залежить від потреби дослідити той чи інший аспект функціонування економічної системи. Монополізм є вагомим чинником впливу і потребує уваги у процесі побудови моделі.

Серед чинників є і такі, потреба в урахуванні яких залежить від додаткових обставин. У цьому випадку важливо, щоб модель допускала можливість надалі враховувати їх дію. Особливості формування споживчих уподобань саме і належать до подібних чинників.

**Мета дослідження** — з'ясування впливу монопольних явищ на рівновагу економічної системи та побудова алгоритму визначення характеристик тих станів рівноваги, перебування в яких забезпечуватиме ефективне функціонування всіх суб'єктів економічної системи. Алгоритм має враховувати можливість деталізації чинників впливу на формування споживчих уподобань.

## ОПИС МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай економічна система сформована  $l$  суб'єктами, які всі є споживачами товарів. Споживачі є ненасичуваними, тобто мають витратити весь свій здобутий фінансовий ресурс на придбання нових товарів. Витрати, пов'язані зі споживанням товарів, частина суб'єктів економічної системи компенсує за рахунок власного виробництва товарів. А перерозподіл прибутків виробників є джерелом фінансування решти споживачів.

Вважатимемо, що в економічній системі є  $n$  різновидів товарів, кожен з яких виготовляє один виробник. Обсяги випуску товарів в економічній системі описуватимуть компоненти вектора  $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ . Також припустимо, що поряд з виготовленням свого товару виробники можуть мати запаси товарів інших виробників. Для  $i$ -го виробника обсяги такого запасу визначатимуть компоненти вектора  $\{b_{ki}^1\}_{k=1}^n, i = \overline{1, n}$ . Технології виробництва товарів задаватимемо матрицею вигляду  $\|a_{kj} + b_{kj} / x_j\|_{k,j=1}^n$ , де величини  $a_{kj}$  визначають витрати на виготовлення одиниці випуску  $j$ -го товару в натуральних показниках  $k$ -м виробником, а значення характеристик  $b_{kj}$  стосуються постійних витрат, необхідних для утримання всього виробництва у працездатному стані. Рівень пропозиції  $\Psi_k$   $k$ -го товару на ринку складається як з обсягів його випуску, так і з обсягів його запасів за умови, що частина товарів використовується для потреб виробництва:

$$\Psi_k = x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^n b_{ki} + \sum_{i=1}^n b_{ki}^1 - e_k + i_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де також враховано можливість взаємодії економічної системи із зовнішнім оточенням і  $\{e_i\}_{i=1}^n$  — вектор експорту товарів, а  $\{i_i\}_{i=1}^n$  — вектор імпорту.

Реалізація наявних у виробників товарів на ринку дозволяє їм отримувати фінансові ресурси для подальшого функціонування. Фінансові надходження суб'єктів економічної системи оподатковуються. Оподаткований прибуток, який може отримати виробник у результаті своєї діяльності, записується за допомогою виразу

$$\tilde{D}_j(p) = \pi_j x_j \left( p_j - \sum_{k=1}^n a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj} p_k + \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj}^1 p_k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де  $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^n$  — вектор оподаткування. Оподаткування і є механізмом перерозподілу капіталу для забезпечення фінансування тих споживачів, які не є виробниками. Величина їх прибутків  $\{\tilde{D}_j(p)\}_{j=n+1}^l$  має формуватись з урахуванням вимоги

$$\sum_{j=n+1}^l \tilde{D}_j(p) = \sum_{j=1}^n (1 - \pi_j) D_j(p). \quad (3)$$

Споживання товарів в економічній системі формується на підставі уподобань суб'єктів економічної системи. Максимальний набір бажаних



товарів, що ними цікавиться  $i$ -й споживач, визначатиме ненульовий вектор  $\{c_{ki}\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Значення величин  $c_{ki}$  можуть бути і функцією деякої економічної характеристики  $z^0$ ,  $c_{ki} = c_{ki}(z^0)$ . Припустимо, що в побудованій за елементами  $c_{ki}$  матриці  $C = \|c_{kj}\|_{k=1, j=1}^{n, l}$  немає нульових рядків і стовпців. Попит споживачів, або ж їх остаточний вибір товарів зі списку бажаних залежить від ціни цих товарів. Тому попит  $i$ -го споживача на  $k$ -й товар  $\Lambda_{ik}(p)$  можна подати у вигляді

$$\Lambda_{ik}(p) = \frac{c_{ki} p_k}{\sum_{s=1}^n c_{si} p_s}, \quad i = \overline{1, l}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де  $p = \{p_i\}_{i=1}^n$  — вектор цін на товари. Вибір споживачів створює попит на товари в економічній системі. Вираз для попиту на  $k$ -й товар  $\Phi_k$  складатиметься з попиту окремих споживачів та їх спроможності придбати цей товар:

$$\Phi_k = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^l \Lambda_{ik}(p) \tilde{D}_i(p), \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Споживач прагне мати той рівень прибутку, що дозволить йому придбати бажаний набір товарів у повному обсязі. Мірою досягнення потрібного рівня прибутку є вектор ступенів задоволення потреб споживачів  $y = \{y_i\}_{i=1}^l$ . Його компоненти набувають значень в інтервалі  $(0, 1]$ . Якщо компонента вектора  $y$  дорівнює одиниці, відповідний споживач може придбати весь потрібний набір товарів, інакше його бажання задовольнятимуться частково. Тоді оподаткований, або чистий прибуток кожного суб'єкта економічної системи як споживача набуває вигляду

$$\tilde{D}_j(p) = y_j \sum_{s=1}^n c_{sj} p_s, \quad j = \overline{1, l}. \quad (6)$$

Для виробників вираз (6) має збігатися з виразом (2).

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Аналіз поведінки економічної системи можна виконати за значеннями її характеристик. Після того, коли суб'єкти економічної системи оберуть стратегії своєї поведінки, частина з характеристик стануть визначеними. Зокрема виробники мають обрати технології виготовлення своїх товарів, а споживачі вирішити, яких товарів вони потребують. Вважатимемо, що в моделі заданими є елементи матриць технологічних коефіцієнтів  $\|a_{kj}\|_{k, j=1}^n$ ,  $\|b_{kj}\|_{k, j=1}^n$ , обсяги запасу товарів та коефіцієнти споживання товарів суб'єктів економічної системи, які сформуують матриці  $\|b_{kj}^1\|_{k, j=1}^n$  та  $\|c_{kj}\|_{k=1, j=1}^{n, l}$ . Зада-

ною вважатимемо і структуру зовнішньоекономічних зв'язків, подану векторами  $\{e_i\}_{i=1}^n$  та  $\{i_i\}_{i=1}^n$ . Важливими економічними характеристиками є ціни й обсяги випусків товарів. Очевидно, що виробники впливають на обсяги випусків своїх товарів. За наявності певного обсягу товару на ринку ціна на нього утворюється в результаті згоди між покупцем і продавцем. Зокрема, така згода досягається внаслідок установлення балансу між попитом і пропозицією, або ж установлення економічної рівноваги. Але серед виробників в економічній системі можуть бути присутні й монополісти, які мають змогу впливати на рівень цін своїх товарів. У випадку заданих цін на товари баланс між попитом і пропозицією досягатиметься за рахунок зміни обсягів випуску товарів. Тому вважатимемо, що в моделі задано ціни на товари монополістів  $(p_{t+1}^0, \dots, p_n^0)$  і обсяги випусків товарів решти виробників  $(x_1^0, \dots, x_t^0)$ . Модель ураховує наявність оподаткування прибутків суб'єктів економічної системи, а відповідно до економічних реалій, принаймні для тих виробників, які не є монополістами, стратегію оподаткування слід вважати заданою  $(\pi_1^0, \dots, \pi_t^0)$ .

Інші характеристики, такі як рівні споживання суб'єктів економічної системи, подані компонентами вектора  $(y_1, \dots, y_l)$ , ціни  $(p_1, \dots, p_l)$ , обсяги випусків  $(x_{t+1}, \dots, x_n)$ , рівні оподаткування монополістів  $(\pi_{t+1}, \dots, \pi_n)$  можуть змінювати свої значення залежно від ситуації на ринку. Вони залежать від поточного стану економічної системи і визначаються безпосередньо з умови рівноваги. Згідно з принципами рівноваги за Вальрасом [1, 2] пропозиція товарів в економічній системі має перевищувати попит. З цієї умови отримаємо набір усіх імовірних станів економічної системи. Щоб визначити стани рівноваги з прибутковим виробництвом усіх суб'єктів економічної системи достатньо використати умову рівності попиту і пропозиції [1]. Тоді зі співвідношень (1) і (5) отримаємо

$$\frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^l \Lambda_{ik}(p) \tilde{D}_i(p) = x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^n b_{ki} + \sum_{j=1}^n b_{kj}^1 - e_k + i_k, \quad k = \overline{1, n},$$

або з урахуванням виразів (4) і (6)

$$\sum_{j=1}^l c_{kj} y_j = x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^n b_{ki} + \sum_{j=1}^n b_{kj}^1 - e_k + i_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Урахуємо також, що в стані рівноваги прибуток виробників, визначений за формулою (2), має збігатися зі значеннями, знайденими за формулою (6)

$$\pi_j x_j \left( p_j - \sum_{k=1}^n a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj} p_k + \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj}^1 p_k = y_j \sum_{s=1}^n c_{sj} p_s, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Систему рівнянь (7), (8) розв'язуватимемо щодо векторів  $\{y_i\}_{i=1}^l$ ,  $\{p_i\}_{i=1}^l$ ,  $\{x_i\}_{i=t+1}^n$  і  $\{\pi_i\}_{i=t+1}^n$  і тим самим визначимо стани рівноваги економічної системи, перебування в яких забезпечуватиме ефективне функціонування її суб'єктам.

## ВИЗНАЧЕННЯ СТУПЕНІВ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ ВИРОБНИКІВ ТОВАРІВ

Укажемо спочатку, як визначити рівноважні значення компонент вектора ступенів задоволення потреб споживачів  $y = \{y_i\}_{i=1}^l$ . Припустимо, що матриця  $A = \|a_{kj}\|_{k,j=1}^n$  нерозкладна, а її спектральний радіус менший від одиниці. Тоді рівняння (7) можна переписати у вигляді

$$\sum_{j=1}^l d_{kj} y_j = b_k, \quad k = \overline{1, n},$$

де введено матрицю  $\|d_{kj}\|_{k=1,j=1}^{n,l}$  і величини  $\{b_i\}_{i=1}^n$ :

$$d_{kj} = \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} c_{sj}, \quad b_k = x_k - \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n b_{si} - \sum_{j=1}^n b_{sj}^1 + e_s - i_s \right].$$

Частина величин  $(b_1^0, \dots, b_t^0)$  будуть заданими. Вони мають бути і додатними, інакше пропозиція товарів виявиться від'ємною, що неможливо. А через припущення про властивості матриць  $A$  і  $C$  матричні елементи  $d_{kj}$  також будуть додатними.

Нехай найнижчий прийнятний для споживачів в економічній системі рівень задоволення потреб є  $y^m$ . Тоді бажано, щоб реалізовувались лише стани рівноваги, у яких компоненти вектора  $y$  міститимуться в інтервалі  $[y^m, 1]$ . Виберемо константи  $\Delta_0, \Delta_1$ , щоб вони задовольняли нерівності

$$y^m \left( \sum_{j=n+1}^l d_{kj} - \Delta_1 \right) \leq b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 \leq y^M \left( \sum_{j=n+1}^l d_{kj} - \Delta_1 \right), \quad k = \overline{1, t}, \quad (9)$$

а також сукупність параметрів  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha_{t+1}^1, \dots, \alpha_n^1)$ , такі, що значення величин  $\{\beta_i\}_{i=1}^n$

$$\beta_s = \Delta_1 \alpha_s + \sum_{k=1}^t \alpha_k d_{ks}, \quad s = \overline{1, t}, \quad \beta_s = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^t \alpha_k d_{ks}, \quad s = \overline{t+1, n}$$

містяться в діапазоні  $[y^m, y^M]$ ,  $y^M \leq 1$ , і вимагатимемо, щоб компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів  $y_1, \dots, y_n$  були розв'язком оптимізаційної задачі

$$\min_{(y_1, \dots, y_n)} \mathcal{F}^0, \quad \mathcal{F}^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\beta_j - y_j]^2, \quad (10)$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^n d_{kj} y_j + \Delta_1 y_k = \Delta_0 b_k^0, \quad k = \overline{1, t}. \quad (11)$$

**Теорема 1.** Нехай величини  $\sigma^m, \sigma^M$ , вибрані з умови

$$y^m \leq \sigma^m \left( \Delta_1 + \sum_{k=1}^t d_{ks} \right) \leq \sigma^M \left( \Delta_1 + \sum_{k=1}^t d_{ks} \right) \leq y^M, \quad s = \overline{1, t},$$

$$y^m - \Delta_0 \alpha_s^1 \leq \sigma^m \sum_{k=1}^t d_{ks} \leq \sigma^M \sum_{k=1}^t d_{ks} \leq y^M - \Delta_0 \alpha_s^1, \quad s = \overline{t+1, n},$$

разом зі сталими  $\Delta_0, \Delta_1$  задовольняють нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left( b_k^0 - \sum_{s=t+1}^n d_{ks} \alpha_s^1 \right) - \frac{\sigma^m}{\Delta_1^2} \left( \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^t d_{ki} d_{ki} + \Delta_1 \sum_{i=1}^t d_{ki} + \Delta_1 \sum_{i=1}^t d_{ik} \right) \leq \sigma^M, \quad s = \overline{1, t},$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left( b_k^0 - \sum_{s=t+1}^n d_{ks} \alpha_s^1 \right) - \frac{\sigma^M}{\Delta_1^2} \left( \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^t d_{ki} d_{ki} + \Delta_1 \sum_{i=1}^t d_{ki} + \Delta_1 \sum_{i=1}^t d_{ik} \right) \geq \sigma^m, \quad s = \overline{1, t}.$$

Тоді існує додатний вектор  $\{y_i\}_{i=1}^n$ , який розв'язує оптимізаційну задачу (10), (11), а його компоненти міститимуться в інтервалі значень  $[y^m, y^M]$ .

**Доведення.** Складемо функцію Лагранжа оптимізаційної задачі (10), (11):

$$\mathcal{L}^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\beta_j - y_j]^2 + \sum_{k=1}^t \lambda_k \left[ \sum_{j=1}^n d_{kj} y_j + \Delta_1 y_k - \Delta_0 b_k^0 \right].$$

Перевірка необхідних і достатніх умов існування мінімуму екстремальних задач приведе до виконання умови

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}^0}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j = \sum_{s=1}^n y_s^2 > 0$$

для будь-якого довільно вибраного ненульового вектора  $(y_1, \dots, y_n)$  та до появи рівнянь

$$\frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial y_s} = y_s - \beta_s + \sum_{k=1}^t \lambda_k (\Delta_1 \delta_{ks} + d_{ks}) = 0, \quad s = \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \lambda_k} = \sum_{j=1}^n d_{kj} y_j + \Delta_1 y_k - \Delta_0 b_k^0 = 0, \quad k = \overline{1, t}, \tag{13}$$

відносно невідомих  $\{y_i\}_{i=1}^n$  і множників Лагранжа  $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$ . Компоненти вектора  $y$ , який буде розв'язком оптимізаційної задачі (10), (11), визначимо за множниками Лагранжа  $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$  з виразу (12), а значення множників Лагранжа  $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$  — з виразу (13), який трансформується у рівняння

$$\begin{aligned} (\alpha_k - \lambda_k) &= \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left( b_k^0 - \sum_{s=t+1}^n d_{ks} \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1^2} \sum_{j=1}^t \left[ \sum_{i=1}^n d_{ki} d_{ji} \right] (\alpha_j - \lambda_j) - \\ &- \frac{1}{\Delta_1} \left( \sum_{j=1}^t d_{kj} (\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t d_{jk} (\alpha_j - \lambda_j) \right), \quad k = \overline{1, t}. \end{aligned} \tag{14}$$

Систему рівнянь (14) можна подати у вигляді

$$\alpha_k - \lambda_k = \Theta_k^0(\alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t), \quad k = \overline{1, t}.$$

Умови теореми гарантуватимуть, що оператор  $\{\Theta_i^0(\alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$  переводитиме множину

$$\mathcal{M}_\lambda = \left\{ \alpha_k - \lambda_k \in R, \left| \frac{\sigma^M + \sigma^m}{2} - \alpha_k + \lambda_k \right| \leq \frac{\sigma^M - \sigma^m}{2}, \quad k = \overline{1, l} \right\}$$

саму в себе. Тому на підставі принципу Шаудера [3] можна зробити висновок про існування ненульових значень множників Лагранжа  $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$ , причому їх значення містяться в діапазоні  $\sigma^m \leq \alpha_k - \lambda_k \leq \sigma^M$ ,  $k = \overline{1, t}$ . За таких умов компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів

$$y_s = \Delta_1(\alpha_s - \lambda_s) + \sum_{k=1}^t (\alpha_k - \lambda_k) d_{ks}, \quad s = \overline{1, t},$$

$$y_s = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^t (\alpha_k - \lambda_k) d_{ks}, \quad s = \overline{t+1, n},$$

міститимуться в заданому інтервалі  $[y^m, y^M]$ .

Теорему доведено.

За допомогою оптимізаційної задачі (10), (11) знайдемо лише частину компонент  $\{y_i\}_{i=1}^n$  вектора ступенів задоволення потреб споживачів. Усі інші компоненти цього вектора, як і решта рівноважних економічних характеристик, визначатимуться за ними.

## РІВНОВАЖНІ СТУПЕНІ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ СПОЖИВАЧІВ

Для знаходження решти компонент  $\{y_i\}_{i=n+1}^l$  сформулюємо задачу

$$\min_{(y_{n+1}, \dots, y_l)} \mathcal{F}^1, \quad \mathcal{F}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^l [\beta_j - y_j]^2 \quad (15)$$

за додаткових вимог

$$b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k = \sum_{j=n+1}^l d_{kj} y_j, \quad k = \overline{1, t}, \quad (16)$$

$$y^m \leq y_k \leq y^M, \quad k = \overline{n+1, l}. \quad (17)$$

Можливість одночасного виконання умов (16) і (17) впливає з нерівностей (9).

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови (9) і справедливі нерівності

$$\exists j \in [n+1, l] : [y^M - y_j][y_j - y^m] > 0. \quad (18)$$

Тоді існує додатний вектор  $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^t$ , для якого розв'язок оптимізаційної задачі (15) з

$$\beta_s = \sum_{k=1}^t \alpha_k^1 d_{ks}, \quad s = \overline{n+1, l}$$

задовольнятиме обмеження (17) і рівності (16).

