

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО–ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 1

2017

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, проф., д.т.н., Україна

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Т.Л. СААТІ, проф., США

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тел.: **204-81-44**; факс: **204-81-44**

E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

<http://journal.iasa.kpi.ua>

У номері:

• **Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних та соціальних системах**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

• **Методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 1

2017

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Prof., Ukraine

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,
Russia

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTSEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

T.L. SAATY, Prof., USA

L. SAKALAUSKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

• **Theoretical and applied problems and methods of system analysis**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

• **Methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНТІ РАН, РІНЦ.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**
Редактор **Р.М. Шульженко**
Молодший редактор **Л.О. Тарин**
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 21.03.2017. Формат 70x108/16.
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

Видавництво «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
Тел. (044) 204-81-78
Наклад 120 пр. Зам. № 16-163

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

1 • 2017

ЗМІСТ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ	
<i>Pankratova N.D., Slota M.R.</i> Model of assessment the level of danger situations in the tasks of functioning of complex objects	7
<i>Лазаренко І.С., Пишинограєв І.О.</i> Оцінювання рівня соціальної динаміки та перспектив розвитку суспільства, заснованого на знаннях	20
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Данилов В.Я., Жиров О.Л., Бідюк П.І.</i> Оцінювання кредитних ризиків методами інтелектуального аналізу даних	33
<i>Дубиніна С.В., Бідюк П.І.</i> Застосування методів інтелектуального аналізу даних до розв'язання задач актуарного моделювання та оцінювання фінансових ризиків	49
<i>Козуля Т.В., Білова М.О.</i> Інформаційно-методична основа визначення оцінки екологічності складних природно-техногенних об'єктів	65
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	
<i>Zavertanyu V., Makarenko A.</i> Genotype dynamic for agent neuroevolution in artificial life model	75
<i>Зак Ю.А.</i> Fuzzy-регрессионные модели в условиях наличия в статистической выборке нечисловой информации	88
<i>Громов В.А.</i> Алгоритм построения бифуркационной картины нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана	97
<i>Гарт Л.Л.</i> Проекционно-итерационная реализация явных методов вариационного типа для решения некорректных операторных уравнений	114
МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	
<i>Shadura O., Petrenko A., Svistunov S.</i> Multivariate convergence-targeted operator for the genetic algorithm	126
Реферати	141
Відомості про авторів	148

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

1 • 2017

CONTENTS

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS	
<i>Pankratova N.D., Slota M.R.</i> Model of assessment the level of danger situations in the tasks of functioning of complex objects	7
<i>Lazarenko I.S., Pyshnograiev I.O.</i> Estimation of social dynamics and development prospects of knowledge society	20
DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS	
<i>Danylov V.Ya., Jirov O.L., Bidyuk P.I.</i> Estimation of credit risks using the data mining methods	33
<i>Dubinina S.V., Bidyuk P.I.</i> Application of data mining methods to solving the problems of actuarial modeling and estimation of financial risks	49
<i>Kozulia T.V., Bilova M.O.</i> Information and methodological basis for the definition of complex ecological assessment of natural and man-made objects	65
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Zavertanyy V., Makarenko A.</i> Genotype dynamic for agent neuroevolution in artificial life model	75
<i>Zack Y.A.</i> Fuzzy-regression models under conditions of the presence of non-numeric data in the statistical sample	88
<i>Gromov V.A.</i> Algorithm to construct bifurcation structure of non-linear boundary problem for von Karman equations	97
<i>Hart L.L.</i> Projection-iteration implementation of explicit variation type methods of solving ill-posed operator equations	114
METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND CONTROL IN CONDITONS OF RISK AND UNCERTAINTY	
<i>Shadura O., Petrenko A., Svistunov S.</i> Multivariate convergence-targeted operator for the genetic algorithm	126
References	141
Information about the authors	148

**MODEL OF THE LEVEL ESTIMATION OF DANGER
SITUATIONS IN THE PROBLEMS OF COMPLEX OBJECTS
OPERATION**

N.D. PANKRATOVA, M.R. SLOTA

Abstract. The model of information support estimation of the decision maker (DM) based on a study of qualitative indicators of informedness, which characterizes the completeness, accuracy and timeliness of DM informedness, is presented. On the basis of these characteristics the level of danger situations in the operation of complex objects is formed. In implementing the model are used the methods of one-parameter classification with operations of fuzzy sets and strong intersections, as well as methods of interval classification with the operations of union and intersection of fuzzy sets, and also with operations of strong union and intersection of fuzzy sets. The proposed methods allow classifying the situation to inform DM about the validity and security of the decision with the available information support. The proposed model is based on a study of qualitative characteristics of informedness of DM and can be used to estimate the level of danger situations in the problems of the complex objects operation.

Keywords information analysis, qualitative characteristics of informedness, classification, recognition, danger level, integrated indicator of informedness.

INTRODUCTION

Reality constantly requires of reasonable administrative decisions, such as implementation of innovative technologies, companies moving to the new markets, complex technical systems management, and the solution of complex social issues. Decision making — generally speaking, is the result of the intellectual activity based on the specific information, their experience, knowledge and intuition that allows decision-makers move to a certain conclusion on the way to the necessary actions. Well-grounded decision should be aimed at achieving the desired results in a certain field.

Modern technologies has greatly facilitated and improved the process of forming solutions. Nowadays, there are numerous tools and software products that are based on mathematical modeling, forecasting, prediction, which allow to form effective management decisions. However, analysis of the global crashes and disasters that have taken place over the past decades shows that the scale of the losses can be substantially reduced due to the timely formation and realization

of the rational solutions in the emergency and critical situations. The key problem is the timely and reliable information support of decision-makers.

Information analysis is a vital tool for formalization and solving of system problems. Its objectives are to ensure of the necessary and technologically possible level of information support reliability and validity of the decision on applied systems tasks, and this is an important tool for decision-makers support and the process of decision. The issue of data analysis is quite relevant in our time and therefore many scientists around the world bring variations of their problem vision and mathematical formulations for effective solutions that have long been set, but still haven't completely solved tasks.

The main feature of the existing approaches and methods is that they are focused primarily on evaluation the amount of data only. But practically data of quality indicators, such as completeness, reliability, timeliness, and several others are not estimated. At the same time validity and the effectiveness of the application system tasks solutions directly depend not only on the quantity of information, but also on its qualitative characteristics [1].

Several authors have focused their attention on the analysis of the qualitative characteristics of a specific information type, in particular the financial [2–4]. Some researchers have suggested methods for converting qualitative characteristics into quantitative. And, as a consequence, processing of these characteristics is made via usual for mathematicians methods [5, 6].

Development of American scientists in this direction aimed at the financial sector and focused on the development of useful and interesting for large financial corporations methods. For instance, the paper [4] contains some interesting ideas about the formalization process of the selections phase of useful information for the formation of an investment portfolio. The paper presents not only theoretical knowledge, but also the general mathematical formulation and results of researches. The authors also provided the main advantages and disadvantages of proposed methodologies and how business can be developed using the efficiency of their activities.

In the papers the questions of informational analysis from the perspective of decision-maker's study of the quantitative and qualitative characteristics of information, evaluation of their impact on the accuracy, completeness and timeliness of systemic task solution were considered [8–10].

In this article, we consider the model of information support evaluation of decision-makers that is based on qualitative indicators of their informedness, on the basis of which the level of situation danger is formed and the decision-making procedure is provided.

PECULIARITIES OF THE TASKS CLASSIFICATION AND CRITICAL SITUATION RECOGNITION IN THE INFORMATION ANALYSIS

Taking into account the construction of a general theory of the mathematical model and analysis of information, we define key features in the formulation the problem of the situations recognitions and its classification.

In general, tasks that are under consideration in model assessment of decision-maker's information support are also similar to a conventional pattern of

tasks recognition, including many mathematical classification methods. Each situation from the variety of object recognition, as well as image, may be classified according to certain set of attributes for a specific class. The main goal is to build such a rule (functional), which allows to classify objects of observation with the lowest possible error.

However, within the framework of the system approach there are additional conditions which are not considered in the conventional pattern recognition tasks. There are some of the most essential.

1. Analysis of qualitative characteristics of information substantially depends on the subject area and so each application is unique in its own way and will require an individual approach to its formalization.

2. In the process of analysis and classification there is no guarantee of the input data completeness.

3. Formation of the qualitative characteristics of information often has a fuzzy character.

4. Unlimited space recognition features significantly complicates the process of situations classification.

5. Because of the lack of criteria for assessing the critical situation there are some difficulties with error estimation of constructed models.

Therefore, to solve such tasks it's advisable to use a set of new models, methods, techniques to determine the level of result consistency. Also, it is worth considering the fact that the analysis of the qualitative characteristics of information involves the development of methods for the transformation of these characteristics in the numerical equivalents. These methods should be integrated into the general mathematical model of system tasks, as shown in [8].

Based on the characteristics of the above we formulate the most important requirements for the models and methods that can be applied to tasks of classification and recognition level of danger situations.

1. Consideration of the fuzziness and incompleteness of the initial information.

2. Focusing on the processing of large quantities of data in real time.

3. Performance of methods to ensure the timely formation of the results.

4. The lack of standard training sample in the form of a finite set of data about the characteristics of each class of the accepted classification is determined by the principal unbounded feature space.

The concept of informedness is important for the analysis of information support of decision-makers [8]. Under the informedness of decision-makers will understand the change in the level of uncertainty of knowledge about a situation or object of analysis as a result of receiving information. The level of informedness of decision-makers is an indicator of the knowledge level about the subject of analysis or research. Quantitatively, awareness of decision-makers will be characterized by the magnitude of the level of uncertainty resulting from the changes of knowledge information. Pay attention to the fundamentally important factor: with receiving information knowledge level of uncertainty can be reduced, if the information is accurate, but it may also increase if the information is intentionally distorted (i.e. received misinformation) or invalid (i.e. not confirmed by experience calculations, documents or otherwise), or contrary to the available information.