**Доведення.** Складемо функцію Лагранжа оптимізаційної задачі (15)–(17). Звернемо увагу, що обмеження (17) еквівалентні нерівностям

$$[y^M - y_j][y_j - y^m] \geq 0, \quad j = \overline{n+1, l}.$$

Додатково припустимо, що деякі компоненти вектора, який розв'язує оптимізаційну задачу (15)–(17), можуть набувати значень  $y_k = \frac{1}{2}(y^M + y^m)$ ,  $k \in M_0$ ,  $M_0 \subset [n+1, l]$  (але множина  $M_0$  може виявитись і порожньою). З урахуванням цього функцію Лагранжа запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 = & \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^l [\beta_j - y_j]^2 + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1 \left[ \sum_{j=n+1}^l d_{kj} y_j - \Delta_1 y_k + \Delta_0 b_k^0 - b_k^0 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in M_0} \chi_j^0 [y^M + y^m - 2y_j] - \sum_{j \in [n+1, l] \setminus M_0} \chi_j^1 [y^M - y_j][y_j - y^m]. \end{aligned}$$

Для такої функції Лагранжа та будь-якого довільно вибраного ненульового вектора  $(\mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_l)$  виконуватиметься умова

$$\sum_{j=n+1}^l \sum_{i=n+1}^l \frac{\partial^2 \mathcal{L}^1}{\partial y_i \partial y_j} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j = \sum_{s=n+1}^l \mathbf{y}_s^2 + 2 \sum_{s \in [n+1, l] \setminus M_0} \chi_s^1 \mathbf{y}_s^2 > 0.$$

Тут враховано, що множники Лагранжа  $\{\chi_s^1\}_{s \in [n+1, l] \setminus M_0}$  мають бути невід'ємними. Отримаємо також рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial y_s} = & y_s - \sum_{k=1}^t \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1 d_{ks} - \sum_{j \in M_0} \chi_j^0 \delta_{js} - \\ & - \frac{1}{2} \chi_s^1 (y^M + y^m - 2y_s) = 0, \quad s = \overline{n+1, l}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_k^1} = \sum_{j=n+1}^l d_{kj} y_j - \Delta_1 y_k + \Delta_0 b_k^0 - b_k^0 = 0, \quad k = \overline{1, t}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \chi_k^0} = y^M + y^m - 2y_k = 0, \quad k \in M_0. \quad (21)$$

Через наявність в оптимізаційній задачі (15)–(17) обмежень у формі нерівностей згідно з теоремою Куна–Таккера [4] варто вимагати додаткового виконання умов

$$\chi_j^1 \geq 0, \quad \chi_j^1 [y^M - y_j][y_j - y^m] = 0, \quad j \in [n+1, l] \setminus M_0. \quad (22)$$

Із виразу (19) випливає

$$\chi_s^1 = \frac{y_s - \sum_{k=1}^t \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1 d_{ks}}{y^M + y^m - 2y_s}, \quad s \in [n+1, l] \setminus M_0.$$

Тому мають виконуватись рівності

$$[y^M - y_j][y_j - y^m] = 0, \quad j \in M_1, \quad (23)$$

$$y_s - \sum_{k=1}^t \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1 d_{ks} = 0, \quad s \in M_2, \quad (24)$$

де  $\bigcup_{i=0}^2 M_i = [n+1, l]$ . Крім того, з виразів (19) і (21) також отримаємо

$$\frac{1}{2}(y^M + y^m) - \sum_{k=1}^t \alpha_k^1 d_{ks} + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1 d_{ks} - \chi_s^0 = 0, \quad s \in M_0. \quad (25)$$

Рівняння (25) дасть змогу визначити множники Лагранжа  $\{\chi_s^0\}_{s \in M_0}$ . А з рівняння (24) за множниками Лагранжа  $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$  визначатимемо лише ту частину величин  $(y_{n+1}, \dots, y_l)$ , які задовольняють обмеження (17) і не дорівнюють  $\frac{1}{2}(y^M + y^m)$ , значення решти цих величин знайдемо з рівностей або (21), або (23). Уведення множини  $M_0$  дозволяє коректно означити множники Лагранжа  $\{\chi_s^1\}_{s \in [n+1, l] \setminus M_0}$  відповідно до вимог (22).

Рівняння на множники Лагранжа  $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$  отримаємо з рівностей (20) з урахуванням виразів (21), (23), (24):

$$b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k - \sum_{j \in M_0 \cup M_1} d_{kj} y_j = \sum_{j=1}^t \left[ \sum_{i \in M_2} d_{ki} d_{ji} \right] (\alpha_j^1 - \lambda_j^1), \quad k = \overline{1, t}.$$

Матричні елементи  $d_{kj}$  додатні, унаслідок чого матриця  $\mu = \left\| \sum_{i \in M_2} d_{ki} d_{ji} \right\|_{k, j=1}^t$  буде додатно означеною, а отже, і невиродженою. Умови теореми гарантують, що множина  $M_2$  непорожня. Існування оберненої матриці  $\mu^{-1} = \left\| \mu_{kj}^{-1} \right\|_{k, j=1}^t$  забезпечуватиме існування множників Лагранжа  $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$ , оскільки завжди можна підібрати такі значення компонент додатного вектора  $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^t$ , щоб компоненти вектора  $\{\lambda_i^1\}_{i=1}^t$  були ненульовими:

$$\alpha_s^1 - \lambda_s^1 = \sum_{k=1}^t \mu_{sk}^{-1} \left( b_k^0 - \Delta_0 b_k^0 + \Delta_1 y_k - \sum_{j \in M_0 \cup M_1} d_{kj} y_j \right), \quad s = \overline{1, t}.$$

Позначимо:

$$y_s^1 = \sum_{k=1}^t d_{ks} \sum_{j=1}^t \mu_{kj}^{-1} \left( b_j^0 - \Delta_0 b_j^0 + \Delta_1 y_j - \sum_{j \in M_0 \cup M_1} d_{kj} y_j \right), \quad s = M_1 \cup M_2. \quad (26)$$

Вважатимемо, що для індексів з множини  $M_1$  виконується нерівність

$$[y^M - y_j^1][y_j^1 - y^m] \leq 0, \quad j \in M_1.$$

Покладатимемо  $y_j = y^M$ , якщо  $y^M \leq y_j^1$ , або  $y_j = y^m$ , якщо  $y^m \geq y_j^1$ , тому  $\chi_j^1 > 0$ ,  $j \in M_1$ . Натомість для індексів з множини  $M_1$  матимемо

$$y_j = y_j^1, \quad [y^M - y_j][y_j - y^m] > 0, \quad j \in M_1.$$

Теорему доведено.

**Зауваження.** Вимоги теореми 2 виключають випадок

$$[y^M - y_j][y_j - y^m] = 0 \quad \forall j \in [n+1, l]. \quad (27)$$

Але якщо замість умови (18) вимагати виконання обмежень

$$y^M \geq \sum_{k=1}^t d_{ks} \sum_{j=1}^l \tilde{\mu}_{kj}^{-1} (b_j^0 - \Delta_0 b_j^0 + \Delta_1 y_j) \geq y^m, \quad s = \overline{n+1, l},$$

де  $\|\tilde{\mu}_{kj}^{-1}\|_{k,j=1}^l$  — матриця, обернена до  $\left\| \sum_{i=n+1}^l d_{ki} d_{ji} \right\|_{k,j=1}^l$ , то теорема 2 буде справедлива і допускатимуться рівності (27).

Функцію Лагранжа  $\mathcal{L}^1$  тоді можна записувати у вигляді

$$\mathcal{L}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^l [\beta_j - y_j]^2 + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1 \left[ \sum_{j=n+1}^l d_{kj} y_j - \Delta_1 y_k + \Delta_0 b_k^0 - b_k^0 \right],$$

а  $M_2$  буде множиною всіх індексів:  $M_2 = [n+1, l]$ .

У контексті цього зауваження відзначимо, що замість послідовного розв'язування задач (10), (11) і (15)–(17) можна було б одразу розглядати об'єднану задачу

$$\min_{(y_1, \dots, y_l)} \tilde{\mathcal{F}}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l [\tilde{\beta}_j - y_j]^2 \quad (28)$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^l d_{kj} y_j = b_k^0, \quad k = \overline{1, t}. \quad (29)$$

За схемою, використаною для отримання виразу (26), дістанемо розв'язок задачі (28), (29):

$$y_s = \sum_{k=1}^t d_{ks} \sum_{j=1}^l \omega_{kj}^{-1} b_j^0, \quad s = \overline{1, l}, \quad (30)$$

де  $\|\omega_{kj}^{-1}\|_{k,j=1}^l$  — матриця, обернена до  $\left\| \sum_{i=1}^l d_{ki} d_{ji} \right\|_{k,j=1}^l$ . Звичайно, що без попереднього встановлення додаткових умов невідомо, чи задовольняє



розв'язок необхідні обмеження. Але навіть коли цей розв'язок міститься в потрібній області значень  $[y^m, y^M]$ , вираз (30) не завжди буде достатньо інформативним. Зокрема матричні елементи  $c_{kj}$ , а тому і  $d_{kj}$ , можуть залежати від деякої економічної характеристики  $z^0$ . І тоді вираз (30) не дозволить повною мірою оцінити характер залежності ступенів задоволення потреб споживачів від зміни цієї додаткової характеристики  $z^0$ . Якщо для матричних елементів  $d_{kj}$  вказуватиметься функціональна залежність від  $z^0$  в явному вигляді, то для елементів  $\omega_{kj}^{-1}$  така залежність може бути втрачена. Натомість алгоритм розв'язування задачі (10), (11) дає змогу зберегти всю потрібну інформацію про залежність величин  $y_1, \dots, y_n$  від додаткових характеристик. А саме ці компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів, відповідно до співвідношення (8), пов'язані з визначенням рівноважного вектора цін. Завжди важливо мати найдетальнішу інформацію про залежність від  $z^0$  для більш повного оцінювання впливу характеристики  $z^0$  на ціноутворення в економічній системі.

## ОПТИМАЛЬНИЙ СТАН РІВНОВАГИ

Рівноважні ступені задоволення потреб споживачів є розв'язком оптимізаційних задач. Таким чином, вони описують деякий в певному розумінні оптимальний стан рівноваги. Для його повного опису слід також вказати, яких значень набуватимуть компоненти вектора цін, обсягів випуску товарів та рівнів оподаткування монополістів.

Рівноважні обсяги випуску товарів монополістами  $(x_{t+1}, \dots, x_n)$  однозначно визначаються ступенями задоволення потреб споживачів

$$x_k = x_k(y), \quad x_k(y) = \sum_{j=1}^l d_{kj} y_j + \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n b_{si} - \sum_{j=1}^n b_{sj}^1 + e_s - i_s \right], \quad k = \overline{t+1, n}.$$

Гарантувати їх додатні значення можна, наклавши умову

$$y^m \sum_{j=1}^l d_{kj} + \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n b_{si} - \sum_{j=1}^n b_{sj}^1 + e_s - i_s \right] > 0, \quad k = \overline{t+1, n}.$$

Виконання цієї умови може порушуватись насамперед через наявність великого обсягу запасу товарів у суб'єктів економічної системи. У результаті виникатимуть сумніви в доцільності виробництва деяких товарів, а це може спричинити виникнення проблем у функціонуванні окремих суб'єктів економічної системи. Простим рішенням уникнення появи таких дисбалансів видається встановлення обмежень на обсяги запасу товарів з тим, щоб споживчі інтереси суб'єктів економічної системи забез-

печувалися переважно за рахунок виготовлення нових товарів. Тоді елементи матриці запасу товарів мають задовольняти нерівності

$$\frac{y^m}{\pi_j} c_{kj} + b_{kj} - b_{kj}^1 \geq 0, \quad k, j = \overline{1, n}.$$

Рівноважні значення цін в економічній системі отримаємо, розв'язавши систему рівнянь

$$p_j = \sum_{k=1}^t \left( a_{kj} + \frac{b_{kj} - b_{kj}^1}{x_j^0} + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right) \hat{p}_k + \sum_{k=t+1}^n \left( a_{kj} + \frac{b_{kj} - b_{kj}^1}{x_j^0} + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right) p_k^0, \quad j = \overline{1, t}, \quad (31)$$

Припустимо, що норма невід'ємної матриці  $\mathcal{H}(y^M)$  менша за

одиницю, де  $\mathcal{H}(y) = \left\| a_{kj} + \frac{1}{x_j^0} b_{kj} - \frac{1}{x_j^0} b_{kj}^1 + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right\|_{k,j=1}^t$ . У цьому випадку

можна записати аналітичний вираз розв'язку системи рівнянь (31):

$$p_s = p_s(y), \quad p_s(y) = \sum_{j=1}^t (E - \mathcal{H}(y))_{js}^{-1} \sum_{k=t+1}^n \left[ a_{kj} + \frac{1}{x_j^0} b_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right] p_k^0, \quad s = \overline{1, t}. \quad (32)$$

Завдяки умовам на матрицю  $\mathcal{H}(y)$  справедливий розклад [5]

$$(E - \mathcal{H}(y))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}^j(y), \quad s = \overline{1, t},$$

тому, якщо наявна функціональна залежність елементів матриці попиту  $C$  від деякої характеристики  $z^0$ , вона не втратиться і у виразі (32).

Той чи інший стан рівноваги можна реалізувати вибором стратегії оподаткування, зокрема вибором значень рівнів оподаткування монополістів. Відповідно до виразу (8) матимемо

$$\pi_j(x, y) = \frac{\sum_{s=1}^t c_{sj} y_j p_s(y) + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} y_j p_s^0}{p_j^0 x_j - \sum_{k=1}^t (a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1) p_k(y) - \sum_{k=t+1}^n (a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1) p_k^0}, \quad j = \overline{t+1, n}.$$

Насамкінець звернемо увагу, що для кожної з рівноважних характеристик є змога вказати інтервал усіх їх можливих значень. Для ступенів задоволення потреб споживачів це  $[y^m, y^M]$ ;  $i$ -та компонента вектора обсягів випуску товарів монополістів міститиметься в діапазоні від  $x_i^m = x_i(y^m)$

до  $x_i^M = x_i(y^M)$ , ціна на  $i$ -й товар міститиметься в інтервалі  $[p_i(y^m), p_i(y^M)]$ , а рівні оподаткування  $i$ -го монополіста змінюватимуться в межах області  $[\pi_i(x^M, y^m), \pi_i(x^m, y^M)]$ .

## ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження запропоновано алгоритм визначення станів рівноваги економічної системи із заданим інтервалом значень рівноважних характеристик. Ураховано наявність в економічній системі виробників-монополістів, а також те, що споживачі є ненасичуваними. Особливості алгоритму пов'язані з можливістю врахування дії додаткових чинників впливу на формування споживчих уподобань. Запропоновані раніше алгоритми визначення станів рівноваги економічної системи за наявності монополістів [1, 6, 7] не дають такої можливості. Використане наближення моделі економіки з постійними інтересами споживачів передбачає, що елементи матриці попиту  $c_{ki}$ , які описують споживчі уподобання суб'єктів економічної системи, є постійними. Запропонований тут алгоритм може бути використаний не тільки для цього наближення, а й у разі, коли це наближення буде узагальнене на випадок залежності споживчих коефіцієнтів  $c_{ki}$  від деякої економічної характеристики  $z^0$ ,  $c_{ki} = c_{ki}(z^0)$ .

Алгоритм дає змогу визначити характеристики стану рівноваги економічної системи, перебування в якому дозволить суб'єктам економічної системи функціонувати в прийнятному для них режимі, уникнувши тим самим негативної дії монопольних явищ. Указано інструменти реалізації таких станів рівноваги.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гончар М.С. Математичні основи інформаційної економіки / М.С. Гончар. — К.: Ін-т теор. фізики, 2007. — 464 с.
2. Debreu G. Existence of competitive equilibrium / G. Debreu // Handbook of Mathematical Economics, ed. By K.J. Arrow and M.D. Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. — Vol. II. — P. 698–742.
3. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 442 с.
4. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
6. Гончар М.С. Вплив монополізму та оподаткування на економічну систему / М.С. Гончар, А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 1. — С. 77–99.
7. Махорт А.Ф. Оптимизация негативных влияний монополизма на состояние экономической системы / А.Ф. Махорт // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 146–153.

Надійшла 25.05.2016

## ИНТЕГРИРОВАННАЯ СИСТЕМА АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.С. ГАСАНОВ

**Аннотация.** Предложена интегрированная система анализа и прогнозирования нестационарных временных рядов с целью повышения адекватности разрабатываемых моделей нестационарных процессов и качества оценок прогнозов, а также методика моделирования нестационарных процессов, состоящая из подготовки данных, оценивания структуры и параметров модели, вычисления оценок прогнозов. Приведены примеры использования этой системы для анализа и прогнозирования образования цен на продукцию производственной фирмы и прогнозирования финансовых процессов. Полученные результаты свидетельствуют о том, что интегрированная система анализа, моделирования и прогнозирования нестационарных процессов выполняет автоматизированную обработку данных, определяет автоматически класс и структуру модели, осуществляет выбор лучших прогнозирующих моделей.

**Ключевые слова:** анализ и прогнозирование, нестационарный процесс, интегрированная система, методика моделирования, временной ряд, повышение точности прогноза, адекватная модель.

Многие процессы, протекающие в различных сферах деятельности, характеризуются нелинейностью, нестационарностью, неопределенностью. Основные виды нестационарностей — переменная во времени дисперсия и тренд. Нелинейность, нестационарность и неопределенность значительно затрудняют построение математических моделей исследуемых объектов с целью их углубленного анализа, а существующие информационные системы не обеспечивают в должной мере качество и эффективность их исследования. Системы анализа и прогнозирования имеют следующие недостатки: высокую стоимость, низкое быстродействие вследствие универсальности вычислительных процедур, недостаточную точность прогноза; для их сопровождения требуются дополнительные затраты.

**Актуальность** создания интегрированной системы анализа и прогнозирования нестационарных процессов заключается в следующем: большинство современных финансово-экономических процессов имеют нестационарный характер и могут быть нелинейными (например, гетероскедастичность всегда сопровождается нелинейностью); отсутствуют системы автоматизированной обработки данных, которые могли бы обеспечить построение адекватной модели, а также вычисления краткосрочных и среднесрочных прогнозов приемлемого качества; некоторые системы имеют функции автоматизированной обработки данных, но они не приемлемы для использования из-за высокой стоимости (например, SAS имеет множество автоматизированных приложений).

Таким образом, существует необходимость комбинированного использования статистических методов и методов интеллектуального анализа дан-

ных с целью повышения качества прогноза, а также создания удобных интерфейсов, способных обеспечивать длительную работу оператора и адаптироваться к характеристикам пользователей различного уровня; существует необходимость быстрого расширения функциональных возможностей моделирующих систем для введения новых методов оценивания структуры и параметров моделей и вычисления оценок прогнозов, в том числе комбинированных.

Указанные обстоятельства определяют целесообразность создания интегрированной системы анализа и прогнозирования (ИСАП) нестационарных процессов.

Цель работы — изложение принципов построения архитектуры ИСАП, ее основных методов и алгоритмов, а также практических примеров, иллюстрирующих ее возможности.

## **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Существует проблема создания системы, которая обеспечит решение задач анализа, моделирования и прогнозирования нестационарных процессов (НП) с высокой точностью, удобством и уменьшением затрат на подготовку исходных данных и их обработку.

Для этого необходимо: разработать методологию построения моделей на основе статистических данных; развить и использовать методы прогнозирования нестационарных временных рядов; осуществить интеграцию предложенных моделей, методов и программных средств для решения задач анализа, моделирования и прогнозирования НП; применить разработанную ИСАП к анализу, моделированию и прогнозированию реальных процессов и поддержки принятия решений на основе оценок прогнозов.

В предлагаемой ИСАП анализируются следующие типы процессов: линейные стационарные и нестационарные процессы; нелинейные нестационарные процессы.

Для класса НП временной ряд соответствует некоторому распределению

$$\{y(k)\} \sim R(\mu, \sigma_y^2), \quad (1)$$

где  $R$  — тип распределения (класс нормальных, эллиптических и других распределений);  $\mu$  — параметр среднего;  $\sigma_y^2$  — параметр дисперсии;

$$\mu = f_\mu(\theta_\mu, k^p, \varepsilon_\mu) \neq \text{const}, \quad k \in [0, N], \quad (2)$$

где  $p$  — порядок полинома, описывающего тренд;  $\theta_\mu$  — параметры полинома.

Дисперсию  $\sigma_y^2$  можно представить в следующем виде:

$$\sigma_y^2 = f_\sigma(\theta_\sigma, k, x, \varepsilon_\sigma) \neq \text{const}, \quad k \in [0, N], \quad (3)$$

где  $\theta_\sigma$  — параметры модели, описывающей дисперсию;  $k$  — время;  $x$  — независимые переменные, влияющие на дисперсию;  $\varepsilon_0$  — случайный процесс в модели дисперсии;  $N$  — длина выборки данных.

Для процессов (1)–(3) необходимо построить адекватные модели в автоматизированном режиме в таких классах:

$$y(k) = F[y(k-1), x^P(k), \theta, \varepsilon(k)],$$

где  $F$  — нелинейный оператор. Для авторегрессии со скользящим средним (АРСС) можно записать  $A(q)y(k) = a_0 + B(q)\varepsilon(k)$ , где  $A, B$  — полиномы относительно оператора запаздывания.

### АРХИТЕКТУРА СИСТЕМЫ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НП

Архитектура разработанной системы для комплексного анализа НП показана на рис. 1.

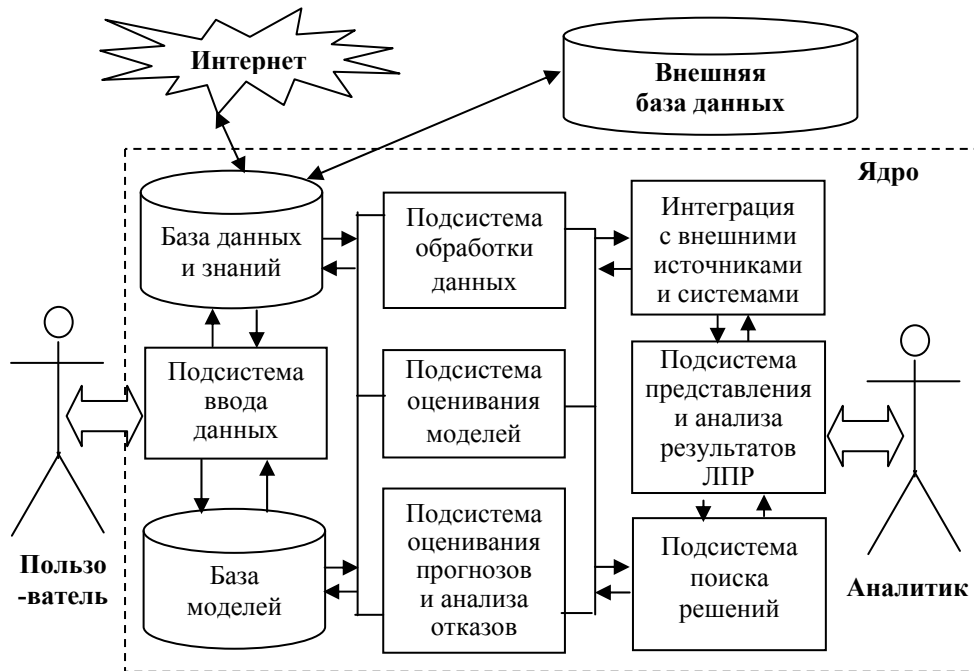


Рис. 1. Архитектура системы для комплексного анализа НП

Архитектура системы включает ядро системы и все подсистемы, обеспечивающие анализ, моделирование и прогнозирование НП. Как видно из рисунка, пользователем является лицо принимающее решение (ЛПР), которое может вмешиваться в процесс анализа или использовать систему в различных режимах, в том числе в автономном режиме.

Схемы алгоритма для принятия решений при анализе НП в ИСАП для линейного и нелинейного случаев представлены на рис. 2 и 3. Как видно из рисунков, после съема информации и предварительной обработки выполняется тестирование на нелинейность.

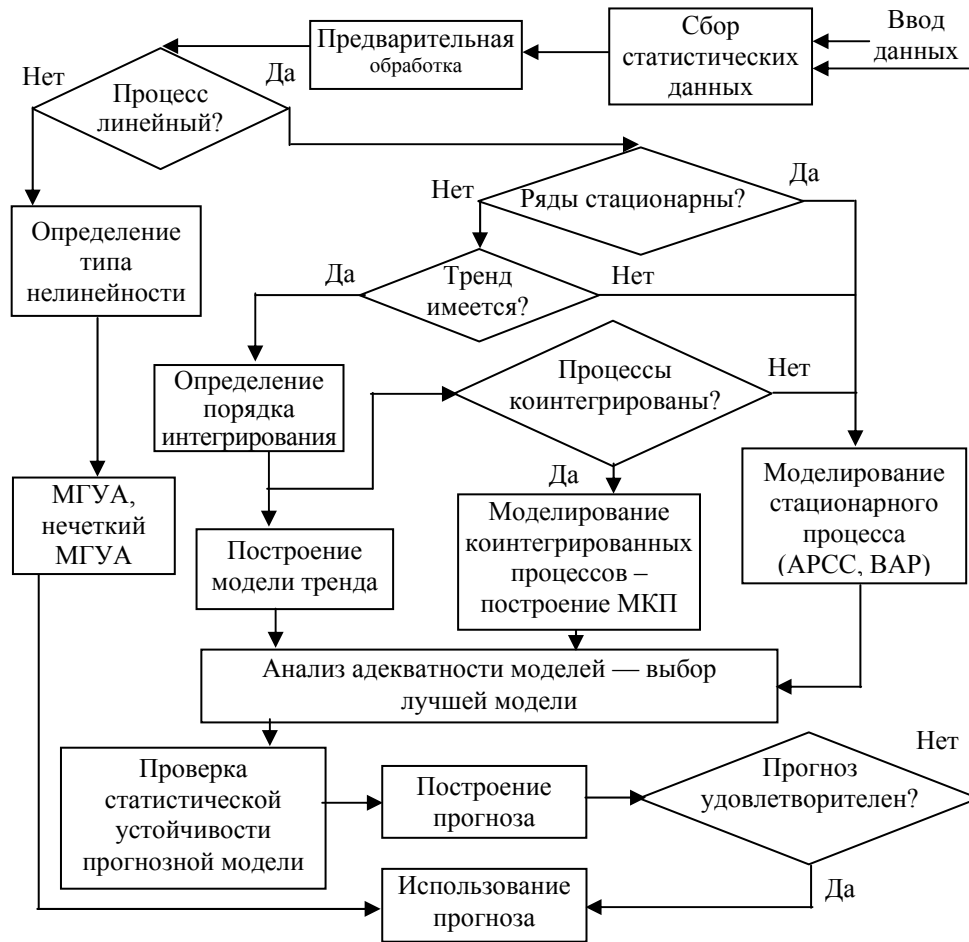


Рис. 2. Схемы алгоритмов принятия решений при анализе НП в ИСАП для линейного случая

Статистическое тестирование данных является важной процедурой, позволяющей выбрать класс моделей для их дальнейшего построения, анализа адекватности и выбора лучшей модели и прогнозирования процесса с целью принятия решения.

Если процесс нелинейный, то в дальнейшем подбирается соответствующая нелинейная модель, адекватная нелинейному процессу. Например, известно, что для механических систем характерным является наличие нелинейностей типа люфт и трение. При построении регрессионных моделей чаще всего возникают нелинейности относительно переменных и нелинейности относительно параметров. После предварительной обработки и анализа на нелинейность выполняется анализ рядов на стационарность.

Если при тестировании выявлено, что ряды стационарны, то производится моделирование стационарности процесса авторегрессионными или другими моделями (как, например, АРСС, векторной авторегрессией (ВАР)). В противном случае данные тестируются на наличие детерминированного или стохастического тренда.

Если тренд отсутствует, то процесс является гетероскедастическим. Он моделируется с помощью уравнений авторегрессии с условной гетероскеда-

стичностью (АРУГ) или их обобщенной формой (ОАРУГ). Если тренд имеется, то ряды тестируются на коинтегрированность с целью построения модели корректировки погрешности (МКП).



Рис. 3. Схемы алгоритмов принятия решений при анализе НП в ИСАП для нелинейного случая

Если ряды не коинтегрированы, то известными методами удаляется тренд для моделирования стационарности процесса с помощью АРСС, VAR и других моделей.

В последнее время при анализе финансово-экономических и других данных часто рассматриваются два типа моделей — коинтеграционная модель и модель АРУГ с обобщенной ее формой — ОАРУГ. Последняя модель определяет условную дисперсию как линейную комбинацию предыдущих квадратов остатков из уравнения условной средней и лагов предыдущих значений условной дисперсии. Используя соответствующие статистические критерии, из банка моделей и алгоритмов извлекаются требуемые модели и анализируются (сравниваются по основным параметрам) с целью выбора наилучшей. Такая последовательность является характерной и обязательной также для анализа гетероскедастического и коинтеграционного процессов и позволяет в конечном итоге получить новые модели для принятия решения.

Дальнейшим развитием такого обоснованного системного подхода является комплексный анализ, т. е. построение ИСАП несколькими взаимодействующими пакетами программ: Matlab, EvIEWS, МГУА и нечеткого МГУА. Для этого использованы несколько приложений (программных



сред), обеспечивающих взаимодействие различных систем и представляющие собой интегрирующую среду для обеспечения анализа НП с высокой эффективностью и комфортностью.

В ИСАП для анализа и прогнозирования НП разработаны и реализованы следующие новые модели.

1. Модель для выявления отказов в технических системах. Для этого используется подход, который заключается в построении модели в пространстве состояний, вычислении соотношения правдоподобия, получении прогноза на один шаг с помощью фильтра Калмана. За счет комбинированного использования модели в пространстве состояния, фильтра Калмана и соотношения правдоподобия достигается выигрыш по быстродействию и точности в случае прогнозирования и оценивания состояний системы в сравнении с экспертным подходом.

2. Многомерная оригинальная модель для оценки доходности на предприятии по производству пищевой продукции, которая состоит из трех отдельных моделей: модели для прогнозирования цены на сельскохозяйственную продукцию; модели для дисперсии цены и модели доходности.

3. Модель инфляции на базе статистических данных, обеспечивающая высокое качество прогноза и имеющая относительную простоту.

4. Модифицированные модели валового внутреннего продукта (ВВП) и налога на добавочную стоимость (НДС). Для выбранных процессов ВВП и НДС по известной методике построена коинтеграционная модель.

Приведенные примеры построения прогнозных моделей и методы, которые на них основываются, реализованы в рамках ИСАП в виде отдельных модулей. Объединение этих модулей, а также модулей тестирования процессов, модулей анализа качества моделей и прогнозов в единую систему позволяет сократить сроки анализа НП и повысить его эффективность.

Особую трудность представляет построение систем для анализа нелинейных, нестационарных динамических процессов. В связи с этим предлагается такая последовательность выполнения процедур анализа и прогнозирования НП. Данные для нестационарного процесса (гетероскедастического, интегрированного и коинтеграционного) необходимо обработать с помощью моделирующего комплекса, определить тип нестационарности, построить соответствующую лучшую модель, выполнить прогноз развития процесса, оценить качество прогноза и отобразить результаты для принятия окончательного решения экспериментатором [1, 2].

## **ПРИМЕНЕНИЕ ИСАП ДЛЯ ЗАДАЧ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НП**

Рассмотрим примеры анализа выбранных процессов.

**Пример 1.** Анализ и моделирование образования цен на продукцию производственной фирмы.

Предложенная методика моделирования гетероскедастических процессов использована при анализе и моделировании образования цен на продукцию производственной фирмы.

Схема с входными и выходными переменными производственной фирмы, производящей пищевую продукцию, показана на рис. 4.

Здесь  $q(k)$  — прибыль фирмы (дебитора) в момент времени  $k$ ;  $p^c(k)$  — ожидаемая цена продукции фирмы в момент  $k$ , полученная на основе информации в момент времени  $(k-1)$ , т.е.  $p^c(k) = E_{k-1}[p(k)]$ ;  $h(k)$  — ожидаемая условная дисперсия цены на продукцию фирмы в момент  $k$ , которая определяется на основе информации на момент времени  $(k-1)$ ;  $pp(k-1)$  — затраты на производство единицы продукции в момент  $(k-1)$ ;  $p(k-1)$  — цена продукции в момент времени  $(k-1)$ ;  $\varepsilon(k)$  — случайные возмущения, влияющие на доход фирмы.

Для описания прибыли получена следующая модель:

$$q(k) = a_0 + a_1 p^c(k) + a_2 h(k) + a_3 pp(k-1) + a_4 p(k-1) + a_5 q(k-4) + \varepsilon_1(k). \quad (4)$$

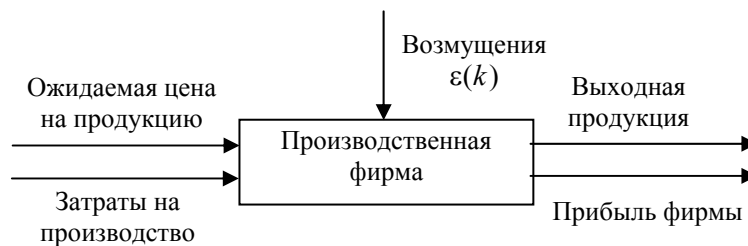


Рис. 4. Входные и выходные переменные

Данные измеряются один раз в квартал. Для вычисления  $p^c(k)$  и  $h(k)$  строятся отдельные модели;  $pp(k-1)$  — берутся затраты на производство единицы продукции за предшествующий квартал и вводятся со знаком минус «-»;  $p(k-1)$  — берется значение цены со знаком «-», поскольку прибыль возрастает;  $q(k-4)$  берется значение прибыли с запаздыванием 4, чтобы учесть этот же квартал предшествующего года.

В этой модели важно учесть влияние условной дисперсии цены продукции на прибыль фирмы. Переменная  $p^c(k)$  оценивается на основе цены в предшествующем квартале. Если цена изменяется довольно быстро, то производитель, избегая риска, стремится снизить объем производства.

Рассмотрены два подхода для прогнозирования цены.

В первом подходе для прогноза уровня цены на продукцию использована модель четвертого порядка:

$$(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \beta_3 L^3 - \beta_4 L^4) p(k) = \beta_0 + \varepsilon_2(k). \quad (5)$$

Модель цены после оценивания ее параметров имеет вид:

$$(1 - 0,51L - 0,13L^2 - 0,13L^3 - 0,14L^4) p(k) = 1,63 + \varepsilon_2(k). \quad (6)$$

Теперь предположим, что  $p^c(k) = p(k)$ . В результате подстановки  $p^c(k)$  в равенство (5) получим уравнение для дисперсии цены на продукцию:

$$h(k) = 1,35 + 0,16\varepsilon_2^2(k-1) + 0,59h(k-1); \quad (7)$$

$$(1 - 0,51L - 0,13L^2 - 0,13L^3 - 0,14L^4) p(k) = 1,63 + \varepsilon_2(k). \quad (8)$$

Значения, вычисленные по формулам (7) и (8), подставляем в выражение (4) для оценки прибыли.

Для получения  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_5$  в уравнении (4) необходимо иметь пять рядов переменных. Окончательно модель для оценки прибыли имеет вид:

$$q(k) = 2,77 p^e(k) - 0,52 h(k) + 4,33 pp(k-1) + 1,89 p(k-1) + 0,6 q(k-4) + \varepsilon_1(k). \quad (9)$$

Коэффициент  $p^e(k) - 0,52$  означает, что если ожидается рост цен, то прибыль увеличивается;  $h(k) + 4,33 pp(k-1) + 1,89 p(k-1)$  — колебания цен, затраты уменьшают прибыль;  $0,60 q(k-4) + \varepsilon_1(k)$  — положительный фактор.

Как видно из уравнения регрессии (9) коэффициент при первом члене показывает, что цена, ожидаемая в первом квартале на продукцию, сильно влияет на прибыль. Колебание цены, которое характеризуется ожидаемой условной дисперсией  $h(k)$ , меньше влияет на прибыль; сильно влияют на прибыль затраты  $pp$  на единицу продукции; существенно влияет цена на продукцию и незначительно сезонный эффект;  $\varepsilon(k)$  — случайные возмущения (например, колебание цены), которые в основном отрицательно влияют на доходность.

Второй подход к прогнозу цены базируется на известном выражении для скользящего среднего  $p^e(k) = \alpha p(k-1) + (1-\alpha)p(k-1)$  и  $p^e(k) = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i p(k-1-i)$ . По аналогии с этим уравнением можем записать уравнение для дисперсии погрешностей прогнозируемой цены:

$$h(k) = \beta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)^i [p(k-1-i) - p^e(k-1-i)]^2, \quad 0 < \beta < 1,$$

где  $[p(k-1-i) - p^e(k-1-i)]^2$  — дисперсия ожидаемой цены на один период. Очевидно, что второй подход является формальным (не связанным с входными данными).

Качество моделей по производству пищевой продукции для ожидаемой цены на продукцию фирмы  $p(k)$ , для условной дисперсии цены  $h(k)$  на продукцию фирмы и для текущей прибыли  $q(k)$  по производству пищевой продукции следующее.

1. Для ожидаемой цены на продукцию фирмы  $p(k)$  в момент  $k$  ( $N = 24$  — кварталы данных за шесть лет) получены статистические характеристики модели:  $R^2 = 0,86$ ;  $\sum e^2 = 23,18$ ;  $DW = 2,03$ . Характеристики одношагового прогноза:  $СКО = 18,93$ ;  $САПП = 1,07$ ;  $U = 0,0075$ , где  $СКО$  — среднеквадратическая ошибка;  $САПП$  — средняя абсолютная погрешность в процентах.

2. Для условной дисперсии цены  $h(k)$  на продукцию фирмы в момент  $k$  получены следующие статистические характеристики модели:  $R^2 = 0,69$ ;  $\sum e^2 = 35,12$ ;  $DW = 1,87$  и характеристики одношагового прогноза:  $СКО = 21,45$ ;  $САПП = 2,36$ ;  $U = 0,031$ .