The level of uncertainty of knowledge may be evaluated on the basis of different approaches. In particular, it can be estimated on the basis of the adaptation of quantitative methods described in [1, 5] or using the methods [10].

Let us note only the most essential qualitative properties of information, which are fundamentally important in solving problems of systems analysis, in particular, problems of estimation of the degree and level of risk in normal, abnormal, and critical situations. Among these properties are uncertainty, inaccuracy, incompleteness, fuzziness, untimeliness, noncredibility, and contradictoriness. It is evident that the formed decision should have the required level of quality and efficiency. For this, during its formation, it is necessary both to provide appropriate levels of completeness, reliability and timeliness of informedness of the situation in order to minimize the extent and level of risk. Determining the most important features from the perspective of decision-makers, in systems analysis are completeness, reliability and timeliness. Therefore, the qualitative characteristics of decision-makers awareness will determine the following properties [8]:

Completeness of informedness is a property that characterizes the conformity of the quantity of information received by a decision maker to the quantity of information required for decision making.

Timeliness of informedness is a property that determines the conformity of a decision maker's time resource for forming and making decisions to the time resource from the moment of receiving information to the moment of solution realization.

Credibility of informedness is a property that characterizes the conformity of the information received by a decision maker to the actual state of the situation.

It should be noted that the results of the solution of system tasks are directly dependent on the level of decision makers informedness (DMI).

In this case, proceed as follows [9].

1. Form indicators of completeness I_N , timeliness I_T , and credibility I_C of decision makers informedness, that will take into account the degree and the level of influence of each of the input parameters on the degree of the decision-maker's objectives achievement.

2. Offer the classification of a given set of situations S_0 according to a single system of interrelated indicators I_N, I_T, I_C or according to a single integrated indicator of DMI.

3. To develop techniques and procedures of the specific situation recognition supplies S_K from a given set of situations S_0 to a certain class of objects to the introduced classification.

When forming the general level of DMI the specific properties and introduced indicator's features I_N, I_T, I_C should be taken into account. Here are the most important properties of these indicators:

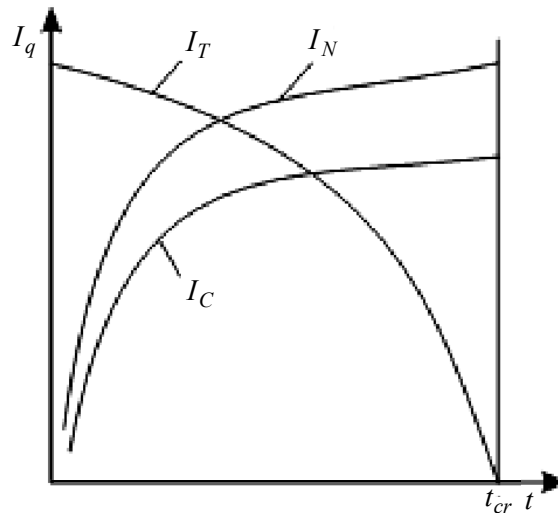
- the level of DMI is growing continuously from the increasing of all of the indicators I_N, I_T, I_C or from one of it;
- if the level of general DMI increases in its completeness, credibility and timeliness it changes according to non-linear law, in particular: the growth of DMI level gradually slows down as it approaches completeness of performance and credibility to their limits (Figure);

- the level of DMI of the integral index in case of reducing the value of a private performance below a certain threshold value cannot be compensated by increasing the values of other indicators;

- with zero meaning of any of the indicators I_N, I_T, I_C general level of DMI of the integral index is also zero.

During the solution formation, which starts at the moment $t = t_{fn} = 0$ and

ends at the moment $t = t_{cr}$, the additional information is received, and this leads to an increase in the completeness, credibility and the amount of information. It follows that the completeness and credibility indicators I_N, I_C in general are the increasing functions of time. However, for the indicator of timeliness I_T the dependence is qualitatively different, due to the tight interrelation since the end of the formation of decision and the moment of its implementation. Given the fact that the time realization is fixed and it is determined by external factors, it



Distribution of qualitative characteristics of awareness

is possible to state that the index of timeliness is a decreasing function of time [8].

From the above it follows that there is a contradiction between the level of completeness and credibility of DMI on the one hand, and the level of timeliness on the other. Therefore practically important task is to find a rational compromise between the levels I_N, I_T, I_C in the process of decision formation taking into account the requirements of the reduction of time during its formation. To solve this task it is needed to take into account the dependence I_N, I_T, I_C from time that is to put $I_N = I_N(t), I_T = I_T(t), I_C = I_C(t)$.

The functional dependence of the parameters is determined for variety of situations S_0 . It is more convenient to represent this relationship in the form of polynomials. Firstly, it makes it possible to determine the polynomial coefficients by usage of known techniques of interpolation, and secondly, according to the theorem of Weierstrass any continuous function polynomial can be approximated by polynomial with any desired accuracy. Therefore, hereinafter:

$$I_C(t) = \sum_{k=0}^{N_C} a_C t_k \quad (1)$$

$$I_N(t) = \sum_{k=0}^{N_N} a_N t_k \quad (2)$$

$$I_T(t) = \sum_{k=0}^{N_T} a_T t_k \quad (3)$$

THE CONSTRUCTION OF THE MODEL FOR DETERMINING THE RISK SITUATION

Construction of the task solution model for the classification and determination of the danger level of the situation involves the following steps.

Step 1. Classification of hazard classes of possible situations and the definition of a set of risk factors. Depending on the subject area and the specific application task the first stage it is necessary to carry out procedures that will implement the peculiarities of the classification. First of all, we need to create classes on the level of danger of the critical situations that denote the variety

$$\Omega = \{\omega_k, k = 1..K\} . \quad (4)$$

Each class of danger should be characterized by a certain criterion in the form of membership function. Universal set is determined. Most often, the universal set X is defined by time interval $[0, T_{cr}]$, where T_{cr} is the time of decision making. After this point of time even the most reliable information is of no value.

During the system operation there is an influence of its sets of uncontrollable risk factors

$$\Phi = \{\Phi_j | j = 1..m\} . \quad (5)$$

The final step for the first stage is to define a set of situations

$$S = \{S_i | i = 1..n\} . \quad (6)$$

Each situation S_i from the variety (6) under the influence of risk factors (5) may move to a different danger class ω_k (4). Such change may occur over a period of time, and its duration is unknown a priori, and that depends on the amount and duration of exposure properties $\Phi_j \in \Phi$.

It is necessary to define a valid period of time T_0 for the formation and implementation of solutions for which the probability of a transition situation S_i in one of the danger classes (4) will not exceed the predetermined value $\eta = \eta_{ad}$.

Step 2. The construction of a situational factor grid of connections and influences. By situational factor grid will mean:

$$\bar{A}: \Phi \times S \longrightarrow [0;1] . \quad (7)$$

Where Φ is a multiple risk factors $\Phi_j \in \Phi$ (5), S is a set of situations of DMI $S_i \in S$ (6).

Since the sets (5) and (6) are finite, mapping (7) can be set in the form of a matrix $|A|_{m \times n}$, which elements are Boolean variables that are showing the effect of risk factors Φ_j on situation S_i .

Step 3. Definition of private indicators for situational informedness-factorial components. The definition and formation of private indicators informedness fundamentally are not formalized for arbitrary domains. Each task requires an individual approach, as input data, which is owned by the decision-maker may

have a different specificity and semantic foundation that significantly affect the determination of the level of awareness of DMI. In addition, specific tasks may include an analysis of additional indicators of private DMI except imposed (1)–(3). This step is a separate task of information analysis and requires the usage of additional mechanisms.

Later on we shall assume that for each situational factor component of the vector of private DMI indicators in the form of (1)–(3).

Step 4. Determining the danger level of current situation. The danger level of the current situation $s_i \in S$ is characterized by the vector of private DMI indicators and risk factors. Denote $I_C^{ij}(t)$ is the indicator of the completeness of DMI of the i -th situation under the influence of the risk factor j . Similarly $I_N^{ij}(t)$ is the reliability indicator of DMI and $I_T^{ij}(t)$ is the timeliness indicator of DMI. The transition probability of the situation S_i under the influence of factor $\Phi_j \in \Phi$ in danger class $\omega_k \in \Omega$ depends from the change in time completeness $I_C^{ij}(t)$, credibility $I_N^{ij}(t)$ and timeliness $I_T^{ij}(t)$ of DMI. The probability η_{ij} of such event determines the following ratio

$$\eta_{ij} = 1 - \lg(1 + a_{ij}I_{ij}(t)),$$

$$I_{ij}(t) = I_C(t)I_N(t)I_T(t).$$

To make a decision, it is needed to find a rational compromise between the levels $I_C(t), I_N(t), I_T(t)$ to reduce the time for its formulation and implementation. Indicators of completeness $I_N^{ij}(t)$ and credibility $I_C^{ij}(t)$ of DMI grow with time. Along with the increased time of risk exposure level $\Phi_j \in \Phi$ the level of timeliness DMI reduces $I_T^{ij}(t)$ according to its properties. And, as a consequence, the length of formation time, acceptance and implementation of solutions is reducing, to prevent transition of the researched situation in one of the danger classes $\omega_k \in \Omega$ (4).

As a result, to determine the danger level of the situation, it is necessary to define the acceptable time resource in a period $T_0 = [T_1; T_2]$, $T_0 \in X$, where X is the universal set. For this the following inequality is solved

$$0 \leq 1 - \lg(1 + I_{ij}(t)) \leq \eta_{ad}. \quad (8)$$

Step 5. Classification of the situations in accordance with the imposed danger classes. At this stage it is necessary to formalize a fuzzy classification of the situation, considering the previous step of acceptable time resource or the implementation of solutions.

At the universal set X for each danger class Ω , the fuzzy characteristics are introduced $\mu_k(x)$, $x \in X$ in the form of membership functions for $\omega_k \in \Omega$.

The general approach to the classification of situations can be described by an algorithm that consists of three basic steps:

Step 1. The fuzzification of the input parameters.

Step 2. Fuzzy composition of situational factor components.

Step 3. Defuzzification of internal parameters and outputs activation.

The first step involves the classification of fuzzification, what is the reduction to fuzziness of input parameters, namely resource of the acceptable time T_0 . After fuzzification the vector of affiliation degrees:

$$\vec{\mu}_k = \mu_k(T_0), \quad k = 1..K,$$

to danger classes (4) are be obtained.

The second step is to assess the impact of each risk factor $\Phi_j \in \Phi$ on situation $s_i \in S$ and the formation of average or maximum rate, which is transmitted to the next stage (the input of the activation function) to activate the exit. In the offered model this process is called a process of internal factor of the composition (or convolution).

For composition, is possible to use the operations defined on fuzzy sets. Given peculiarity of the process, the most consistent operation will be at the intersection of attitude fuzzy sets [11]. In this case analysis of the results will also include the ratio of the strong intersection. As a result we get a set of convolution μ_{ik} .

This stage has a great deal of flexibility, as there are many options for setting fuzzy relation on the set of parameters for the composition.

There is the union of fuzzy sets of A and B with the following membership function

$$\mu_C(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x), x \in X \}. \quad (9)$$

The strong union of fuzzy sets of A and B with membership function is used

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \mu_A(x) + \mu_B(x), & \text{if } \mu_A(x) + \mu_B(x) < 1, \\ 1, & \text{if } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

The intersection of fuzzy sets of A and B with membership function is used

$$\mu_C(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x), x \in X \}. \quad (11)$$

Strong intersection of fuzzy sets of A and B with membership function in the following form is applied

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (12)$$

For activation of the output it is necessary to set parameters μ_{ik} via activation function for each ω_k .

As the function of activation will take the Heaviside function

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < \eta_{\max_i}, \\ 1, & x \geq \eta_{\max_i}, \end{cases} \quad \text{where } \eta_{\max_i} = \{ \max_k \mu_{ik} \}. \quad (13)$$

Danger class (4), to which corresponds the value of the function (13) $\rho = 1$ is model's output parameter.

As a part of the proposed classification methodology we can identify two classification algorithms.

Simpler algorithm is a one-parameter classification of situations. For the entrance to the classification one parameter is supplied. According to the general model of tasks solving, in the early stages for each danger class (4) a personal membership function is formed. The set of functions is received

$$I = \{\mu_k : X \longrightarrow [0;1] | k = 1..K\}, \text{ where } K = |\Omega|. \quad (14)$$

Often for this type of classification as the only parameter is taken the length of time interval, that is the time which the decision-maker has for solution formation and implementation.

Another algorithm is the interval classification of situations. This algorithm takes into account the situation that can be characterized by a vector of intervals that are obtained by solving the inequality (8). Interval classification of situations, according to the general model, includes three steps. If the interval is described with beginning and the end, that is two-dimensional case for (14). We describe the input parameter by ratio

$$T = \{T_{ijl} | i = 1..n, j = 1..m, l = 1..L\}, \quad T_{ijl} = [T_{ijl}^-, T_{ijl}^+].$$

After fuzzification step and finding the $T_{ijlk} = \mu_k(T_{ijl})$ the following parameters are determined

$$T_{ijk}^- = \min_l T_{ijkl}^-,$$

$$T_{ijk}^+ = \max_l T_{ijkl}^+.$$

Further, in accordance with the general model for solving problems, the fuzzy relations (9)–(12) are used. In result we get a vector of intervals $[T_{ik}^-, T_{ik}^+]$. These values are passed to input of the activation function (13).

The method of classifying interval takes into account subjective assessment of the membership function which is not only a resource of time, but also other factors such as the desired time of the beginning of formation of a decision or a planned time of solutions realization. This method, as well as the previous one, include several variations and allow adjusting the classification logic of the specifics of the task.

EVALUATION OF DANGER LEVEL OF SITUATIONS DURING POWER TURBOGENETATOR OPERATIONS

The use of the proposed model is considered on the example of the classification system task, recognition and prevention of critical and catastrophic situation functioning turbine generator power. There were determined the set of risk factors and situations.

Risk factors are $\Phi = \{\Phi_j | j = 1..6\}$:

- decrease of the frequency to 49,7 Hz;
- increase of the frequency to 50,1 Hz;
- erroneous actions of the operating personnel;
- the failure of emergency control;
- natural phenomena;

- emergency shutdown of high power.

Situations are $S = \{S_i | i = 1..4\}$:

- changing Power Electric;
- transfer Power Electric units on its sources;
- asynchronous Power Electric mode;
- separation of the power systems into parts.

For this task, a lot of danger classes has been formed as follows:

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$:

- ω_1 — secure situation;
- ω_2 — critical situation;
- ω_3 — emergency;
- ω_4 — catastrophic situation.

For the problem of recognition and prevention of critical and catastrophic situations on the example of the functioning of turbine generator power is impossible to form the training set as a finite set of data, so analysis methods will use the methods of matching results. Other words, we will classify the critical situation.

For the study (8) the parameter η_{ad} has changed in range of [0,5; 0,95]. Also, there were observed fluctuations in the result of the classification after changing the type of membership function and its settings.

It should be noted that the four classification algorithms were implemented in the study. The first two are variations of the one-parameter classification method, while the other two are the methods of interval classification. Next, the following definitions are accepted:

M1 is a one-parameter classification methods with the operation of the intersection of fuzzy sets;

M2 is a one-parameter classification method with the operation of a strong crossing;

M3 is a method of interval classification with the operations of union and intersection of fuzzy sets;

M4 is a method of interval classification with the operations of a strong union and intersection of fuzzy sets.

The first stage of the analysis was to study the results with fixed parameters and types of phase transitions and changes. This step allowed to determine whether results are consistent with the classification of the real situation. With increase of η_{ad} the time on the formation and implementation of solutions reduces, therefore, must increase the danger of the situation. Aggregated results for all methods in the fixed parameters of membership function are given in Table 1.

Table 1 Classification results of the change η_{ad}

M	η_{ad}					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
M1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_2
M2	ω_1	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_3
M3	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_3	ω_3
M4	ω_1	ω_1	ω_2	ω_3	ω_3	ω_3

All the methods are responding on increasing of the value access η_{ad} . However, as follows from the results above, methods of interval classifications are more sensitive.

The second stage of the study was application of a sensitivity analysis methods to the membership function type. Worth noting that the various membership functions have a number of excellent options, and therefore a change of the membership function requires a small adjustment of the dispersion parameter. At this stage, there was a slight change in the classification of the results, especially for large values η_{ad} . Summary results in Table 2 reflect these changes.

Table 2. The study of the classification sensitivity according to the type of membership function

MF	M											
	M1			M2			M3			M4		
	η_{ad}											
	0,5	0,8	0,95	0,5	0,8	0,95	0,5	0,8	0,95	0,5	0,8	0,95
Triangular MF	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_3	ω_3	ω_1	ω_3	ω_3
Gaussian MF	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
Bell-MF	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3

Also, an analysis of classification sensitivity to a change of membership function parameters of the fixed type took place. It has been studied how changes the result of classification of the situation at a constant level of information support of decision-makers, if the informedness requirements changes. Of course, the change of the criteria of danger class should significantly affect the classification. Results of the study are shown in Table 3 for cases of selecting a permanent form of membership function — Gaussian MF. At the same time the variance σ^2 and mathematical expectation of a for danger classes ω_2 , ω_3 and its ω_1 , ω_4 . Four sets of parameter were used for each danger class.

Table 3. Parameters of Gaussian membership function

N	ω_i							
	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	a	σ^2	a	σ^2	a	σ^2	a	σ^2
1	0	10	20	20	60	20	100	10
2	0	20	40	20	70	15	100	20
3	0	20	50	10	50	30	100	15
4	0	50	50	10	75	10	100	25

The results of the application of these four methods for fixing $\eta_{ad} = 0,7$ and different set of Gaussian parameters of membership function (from table 3, sets 1–4) are shown in Table 4. The right selection of parameters is one of the most important steps for effective and correct classification. It is important to create the requirements for danger classes as fuzzy marks from which, actually, the relevant membership functions are formed.

Table 4. The effect of the membership functions of the classification results

N	M1	M2	M3	M4
1	ω_2	ω_2	ω_2	ω_2
2	ω_2	ω_2	ω_2	ω_2
3	ω_2	ω_3	ω_3	ω_3
4	ω_1	ω_1	ω_1	ω_2

From the results shown in Table 2 and Table 4 we can summarize that the selection of the membership function parameters significantly affects the classification results. Note, that this process is fundamentally non-formalized, and therefore the task of correct choice of membership function depends on the intuition and experience of the investigator.

Also it has been proposed to determine the overall risk assessment for all situations s_i (6). In the proposed task were allocated 4 independent situations. Therefore, an overall assessment can be formed by an absolute majority. It was found that in most cases the algorithm gave consistent results. Table 5 shows the results in the form m/n , where m is the number of consistent results, $n=16$ the total number of situations. For this experiment were selected from membership function with the first set of parameters from Table 3.

Table 5. Consistency of assessment classification

MF/(m/n)	0,5	0,8	0,95
Triangular MF	$\frac{14}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{11}{16}$
Gaussian MF	$\frac{14}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$
Bell-MF	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{12}{16}$

Thus, the proposed model has been applied to solve the systemic problems of classification and identification of critical and catastrophic situations, operation of turbo generator plant. The research was conducted on the basis of DMI figures about the functioning of the turbine generator. Classification results showed the effectiveness of the quality DMI of analysis methods for complex danger detection task situations. It can be concluded that the classification of the result depends essentially on the correct choice of the type of membership function and internal parameters. This process is essentially non-formalized and or this reason the problem of correct choice of membership function depends on the intuition and experience of the decision-maker.