3. Для текущей прибыли  $q(k)$  по производству пищевой продукции получены характеристики модели:  $R^2 = 0,96$ ;  $\sum e^2 = 128,96$ ;  $DW = 1,98$  и характеристики одношагового прогноза:  $СКО=87,53$ ;  $САПП=1,28$ ;  $U = 0,015$ .

**Пример 2.** Прогнозирование финансовых процессов. Одним из определяющих макроэкономических процессов является процесс инфляции [3–5]. Для моделирования процесса инфляции выбраны следующие макроэкономические показатели: индекс потребительских цен и объем денежной массы.

**Формальная постановка задачи.** Даны последовательность измерений случайной входной переменной  $m(k)$  — прирост денежной массы и переменная  $p(k)$  (индекс потребительских цен) на временном интервале  $k \in [0, N]$ . Необходимо построить дискретную математическую модель АРСС( $p, q$ ):

$$p(k) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i p(k-i) + \sum_{j=1}^q \gamma_j m(k-j) + \varepsilon(k), \quad (10)$$

где  $\varepsilon(k)$  предполагается некоррелированный нормально распределенный процесс с постоянной дисперсией и нулевым средним, т.е.

$$\{\varepsilon(k)\} \sim N_N[0, \sigma_\varepsilon^2], \quad \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}. \quad (11)$$

Задача оценивания и анализа регрессионных моделей решена с помощью моделей, представленных в работах [1–5]. В результате выполнения анализа регрессионных моделей для управления выберем как наиболее адекватную процессу стохастическую авторегрессионную модель второго порядка:  $p(k) = a_0 + a_1 p(k-1) + a_2 p(k-2) + \gamma_1 m(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k)$ , где  $p(k)$  — индекс потребительских цен в момент  $k$ ;  $m(k)$  — объем денежной массы в момент  $k$ ;  $\varepsilon(k)$  — случайная компонента с нулевым средним, обусловленная неучтенными регрессорами и возмущениями. Таким образом, необходимо определить структуру и вектор параметров  $\hat{\theta} = [\hat{a}_0 \ \hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_p \ \hat{\gamma}_1 \ \dots \ \hat{\gamma}_q]^T$  модели (10) при условии (11).

Возмущениями в данном случае являются случайные воздействия на цены в виде нерегулярных потоков импорта, утечки капитала, нестабильности законодательства;  $a_0, a_1, a_2, \gamma_1, \beta_1$  — коэффициенты, определенные на основании статистических данных для индекса потребительских цен  $p(k)$ .

Предположим, что объем денежной массы определяется выражением  $m(k) = \bar{m} + u(k)$ , где  $\bar{m}$  — среднее значение объема денежной массы, а  $u(k)$  — приращение денежной массы, используемое как управляющее воздействие.

Тогда получаем уравнение

$$p(k) = a'_0 + a_1 p(k-1) + a_2 p(k-2) + \gamma_1 u(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k),$$

которое можно также представить в виде

$$p(k+2) - a_1 p(k+1) - a_2 p(k) = a'_0 + \gamma_1 u(k+1) + \beta_1 \varepsilon(k+2), \quad (12)$$

где  $a'_0 = a_0 + \gamma_1 \bar{m}$ .

Для нахождения частного решения уравнения (12) воспользуемся методом вариации параметров, известной в литературе как метод Лагранжа вариации постоянных. Частное решение ищем в виде:

$$p_p(k) = \mu_1(k)r_1^k + \mu_2(k)r_2^k. \quad (13)$$

Для нахождения  $\mu_1(k)$  и  $\mu_2(k)$  требуются два условия. Одно из них состоит в том, что уравнение (13) должно удовлетворять уравнению (12). Второе условие выбирается из равенства

$$r_1^{k+1} \Delta \mu_1(k) + r_2^{k+1} \Delta \mu_2(k) = 0,$$

где  $\Delta \mu_i(k) = \mu_i(k+1) - \mu_i(k)$ . Подставляя правую часть равенства (13) в формулу (12), получаем общее решение в виде:

$$p(k) = C_1 r_1^k + C_2 r_2^k + \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k-1} [r_2^n - r_1^n] u(k-n) + \frac{\beta_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k-1} [r_2^n - r_1^n] \varepsilon(k-n+1), \quad (14)$$

где  $C_1, C_2$  – константы, которые определяются из начальных условий. Используя начальные условия  $p(0), p(1)$ , получаем значения неизвестных констант. Следовательно, общее решение уравнения (14) принимает вид

$$p(k) = \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k-1} [r_2^n - r_1^n] u(k-n) + \frac{\beta_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{k-1} [r_2^n - r_1^n] \varepsilon(k-n+1) + \frac{r_1 r_2 [r_2^{k-1} - r_1^{k-1}]}{r_2 - r_1} \left[ p(0) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{r_2^k - r_1^k}{r_2 - r_1} \left[ p(1) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right].$$

Полученное решение удобно использовать для прогнозирования процесса инфляции. Прогнозируемое значение на  $s^*$  периодов дискретизации данных при  $|a_1| < 1$  можно записать как

$$p(k+s) = \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{s^*} [r_2^n - r_1^n] u(k+s^*-n) + \frac{r_1 r_2^{s^*} - r_2 r_1^{s^*}}{r_2 - r_1} \left[ p(k-1) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{r_2^{s^*} - r_1^{s^*}}{r_2 - r_1} \left[ p(k) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{\beta_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{s^*} [r_2^n - r_1^n] \varepsilon(k+s^*-n+1),$$

где  $p(k-1), p(k)$  — начальные условия относительно  $k$ -го момента времени.

Функция прогнозирования на  $s^*$  шагов имеет вид:

$$\hat{p}(k + s^*) = E_k[p(k + s^*)] = \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{s^*} [r_2^n - r_1^n] u(k + s^* - n) + \frac{r_1 r_2^{s^*} - r_2 r_1^{s^*}}{r_2 - r_1} \left[ p(k-1) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{r_2^{s^*} - r_1^{s^*}}{r_2 - r_1} \left[ p(k) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right]. \quad (15)$$

Используя уравнение (15), можно записать функцию прогнозирования на несколько шагов. Например,

$s^* = 1$  :

$$\hat{p}(k + 1) = E_k[p(k + 1)] = \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \gamma_1 u(k),$$

$s^* = 2$  :

$$\hat{p}(k + 2) = \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \{ [r_2 - r_1] u(k + 1) + [r_2^2 - r_1^2] u(k) \} + \frac{r_1 r_2^2 - r_2 r_1^2}{r_2 - r_1} \left[ p(k-1) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \left[ p(k) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right],$$

$s^* = 3$  :

$$\hat{p}(k + 3) = \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} + \frac{\gamma_1}{r_2 - r_1} \{ [r_2 - r_1] u(k + 2) + [r_2^2 - r_1^2] u(k + 1) + [r_2^3 - r_1^3] u(k) \} + \frac{r_1 r_2^3 - r_2 r_1^3}{r_2 - r_1} \left[ p(k-1) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} \left[ p(k) - \frac{a'_0}{1 - a_1 - a_2} \right].$$

Простота модели и высокая степень ее адекватности позволяют использовать ее для прогнозирования инфляции с приемлемой точностью на один и более число шагов.

## ВЫВОДЫ

1. В работе предложен новый подход, заключающийся в интеграции методов и программных средств для реализации интегрированной системы и позволяющий обеспечить поддержку решений пользователя в процессе решения задач анализа НП, построения и исследования прогнозирующих моделей в автоматизированном режиме.

2. Разработана методология построения моделей для прогнозирования нестационарных технических, экономических и финансовых процессов, которая обеспечивает требуемую адекватность моделей процессам и необходимое качество прогнозов.

3. Построена двумерная модель доходности производства пищевой продукции с учетом динамики ценообразования и дисперсии цены, которая обеспечивает высокую точность прогнозирования дохода и отличается высокой адекватностью.

4. Создана интегрированная система анализа, моделирования и прогнозирования нестационарных процессов, которая выполняет автоматизированную обработку данных, автоматически определяет класс и структуру модели, осуществляет выбор лучших прогнозирующих моделей.

Разработанная автоматизированная система анализа, моделирования и прогнозирования НП позволяет ускорить разработку и использование прогнозирующих моделей по сравнению с аналогами в 2 – 3 раза и обеспечить ошибку прогнозирования на уровне 3 – 10 %.

Интегрированная система внедрена в ряде отраслей, Национальной академии наук Украины, университетах Министерства образования и науки Украины для решения актуальных прикладных задач моделирования и прогнозирования нестационарных временных рядов.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Гасанов А.С.* Анализ точности интегрированной обработки данных на примерах нестационарных процессов / А.С. Гасанов, П.И. Бидюк, А.Н. Терентьев // Вісник ЛНУ імені Тараса Шевченка. — 2010. — № 22 (209). — С. 25–40.
2. *Гасанов А.С.* Мультиагентная информационная система анализа, моделирования и прогнозирования нелинейных нестационарных процессов / А.С. Гасанов, С.Г. Абдуллаев, Н.А. Мурга // Problems of information technology. — 2014. — Vol 1. — P. 81–91.
3. *Зайченко Ю.П.* Сравнительный анализ методов прогнозирования макроэкономических показателей Украины / Ю.П. Зайченко, А.С. Гасанов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 1. — С. 67–78.
4. *Бідюк П.І.* Моделювання інфляційних процесів / П.І. Бідюк, І.В. Баклан, А.С. Гасанов // 36. наук. праць Національної академії ДПС України. — 2004. — № 4(26). — С. 59–67.
5. *Льюис К.Д.* Методы прогнозирования экономических показателей / К.Д. Льюис; пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 133 с.

*Поступила 15.09.2016*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА  
И УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОСНОВЫ  
С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ВЫЕМКОЙ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ**

**В.С. КИРИЛЮК, О.И. ЛЕВЧУК**

**Аннотация.** Развита математическая модель контакта при сжатии электроупругого полупространства с упругой изотропной основой, содержащей пологую выемку кругового сечения. Модель базируется на рассмотрении связанной системы уравнений электроупругости. Предложены два алгоритма решения проблемы, основанные на представлении решений уравнений электроупругости. Найдено аналитическое решение задачи, определены геометрические размеры зазора между электроупругим полупространством и деформируемой основой при известных сжимающих усилиях. Для ряда пьезоэлектрических материалов на основе математического моделирования проведены числовые исследования контактного взаимодействия. Изучено влияние связанности силовых и электрических полей на параметры контакта тел. Выявлены характерные механические эффекты.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, связанная система уравнений электроупругости, пьезоэлектрическое полупространство, упругая изотропная основа, пологая осесимметричная выемка, два алгоритма решения, параметры контакта, влияние связанности полей.

**ВВЕДЕНИЕ**

Возрастающее применение электроупругих (пьезоэлектрических) материалов при создании различных типов датчиков, преобразователей энергии и элементов измерительных приборов стимулирует интерес к исследованию распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1–6]. Для увеличения прочности пьезоэлементов в инженерной практике также используются биматериалы, состоящие из электроупругих компонентов и более жестких металлических элементов. Однако при изучении пространственных задач для пьезоэлектрических тел или пьезоэлектрических элементов комбинированных тел возникают значительные затруднения математического характера, вызванные необходимостью решения граничных задач для связанной системы уравнений электроупругости. Наряду с многочисленными исследованиями в области контактных задач упругости рассмотрению статических контактных



задач электроупругости для пьезоэлектрических тел в строгой постановке (с учетом связанности силовых и электрических полей) посвящены только отдельные работы [4–6] и др.

Задачи контактного взаимодействия для упругих изотропных тел с приповерхностными выемками кругового и эллиптического сечения рассматривались в работах [7–9]. Однако моделирование контактного взаимодействия для электроупругого тела является задачей значительно более сложной по самому объекту исследований, чем моделирование взаимодействия упругих изотропных тел. В случае электроупругого (пьезоэлектрического) тела необходимо решать систему из четырех связанных уравнений электроупругости, в которую входят десять независимых постоянных, характеризующих электроупругие свойства пьезоэлектрического материала, в то время, как упругие свойства изотропного материала зависят только от двух упругих постоянных, и система уравнений упругости содержит только три уравнения значительно более простой структуры. Ведь в этом случае приходится полностью пренебречь анизотропией упругих и электрических свойств материала и связанностью силовых и электрических полей.

В работе на основе математического моделирования, которое учитывает связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, изучено контактное взаимодействие системы «упругая изотропная основа с выемкой – электроупругое полупространство» при сжатии. При постановке задачи предполагается, что поверхность раздела двух тел, входящих в систему, расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала. Предполагается также, что поверхность выемки нагружена давлением  $P_0$ , и в контактной области осуществляется гладкий (без трения) контакт. Предложены два алгоритма решения задачи, основанные на представлении решения статических уравнений электроупругости посредством гармонических функций. Получено замкнутое решение математической задачи, найдены параметры контактного взаимодействия тел (геометрические размеры зазора между телами при сжатии, значение сжимающих усилий, полностью закрывающих зазор). Из найденного на основе математической модели решения задачи следуют соответствующие параметры контакта системы «упругая изотропная основа с выемкой – упругое трансверсально-изотропное полупространство», а также параметры контакта упругого изотропного полупространства с упругой основой [7].

## **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Рассмотрим контактное взаимодействие пьезоэлектрического полупространства (рис. 1, 1) с упругой изотропной основой (рис. 1, 2), содержащей пологую осесимметричную выемку (под внутренним давлением  $P_0$ ), форма которой описывается аналитическим выражением

$$f(r) = h_0(1 - r^2/b^2)^{3/2}, \quad r \leq b, \quad (h_0 \ll b). \quad (1)$$

Полагаем, что плоскость контакта является плоскостью изотропии трансверсально-изотропного электроупругого материала и на поверхности полупространства отсутствует электродное покрытие, т.е. она является неэлектродированной. Считаем также, что к телам приложены сжимающие

усилия  $p$  и реализуется гладкий (без трения) контакт. Из-за наличия выемки в упругой основе контакт между телами осуществляется лишь по части поверхности  $z=0$  (при  $r > a$ ), где  $a$  — неизвестный радиус области контакта (рис. 1). Значение радиуса  $a$  зависит от сжимающих усилий  $p$  и давления  $P_0$ , геометрии первоначальной выемки, упругих свойств основы и электроупругих свойств полупространства. Дополним функцию  $f(r)$  согласно выражению (1) нулевым значением в области  $r > b$ , имеем

$$f(r) = \begin{cases} h_0(1-r^2/b^2)^{3/2}, & r \leq b, \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

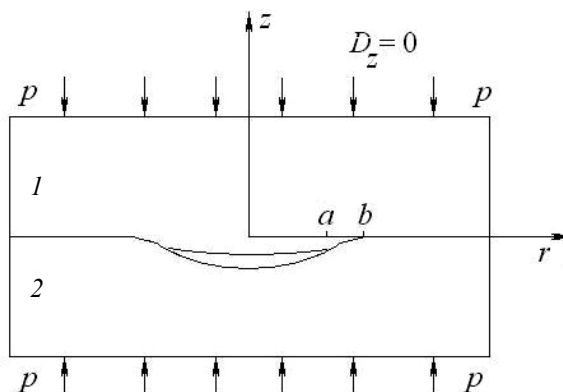


Рис. 1. Контактное взаимодействие упругой основы с полупространством

На поверхности раздела (в плоскости  $z=0$ ) с помощью обозначения (2) приходим к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(i)} &= -P_0, \quad 0 < r < a; \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} + f(r), \quad a < r < \infty \quad (i=1,2); \\ \sigma_{zr}^{(i)} &= 0, \quad 0 < r < \infty; \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad a < r < \infty, \quad (i=1,2); \\ D_z^{(1)} &= 0, \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $D_z$  — компонента вектора электрической индукции, а индексы «1» и «2» соответствуют первому и второму телам. Заметим, что условия (3) по электрическому состоянию соответствуют случаю неэлектропроводной поверхности электроупругого полупространства.

При рассмотрении задачи сформулируем условия гладкости смыкания берегов выемки, которым удовлетворяет форма исходной выемки  $f(r)$  (согласно формулам (2)) и форма выемки (обозначим ее  $f_1(x_1, x_2)$ ), полученная в результате контактного взаимодействия

$$\partial f_1(x_1, x_2) / \partial x_1 = \partial f_1(x_1, x_2) / \partial x_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \in L,$$

где  $L$  — контур новой выемки. Отметим, что эти условия ранее были введены в работе [8] при рассмотрении задач контактного взаимодействия для упругих изотропных тел, содержащих приповерхностные выемки.

Далее воспользуемся суперпозицией двух состояний, первое из которых — сжатие вдоль оси  $Oz$ , т.е.  $\sigma_{zz} = -p$ ,  $D_z = 0$  (в электроупругом полупространстве). Отметим, что в п'єзоелектрическом теле вследствие связанности силовых и электрических полей компонента напряженности электрического поля  $E_z \neq 0$ , а соответствующая компонента электрической индукции  $D_z$  равна нулю. При удалении от области контактного взаимодействия имеем

$$\sigma_{zz}^{(i)} \rightarrow -p, D_z^{(1)} \rightarrow 0, \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (i=1,2) \text{ при } z \rightarrow \infty; \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)} \rightarrow 0, \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (i=1,2) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Формулы (4) описывают условия на бесконечности.

Для описания напряженного и электрического состояний в п'єзоелектрических телах приведем основные соотношения статики электроупругости для связанных силовых и электрических полей.

**Основные уравнения и соотношения.** Статические уравнения электроупругости для п'єзоелектрического тела относительно компонентов вектора перемещений и электрического потенциала  $\Psi$  можно представить в виде [4]

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (5) использованы следующие обозначения:  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  — независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  — п'єзомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  — диэлектрические проницаемости. Следовательно, электроупругие свойства п'єзоелектрического трансверсально-изотропного материала характеризуются десятью независимыми постоянными.

Решение системы уравнений (5) согласно [4] можно представить посредством четырех потенциальных функций  $\Phi_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ):

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (6)$$

где  $k_j, l_j$  — некоторые постоянные, а функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j=1, 2, 3), \quad (7)$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , а значения  $\nu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) согласно работе [4] являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned} & \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ & + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения  $k_j, l_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) в формулах (6) связаны с величинами  $\nu_j$  такими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j, \quad (j=1, 2, 3), \quad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j, \quad (j=1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

При введении обозначений  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $j=\overline{1,4}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  согласно уравнениям (7) становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат. Отметим, что приведенные выражения (8)–(10) используются в дальнейшем при проведении вычислений.

Для описания напряженно-деформированного состояния в упругой изотропной основе воспользуемся представлением уравнений равновесия посредством гармонической функции  $\chi(r, z)$  согласно [10]. Приведем выражения отдельных компонентов перемещений и напряжений, что входят в граничные условия задачи, на основе этой гармонической функции:

$$2\mu u_z = z \frac{\partial \chi}{\partial z} - 2(1 - \nu)\chi; \quad \sigma_{zz} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{\partial \chi}{\partial z}; \quad \sigma_{rz} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}. \quad (11)$$

В выражениях (11) использованы обозначения модуля сдвига  $\mu$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , характеризующих упругие свойства материала основы.