CONCLUSIONS

The problem of classification and recognition of the danger level of critical situations, which is important for the formation of the necessary and technologically possible level of information to ensure the reliability and validity of the decision of applied system tasks, was under the consideration. The paper presents model of classification and the danger level of the situation recognition, as a part of a system methodology.

Considering the features of the tasks of qualitative information analysis, traditional methods of classification and pattern recognition cannot be applied in this field. So, a classification model and recognition of critical situations, which is fully compatible with the general theory of information analysis, were proposed. The model is based on an analysis of private decision-maker's indicators of informedness, defined as a function of time. On the basis of these qualitative characteristics the danger level of the situation is formed, that is, how balanced, rational and appropriate the solutions will be based on available information. In case of poor informedness indicators, decision-maker will be notified that a decision is taken at the existing information support is undesirable or even dangerous. The proposed methods allow classifying the situation for reporting it to decision-maker about validity and safety of a decision with the available information support.

Analysis of the results of classification on the example of the real task revealed the strengths and weaknesses of the proposed model and algorithms of its realization. It was revealed that the classification algorithms are sensitive to fluctuations in the parameters of membership function and essentially depend on the particular application.

The proposed model of classification and recognition of dangerous situations in tasks of informational analysis may be applied in conditions of incompleteness and fuzziness of the initial information, when taken into account expert assessment, as well as the presence of a certain amount of data in the domain that is being investigated.

REFERENCES

1. *Hoskins M.* Participatory Action Research Information Gathering Methods Hoskins / The East-West Centre, Hawaii, USA – 1986. – 378 p.
2. *Ионова А.Ф.* Финансовый анализ: учеб. / А.Ф. Ионова, Н.И. Селезнева. — М.: ТК Велби, Изд-во «Проспект», 2006. — 624 с.
3. *Жора Д.В.* Информационный анализ результатов финансового прогнозирования с использованием классификатора со случайными подпространствами / Д.В. Жора, А.М. Резник, А.Е. Дорошенко // Математичні машини і системи. — 2005. — № 1. — С. 39–59.
4. *Information Analysis and portfolio management* [digital resource]. — Access mode: <https://www.msci.com/resources/research/articles/barra/info-anl.pdf>
5. *Rumelhart D.E.* Learning internal representations by error propagation. In *Parallel distributed processing* / D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R. Williams // *Data Science Guide*. — 1986. — Vol. 1 — P. 310–328.
6. *Системно-информационный анализ процессов управления* / Ю.М. Горский. — Новосибирск: Наука 1988. 327 с.
7. *Мазур М.* Качественная теория информации / М. Мазур. — М.: Мир. 1974. 239 с.
8. *Панкратова Н.Д.* Математические основы информационного анализа системных задач / Н.Д. Панкратова, Б.И. Курилин // Интеллектуальный анализ информации: Пятая междунар. конф., Киев, 17–20 мая 2005 г.: сб. тр. — 2005. — С. 224–233. — ISBN 966-71-1562-3.
9. *Згуровський М.З.* Основи системного аналізу / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. — К.: Видавнична група BHV, 2007. — 544 с.
10. *Zgurovsky M.Z.* System analysis: Theory and Applications / M.Z. Zgurovsky, N.D. Pankratova // Springer, 2007. — 475 p.
11. *Зайченко Ю.П.* Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах / Ю.П. Зайченко, А.Ф. Волошин, А.К. Лопатин, Н.К. Печурин — К.: Издат. дом «Слово», 2008. — 344 с.

Received 12.11.2016

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ОЦІНЮВАННЯ РІВНЯ СОЦІАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ ТА ПЕРСПЕКТИВ РОЗВИТКУ СУСПІЛЬСТВА, ЗАСНОВАНОГО НА ЗНАННЯХ

І.С. ЛАЗАРЕНКО, І.О. ПИШНОГРАЄВ

Анотація. Дослідження та моделювання суспільства, заснованого на знаннях, є важливими напрямками політики переходу країн на новий, поліпшений рівень існування та тісної економічної, соціальної і технологічної співпраці. Розглянуто основні принципи побудови моделі К-суспільства, проблему неповноти статистичних даних та методи їх відновлення, зокрема детально проаналізовано та побудовано компоненту моделі — індекс соціальної динаміки та перспектив розвитку для 126 країн світу. Аналіз результатів подано як у поточній рейтинговій системі для 10 країн-лідерів, 10 країн-аутсайдерів та України, так і в динаміці за останні 10 років. Цей індекс достатньо добре корелює з індексом економічного виміру, що дає змогу стверджувати про доцільність та важливість досліджень у цьому напрямі, які дозволять будувати стратегії розвитку країн, використовуючи модель К-суспільства.

Ключові слова: знання, суспільство, засноване на знаннях, математичне моделювання, неповнота даних, ієрархічні моделі.

ВСТУП

В умовах складної економічної, політичної та соціальної кризи, коли країна та суспільство потребують кардинальних змін, необхідно використовувати нові підходи до розвитку різних напрямів, які забезпечать найкращі та комфортні умови життя. Серед нових ідей спостерігається тенденція переходу до удосконаленої форми розвитку та існування суспільства — суспільства, заснованого на знаннях (*k*-суспільства) [1].

Така форма трансформації потребує чіткого розуміння необхідних умов, структури, плану переходу та корисності майбутніх змін, що може забезпечити деякий процес моделювання. Вибираючи підходи моделювання і безпосередньо моделі, потрібно керуватися передусім тим, що суспільні явища та процеси досить складно формалізувати, тому запропонований у роботі комплексний підхід до використання ієрархічних моделей для оцінювання рівня розвитку *k*-суспільства є оправданим і актуальним.

Ієрархічні моделі досить рідко застосовують вітчизняні дослідники через їх складність, оскільки вони потребують ґрунтовного дослідження та широкого спектра даних. Особливістю дослідження соціально-економічного стану є потреба в повноті та досить великій кількості об'єктивної і однорідної статистичної інформації, збирати яку досить проблематично.

Використання ієрархічної моделі в цьому контексті є обґрунтованим з огляду на існування різних підпорядкованих рівнів розвитку та складних зв'язків між ними. У світовій практиці ієрархічні моделі застосовують, наприклад, для визначення індексів конкурентоспроможності.

ІЄРАРХІЧНІ МОДЕЛІ

Складні індикаторні структури набули популярності у дослідників багатьох країн завдяки комплексності, можливості узагальнення та кількісного оцінювання людського розвитку, суспільних, соціальних явищ та інших, досить складних для аналізу об'єктів дослідження. Міжнародні організації, аналітичні центри, наприклад, Організація Об'єднаних Націй та Світовий банк, розробили такі агреговані показники розвитку, як індекс людського розвитку, індикатор реалізації гендерних прав, показники світового управління тощо [2].

Відбір підходу в аналізі ґрунтується на можливості структурувати багатомірні задачі і зводити їх до спрощеної аналітичної та порівняльної форми, зрозумілої для особи, що приймає рішення. Така структура дає змогу оцінювати динамічні зміни, виявляти слабкі місця і в разі потреби оновлювати окремий рівень дослідження, підвищувати рівень управління та демонструвати результати кількісним оцінним показником, який доступний розумінню пересічного громадянина.

Організація економічного співробітництва та розвитку (Organisation for Economic Co-operation and Development — ОЕСР) розробила методологію побудови ієрархічної індикаторної моделі [3], за якою виокремлюються етапи, кожен з яких має узгоджуватись з іншими:

1. Формування концептуальної моделі. Цей етап передбачає чітке уявлення та повноту дослідження. Теоретичний підхід зумовлюється вибором критеріїв, множини показників та зв'язків між ними, які утворюють цілісність досліджуваного об'єкта.

2. Вибір даних. Це досить складний і відповідальний етап, оскільки результати дослідження будуть залежати від якості, кількості, повноти, актуальності зібраної інформації. Дані потрібно брати лише з достовірних джерел, які ретельно перевіряються, тому доцільно обирати організації зі збирання та оброблення даних, які мають загальнодержавний або світовий рівень.

3. Відновлення відсутніх даних. Досить актуальний та проблематичний етап, оскільки важко знайти джерела інформації, які надають дані в повному обсязі. Часто виникають деякі прогалини в середині досліджуваного періоду, особливо, якщо це узагальнені агреговані індексовані показники, визначення яких потребує додаткових досліджень, інформації та розрахунків. Тому постає гостра потреба у швидкому та якісному механізмі їх відновлення. Вибір такого механізму неоднозначний, оскільки потребує комплексного підходу, виявлення зв'язків та функціональних залежностей, а отже, і фундаментальних математичних досліджень.

4. Нормалізація даних. Часто зібрана інформація має різну природу, тому для застосування даних у процесі моделювання необхідно звести їх до однорідного вигляду, який має спільну розмірність або шкалу оцінювання.

5. Агрегація та визначення вагових коефіцієнтів. Під час дослідження ієрархічної структури часто виникає потреба у визначенні ступеня впливу окремого рівня ієрархії або навіть показника рівня на загальну модель, тобто його значущість у цілісному об'єкті, а також узагальнення та знаходження комплексних кількісних показників за кожним з рівнів. Мето-

ди, які використовуються на цьому етапі мають різну природу, зокрема статистичний та експертний аналіз. Кожен з методів має як переваги, так і недоліки, тому вибір підходу потребує чіткого розуміння впливу на результат.

6. Повторний аналіз даних. Цей етап обов'язковий, оскільки ієрархічна модель потребує інформації з різних галузей знань і часто її реалізація поділяється між кваліфікованими дослідниками відповідної сфери. Узгодженість процесів дослідження, виявлення нестикувань, потреба в додатковій інформації, зміна частини моделі та інше є складовими цього етапу.

7. Оцінювання зв'язку з зовнішніми факторами. Оскільки під час побудови моделі відбувається формалізація, яка потребує спрощення залежностей, відкидання деяких впливових факторів, переорієнтації в середині дослідження, то остаточний варіант моделі нерідко зазнає змін порівняно з початковим. Тому необхідна деяка апробація моделі в реальних умовах для визначення її стійкості до навколишніх впливів та результатів, отриманих за реальними контрольними даними.

8. Візуалізація результатів. Для остаточного подання результатів моделювання необхідно обрати такий варіант, який є наочним, зрозумілим, легким для аналізу та висновків. Візуалізація результатів може бути подана в табличному та графічному варіантах, перший з яких є більш простим, але може демонструвати результат нецілісно, наприклад, рейтингове ранжування, є зручним для демонстрації результатів певного рівня, а не моделі в цілому. Другий підхід візуалізації — графічний, він більш складний через багатовимірність моделі, утім більш наочно і комплексно може демонструвати результати дослідження. Приклад реалізації такого підходу для дослідження оцінювання рівня k -суспільства подано у праці [4].

К-СУСПІЛЬСТВО

Якщо дослідити історію виникнення різних типів суспільства, можна відзначити одну спільну ознаку, притаманну будь-якому розвитку — це нові знання. Поява виробів, технологій, методів повинна була поліпшити стан суспільства, надати нових можливостей, підвищити ефективність, поліпшити загальний добробут.

Тисячоліттями люди прагнуть розвитку у всіх життєвих аспектах, але відкриття потребують відповідних ресурсів: матеріальних, фінансових та інтелектуальних, тому не дивно, що знання перейшли в категорію одного з найцінніших товарів, який має величезний попит на сучасному світовому ринку.

У період, коли інформаційні технології зайняли стійке положення в житті кожної людини, формується суспільство, яке отримало назву «інформаційне суспільство». Життя перейшло на новий рівень, який вже важко уявити без використання інтернет-мережі та швидкого доступу до інформації, що зумовлює виникнення технологій її збирання, оброблення, зберігання та використання, тобто інформація сама стає товаром і ресурсом для створення товарів для її обслуговування. Це стало важелем для переходу країн, які вчасно зуміли відслідкувати цю тенденцію, на новий високий економічний рівень, і як наслідок, відбувся поділ країн на розвинені та нерозвинені. Таке розмежування призвело до світових негараздів, криз, політичних воєн,

воєнних конфліктів за територіальну та фінансову владу. Новітні технології використовуються не тільки для переведення життя на більш якісний рівень, а й для виготовлення зброї, яка є гарантом панування та впливовості країн.

Виникає гостра потреба у формуванні суспільства, де б знання стало гарантом розвитку, безпеки, добробуту людини, а не продукувало поділ на різні прошарки населення. Необхідно створювати такі умови життя та розвитку, за яких людина могла б бути в гармонії з навколишнім світом; саме такі засади і зумовили появу суспільства, заснованого на знаннях.

K-суспільство є інститутом, який переходить на нові виміри: соціальний, етнічний і політичний; сприяє виникненню міждисциплінарних знань; надає перевагу освіті, яка готує високоякісний людський капітал. Підвищення якості та безпеки життя кожного члена суспільства за допомогою бази знань, яка стимулює розвиток економічного та соціального характеру, стає першочерговим завданням k-суспільства. Інтелектуальний розвиток, наукові досягнення, технологічний прогрес є важливими продуктивними факторами на рівні з матеріальними благами, джерелами енергії та ресурсів.

K-суспільство повинно формувати у свідомості її членів такі політичні погляди, які спрямовані на досягнення високого рівня якості та безпеки життя людей як у національному, так і в глобальному масштабі, щоб цінність та добробут людського життя стали першопричиною будь-яких змін [5, 6].

ІНДЕКС СОЦІАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ ТА ПЕРСПЕКТИВ РОЗВИТКУ ЯК СКЛАДОВА ІНДЕКСУ K-СУСПІЛЬСТВА

Для оцінювання стану k-суспільства та фундаментальних умов його розвитку користуються індексом k-суспільства (I_{ks}), який був розроблений та застосований до своїх членів ООН [5]. Цей індекс має три складові:

- індекс знань, за яким оцінюється дві важливі категорії: якість знань і доступ до знань;
- індекс соціальної динаміки та перспектив розвитку;
- індекс інформаційного суспільства, який враховує швидкість поширення інформації та інфраструктури її забезпечення.

Складову, яка містить перспективу розвитку, взято для подальшого дослідження, тому розглянемо її більш детально. Для цього виділено три групи показників, які, на наш погляд, описують цей індекс досить комплексно і ґрунтовно.

Перша група — стосується інноваційного блока і містить такі компоненти:

1. *Прямі іноземні інвестиції* (Foreign Direct Investment, net (BoP, current US\$)) — це чистий потік інвестицій, який дає право участі в управлінні об'єктом інвестування (10 або більше відсотків від статутного капіталу) і діє за межами економіки інвестора. Це сума власного капіталу, реінвестування прибутку, довгострокового капіталу і короткострокового капіталу, як це показано в платіжному балансі [7].

2. *Патенти* (Patent Applications, residents), видані процедурою Договору про патентну кооперацію або національним патентним відомством, — це

винаяткові права на винахід — продукт чи процес, який включає новий спосіб, а також пропонує нове технічне вирішення проблеми. Патент забезпечує захист винаходу для власника патенту на обмежений термін, як правило на 20 років [8].

3. *Витрати на дослідження і розробки* (Research and Development Expenditure (% of GDP) — поточні та капітальні вкладення (як державні, так і приватні) у новаторську роботу, що проводиться систематично для підвищення рівня знань, включаючи знання людства, культури і суспільства, а також використання знань для нових розробок та їх застосувань. R&D охоплює фундаментальні дослідження, прикладні дослідження та експериментальні розробки [9].

4. *Індекс легкості ведення бізнесу* (Ease of Doing Business Index) — індекс для порівняння простоти підприємницької діяльності між країнами світу, що укладається Світовим банком на основі річних даних від 1 до 189. Розраховується як середнє арифметичне від 9–10 внутрішніх індикаторів. Вищі оцінки в індексі свідчать про покращення та зазвичай простіше регулювання бізнесу, а також надійніший захист прав власності [10].

5. *Індекс глобальної конкурентоспроможності* (The Global Competitiveness Index) — це рейтинг країн за показником економічної конкурентоспроможності. Індекс розраховується за методикою Всесвітнього економічного форуму, комбінує в собі комплекс статистичних показників конкурентоспроможності із 113 змінних, дві третіх яких – це опитування керівників компаній, а одна третя — це статистичні дані і результати досліджень, що проводяться на регулярній основі міжнародними організаціями [11].

6. *Державні витрати на освіту* (Government Expenditure on Education as % of GDP (%)). Показник включає загальну суму витрат (місцевих, регіональних та центральних), виділену урядом для освіти; виражається у відсотках від ВВП; містить витрати, що фінансуються за рахунок трансфертів з міжнародних джерел в уряді. Розраховують як відношення загальних витрат уряду на поточному рівні освіти до ВВП, помножене на 100. Якщо більший відсоток ВВП витрачається на освіту, це вказує на більш високий пріоритет уряду щодо галузі освіти і вищий потенціал уряду для підвищення доходів державних витрат відносно розміру економічного стану країни. Інтерпретуючи цей індикатор, варто зважати на те, що в деяких країнах приватний сектор і (або) домогосподарства можуть фінансувати значну частку від загального обсягу фінансування освіти, у результаті чого державні витрати будуть нижчими, ніж в інших країнах [12].

Друга група — стосується освіти і охоплює такі складові:

1. *Співвідношення вчителів і учнів у системі початкової освіти* (Pupil-teacher Ratio in Primary Education (headcount basis)) — середня кількість учнів на одного вчителя у початковій школі. Показник складається на основі щорічних даних інституту статистики UNESCO. Усі дані відображаються в Міжнародній стандартній класифікації освіти з метою порівняння освітніх програм на міжнародному рівні. Співвідношення вчителів і учнів часто використовують для порівняння якості шкільного навчання в різних країнах. Проте зв'язок навчання і якості освіти дуже слабкий, оскільки співвідношення вчителів і учнів в різних країнах залежить від кваліфікації вчителів,

відмінностей в наповненості класів, різної кількості годин викладання, практики неповного робочого дня, шкільних змін та інших факторів [13].

2. *Діти, які не відвідують школу* (Children out of School (% of primary school age)) — це частка дітей молодшого шкільного віку, які не відвідують початкову або середню школу. Дітей, які перебувають у початковій віковій групі і отримують дошкільну освіту, слід розглядати як таких, що не відвідують школу. Цей показник вираховується щорічно інститутом статистики ЮНЕСКО. При цьому можливі похибки, оскільки дані збираються станом на певну звітну дату і не враховуються діти, які будуть зареєстровані в шкільній базі або покинуть школу після цієї дати. Міжнародна система порівняння цього показника може залежати від використання різних концепцій зарахування та відрахування дітей в різних країнах [14].

3. *Індекс рівня освіти у світових країнах* (Education Index) — це комбінований показник Програми розвитку Організації Об'єднаних Націй, що розраховується як індекс грамотності дорослого населення та індекс сукупної частки учнів, які здобувають освіту; використовується для розрахунку індексу людського розвитку (Human Development Index). Індекс вимірює досягнення країни відносно досягнутого рівня освіти її населення за двома основними показниками:

- індексом грамотності дорослого населення (2/3 ваги);
- індексом сукупної частки учнів, які отримують початкову, середню і вищу освіту (1/3 ваги).