**Метод решения. Алгоритм 1.** При построении решения граничной задачи электроупругости воспользуемся представлением (6) для электроупругого полупространства и выражением (11) для упругой основы с выемкой. Потенциальные функции  $\Phi_i(x, y, z_i)$  и гармоническую функцию  $\chi$  возьмем в виде следующих гармонических потенциалов:

$$\begin{aligned} & \Phi_i(x, y, z_i) = \\ & = -\frac{\alpha_i^*}{2\pi} \left( \iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} + \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \chi(x, y, z) = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z^2}} + \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z^2}} \right), \end{aligned}$$

где

$$h(\xi_1, \xi_2) = h_1(1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2)^{3/2}, \quad r(\xi_1, \xi_2) = -h_0(1 - \xi_1^2/b^2 - \xi_2^2/b^2)^{3/2},$$

$S_1$  и  $S_0$  — круговые площадки радиусов  $a$  и  $b$  соответственно (рис. 1). Положим функцию  $\Phi_4^{(2)} \equiv 0$ . Постоянные  $\alpha_j^*$  в формулах (12) определим из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15}l_j) &= 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15}l_j) / \sqrt{v_j} = 0; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В выражениях (13) используются значения  $k_j, v_j, l_j$ , введенные ранее.

При таком выборе гармонической функции  $\chi$  и коэффициентов  $\alpha_j^*$  в формулах (12) удовлетворяются граничные условия по касательным напряжениям на поверхности раздела и условия (4). Также удовлетворяются условия по электрическому состоянию вдоль поверхности полупространства и выполняется равенство нормальных компонентов напряжений вне зазора между телами. Необходимо удовлетворить оставшиеся граничные условия с помощью нахождения следующих параметров контактной задачи:  $a$  — значение радиуса площадки контакта (рис. 1);  $h_1$  — максимальная высота зазора в результате контакта электроупругого и упругого тел. Условия гладкости смыкания берегов зазора удовлетворяются автоматически вследствие выбора потенциальных функций в виде формул (12).

Отметим, что потенциалы вида (12) использовались ранее при рассмотрении задачи контактного взаимодействия двух изотропных упругих тел [9]. Идея их применения близка к приему использования скачков перемещений в задаче о трещине нормального отрыва. Однако для трещины ее поверхность задана изначально, в то время как площадка контакта  $S_1$  и ее радиус  $a$  в задаче контактного взаимодействия заранее не известны и определяются в процессе решения задачи.

На основе выбора гармонической функции  $\chi$  и потенциальных функций согласно формулам (12) и (13), удовлетворяя оставшиеся граничные условия, приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} = \\ &= - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + 2\pi L^* (p - P_0), \quad (x, y) \in S_1. \end{aligned} \quad (14)$$

В выражениях (14) значение  $L^* = \frac{1-\nu}{\mu} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}$ .

После проведения дифференцирования в формулах (14) воспользуемся согласно работе [11] известными значениями следующих интегралов:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}} d\xi S = -\frac{\pi^2}{a};$$

$$\iint_S \frac{\xi_1^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}} d\xi S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 33x^2 - 3y^2);$$

$$\iint_S \frac{\xi_2^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}} d\xi S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 3x^2 - 33y^2).$$

Далее применим следующую схему решения задачи. Приравняем коэффициенты при вторых степенях декартовых координат. В результате находим  $h_1/h_0 = (a/b)^3$ . Из равенства коэффициентов при однородных слагаемых приходим к квадратному уравнению относительно значения неизвестного радиуса  $a$ , из которого находим значения неизвестных параметров контакта:

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0)bL^*}{3\pi h_0}}; \quad h_1 = h_0 \left( 1 - \frac{4(p - P_0)bL^*}{3\pi h_0} \right)^{3/2}. \quad (15)$$

Таким образом, из выражений (15) по известным размерам первоначальной выемки (параметры  $b$  и  $h_0$ ), значениям сжимающих усилий  $p$  и давления  $P_0$ , двух упругих постоянных основы и десяти независимым значениям электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала (входят через величину  $L^*$ ) определяем значение радиуса контакта  $a$  и максимальную высоту зазора  $h_1$  (после контактного взаимодействия). Также из равенства нулю выражения  $a$  находим значение силы сжатия  $p^* = P_0 + \frac{3\pi h_0}{4bL^*}$ , при котором выемка в упругом теле полностью заполняется материалом. Следовательно, при сжатии  $p \geq p^*$  исходная приповерхностная выемка в упругой основе в результате контактного взаимодействия полностью исчезает.

При переходе от пьезоэлектрического материала к чисто упругому трансверсально - изотропному материалу имеем

$$L^* - \frac{1 - \nu}{\mu} \rightarrow M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})},$$

где  $n_1, n_2$  — корни квадратного уравнения  $c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0$ , что зависят от упругих постоянных трансверсально - изотропного материала. Заменив в выражениях (15) значение  $M^*$  величиной  $M^{\text{Trans}}$ , находим параметры контакта системы «упругое трансверсально-изотропное полупространство — жесткая основа с выемкой».

Последующий предельный переход от трансверсально-изотропного материала к упругому изотропному материалу приводит к переходу  $M^{\text{Trans}} \rightarrow (1-\nu)/\mu$ . При взаимодействии упругого изотропного полупространства с упругой основой, содержащей осесимметричную выемку (частный случай рассмотренной контактной задачи электроупругости), заменив в формулах (15) величину  $M^*$  значением  $(1-\nu_1)/\mu_1$ , приходим к полному совпадению результатов с данными работы [7].

**Алгоритм 2.** Второй алгоритм решения задачи (в рамках используемой математической модели) основан на применении аппарата парных интегральных уравнений. Для решения задачи воспользуемся следующими выражениями гармонической функции  $\chi(r, z)$  и потенциальных функций  $\Phi_j^{(1)}(x, y, z_j)$ , ( $j=1, 2, 3, 4$ ):

$$\chi(r, z) = \int_0^\infty A^{(2)}(\lambda) e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda;$$

$$\Phi_j^{(1)}(x, y, z_j) = \alpha_j^* \int_0^\infty \frac{A^{(1)}(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda z_j} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (j=1, 2, 3); \quad \Phi_4^{(1)} = 0. \quad (16)$$

Значения постоянных  $\alpha_j^*$  в выражениях (16) определяем согласно уравнениям (13), как и при использовании алгоритма 1. Тогда на поверхности  $z=0$  удовлетворяются такие граничные условия:  $\sigma_{zr}^{(i)} = 0, \quad 0 < r < \infty;$   
 $D_z^{(i)} = 0, \quad (i=1, 2).$

Из оставшихся граничных условий приходим к системе парных интегральных уравнений

$$-\int_0^\infty \lambda A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = p - P_0, \quad \int_0^\infty \lambda A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = p - P_0, \quad 0 < r < a;$$

$$\left( \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{\nu_j} \right) \int_0^\infty A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$= \left( \frac{1-\nu}{\mu} \right) \int_0^\infty A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + f(r), \quad a < r < \infty;$$

$$-\int_0^\infty \lambda A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty \lambda A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad a < r < \infty. \quad (17)$$

Полагая  $A^{(1)} = -A^{(2)}$  и объединяя первое и третье уравнения системы (17), приходим к системе парных интегральных уравнений. Следуя в дальнейшем схеме рассмотрения задачи о контакте двух упругих изотропных полупространств (одно из которых содержит выемку) [7], сводим систему парных интегральных уравнений к интегральному уравнению Абеля. Аналогично работе [7] приходим к явным выражениям компонент напряжений и перемещений в области контакта электроупругого полупространства с упругой основой.

Так, имеем

$$\sigma_{zz}^{(i)}|_{z=0} = -p + \sigma' + \sigma'' ,$$

где

$$\sigma' = \begin{cases} (p - P_0) - \frac{3\pi h_0}{4L^* b} \left(1 - \frac{3r^2}{2b^2}\right), & 0 < r < a, \\ \frac{2}{\pi} (p - P_0) \left( \arcsin \frac{a}{r} - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) - \frac{3h_0}{2L^* b} \left[ \left(1 - \frac{3r^2}{2b^2}\right) \arcsin \frac{a}{r} - \right. \\ \left. - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) + \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{2b^2} \right], & a < r < \infty, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sigma'' = \frac{1}{L^*} \begin{cases} \frac{3\pi h_0}{4b} \left(1 - \frac{3r^2}{2b^2}\right), & 0 < r < b, \\ -\frac{3h_0 b^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)(2n+5)2n!!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n}, & b < r < \infty. \end{cases} \quad (19)$$

Для определения неизвестного радиуса зазора  $a$  воспользуемся условием ограниченности контактного давления на границе области контакта в плоскости контакта  $z=0$ . Поскольку в формулах (19) отсутствуют сингулярные члены, на основе анализа сингулярных слагаемых в формулах (18) получаем

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0)bL^*}{3\pi h_0}}. \quad (20)$$

Полагая  $a=0$ , приходим к значению сжимающих усилий  $p^*$ , при котором зазор полностью закрывается

$$p^* = P_0 + \frac{3\pi h_0}{4bL^*}. \quad (21)$$

Сравнивая выражения (20), (21) с формулами (15), можно заключить, что два используемых алгоритма решения задачи приводят к одним и тем же выражениям для радиуса площадки контакта и величины усилий, полностью закрывающим зазор между телами. Заметим, что при условиях гладкости смыкания берегов выемки для алгоритма 2 также удовлетворяются.

Следовательно, два приведенных алгоритма являются достаточно эффективными при решении рассматриваемой задачи. Их применение приводит к одним и тем же аналитическим выражениям для параметров контакта. В то же время алгоритм 2 дает возможность извлечь более детальную информацию о характере распределения напряжений в области контакта (по сравнению с алгоритмом 1), однако его применение в силу уровня развития соответствующего математического аппарата ограничено лишь осесимметричной формой выемки. Для алгоритма 1 такого ограничения нет и его потенциальные возможности несколько шире.



При переходе к чисто упругому трансверсально-изотропному материалу имеем

$$L^* - \frac{1-\nu}{\mu} = M^* \rightarrow M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})},$$

где  $n_1, n_2$  — корни квадратного уравнения  $c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0$ , которые зависят от упругих свойств трансверсально-изотропного материала. После рутинных преобразований, основанных на свойствах корней квадратного уравнения, значение  $M^{\text{Trans}}$  получаем в виде

$$M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)} \sqrt{\frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})}{c_{11}c_{44}}} + 2\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}. \quad (22)$$

Выражение (22) удобно тем, что в него можно сразу подставлять значения упругих постоянных трансверсально-изотропного материала, оно не требует проведения промежуточных вычислений. Заменяя в полученных выражениях  $L^* - \frac{1-\nu}{\mu}$  величиной  $M^{\text{Trans}}$ , получим параметры контактного взаимодействия системы «упругое трансверсально-изотропное полупространство – упругая основа с выемкой». Последующий предельный переход от трансверсально-изотропного материала к упругому изотропному материалу приводит к переходу от значения  $M^{\text{Trans}}$  к  $(1-\nu)/\mu$ . В результате в частном случае рассмотренной задачи приходим к совпадению результатов исследований с данными работы [7] для контактного взаимодействия двух упругих изотропных тел, одно из которых содержит выемку.

**Анализ результатов численных исследований.** На рис. 2, 3 приведены зависимости радиуса и высоты зазора между упругой основой с приповерхностной выемкой и электроупругим полупространством от действующих нагрузок (сплошные линии). На этих рисунках использовано обозначение  $N^* = 4bL^*/(3\pi h_0)$ . Показано изменение радиуса и высоты зазора при меняющейся нагрузке, которые зависят также от значения внутреннего давления  $P_0$ , геометрических параметров выемки ( $b, h_0$ ), двух упругих постоянных материала основы и десяти электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала. Зависимость от свойств материалов контактирующих тел осуществляется через величину  $L^*$ . Согласно рис. 1 приповерхностная выемка полностью заполняется материалом при  $p \geq P_0 + \frac{1}{N^*} = p^*$ . Для значений нагрузок  $P_0 \leq p \leq p^*$  радиус и высота зазора между телами показаны на рис. 2 и 3 сплошными линиями. Влияние эффекта связанности силовых и электрических полей на параметры контакта в рассматриваемой проблеме взаимодействия тел можно оценить на основе вычислений отношения  $M^*/M^{\text{Trans}}$  для каждого конкретного вида пьезоэлектрического материала. Так, для пьезокерамических материалов PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7А, ВаTiO3, PZT-5Н, Р-7 получаем  $M^*/M^{\text{Trans}} = 0,6947$ ;

0,7348; 0,6961; 0,7372; 0,8544; 0,7837; 0,7112 соответственно. То есть значение  $M^*$  для перечисленных электроупругих материалов превышает соответствующее значение  $M^{\text{Trans}}$  в процентном выражении (для чисто упругого трансверсально-изотропного материала с теми же упругими свойствами, что и пьезокерамический материал) на 30,5; 26,5; 30,4; 26,3; 14,6; 21,6; 28,9. При  $\mu \rightarrow \infty$  в  $L^*$  переходим к жесткой основе (чтобы избежать влияния упругих постоянных основы) на параметры контакта. На рис. 2 и 3 штриховыми линиями показано изменение параметров контакта жесткой основы с чисто упругим трансверсально-изотропным полупространством, упругие свойства которого соответствуют свойствам электроупругого материала PZT-5Н. Тогда, сравнивая параметры контакта (радиус зазора и его высоту) для сплошных линий (пьезоэлектрический материал) и штриховых линий (упругий трансверсально-изотропный материал) на этих рисунках, для материала PZT-5Н можно оценить влияние связанности силовых и электрических полей на параметры контактного взаимодействия. Видно, что связанность силовых и электрических полей препятствует закрытию выемки при сжатии электроупругого полупространства с основой. Для закрытия зазора при контакте с пьезоупругим полупространством требуются большие значения сжимающих усилий, чем для упругого трансверсально-изотропного полупространства (с теми же упругими свойствами, что и электроупругий материал).

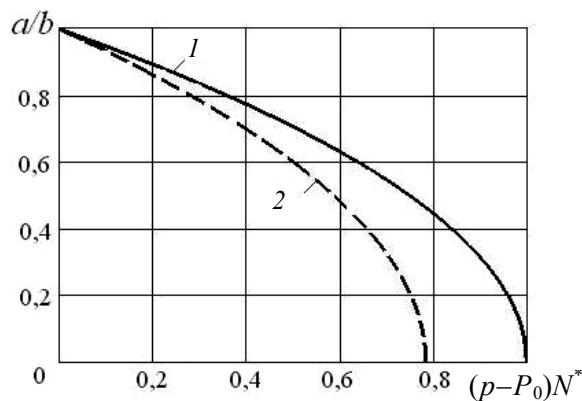


Рис. 2. Зависимость радиуса зазора от действующих нагрузок

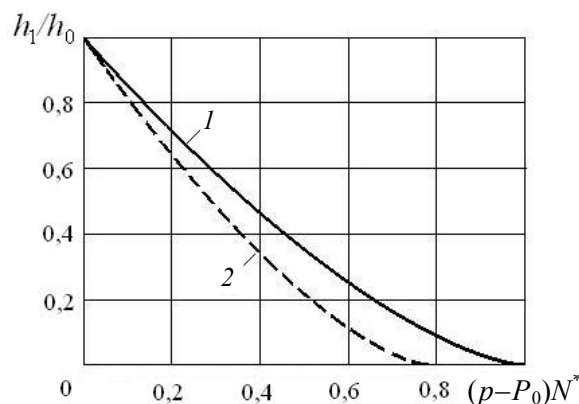


Рис. 3. Изменение высоты зазора при действии нагрузок

Из выражений (15), (21), (22) видно, что при увеличении жесткости материала основы (увеличении модуля сдвига материала) зазор между телами уменьшается медленней, чем для более эластичной основы. Величина  $p^*$  (значение сжимающих усилий, полностью закрывающих зазор) с увеличением жесткости основы также увеличивается, что соответствует физическим соображениям. В предельном случае ( $\mu \rightarrow \infty$ ) выемка в основе заполняется только пьезоэлектрическим материалом, поскольку основа становится недеформируемой. В случае же более мягкой упругой основы совместное деформирование электроупругого материала и эластичной основы позволяет затратить меньше усилий для полного закрытия выемки системы «пьезоэлектрическое полупространство — упругая основа».

Проанализируем также влияние силовых параметров на процесс совместного деформирования электроупругого материала и упругой основы с выемкой. Из формул (15), а также (20), (21) видно, что внутреннее давление внутри выемки препятствует уменьшению размеров выемки при сжатии. При этом на размеры зазора при деформировании влияет простая разность усилий сжатия  $p$  и внутреннего давления  $P_0$ , которая входит в выражения (15), (20).

Принципиально важным, с точки зрения авторов, является то обстоятельство, что для всех семи известных пьезокерамических материалов (PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, BaTiO<sub>3</sub>, PZT-5H, P-7) эффект связанности силовых и электрических полей приводил к увеличению значений усилий для полного закрытия зазора по сравнению со случаем закрытия зазора в трансверсально-изотропном упругом материале (с теми же упругими свойствами, что и соответствующий электроупругий материал). При этом эффект связанности для рассмотренного ряда материалов является наименее выраженным для пьезокерамического материала BaTiO<sub>3</sub>, а наиболее выраженным — для PZT-4. Для упомянутых материалов  $M^*/M^{\text{Trans}}$  равно 0,8544 и 0,6947 соответственно.