Ці дві складові зводяться в підсумковий індекс, який стандартизується від 0 (мінімальний) до 1 (максимальний). Вважається, що розвинені країни повинні мати мінімальний індекс — 0,8. Визначаючи місце у світовому рейтингу, всі країни ранжуються на підставі індексу рівня освіти: перше місце в рейтингу відповідає найвищому значенню цього показника, а останнє — найнижчому. Показник має низку обмежень, зокрема він не відображає якості самої освіти, не показує повною мірою доступність освіти через відмінності у вікових вимогах і тривалість навчання. Крім того, підсумковий індекс не враховує студентів, які навчаються за кордоном, що може спотворювати дані деяких малих країн [15].

Третя група — стосується політичної стабільності і містить такі фактори впливу:

1. *Світовий показник спокою* (Global Peace Index (GPI)) — це індекс, який демонструє стан спокою в країнах і регіонах. Дослідження проводиться за проектом Інституту економіки і миру разом з міжнародною групою експертів з питань миру на підставі даних, зібраних відділом досліджень Economist Intelligence Unit. Початок дослідження припадає на 2007 р. і включає від 121 до 149 країн світу. Ініціатором дослідження є австралійський підприємець Стів Кіллелеа, який отримав схвалення багатьох впливових людей світу, включаючи відомих борців за мир та права людини. Факторами, які впливають на показник, є рівень насильства і злочинності в країні та військові витрати і війни [16].

2. *Свобода преси у світі* (Freedom of the Press) — це щорічне дослідження і рейтинг про стан свободи засобів масової інформації (ЗМІ) у країнах світу, який випускається міжнародною неурядовою організацією

Freedom House, яка оцінює ступінь свободи друкованих, радіомовних і онлайнових ЗМІ, починаючи з 1980 р.

Для визначення цього показника визнаються існуючі культурні відмінності, національні інтереси та рівні економічного розвитку держав і дотримуються універсальних критеріїв свободи інформації, відправною точкою для яких є стаття 19 Загальної Декларації прав людини. Головною перешкодою на шляху свободи преси організація називає урядовий контроль над ЗМІ.

Дослідження ґрунтується на методології експертних оцінок. Висновки про стан свободи ЗМІ роблять на основі 109 показників, включаючи оцінку таких критеріїв, як свобода слова, ступінь урядового контролю над ЗМІ, умови роботи журналістів у країні, випадки застосування насильства стосовно журналістів, економічна і політична ситуація у країн тощо. У дослідженні використовується система оцінювання держав у трьох категоріях — правовій, політичній та економічній. Сумарно вони показують положення країни в загальному рейтингу, де показник свободи ЗМІ оцінюється за 100-бальною шкалою. Чим вищий загальний бал, тим гірше становище країни [17]. Усі держави поділені на три умовні групи:

- 1) країни з вільними ЗМІ (від 0 до 30 балів);
- 2) країни з частково вільними ЗМІ (від 31 до 60 балів);
- 3) країни з невольними ЗМІ (від 61 до 100 балів);

3. *Рейтинг крихких держав (Fragile States Index) до 2014 року та Рейтинг недієздатних держав (Failed States Index)* — це рейтинг, розробляється Фондом миру, починаючи з 2005 р. для всіх країн світу. Рейтинг розробляється з метою аналізу здатності держав контролювати цілісність своєї території, політичну, демографічну, економічну та соціальну ситуацію у країні. Чим вищий рейтинг країни, тим гірший її стан [18].

Складові, за якими проводиться оцінювання:

- демографічний тиск (визначається густиною населення та наявністю протидіючих етнічних груп);
- рівень еміграції;
- рівень економічної нерівності;
- економічний стан;
- криміналізація держави;
- роздрібненість у силових структурах та еліті;
- переміщення біженців у середині країни;
- зростання реваншистських настроїв;
- кількість послуг держави;
- дотримання законів і прав людини;
- зовнішнє втручання (ризик іноземного втручання в політичні та військові спори, а також залежність від зовнішнього фінансування).

4. *Частка місць, які займають жінки в національних парламентах (Proportion of Seats Held by Women in National Parliaments (%))* — це показник, який демонструє частку парламентських місць, які займають жінки. Складається щорічно Міжпарламентським союзом на основі інформації, поданої національними парламентами для демонстрації гендерної нерівності в уряді та впливу жінок на політику в державі. Цей показник свідчить не

тільки про право жінок на рівність і їх внесок у ведення державних справ, а і про використання жіночих ресурсів та потенціалу для визначення політичних пріоритетів і розвитку держави, що дає користь суспільству і світовій спільноті [19].

5. *Індекс глобального гендерного розриву (GlobalGenderGapIndex)* — це індекс, який ранжує країни на підставі розрахунків для вимірювання гендерної рівності з метою виявлення та наслідування країн з рівноправною гендерною політикою. Уперше дослідження опубліковані в 2006 р. і представлені на Всесвітньому економічному форумі (з 2014 р. — 144 країни) [20]. Показник містить чотири складові:

- 1) участь в економічній діяльності та можливості — як результат оплати праці, рівня участі та доступу до висококваліфікованої зайнятості;
- 2) рівень освіти — як результат доступу до базового і вищого рівнів освіти;
- 3) політичні права та можливостей — як результат участі в структурах прийняття рішень;
- 4) здоров'я і виживання — результат тривалості життя і співвідношення між чоловіками та жінками.

МЕТОДИ ВІДНОВЛЕННЯ ВІДСУТНІХ ДАНИХ

Для моделювання k -суспільства основним джерелом інформації є статистичні дані, у яких часто бракує інформації за деякі періоди. Нерідко в таких випадках пропуски даних просто ігноруються, або заповнюються середнім значенням за вибіркою. Для більш точного моделювання потрібно якимось чином відновити дані так, щоб отримана інформація якомога точніше описувала досліджуваний процес.

Існує низка методів та алгоритмів з відновлення даних, що ґрунтуються на теорії ймовірностей, статистичному аналізі, методах Data Mining, проте складність їх реалізації призводить до того, що такими дослідженнями нехтують, обираючи більш простішу але грубішу оцінку. Складність вибору підходу для відновлення даних полягає в тому, що інформація різної природи потребує використання різних методів, тому для якісного аналізу доводиться використовувати декілька підходів.

Групування методів та підходів залежить від типу пропуску і поділяються на повністю випадкові (Missing Completely at Random — MCAR), випадкові (Missing at Random — MAR) та невідповідні (Not Missing at Random — NMAR)

Дані, обрані для дослідження, мають економічну та соціальну природу, тому, проаналізувавши різні методи та виконавши ряд розрахунків з наявними даними, було виявлено декілька алгоритмів, які показали найменшу похибку обчислень у різних типах пропусків [21].

Якщо дані отримано шляхом анкетного опитування, ранжування або з бальною системою і прогнозування відбувається для великої кількості однотипних показників з великою кількістю пропусків, то оптимальним буде використання алгоритму ZET з побудовою «компетентної» матриці, який

належить до локального типу. Цей метод може працювати як з одновимірним рядом, так і з таблицями даних.

Метод множинної імпутації (MI — Multiple Imputation) дозволяє одночасно генерувати декілька значень шуканої величини, що ускладнює процес пошуку даних, проте значно покращує його. У результаті утворюється декілька баз даних з різними варіантами підстановок, до аналізу отриманих результатів долучаються експерти. В основу методу покладено байєсівський підхід та алгоритм Монте-Карло [22].

Для застосування всієї генеральної сукупності для відновлення даних обрано двокроковий метод глобального типу максимізації очікувань (Expectation Maximization — EM), який дозволяє не тільки відновлювати пропуски, але й оцінювати математичне сподівання, коваріаційні та кореляційні матриці для кількісних змінних.

Комплексний підхід для відновлення даних дає змогу більш істотно вплинути на якість побудови моделі k-суспільства, оскільки використовується інформація з різних сфер, зокрема соціологічних та економічних, що мають різну природу внутрішніх зв'язків.

ПОБУДОВА ІНДЕКСУ ІКС

Для побудови індексу Ікс усі дані мають бути однієї розмірності, для цього їх нормують. Існує декілька методів нормування даних залежно від того, у яких межах необхідно отримати результати та як надалі оброблятиметься інформація.

У межах дослідження зручно, щоб усі дані мали діапазон від 0 до 1, тому нормалізацію проведено за методом MiniMax:

$$x' = \frac{x - \min(X)}{\max(X) - \min(X)}$$

де x — поточне значення елемента вибірки; X — уся сукупність елементів.

Використовуючи цей метод, можна виявити провали або піки рівня досліджуваних об'єктів, тому зручно в межах моделювання k-суспільства відстежувати ті країни, які є взірцевими, і ті, у яких необхідно поліпшувати ту чи іншу складову для подальшого успішного розвитку.

Після нормування даних обчислено індекс окремої складової моделі для кожної країни, тобто індекс соціальної динаміки або перспектив розвитку. Для дослідження обрано 126 країн світу та діапазон динаміки 2005–2014 рр., з яких ТОП-10 країн з найвищим та найнижчим показниками індексу соціальної динаміки та перспектив розвитку наведено в табл. 1.

Україна має середні показники відносно розвинених країн світу і займає 76-у рейтингову позицію серед 126 країн з індексом соціальної динаміки 0,51867 (група 1= 0,308173, група 2= 0,892764, група 3= 0,355074); випереджає її (74-е місце) Бутан з індексом 0,524733; 75-е місце займає Еквадор з індексом 0,521781. Україна, у свою чергу, випереджає В'єтнам (77-е місце) з індексом 0,518597 та Ель Сальвадор (78-е місце) з індексом 0,516137.

Таблиця 1. Країни-лідери та аутсайтери за показником індексу соціальної динаміки і перспектив розвитку та його складових, станом на 2014 р.

Рейтингова позиція за 2014 р.	Група 1	Група 2	Група 3	Індекс перспектив розвитку	Країна
1	0,572202	0,951792	0,874445	0,79948	Sweden
2	0,560797	0,932141	0,885821	0,79292	Finland
3	0,509311	0,987611	0,864638	0,787187	Norway
4	0,558406	0,95432	0,838945	0,78389	Denmark
5	0,595227	0,940319	0,811551	0,782366	Switzerland
6	0,574156	0,969478	0,790017	0,777884	Germany
7	0,502623	0,937636	0,89125	0,77717	Iceland
8	0,526903	0,963526	0,796535	0,762321	New Zealand
9	0,478427	0,97072	0,812407	0,753851	Netherlands
10	0,680167	0,920529	0,648447	0,749714	United States
117	0,210518	0,398381	0,461163	0,356687	Malawi
118	0,305499	0,64434	0,119983	0,356607	Syria
119	0,241944	0,470315	0,341911	0,35139	Gambia
120	0,230277	0,461842	0,34792	0,34668	Guinea
121	0,193434	0,395364	0,443487	0,344095	Burkina faso
122	0,24955	0,401206	0,373088	0,341281	Mali
123	0,288619	0,369277	0,3522	0,336699	Niger
124	0,288863	0,38119	0,299215	0,323089	Nigeria
125	0,199879	0,468923	0,248718	0,30584	Pakistan
126	0,263714	0,496266	0,097072	0,285684	Yemen

У динаміці за весь період досліджень можна прослідкувати, як змінювався індекс соціальної динаміки та перспектив розвитку у десяти країн-лідерів (рис. 1) та країн-аутсайдерів (рис. 2). На графіках показано поступовий ріст Німеччини протягом досліджуваних років, а також значне зменшення значення індексу в Сирії за рахунок показників третьої групи.

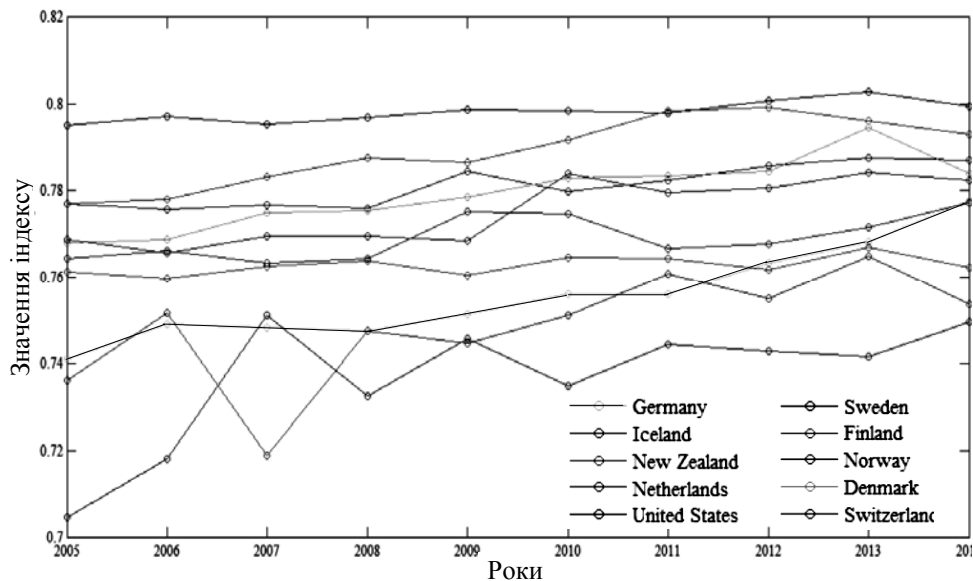


Рис. 1. Зміна індексу соціальної динаміки та перспектив розвитку 10 країн-лідерів за 2005–2014 рр.

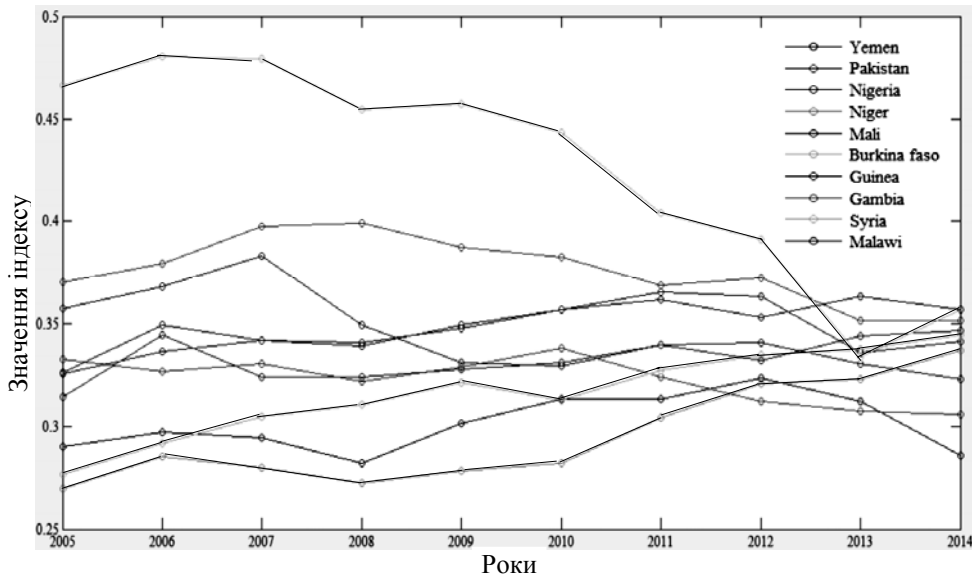


Рис. 2. Зміна індексу соціальної динаміки та перспектив розвитку у 10 країн-аутсайдерів за 2005–2014 рр.

Можна розглядати кожну складову індексу як окремий фактор, подальший вплив на який зумовлює покращення стану країни та її загальну рейтингову позицію. Тоді доцільно зобразити в одній площині всі країни та їх розташування відносно кожної групи індексів (рис.3).

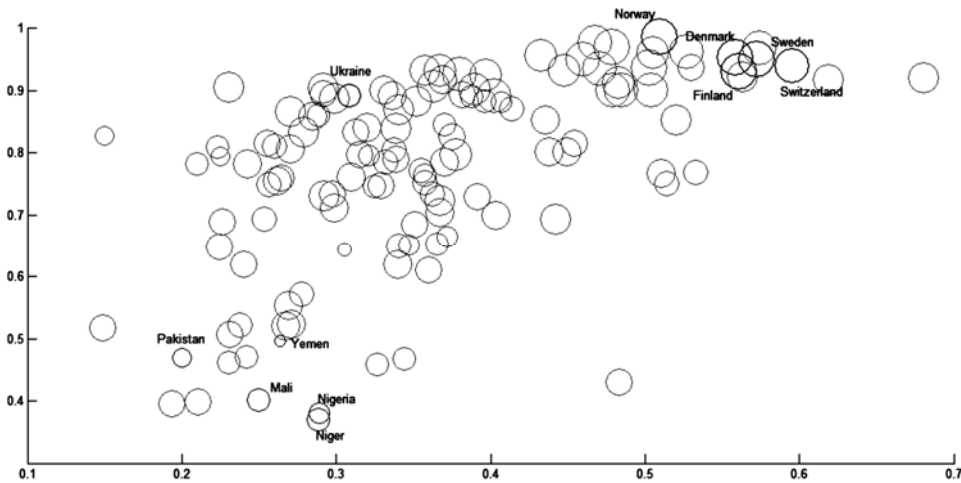


Рис. 3. Три складові групи індексу соціальної динаміки та перспектив розвитку станом на 2014 р.

Вісь абсцис зображує агрегований індекс першої групи, вісь ординат — агрегований індекс другої групи, а діаметр кола — агрегований індекс третьої групи. На рис. 3 виокремлено розташування п'яти країн-лідерів, країн-аутсайдерів та України.

Індекс Ікс та його складові — це показники, які відображають стан країни з різних аспектів її розвитку, а отже, їх можна порівнювати з індексом економічного виміру сталого розвитку (Index of Economic Dimension, Іес), який, у свою чергу, містить узагальнену інформацію про стан сільського

господарства, промисловості, ВВП на душу населення, прямі іноземні інвестиції, експорт-імпорт товарів та послуг, працююче населення, зовнішню заборгованість, гранти та патенти, науково-технічні досягнення та їх впровадження, економічну свободу тощо [23]. Зв'язок індексу соціальної динаміки та перспектив розвитку зі станом розвитку економіки різних країн зображено на рис. 4. Можна помітити, що Україна хоча і має низький рівень економічного розвитку навіть порівняно з п'ятіркою аутсайдерів, але її індекс соціальної динаміки та перспектив розвитку значно їх випереджає.

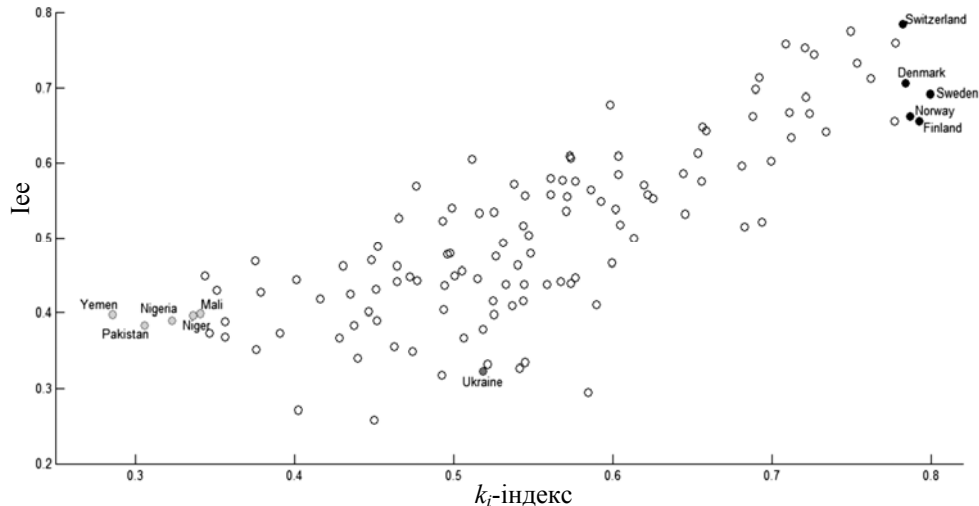


Рис. 4. Залежність індексу економічного виміру сталого розвитку від індексу соціальної динаміки та перспектив розвитку станом на 2014 р.