Отметим также, что проведенные числовые исследования и оценка влияния связанности силовых и электрических полей для конкретных пьезокерамических материалов позволяет в какой-то мере спрогнозировать погрешность, вносимую в результаты исследований контактного взаимодействия электроупругого полупространства, при использовании упрощенной модели трансверсально-изотропного тела упругого тела (вместо электроупругого), которое имеет те же упругие свойства, что и соответствующий электроупругий материал. При этом величина  $M^*$  заменяется в формулах (15) значением  $M^{\text{Trans}}$  и соответствующая погрешность (относительно  $M^*$ ) составляет (%) 30,5; 26,5; 30,4; 26,3; 14,6; 21,6; 28,9 для пьезокерамических материалов PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, BaTiO<sub>3</sub>, PZT-5H, P-7 соответственно. Таким образом, наименьшая погрешность при использовании упрощенной модели для материала BaTiO<sub>3</sub>, наибольшая — для PZT-4.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, рассмотрена проблема контактного взаимодействия в сис-

теме «упругая основа с выемкой — электроупругое полупространство». Исследуемое контактное взаимодействие зависит от 16 независимых параметров (значения сжимающей нагрузки  $p$  и давления  $P_0$ , двух геометрических параметров исходной выемки, двух упругих постоянных материала основы и десяти значений электроупругих постоянных), что входят в систему связанных уравнений статики электроупругости и граничные условия. Предложены два алгоритма решения задачи, приводящие к нахождению точного ее решения. В виде замкнутых выражений получены основные параметры контактного взаимодействия тел. Найдены геометрические размеры зазора между телами (радиус контакта, высота зазора), значение нагрузки для полного закрытия зазора. Выявлено влияние связанности силовых и электрических полей на контактное взаимодействие. Как частный случай из полученных выражений следует решение задачи контактного взаимодействия упругого трансверсально-изотропного полупространства с упругой изотропной основой, содержащей приповерхностную выемку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang Ch.-R.* Eshelby's tensor for cubic piezoelectric crystals and its application to cavity problems / Ch.-R. Chang // *Eng. Frac. Mech.* — 2016. — **155**. — P. 119–129.
2. *Kaloerov S.A.* Determination of intensity factors for stresses, induction and field strength in multi-connected electro-elastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, № 6. — P. 77–84.
3. *Xu C.H.* Electroelastic singularities and intensity factors for an interface crack in piezoelectric-elastic bimetals / C.H. Xu, Z.H. Zhou, X.S. Xu, A.Y.T. Leung // *Appl. Math. Model.* — 2015. — **39**, № 9. — P. 2721–2739.
4. *Podil'chuk Yu.N.* Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Yu.N. Podil'chuk // *Int. Appl. Mech.* — 2003. — **39**, № 2. — P. 132–170.
5. *Кирилюк В.С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / В.С. Кирилюк // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2009. — Вып. 46. — С. 29–35.
6. *Кирилюк В.С.* О расклинивании пьезокерамических материалов / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // *Прикладная механика.* — 2010. — **46**, № 5. — С. 46–57.
7. *Монастирський Б.Є.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні / Б.Є. Монастирський // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 1999. — № 6. — С. 22–26.
8. *Kit G.C.* Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками / Г.С. Кіт, Р.М. Мартиняк // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 1999. — **42**, № 6. — С. 7–11.
9. *Мартиняк Р.М.* Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною / Р.М. Мартиняк, Б.С. Слободян // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 2009. — № 1. — С. 62–65.
10. *Green A.E.* Theoretical elasticity / A.E. Green, W. Zerna // Oxford, Clarendonpress, 1968. — 458 p.
11. *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения / М.В. Хай. — К.: Наук. думка, 1993. — 256 с.

Поступила 27.05.2016

## ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНОГО НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ю.Є. БОХОНОВ

**Анотація.** Запропоновано підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку із запізненням. Відомо числово-аналітичний метод знаходження періодичних розв'язків для звичайних рівнянь другого порядку, що узагальнюється для рівнянь із запізненням, у якому рівняння зводиться до системи першого порядку. У запропонованому методі досліджено саме рівняння без зведення його до системи. Побудовано функцію Гріна для самоспряженого диференціального оператора другої похідної, що визначений на функціях, які задовольняють періодичні крайові умови. Наведено необхідні і достатні умови існування періодичних розв'язків рівняння. Отримано оцінку швидкості збіжності наближених обчислень.

**Ключові слова:** періодичні розв'язки, нелінійне диференціальне рівняння з запізненням, періодична крайова задача, функція Гріна, самоспряжений диференціальний оператор.

### ВСТУП

Широко відомо числово-аналітичний методі знаходження періодичних розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку [1]–[3]. Його використовують також для знаходження періодичних розв'язків рівняння другого порядку шляхом зведення його до системи першого порядку. Узагальнення цього методу застосовують для розв'язання такої ж задачі для рівнянь та систем рівнянь із запізненням [4], [5]. У запропонованій роботі шукаються періодичні розв'язки для рівняння із запізненням другого порядку без зведення його до системи першого порядку. Таку методику запропоновано для звичайного рівняння другого порядку [6]. Періодичний розв'язок інтерпретується як розв'язок крайової задачі з періодичними умовами.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знаходження періодичного розв'язку диференціального рівняння другого порядку із запізненням можна звести до розв'язання періодичної крайової задачі для цього рівняння на відрізку, довжина якого дорівнює періоду. Такий підхід не потребує зведення рівняння другого порядку до системи рівнянь першого порядку.

Отже, будемо шукати періодичні за  $t$  з періодом  $T$  розв'язки рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x(t), x(t - \delta), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \delta)) \quad (1)$$

(зазвичай,  $0 < \delta < T$ ).

Нехай функція  $f(t, x, u, y, v)$  задовольняє такі умови:

а) неперервність і обмеженість на  $D = (-\infty, \infty) \times [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ ,

Позначимо

$$M = \sup_D |f(t, x, u, y, v)|; \quad (2)$$

б) періодичність за  $t$  з періодом  $T$ ,

в) виконання умови Ліпшиця:

$$\begin{aligned} & |f(t, x_1, u_1, y_1, v_1) - f(t, x_2, u_2, y_2, v_2)| \leq \\ & \leq K_0 |x_1 - x_2| + \tilde{K}_0 |u_1 - u_2| + K_1 |y_1 - y_2| + \tilde{K}_1 |v_1 - v_2|. \end{aligned} \quad (3)$$

Будемо шукати розв'язок (1), який задовольняє крайові умови

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \quad (4)$$

Зрозуміло, що його та його похідну можна періодично продовжити на всю вісь.

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Пропонується розглянути самоспряжений диференціальний оператор  $(Lx)(t) = x''(t)$  у гільбертовому просторі  $H = L_2(0, T)$ , область визначення якого – функції, що мають абсолютно неперервну першу похідну, які задовольняють крайові умови (4). Задача знаходження періодичних розв'язків зводиться до задачі обернення оператора  $L$ . Треба, утім, зауважити, що цей оператор не має оберненого, оскільки, як легко бачити,  $\lambda = 0$  є його власним числом з одновимірним власним підпростором  $H_1$ , натягнутим на функцію  $x(t) \equiv 1$ . Із самоспряженості оператора випливає, що підпростір  $\mathcal{H}$ , ортогональний до одиниці, є інваріантним відносно  $L$ . При цьому  $H = H_1 \oplus \mathcal{H}$ . Підпростір  $\mathcal{H}$ , очевидно, складається із функцій, середнє яких за  $[0, T]$

$$\bar{h} = \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H} \text{ дорівнює нулю. Слід зауважити, що функція}$$

в правій частині рівняння (1) не належить до  $\mathcal{H}$ , тому далі будемо розглядати допоміжне рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x(t), x(t - \delta), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \delta)) - \bar{f}. \quad (5)$$

Для побудови вказаного оберненого оператора використаємо авторську методику із праці [1], за допомогою якої знаходимо функцію Гріна:

$$G(t, \tau) = \frac{1}{2T} (2t\tau - \tau^2) + \frac{1}{2} \begin{cases} t - \tau, & 0 \leq \tau \leq t \leq T; \\ \tau - t, & 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{cases} \quad (6)$$

Тоді  $x(t) = \int_0^T G(t, \tau) h(\tau) d\tau$ . Звідси маємо:  $x'(t) = \int_0^T G'_t(t, \tau) h(\tau) d\tau$ , де

$$G'(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{T} + \frac{1}{2}; & 0 \leq \tau \leq t \leq T; \\ \frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}; & 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{cases} \quad (7)$$

Завдяки розкладу в пряму ортогональну суму  $H = H_1 \oplus \bar{H}$  кожен розв'язок крайової задачі для рівняння (5) можна подати у вигляді  $x(t) = x_0 + x_1(t)$ , де  $x_0 = \bar{x}$ ,  $x_1 = 0$ , тобто

$$x(t) = x_0 + \int_0^T G(t, \tau) (f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) - \bar{f}) d\tau. \quad (8)$$

Разом з рівнянням (8) розглядається рівняння для похідної:

$$\dot{x}(t) = \int_0^T G'_t(t, \tau) (f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) - \bar{f}) d\tau. \quad (9)$$

Система (8)–(9) розв'язується методом послідовних наближень. Якщо процес збігається, отримуємо розв'язок  $x = \varphi(t, x_0)$ , який при підстановці в рівняння (8) перетворює його в тотожність. Для того, щоб цей розв'язок був також розв'язком (1), очевидно необхідно і разом з виконанням умов (4) достатньо, щоб виконувалась умова

$$\int_0^T f(\xi, \varphi(\xi, x_0), \varphi(\xi - \delta, x_0), \dot{\varphi}(\xi, x_0), \dot{\varphi}(\xi - \delta, x_0)) d\xi = 0, \quad (10)$$

тобто щоб число  $x_0$  (яке є середнім від  $x(t)$ , розв'язку задачі) було коренем цього рівняння.

Використовуючи формули (6), (7), перетворимо систему (8)–(9).

Інтеграл у правій частині формули (8):

$$\begin{aligned} & \int_0^T G(t, \tau) (f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) - \bar{f}) d\tau = \\ & = \int_0^T G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) d\tau - \\ & - \int_0^T f(\xi, x(\xi), x(\xi - \delta), \dot{x}(\xi), \dot{x}(\xi - \delta)) d\xi \left( \frac{1}{T} \int_0^T G(t, \tau) d\tau \right) = \\ & = \int_0^T (G(t, \tau) - \bar{G}(t)) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau = \\ & = \frac{1}{2T} \left( \int_0^t \left( \frac{T^2}{12} - \left( \tau - t + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_t^T \left( \frac{T^2}{12} - \left( \tau - t - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right). \end{aligned}$$

Отже, рівняння (8) набуде вигляду

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2T} \left( \int_0^t \left( \frac{T^2}{12} - \left( \tau - t + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) d\tau + \int_t^T \left( \frac{T^2}{12} - \left( \tau - t - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) d\tau \right). \quad (11)$$

Аналогічно перетворимо праву частину рівняння (9):

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{T} \left( \int_0^t \left( t - \tau + \frac{T}{2} \right) f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) d\tau + \int_t^T \left( t - \tau - \frac{T}{2} \right) f(\tau, x(\tau), x(\tau - \delta), \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau - \delta)) d\tau \right). \quad (12)$$

Цілком зрозуміло, що нерухома точка цього оператора є розв'язком системи інтегральних рівнянь (8)–(9).

Уведемо в просторі  $\mathbb{R}^2$  псевдонорму:  $\text{col}|(x_1, x_2)| = \text{col}(|x_1|, |x_2|)$ , а також для вектора-функції  $\text{col}(x_1(t), x_2(t))$ :

$$\text{col}\|(x_1, x_2)\| = \text{col}(\|x_1\|, \|x_2\|) = \text{col} \left( \max_{t \in [0, T]} |x_1(t)|, \max_{t \in [0, T]} |x_2(t)| \right).$$

Простір з такою псевдонормою буде частково впорядкованим, і для векторів  $\text{col}(x, y)$ ,  $\text{col}(\xi, \eta)$  при виконанні умов  $x \leq \xi$ ,  $y \leq \eta$  використовувати мемо позначення  $\text{col}(x, y) \leq \text{col}(\xi, \eta)$ .

Шукати розв'язок системи (11)–(12) будемо методом послідовних наближень:

$$x_1(t) = x_0 + \frac{1}{2T} \int_0^t \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau + \frac{1}{2T} \int_t^T \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau;$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{T} \left( \int_0^t \left( \tau - t + \frac{T}{2} \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau + \int_t^T \left( \tau - t - \frac{T}{2} \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau \right),$$

.....

$$x_m(t) = x_0 + \frac{1}{2T} \int_0^t \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\tau - \delta), \dot{x}_{m-1}(\tau), \dot{x}_{m-1}(\tau - \delta)) d\tau + \frac{1}{2T} \int_t^T \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\tau - \delta), \dot{x}_{m-1}(\tau), \dot{x}_{m-1}(\tau - \delta)) d\tau;$$



$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) = & \frac{1}{T} \int_0^t \left( \tau - t + \frac{T}{2} \right) f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\tau - \delta), \dot{x}_{m-1}(\tau), \dot{x}_{m-1}(\tau - \delta)) d\tau + \\ & + \frac{1}{T} \int_t^T \left( \tau - t - \frac{T}{2} \right) f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\tau - \delta), \dot{x}_{m-1}(\tau), \dot{x}_{m-1}(\tau - \delta)) d\tau. \end{aligned}$$

Дослідимо цю послідовність на збіжність. Спочатку оцінимо відхилення першого наближення від нульового. Для більшої зручності зробимо це для кожної координати окремо:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0| = & \frac{1}{2T} \left| \int_0^t \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_t^T \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau \right| \leq \\ \leq & \frac{1}{2T} \left| \int_0^t \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau + \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau \right| + \\ & + \left| \int_t^T \left( \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau - \frac{T}{2} \right)^2 \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau \right| \leq \\ \leq & \frac{M}{2T} \left( \int_0^t \left| \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau + \frac{T}{2} \right)^2 \right| d\tau + \int_t^T \left| \frac{T^2}{12} - \left( t - \tau - \frac{T}{2} \right)^2 \right| d\tau \right) = \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M; \\ |\dot{x}_1(t)| \leq & \frac{1}{T} \left( \left| \int_0^t \left( \tau - t + \frac{T}{2} \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau \right| + \left| \int_t^T \left( \tau - t - \frac{T}{2} \right) f(\tau, x_0, x_0, 0, 0) d\tau \right| \right) \leq \\ \leq & \frac{M}{T} \left( \int_0^t \left| \tau - t + \frac{T}{2} \right| d\tau + \int_t^T \left| \tau - t - \frac{T}{2} \right| d\tau \right) \leq \frac{MT}{4}. \end{aligned}$$

Очевидно, що такі самі оцінки справедливі для норм  $\|x_1(t) - x_0\|$  і  $\|\dot{x}_1(t)\|$ . Тому

$$\text{col} \|(x_1 - x_0, \dot{x}_1)\| \leq \text{col} \left( \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M, \frac{T}{4} M \right). \quad (13)$$

Аналогічно оцінимо псевдонорму різниці  $\text{col} \|(x_{m+1} - x_m, \dot{x}_{m+1} - \dot{x}_m)\|$ .

$$\begin{aligned} |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq & \int_0^T |G(t, \tau)| |f(\tau, x_m(\tau), x_m(\tau - \delta), \dot{x}_m(\tau), \dot{x}_m(\tau - \delta)) - \\ & - f(\tau, x_m(\tau), x_m(\tau - \delta), \dot{x}_m(\tau), \dot{x}_m(\tau - \delta))| d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{T^2}{18\sqrt{3}} \left( (K_0 + \tilde{K}_0) \|x_m - x_{m-1}\| + (K_1 + \tilde{K}_1) \|\dot{x}_m - \dot{x}_{m-1}\| \right).$$

Тут використано факт, що для періодичної з періодом  $T$  функції  $\|x(t)\| = \|x(t - \delta)\|$ :

$$\begin{aligned} |\dot{x}_{m+1}(t) - \dot{x}_m(t)| &\leq \int_0^T |\dot{G}_t(t, \tau)| |f(\tau, x_m(\tau), x_m(\tau - \delta), \dot{x}_m(\tau), \dot{x}_m(\tau - \delta)) - \\ &\quad f(\tau, x_m(\tau), x_m(\tau - \delta), \dot{x}_m(\tau), \dot{x}_m(\tau - \delta))| d\tau \leq \\ &\leq \frac{T}{4} \left( (K_0 + \tilde{K}_0) \|x_m - x_{m-1}\| + (K_1 + \tilde{K}_1) \|\dot{x}_m - \dot{x}_{m-1}\| \right). \end{aligned}$$

Перепишемо цю оцінку, використовуючи впроваджені раніше позначення:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{m+1} - x_m \\ \dot{x}_{m+1} - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{T}{2} \begin{pmatrix} \frac{T}{9\sqrt{3}}(K_0 + \tilde{K}_0) & \frac{T}{9\sqrt{3}}(K_1 + \tilde{K}_1) \\ \frac{1}{2}(K_0 + \tilde{K}_0) & \frac{1}{2}(K_1 + \tilde{K}_1) \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} x_m - x_{m-1} \\ \dot{x}_m - \dot{x}_{m-1} \end{pmatrix} \right\|.$$

Нехай  $K = \max(K_0 + \tilde{K}_0, K_1 + \tilde{K}_1)$ . Тоді, очевидно,

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{m+1} - x_m \\ \dot{x}_{m+1} - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{TK}{2} \begin{pmatrix} \frac{T}{9\sqrt{3}} & \frac{T}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} x_m - x_{m-1} \\ \dot{x}_m - \dot{x}_{m-1} \end{pmatrix} \right\|. \quad (14)$$

Далі будемо позначати матрицю в лівій частині через  $Q$ .

Звідси, з урахуванням рівнянь (13), (14), можна отримати оцінку

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{m+1} - x_m \\ \dot{x}_{m+1} - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{MT}{2} \left( \frac{TK}{2} \right)^m \begin{pmatrix} \frac{T}{9\sqrt{3}} & \frac{T}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Стандартні міркування приводять до оцінки відхилення  $m$ -го наближення розв'язку від  $m + p$ -го за будь-якого натурального  $p$ :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{m+p} - x_m \\ \dot{x}_{m+p} - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{MT}{2} \left( \frac{TK}{2} \right)^m \left( \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{TK}{2} \right)^k \begin{pmatrix} \frac{T}{9\sqrt{3}} & \frac{T}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)^k \begin{pmatrix} \frac{T}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для вектора  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$  і матриці  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$  розглянемо відомі норми

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|; \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

Вони узгоджені в тому розумінні, що  $\|x\|_1 \|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$ .

Відомо, що якщо  $a_{i,j} \geq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  і суми елементів в стовпцях матриці однакові, то її норма збігається із спектральним радіусом ([7]). Такі властивості має матриця  $Q$ . З іншого боку, спектральний радіус  $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$  дорівнює найбільшому з модулів власних чисел матриці ([7]). Знаходячи найбільше власне число матриці  $Q$ , маємо її спектральний радіус:  $\|Q\|_1 = \rho(Q) = \frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$ .

Із виразу (15) випливає оцінка

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{m+p} - x_m \\ \dot{x}_{m+p} - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \frac{MT}{2} \left( \frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{TK}{2} \right)^m \|Q\|_1^m \left( \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{TK}{2} \right)^k \|Q\|_1^m \right) \quad (16)$$

Якщо

$$q = \frac{TK}{2} \left( \frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) < 1, \quad (17)$$

виконується умова критерію Коші, отже послідовність  $\text{col}\|(x_m, \dot{x}_m)\|$  збігається, причому до розв'язку системи (11)–(12). Користуючись стандартними міркуваннями, легко довести, що цей розв'язок єдиний. Переходячи в рівнянні (16) до границі при  $p \rightarrow \infty$ , маємо похибку між розв'язком системи і її  $m$ -м наближенням:

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t, x_0) - x_m \\ \dot{\phi}(t, x_0) - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \frac{MT}{2} \left( \frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{TK}{2} \right)^m \|Q\|_1^m \left( I - \frac{TK}{2} \right)^{-1}.$$

Або остаточно

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t, x_0) - x_m \\ \dot{\phi}(t, x_0) - \dot{x}_m \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \frac{MT}{2} \left( \frac{TK}{2} \right)^m \left( \frac{T}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)^{m+1} \left( I - \frac{TK}{2} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Границя послідовних наближень, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь, повинна належати області  $D$ . Із стандартних міркувань випливає, що для цього від константи  $M$  досить вимагати виконання умови:

$$M \leq \min \left( \frac{18\sqrt{3}}{T^2} (b-a), \frac{4}{T} (c-d) \right) \quad (19)$$

Також зрозумілим чином можна отримати оцінку можливих значень величини  $x_0$ :

$$x_0 \in \left[ a + \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M, b - \frac{T^2}{18\sqrt{3}} M \right] \quad (20)$$

Сформулюємо остаточно результати.

**Теорема 1.** Нехай функція  $f(t, x, u, y, v)$  неперервна на  $[0, T] \times [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ , періодична за  $t$  з періодом  $T$  задовольняє умови а), б), в), причому, константи Ліпшиця та стала  $M$  задовольняють умови (17), (19).

Тоді для існування періодичного з періодом  $T$  розв'язку  $x = \varphi(t, x_0)$  рівняння (1) необхідно і достатньо існування такого значення  $x_0$ , яке задовольняє рівняння (10), де  $\varphi(t, x_0)$  знаходиться методом послідовних наближень. При цьому  $x_0$  є середнім значенням  $\varphi(t, x_0)$  на  $[0, T]$  і знаходиться на проміжку, який задовольняє умови (20). Похибка між розв'язком задачі (1)–(4) і її  $m$ -м наближенням визначається умовою (18).

## ВИСНОВКИ

Традиційно для знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку або рівняння із запізненням його зводять до системи першого порядку. Логічно досліджувати саме рівняння безпосередньо. У такому разі періодичний розв'язок інтерпретується як розв'язок періодичної крайової задачі. Оператор другої похідної в лівій частині рівняння, визначений на функціях, що задовольняють періодичні граничні умови є самоспряженим, і для нього будується функція Гріна. Нестандартна ситуація при її побудові полягає в тому, що оператор, обернений до оператора другої похідної, не є визначеним на всьому просторі  $L_2$ , а лише на підпросторі корозмірності одиниця, ортогональному до підпростору констант. Отримано оцінку функції Гріна крайової задачі, констант в умові Ліпшиця, яку задовольняє функція в правій частині рівняння, а також її супремуму на області визначення. Визначено умову збіжності ітераційного процесу і оцінено швидкість збіжності методу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М.* О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка / А.М. Самойленко // Дифференциальные уравнения. — 1967. — **3**, № 11. — С. 1903–1912.
2. *Ронто Н.И.* Теория численно-аналитического метода, достижения и новые направления развития / Н.И. Ронто, А.М. Самойленко, С.И. Трофимчук // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 225–243.
3. *Самойленко А.М.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. *Митропольский Ю.А.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк. — К.: Вища шк., 1979. — 248 с.
5. *Митропольский Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк. — К.: Наук. думка, 1984. — 213 с.
6. *Бохонов Ю.С.* Про один підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 2. — С. 138–143.
7. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

Надійшла 01.06.2016

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І  
МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУTHEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND  
METHODS OF SYSTEM ANALYSIS

УДК 681.5

**Синтез слідкуючої системи керування нестійкими імпульсними процесами в ієрархічних когнітивних картах складних систем / Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 7–13.

Розглянуто проблему слідкуючого керування в когнітивних картах ієрархічних складних систем. Динаміка вільного руху певного ієрархічного рівня системи описується нестійким імпульсним процесом у когнітивній карті. Задавальне діяння, що формується на вищому рівні ієрархії, має стрибкоподібний характер. Уведено еталонну модель характеристичного полінома замкненої системи по каналу «задавальне діяння – похибка регулювання». Знайдено закон керування, що дозволяє вихідним координатам когнітивної карти відслідковувати зміну задавального діяння. Для прикладу розглянуто керування когнітивною картою комерційного банку на певному ієрархічному рівні банківської системи. За допомогою моделювання показано ефективність запропонованого методу. Рис.: 3. Бібліогр.: 5 назв.

UDC 681.5

**Tracking system design for unstable impulse processes in hierarchical cognitive maps of complex systems / Romanenko V.D., Milyavsky Y.L.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 7–13.

The problem of the tracking control in cognitive maps of hierarchical complex systems is considered. Free motion dynamics of a certain hierarchical level is described by an unstable impulse process in a cognitive map. The master control formed on the higher hierarchical level has the step form. The reference model for the characteristic polynomial of the “set point – control error” channel in a closed-loop system is introduced. The control law allowing cognitive map’s output coordinates to track master control changes is found. As an example, we consider the control of commercial bank’s cognitive map of a certain hierarchical level of a banking system. The simulation demonstrates effectiveness of the proposed method. Fig.: 3. Refs.: 5 titles.

УДК 517.9, 519.816

**Оценивание устойчивости локальных весов альтернатив решений на основе метода парных сравнений / Недашковская Н.И.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 14–22.

Разработан метод оценивания устойчивости локальных весов альтернатив решений по качественной характеристике на основе метода парных сравнений RGMM, включающий оценивание устойчивости локального ранжирования альтернатив решений к изменениям в экспертных оценках парных сравнений и оценивание устойчивости согласованности множества экспертных оценок парных сравнений к изменению отдельных оценок. Получены расчетные формулы для интервалов устойчивости элементов матрицы парных сравнений (оценок экспертов) касательно изменения локального ранжирования альтернатив решений. Построены интервалы устойчивости, позволяющие найти критические элементы задачи, которые являются экспертными оценками парных сравнений, чувствительными к изменениям локального ранжирования альтернатив, и экспертными оценками, характеризующими наибольшей несогласованностью. Табл.: 7. Библиогр.: 14 назв.

UDC 517.9, 519.816

**Stability of local weights of decision alternatives on basis of pairwise comparison method / Nedashkovskaya N.I.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 14–22.

The pairwise comparison method is used to solve poorly structured problems of decision making, for the calculation of relative weights of decision alternatives in terms of quality characteristic (decision criterion) on the basis of expert judgments of alternatives. In this paper, a method for estimating the stability of local weights of decision alternatives is developed. This method is used when local weights are calculated on the basis of the RGMM. The developed method includes: an estimation of the stability of the local ranking of decision alternatives to changes in expert pairwise comparison judgments and an estimation of the stability of consistency of expert pairwise comparison judgments to a change of a single judgment. The formulas are devised for calculating the stability intervals of expert pairwise comparison judgments as to changes of local ranking of decision alternatives. Stability intervals are proposed for finding critical elements of a decision-making problem. These critical elements are expert judgments that are sensitive to changes of a local ranking of alternatives and the most inconsistent expert judgments. Tabl.: 7. Refs.: 14 titles.

УДК 336.646/648, 330.4

**Імовірнісний підхід до оцінювання перспективності купівлі бізнесу конкретним інвестором / Зак Ю.О.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 23–34.

Згідно з індивідуальними планами інвестора визначається ряд показників обсягів очікуваних грошових потоків, значень коефіцієнтів дисконтування, а також розподіл імовірностей кожного із цих значень і величини «дисконтованого доходу» за кожний рік експлуатації і за весь прогнозований період володіння бізнесом. Розрахунковий розподіл імовірностей результуючої суми значень цих складових величин визначає стохастичну оцінку вартості бізнесу для даного конкретного інвестора. Запропонована стохастична оцінка вартості дозволить інвестору більш об'єктивно оцінити різні показники ризику під час купівлі підприємства, визначивши ймовірність того, що різниця між вартістю підприємства, запропованою її справжнім власником, буде не нижчою або не вищою від деякої наперед заданої величини очікуваного прибутку. Табл.: 1. Бібліогр.: 11 назв.

UDC 336.646/648, 330.4

**A probabilistic approach to the assessment of the prospects of buying the business from the point of view of a particular investor / Zack Yu.A.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 23–34.

In accordance with individual plans for a particular investor, a number of indicators of the volume of expected cash flows, the values of coefficients for discounting, as well as the probability distribution of each of these values and the values of "the discounted income" for each year of operation and for the entire predicted ownership period are determined. This probability distribution sums up the probability distribution amount of residual assets. The estimated probability distribution of the resulting sum of the values of these components determines the values of the stochastic estimation of the business value for a given investor. In contrast to conventional approaches, the proposed stochastic valuation will allow the investor to evaluate more objectively the various risk factors when buying the company, determine the probability that the difference between the value of the company proposed by its present owner, will not be lower or higher than the specified in advance value of the expected profit. Tabl.: 1. Refs.: 11 titles.

УДК 519.8:502.3

**Ситуаційно-індуктивне моделювання в задачах прогнозування з використанням екстраполяцій по даним моніторинга / Стефанишин Д.В.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 35–45.

Предложен подход к прогнозированию явлений и процессов с использованием экстраполяций по данным мониторинга, базирующийся на идее ситуационно-индуктивного моделирования. В соответствии с этим подходом результаты ситуационного моделирования в пределах выборочных динамических рядов, которым свойственна монотонность трендов либо квазистационарность поведения переменных моделей на соответствующих интервалах времени, формируют основание для последующего построения индуктивных моделей. Индуктивные модели исполняются как модели «уровней» за результатами ситуационного моделирования. На основе ситуационных моделей в пределах интервалов времени, где ситуационные модели являются адекватными, осуществляется оперативное прогнозирование (в режиме реального времени), а на основе индуктивных моделей, при помощи которых в пределах наблюдаемых данных отслеживается эволюция ситуационных моделей, выполняется срокное прогнозирование с установлением ситуационных моделей для будущих временных периодов. Рис.: 8. Библиогр.: 18 назв.

UDC 519.8:502.3

**Situational and inductive modelling in problems of extrapolation forecasting based on monitoring data / Stefanyshyn D.V.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 35–45.

The approach to forecasting phenomena and processes with extrapolations using monitoring data and based on the idea of situational-inductive modelling is proposed. According to this approach, results of situational modelling within the samples time series, which are characterized by the monotony of trends or quasi stationary behaviour of variables of models at the appropriate time intervals, form the basis for the subsequent construction of inductive models. Inductive models are performed as models of "levels" which are based on the results of the situational modelling. Herewith, on the basis of situational models within intervals where situational models are considered adequate, the operational forecasting (in real time) is carried out, and on the basis of inductive models by means of which within the observed data the evolution of situational models is controlled, the term forecasting is carried out to establish situational models for future time periods. Fig.: 8. Refs.: 18 titles.

УДК 004.942, 004.042, 338.46

**Процесно-орієнтоване проектування програмних комплексів як систем сервісів / Петренко А.І.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 46–56.

Ідея переходу на нову парадигму програмування, пов'язану не з об'єктами, а з бізнес-процесами і їх складовою частиною — бізнес-функціями, — це компонування додатків через виявлення і виклик сервісів, доступних у мережі, для виконання певного завдання. Цей підхід не залежить від конкретних мов програмування і операційних систем і передбачає використання сервіс-орієнтованої архітектури (SOA) додатків, побудованої на основі формалізованих бізнес-процесів, функції яких подані у вигляді багаторазово використовуваних сервісів з прозоро описаними інтерфейсами. Розглянуто побудову систем сервісів для реалізації бізнес-процесів за допомогою процесно-орієнтованих моделей функцій підприємства і онтологій відповідних предметних областей. Рис.: 1. Табл.: 2. Бібліогр.: 18 назв.

UDC 004.942, 004.042, 338.46

**Process-oriented design of software systems as a system service / Petrenko A.I.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 46–56.

Now, it is time to move to a new programming paradigm, not associated with objects and with business processes and their components-business functions. The main idea is to build an application by discovering and using services, available on the network, to perform a certain task. This approach does not depend on specific programming languages and operating systems, and involves the use of service-oriented architecture (SOA) applications, built on the basis of formalized business processes whose functions are represented in the form of reusable services with transparently described interfaces. The article discusses the development of systems of services for the implementation of business processes via a process-oriented business model and features of ontologies of relevant subject areas. Fig.: 1. Tabl.: 2. Refs.: 18 titles.

УДК 004.522, 004.031.6

**Перспективи реалізації встрайвуваних систем автоматического розпознавання речі на базі RISC-мікроконтролерів / Мартынюк І.А.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 57–70.

Реалізація систем автоматического розпознавання речі в якості складової частини звукового інтерфейсу управління інформаційними інтелектуальними системами сприяє підвищенню ефективності взаємодії людини з такими системами. Особливо актуальними на даний момент є дослідження в області встрайвуваних систем автоматического розпознавання. Осуществлен аналіз перспектив реалізації встрайвуваних систем автоматического розпознавання речі на базі високопродуктивних RISC-мікроконтролерів. Обоснованы переваги такої реалізації в порівнянні з іншими рішеннями в цій області. Проведена порівняльна характеристика високопродуктивних серій мікроконтролерів. Исследованы возможности реалізації кожного етапу задачі розпознавання з допомогою мікроконтролерної системи. Рис.: 7. Табл.: 2. Библиогр.: 22 назв.

UDC 004.522, 004.031.6

**Prospects for implementing embedded automatic speech recognition systems based on the RISC microcontrollers / Martynuk I.A.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 57–70.

The implementation of automatic speech recognition systems as a part of the sound interface of intelligent information management systems promotes an increase in the efficiency of human interaction with these systems. Lately, the research in the field of embedded automatic recognition systems is especially of a high interest. This article analyzes the prospects of the implementation of embedded automatic speech recognition systems based on high-performance RISC microcontrollers. The advantages have been substantiated of such an implementation in comparison with other solutions in this area. The characteristics of high performance microcontroller families have been compared. The possibility of implementing each stage of recognition tasks using microcontroller systems has been explored. Fig.: 7. Tabl.: 2. Refs.: 22 titles.

**ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І  
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,  
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ**

**DECISION MAKING AND CONTROL IN  
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND  
SOCIAL SYSTEMS**

УДК 519.6:621.391

**Структурно-параметрическое представление данных на основе методов оптимизации второго порядка / Гарашенко Ф.Г., Дегтярь О.С.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 71–78.

Для роботи с різного типу даними в режимі реального часу виникає необхідність використовувати адаптивні підходи, які дають можливість налаштувати параметри моделі по мірі надходження нової інформації. Представлено алгоритми представлення динамічних потоків даних в заданих структурах, засновані на оптимізації деяких типів невязок. Для побудови моделей пропонується використовувати метод Ньютона, ефективність якого обумовлена його високою збіжністю. Такі підходи націлені на корекцію вектора невідомих параметрів на основі нових спостережень за допомогою розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь. Початкові дані вибрані з урахування оцінок, отриманих на основі теорії практичної стійкості. Проведено чисельний експеримент, в якому порівнюються моделі, побудовані методами оптимізації першого і другого порядку, що підтверджує доцільність використання запропонованих підходів. Рис.: 3. Бібліогр.: 6 назв.

UDC 519.6:621.391

**Structural and parametric data representation using the second order optimization method / Garashchenko F.G., Degtiar O.S.** // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 4. — P. 71–78.

Working with various data sources in real-time requires approaches capable of adaptive parameters tuning. We propose algorithms that represent dynamic data streams in apriori defined structures. The algorithms are based on the certain error minimization. The used method is Newton's method, which is appropriate because of its high convergence. At every step, when the new data are received we make corrections to the unknown parameters vector by solving differential equations systems. Initial values are selected using estimates obtained from the practical stability theory. The computational experiment was conducted to compare models based on the first and second order optimization approaches. It confirms the effectiveness of our approach. Fig.: 3. Refs.: 6 titles.

---

УДК 519.8(075.8)

**Багатокритеріальні задачі прийняття рішень в нечітких умовах / Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П.** // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 4. — С. 79–87.

Розглянуто багатокритеріальні задачі прийняття рішень в нечітких умовах (БКНП). Уведено поняття парето-оптимального розв'язку та найкращого компромісного розв'язку рівня  $\alpha$  БКНП- задачі. Сформульовано та доведено теореми, які встановлюють взаємозв'язки між ними. Запропоновано метод розв'язання БКНП-задачі на основі пошуку компромісних розв'язків рівня  $\alpha$ . Наведено приклад розв'язання багатокритеріальної задачі лінійного програмування з нечіткими параметрами, який ілюструє запропонований підхід, та проведено його порівняння з компромісним розв'язком цієї задачі в чіткій постановці. Рис.: 2. Бібліогр.: 6 назв.

UDC 519.8(075.8)

**Multicriteria decision-making problems under fuzzy conditions / Zaychenko E.Yu., Zaychenko Yu.P.** // *System Research and Informational Technologies*. — 2016. — № 4. — P. 79–87.

Multicriteria problems of decision-making under the uncertainty are considered. For such problems, pareto-optimal solutions and best compromise solutions of level  $\alpha$  are introduced. The corresponding theorems determining their interconnections are formulated and proved. The method for solving the considered problem is suggested based on the search of optimal compromise solutions of level  $\alpha$ . The example of solving a multicriteria linear programming problem with fuzzy parameters is presented demonstrating the suggested approach. Also, the comparison of solutions for non-fuzzy and fuzzy problems is performed. Fig.: 2. Refs.: 6 titles.

---

УДК 519.004.942

**Аналіз ядра атомного реактора Чорнобильської атомної станції за 5 секунд до вибуху у тривимірному сферичному просторі / Мацукі Й., Бідюк П.І.** // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 4. — С. 88–94.

Проаналізовано потік води та порожнечі (бульбашкові включення) ядра атомного реактора Чорнобильської атомної станції за 5 секунд до вибуху з використанням математичної моделі у тривимірній сферичній системі координат. Для вирішення задачі цей феномен розглянуто за аналогією із законом всесвітнього тяжіння та проаналізовано з використанням методу Шварцшильда. Розраховано радіус сферичного простору води та порожнечі, що вказує на граничне значення, за якого ядро реактора втратило здатність контролювати потужність. Виконано аналіз за регресійним методом за допомогою експоненціальної моделі і підтверджено вплив порожнечі та води на потужність реактора. Рис.: 3. Табл.: 2. Бібліогр.: 3 назв.



УДК 519.004.942

**Анализ ядра атомного реактора Чернобыльской атомной станции за 5 секунд до взрыва в трехмерном сферическом пространстве / Мацуки Й., Бидюк П.И.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 88–94.

Проанализированы поток воды и пустоты (пузырьковые включения) ядра атомного реактора Чернобыльской атомной станции за 5 секунд до взрыва с использованием математической модели в трехмерной сферической системе координат. Для решения проблемы этот феномен рассмотрен по аналогии с законом всемирного тяготения и проанализирован с использованием метода Шварцшильда. Рассчитан радиус сферического пространства воды и пустот, указывающий на максимальный предел, при котором ядро реактора утратило способность контролировать мощность. Выполнен анализ регрессионным методом с помощью экспоненциальной модели и подтверждено влияние пустот и воды на мощность реактора. Рис.: 3. Табл.: 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.86

**Об алгоритмах определения состояний равновесия открытой экономической системы при наличии монополистов / Махорт А.Ф.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 95–107.

Исследована открытая экономическая система, сформированная ненасыщающимися потребителями. Часть потребителей способна производить товары. Используются принципы равновесия вальрасового типа. Применено приближение модели экономики с постоянными интересами потребителей. Предложен алгоритм решения задачи об экономическом равновесии, который учитывает возможность зависимости потребительских предпочтений субъектов экономической системы от дополнительных характеристик. Полученные ограничения на модельные характеристики обеспечивают существование равновесия такой экономической системы. Определены состояния равновесия с характеристиками, принадлежащими заданным интервалам значений. Указано на связь между выбором стратегии налогообложения и реализацией конкретного состояния равновесия экономической системы. Библиогр.: 7 назв.

UDC 519.86

**On algorithms of a determination of equilibrium states of an open economy under presence of monopolies / Makhort A.P.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 95–107.

There is an open economy created by insatiable consumers. The part of consumers can produce own goods. The equilibrium principles are of a Walrasian type. The model uses the approach of an economy with regular interests of consumers. There is an algorithm for solving the equilibrium problem. The algorithm takes into account a possibility of consumers interests of subjects of the economy depended on additional characteristics. Obtained limitations of model characteristics of the economy prove an equilibrium existence. The characteristics of discovered equilibrium states belong to a defined area of values. The relation between a selection of a taxation strategy and the realization of a particular equilibrium state is indicated. Refs.: 7 titles.

УДК: 519.8 (075.8)

**Інтегрована система аналізу і прогнозування нестационарних процесів / Гасанов А.С.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 108–119.

Запропоновано інтегровану систему аналізу і прогнозування часових нестационарних рядів з метою підвищення адекватності розроблених моделей нестационарних процесів, а також методик моделювання нестационарних процесів, яка складається з підготовки даних, оцінювання структури і параметрів моделі, обчислення оцінок прогнозів. Наведено приклади використання цієї системи для аналізу і прогнозування утворення цін на продукцію виробничої фірми та прогнозування фінансових процесів. Отримані результати свідчать про те, що інтегрована система аналізу, моделювання та прогнозування нестационарних процесів виконує автоматизоване оброблення даних, визначає автоматично клас і структуру моделі, здійснює вибір кращих прогнозувальних моделей. Рис.: 4. Бібліогр.: 5 назв.

UDC: 519.8 (075.8)

**Integrated system analysis and forecasting of non-stationary processes / Gasanov A.S.** // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 108–119.

This article proposes an integrated system analysis and forecasting of non-stationary time series in order to improve the adequacy of the developed models of non-stationary processes. The methodology is proposed for modeling non-stationary processes that includes the following stages: the preliminary data processing, estimation of the model structure and its parameters, computing of forecasts estimates. Examples are provided of the use of this system for the analysis and prediction of prices of Food Production Company and for the financial processes prediction. The results

indicate that the integrated system for the analysis, modeling, and forecasting of non-stationary processes performs automated processing of data, automatically determines the structure of the model, and selects the best forecasting models. Fig.: 4. Refs.: 5 titles.

---

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І  
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ  
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,  
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR  
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 539.3

**Модельовання контактної взаємодії п'єзоелектричного півпростору і пружної ізотропної основи з приповерхневою виїмкою кругового перерізу / Кирилюк В.С., Левчук О.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 120–132.**

Розвинуто математичну модель контакту у разі стискання електропружного півпростору з пружною ізотропною основою, яка містить пологу виїмку кругового перерізу. Модель ґрунтується на розгляді зв'язаної системи рівнянь електропружності. Запропоновано два алгоритми для розв'язання проблеми, які ґрунтуються на поданні розв'язку рівнянь електропружності. Знайдено аналітичний розв'язок задачі, визначено геометричні розміри зазору між електропружним півпростором і деформованою основою за відомих стискальних зусиль. Для ряду п'єзоелектричних матеріалів на основі математичного моделювання проведено числові дослідження контактної взаємодії. Вивчено вплив зв'язаності силових і електричних полів на параметри контакту тіл. Виявлено характерні механічні ефекти. Рис.: 3. Бібліогр.: 11 назв.

UDC 539.3

**Modeling of contact interaction of piezoelectric half-space and elastic isotropic base with surface groove of circular section / Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 120–132.**

The mathematical model for the contact interaction under the compression of an electroelastic half-space with the elastic isotropic base containing a sloping groove of a circular section was developed. The model takes in account the connectedness of the electroelastic equations system. Two algorithms for solving the problem were proposed, which were based on the representation of solutions of the electroelasticity equations. The analytical problem solution was found, geometrical parameters of clearance between the electroelasticity half-space and deformable base under the known compression were obtained. The influence of connectedness of force and electricity fields on contact parameters of bodies was investigated. Fig.: 3. Refs.: 11 titles.

---

УДК 517.94

**Нахождение периодических решений обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием / Бохонов Ю.Е. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 133–140.**

Предложен подход к нахождению периодических решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием. Известен численно-аналитический метод нахождения периодических решений для обыкновенных уравнений, обобщающийся на уравнения с запаздыванием, в котором уравнение второго порядка сводится к системе первого порядка. В предлагаемом методе исследовано само уравнение без сведения его к системе. Построена функция Грина для самосопряженного дифференциального оператора второй производной, определенного на функциях, удовлетворяющих периодическим краевым условиям. Приведены необходимые и достаточные условия существования периодических решений уравнения. Получена оценка скорости сходимости приближенных вычислений. Библиогр.: 7 назв.

UDC 517.94

**Finding of periodic solutions of the ordinary nonlinear second order differential equation with the delay / Bokhonov Yu.I. // System Research and Informational Technologies. — 2016. — № 4. — P. 133–140.**

The work suggests an approach to finding of periodic solutions of the nonlinear delayed second order differential equations. There exists a numerical-analytical method that is generalized for delayed equations and whose idea is to reduce the equation to the system of the first order. The suggested approach explores the equation itself without its reduction to the system of the first order. The Green function for the self-adjoint differential operator of the second derivative is built, that is defined on functions that satisfy periodic boundary conditions. The necessary and sufficient existence conditions of the periodic equation solutions are given. The estimation for the rate of convergence of the method of approximate calculations is obtained. Refs.: 7 titles.

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Бідюк Петро Іванович,**

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Бохонов Юрій Євгенович,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Гаращенко Федір Георгійович**

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

**Гасанов Айдін Сардаз огли,**

старший науковий співробітник, кандидат технічних наук, доцент, здобувач Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Дегтяр Ольга Сергіївна,**

кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

**Зайченко Олена Юріївна,**

доктор технічних наук, професор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Зайченко Юрій Петрович,**

професор, доктор технічних наук, професор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Зак Юрій Олександрович,**

доктор технічних наук, науковий експерт і консультант, Німеччина, Аахен

**Кирилюк Віталій Семенович,**

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ

**Левчук Ольга Іванівна,**

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ

**Мартинюк Ігор Андрійович,**

аспірант кафедри інформаційних систем та математичних дисциплін Європейського університету, Україна, Київ

**Махорт Андрій Пилипович,**

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник лабораторії математичного моделювання відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

**Мацукі Йошіо,**

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Мілявський Юрій Леонідович,**

кандидат технічних наук, старший викладач кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Недашківська Надія Іванівна,**

кандидат технічних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», докторант НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Петренко Анатолій Іванович,**

академік Академії інженерних наук, професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри системного проектування Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Романенко Віктор Демидович,**

професор, доктор технічних наук, заступник директора з науково-педагогічної роботи Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Україна, Київ

**Стефанишин Дмитро Володимирович,**

доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

Зміст журналу  
«Системні дослідження та інформаційні технології»  
за 2016 р.

**ЗМІСТ № 1**

<i>Поліщук Д.О., Поліщук О.Д., Яджак М.С.</i> Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: IV. Інтерактивне оцінювання .....	7
<i>Качинський А.Б., Молочено Д.Р.</i> Індикатор могутності держави — важливий інструмент системного аналізу та стратегічного планування у сфері національної безпеки .....	17
<i>Тарнавський Ю.А.</i> Інструментальні засоби створення конструктивних креслень геологічних розрізів .....	26
<i>Святний В.А., Бровкіна Д.Ю.</i> Сучасні тенденції в автоматизації промислових комплексів .....	32
<i>Мельник І.В.</i> Аналіз особливостей моделювання електронних схем у програмному комплексі Simulink на прикладі транзисторного підсилювача .....	40
<i>Сергієнко А.М., Сімоненко В.П.</i> Складання розкладу для графів синхронних потоків даних .....	51
<i>Ганчукова Д.В., Подладчиков В.М.</i> Пошук закономірностей динаміки артеріального тиску на основі апроксимації експериментальних даних за критерієм гладкості .....	63
<i>Козуля Т.В., Ємельянова Д.І.</i> Теоретико-методичні основи комплексного аналізу та оцінювання екологічності природно-техногенних об'єктів .....	73
<i>Zaychenko Yuri, Sidoruk Inna.</i> Problem of fuzzy portfolio optimization and its solution with application of forecasting methods .....	85
<i>Зіменков Д.К., Сільвестров А.М., Скринник О.М.</i> Ідентифікація нелінійних статичних залежностей з динаміки електротехнічних систем .....	99
<i>Ємець О.О., Барболіна Т.М.</i> Лінійні оптимізаційні задачі на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю: властивості і розв'язання .....	107
<i>Зак Ю.А.</i> Некоторые детерминированные модели задач нечеткого линейного программирования .....	120
<i>Трофимчук О.М., Кряжич О.О.</i> Апроксимація функцій для створення алгоритму опису пересіченої місцевості .....	134
Реферати .....	142
Відомості про авторів .....	149

**ЗМІСТ № 2**

<i>Статкевич В.М.</i> Связь сетей Петри с бесскобочной польской записью .....	7
<i>Забелин С.И.</i> Генетический алгоритм защиты SDN от сетевых атак .....	14
<i>Сергієнко А.М., Сімоненко В.П., Сімоненко А.В.</i> Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределенных вычислительных системах .....	20
<i>Zavertanuy V., Makarenko A.</i> Aggressive and peaceful behavior in multiagent systems on cellular space .....	36
<i>Козуля Т.В., Шаронова Н.В., Білова М.О., Козуля М.М.</i> Інформаційні особливості визначення оцінки відповідності стану екологічності системних об'єктів .....	45
<i>Гладка О.М.</i> Системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів у багатозв'язних криволінійних LEF-пластах .....	58
<i>Яковлева А.П., Курдуп І.О.</i> Дослідження задач знаходження оптимального розподілу ресурсів між підприємствами .....	74
<i>Краснюк Р.П., Цегелик Г.Г.</i> Оптимізація планування розподілу завдань і транспортування пакетів даних у розподіленій обчислювальній мережі .....	81
<i>Павлюк Ю.Р., Подладчикова О.В., Подладчиков В.М.</i> Застосування епіполярної геометрії для стереоскопічного аналізу корональної хвилі .....	92
<i>Кузнєцова Н.В.</i> Виявлення та оброблення невизначеностей у формі неповних даних методами інтелектуального аналізу .....	104
<i>Романчук К.Г., Стефанишин Д.В.</i> Сценарний підхід та метод Байєса для оцінювання ризиків системних аварій на гідровузлах .....	116
<i>Спекторский И.Я.</i> Последовательности функций и ряды Тейлора с нечетким комплексным аргументом .....	125
Реферати .....	141
Відомості про авторів .....	149

### ЗМІСТ № 3

<i>Мельник І.В., Тугай Б.А., Тугай С.Б.</i> Моделювання та апроксимація залежності струму електронної гармати високовольтного тліючого розряду від напруги на обмотці електромагнітного натікача як елемента газодинамічної системи керування.....	7
<i>Гладун А.Я., Рогушина Ю.В.</i> Застосування онтологічного аналізу для оцінювання компетентності фахівців з розроблення національних стандартів .....	19
<i>Yoshio Matsuki, Petro I. Bidiuk</i> Empirical analysis of Chernobyl nuclear reactor core for 5 seconds before the explosion .....	33
<i>Симоненко В.П., Сергиенко А.М.</i> Динамическое распределение работ по ресурсам в неоднородной системе с ограничениями реального времени .....	42
<i>Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д., Стефанишин Д.В.</i> Прийняття рішень у природокористуванні з урахуванням ризику невикористаних можливостей на підставі попарного порівняння альтернатив .....	51
<i>Терпіль С.О., Макаренко О.С.</i> Аналіз розподілу електоральних полів з використанням мережевих структур .....	63
<i>Кірик О.Є.</i> Розв'язання нелінійних оптимізаційних задач розподілу ресурсів у великих блочно-структурованих системах зі зв'язуючими параметрами .....	72
<i>Гаращенко Ф.Г., Сопронюк О.Л.</i> Аналіз практичної стійкості та чутливості лінійних динамічних систем зі зміною вимірності фазового простору .....	86
<i>Андреев Н.В., Статкевич В.М.</i> Некоторые задачи управления неоднородными процессами рождения и гибели .....	101
<i>Кирилюк В.С., Левчук О.И.</i> Математическое моделирование контактного взаимодействия жесткой основы с приповерхностной осесимметричной выемкой и электроупругого полупространства .....	118
<i>Zrazhevskya N.G., Zrazhevsky A.G.</i> Classification of methods for risk measures VaR and CVaR calculation and estimation .....	126
Реферати .....	142
Відомості про авторів .....	149

### ЗМІСТ № 4

<i>Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.</i> Синтез следящей системы управления неустойчивыми импульсными процессами в иерархических когнитивных картах сложных систем .....	7
<i>Недашківська Н.І.</i> Оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь .....	14
<i>Зак Ю.А.</i> Вероятностный подход к оценке перспективности покупки бизнеса конкретным инвестором .....	23
<i>Стефанишин Д.В.</i> Ситуаційно-індуктивне моделювання в задачах екстраполяційного прогнозування за даними моніторингу .....	35
<i>Петренко А.И.</i> Процессно-ориентированное проектирование программных комплексов как систем сервисов .....	46
<i>Мартинюк І.А.</i> Перспективи реалізації вбудованих систем автоматичного розпізнавання мови на базі RISC-мікроконтролерів .....	57
<i>Гаращенко Ф.Г., Дегтяр О.С.</i> Структурно-параметричне подання даних на основі методів оптимізації другого порядку .....	71
<i>Зайченко Е.Ю., Зайченко Ю.П.</i> Многокритериальные задачи принятия решений в нечетких условиях .....	79
<i>Matsukiv Y., Bidiuk P.I.</i> Analysis of the nuclear reactor core of Chernobyl Power Plant for 5 seconds before explosion with the three-dimensional spherical space .....	88
<i>Махорт А.П.</i> Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів .....	95
<i>Гасанов А.С.</i> Интегрированная система анализа и прогнозирование нестационарных процессов .....	108
<i>Кирилюк В.С., Левчук О.И.</i> Моделирование контактного взаимодействия пьезоэлектрического полупространства и упругой изотропной основы с приповерхностной выемкой кругового сечения .....	120
<i>Бохонов Ю.Є.</i> Знаходження періодичних розв'язків звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку із запізненням .....	133
Реферати .....	141
Відомості про авторів .....	147
Зміст журналу «Системні дослідження та інформаційні технології» за 2016 р. ....	148
Автори статей за 2016 р. ....	150
<i>Системні дослідження та інформаційні технології, 2016, № 4</i> .....	149

## АВТОРИ СТАТЕЙ ЗА 2016 р.

Андрєєв Микола Варфоломійович, № 3  
Барболіна Тетяна Миколаївна, № 1  
Бідюк Петро Іванович, № 3, 4  
Білова Марія Олексіївна, № 2  
Бохонов Юрій Євгенович, № 4  
Бровкіна Данієлла Юріївна, № 1  
Ганчукова Дар'я Володимирівна, № 1  
Гарашенко Федір Георгійович, № 3, 4  
Гасанов Айдин Сардаз огли, № 4  
Гладка Олена Миколаївна, № 2  
Гладун Анатолій Ясонович, № 3  
Дегтяр Ольга Сергіївна, № 4  
Ємельянова Дар'я Ігорівна, № 1  
Ємець Олег Олексійович, № 1  
Забелін Станіслав Ігорович, № 2  
Завертаний Валентин Вікторович, № 2  
Зайченко Олена Юріївна, № 4  
Зайченко Юрій Петрович, № 1, 4  
Зак Юрій Олександрович, № 1, 4  
Зіменков Дмитро Костянтинович, № 1  
Зражевська Наталія Григорівна, № 3  
Зражевський Олексій Григорович, № 3  
Качинський Анатолій Броніславович, № 1  
Кирилюк Віталій Семенович, № 3, 4  
Кірік Олена Євстафіївна, № 3  
Козуля Марія Михайлівна, № 2  
Козуля Тетяна Володимирівна, № 1, 2  
Краснюк Роман Петрович, № 2  
Кряжич Ольга Олександрівна, № 1  
Кузнєцова Наталія Володимирівна, № 2  
Курдуп Іван Олександрович, № 2  
Левчук Ольга Іванівна, № 3, 4  
Макаренко Олександр Сергійович, № 2, 3  
Мартинюк Ігор Андрійович, № 4  
Махорт Андрій Пилипович, № 4  
Мацукі Йошіо, № 3, 4  
Мельник Ігор Віталійович, № 1, 3  
Мілявський Юрій Леонідович, № 4  
Молоченко Дар'я Романівна, № 1  
Недашківська Надія Іванівна, № 4  
Павлюк Юлія Русланівна, № 2  
Петренко Анатолій Іванович, № 4  
Подладчіков Володимир Миколайович, № 1, 2  
Подладчікова Олена Володимирівна, № 2  
Поліщук Дмитро Олександрович, № 1  
Поліщук Олександр Дмитрович, № 1  
Рогущина Юлія Віталіївна, № 3  
Романенко Віктор Демидович, № 4  
Романчук Катерина Геннадіївна, № 2  
Святний Володимир Андрійович, № 1  
Сергієнко Анатолій Михайлович, № 1, 2, 3  
Сидорук Інна Анатоліївна, № 1  
Сільвестров Антон Миколайович, № 1  
Сімоненко Андрій Валерійович, № 2  
Сімоненко Валерій Павлович, № 1, 2, 3  
Скринник Олексій Миколайович, № 1  
Сопронюк Ольга Лук'янівна, № 3  
Спекторський Ігор Якович, № 2  
Статкевич Віталій Михайлович, № 2, 3  
Стефанишина-Гаврилюк Юлія Дмитрівна, № 3  
Стефанишин Дмитро Володимирович, № 2, 3, 4  
Тарнавський Юрій Адамович, № 1  
Терпіль Євген Олександрович, № 3  
Трофимчук Олександр Миколайович, № 1  
Тугай Борис Андрійович, № 3  
Тугай Сергій Борисович, № 3  
Цегелик Григорій Григорович, № 2  
Шаронова Наталія Валеріївна, № 2  
Яджак Михайло Степанович, № 1  
Яковлева Алла Петрівна, № 2