ВИСНОВКИ

Побудова індексу перспектив дає змогу оцінити, які країни за останні 10 років істотно змінюють політику стосовно освіти, соціального розвитку, демографії та визначити, у які роки проводилися реформи цього напрямку та збільшувалося його фінансування.

У подальших дослідженнях стане зрозумілим, який вагомий внесок цей індекс становить для повної моделі k -суспільства та яким чином через його поліпшення можна підвищити загальний рівень розвитку країни. Зміна погляду на модель побудови k -суспільства через призму нових складових приносить нові об'єкти для планування та розвитку, що в цілому дасть позитивний ефект.

ЛІТЕРАТУРА

1. Згуровський М.З. Шлях до суспільства, заснованого на знаннях / М.З. Згуровський // ZN.UA. — Режим доступу: http://gazeta.dt.ua/EDUCATION/shlyah_do_suspilstva_zasnovanogo_na_znannyah.html
2. Human Development Index (HDI). — Available at: <http://hdr.undp.org/en/content/human-development-index-hdi>
3. Handbook on Constructing Composite Indicators. Methodology and user guide // Organization for Economic Co-operation and Development. — Available at: <http://www.oecd.org/std/42495745.pdf>

4. *Ilchenko K.* A Composite Indicator of K-society Measurement / K. Ilchenko, I. Pyshnograev // Proceedings of the 11th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications: Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI), May 14–16, 2015.
5. *Understanding Knowledge Societies.* In twenty questions and answers with the Index of Knowledge Societies. — New York: United Nations, 2005.
6. *Мониторинг* информационного общества и общества знаний // Издание ЮНЕСКО для всемирного саммита по информационному обществу. — СПб., 2004. — 126 с.
7. *The world bank.* Indicator: Foreign direct investment. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/BN.KLT.DINV.CD/countries?display=map>
8. *The world bank.* Indicator: Patent applications, residents. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/IP.PAT.RESD>
9. *The world bank.* Indicator: Research and development expenditure. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/GB.XPD.RSDV.GD.ZS>
10. *The world bank.* Doingbusiness. — Available at: <http://www.doingbusiness.org/reports/global-reports/>
11. *The Global Competitiveness Report 2015–2016.* — Available at: <http://reports.weforum.org/global-competitiveness-report-2015-2016/>
12. *The world bank.* Indicator: Government expenditure on education. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/SE.XPD.TOTL.GD.ZS>
13. *The world bank.* Indicator: Pupil-teacher ratio in primary education. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/SE.PRM.ENRL.TC.ZS>
14. *The world bank.* Indicator: Children out of school. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/SE.PRM.UNER.ZS>
15. *Human Development Report.* Education index. — Available at: <http://hdr.undp.org/en/content/education-index>
16. *Vision of humanity.* Global Peace Index. — Available at: <http://www.visionofhumanity.org/#page/indexes/global-peace-index/2016>
17. *Freedom house.* About Freedom of the Press. — Available at: <https://freedomhouse.org/report-types/freedom-press>
18. *The Failed States Index 2005.* — Available at: <http://fsi.fundforpeace.org/rankings-2005-sortable>
19. *The world bank.* Indicator: Proportion of seats held by women in national parliaments. — Available at: <http://data.worldbank.org/indicator/SG.GEN.PARL.ZS>
20. *World Economic Forum.* Global Gender Gap Report. — Available at: <https://www.weforum.org/reports/global-gender-gap-report-2015/>
21. *Снытюк В.Е.* Прогнозирование. Модели, Методы, Алгоритмы: учеб. пособие / В.Е. Снытюк. — К. 2008. — 367 с.
22. *Horton N.J.* Multiple Imputation in Practice: Comparison of Software Packages for Regression Models with Missing Variables / N.J. Horton, S.R. Lipsitz // *The American Statistician.* — 2001. — Vol. 55. — P. 244–254.
23. *World Data Center for Geoinformatics and Sustainable Development.* — Available at: <http://wdc.org.ua/en/data>

Надійшла 19.10.2016

ОЦІНЮВАННЯ КРЕДИТНИХ РИЗИКІВ МЕТОДАМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ

В.Я. ДАНИЛОВ, О.Л. ЖИРОВ, П.І. БІДЮК

Анотація. Проаналізовано кредитні ризики фінансових організацій за допомогою методів інтелектуального аналізу даних. Фактичні статистичні дані, які характеризують позичальників кредитів, використано для побудови математичних моделей у формі рівнянь типу логіт, дерев рішень і байєсівських мереж. Якість побудованих моделей проаналізовано за множиною належних статистичних критеріїв, які забезпечують основу для вибору кращої альтернативної моделі. Із використанням двох вибірок банківських даних виконано ряд обчислювальних експериментів і виявлено кращі моделі у формі рівнянь типу логіт і байєсівські мережі. Передбачається розширити множину методів побудови математичних моделей і реалізувати ідею комбінування оцінок, згенерованих за альтернативними методами. Обґрунтовано доцільність розроблення та реалізацію спеціалізованої системи підтримання прийняття рішень для виконання досліджень у галузі оцінювання та прогнозування фінансових ризиків.

Ключові слова: кредитний ризик, статистичні дані, логіт-модель, байєсівські мережі, параметри якості моделей.

ВСТУП

Для того, щоб ефективно управляти кредитними ризиками, необхідно вміти точно вимірювати їх. Існує досить велика множина методів і моделей оцінювання кредитного ризику. Для створення системи управління кредитним ризиком банки спираються на власний досвід та напрацювання.

Натепер існує багато моделей оцінювання кредитоспроможності на підставі ринкових показників, а саме: моделі Блека–Шоулза–Мертонна [1, 2]. Перевагами таких моделей є висока прогнозна спроможність, абсорбувальна інформація про позичальника, доступна всім інвесторам, присутнім на ринку. Недоліками є те, що інформація про позичальника є відповідною лише за умови ефективності ринку, потрібний великий масив даних. Ці методи реалізовані на практиці у вигляді програмного продукту CreditMonitor.

Підходи до розроблення моделей для оцінювання кредитоспроможності на підставі фундаментальних показників ґрунтуються на макроекономічних показниках, фінансових показниках та на даних рейтингових агентств. Особливостями таких підходів є те, що вони враховують циклічність економіки, дають змогу отримувати довгострокову оцінку, виконувати крос-

аналіз. Їх переваги: доступність інформації, простота розрахунків і прийнятна точність прогнозу. Недоліки: важко визначити періодичність циклів економіки та оцінити ймовірність дефолту конкретного позичальника; не завжди надані дані є достовірними; бухгалтерська звітність показує результати постфактум, тобто недостатній прогноз майбутніх перспектив; переоцінка рейтингу має часовий лаг [1, 3].

Мінімізація кредитного ризику потребує належного управління ними, що являє собою процес виявлення і оцінювання ризиків, а також вибір методів та інструментів для цього. Традиційно кредитний ризик розглядається в розрізі кожного конкретного позичальника. Численні моделі використовують складний математичний апарат для оцінювання кредитного ризику. Ключовим завданням побудови математичної моделі кредитного ризику є оцінювання розподілу збитків усього агрегованого кредитного портфеля. Це так звані системи скорингу [4, 5].

Роботу присвячено аналізу можливості застосування лінійної і нелінійної регресії, а також байєсівського методу аналізу даних; виконанню та аналізу результатів обчислювальних експериментів з оцінювання кредитоспроможності клієнтів за наявними статистичними даними; порівнянню результатів застосованих методів оцінювання кредитного ризику.

ОГЛЯД МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ КРЕДИТНОГО РИЗИКУ

Лінійна та логістична регресія. Традиційними і найбільш поширеними є регресійні методи, насамперед лінійна багатофакторна регресія: $p = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$, де p — ймовірність дефолту; w — вагові коефіцієнти; x — характеристики клієнта. Недолік моделі полягає у тому, що ліва частина рівняння містить ймовірність, яка набуває значення в інтервалі $[0, 1]$, а змінні в правій частині можуть набувати будь-яких значень від $-\infty$ до $+\infty$. Цей недолік може подолати нелінійна модель у формі логістичної регресії:

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n.$$

Дослідимо ймовірність появи події (зі значенням ймовірності, близьким до нуля або до одиниці) залежно від значень регресорів $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. У результаті отримуємо значення логіт-функції в інтервалі $[0, 1]$, тобто

$$g(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}.$$

Тоді модель матиме вигляд: $\text{Pr} = g(p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m)$.

Припустимо, що існує вибірка $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i, y^i)$ ($i = 1, \dots, n$), де y^i — значення залежної змінної; n — кількість спостережень. Потрібно оцінити коефіцієнти моделі. Для цього скористаємося принципом максимальної правдоподібності, відповідно до якого за оцінки коефіцієнтів беруться ті значення, які дають максимум функції правдоподібності:

$$L(\bar{p}) = \prod_{i=1}^n g\left(\frac{y^i}{px^1}\right)^{y^i} \left[1 - g\left(\frac{y^i}{px^1}\right)\right]^{1-y^i}.$$

Для зручності позначимо: $\bar{p} = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_m)$, $\bar{x}^1 = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)$; $px^1 = p_0 + p_1x_1^i + p_2x_2^i + \dots + p_mx_m^i$. Зазвичай використовується логарифм функції правдоподібності, що не змінює суті задачі, але дозволяє позбутись добутку: $l(\bar{p}) = \sum_{i=1}^n y^i \ln\left(g\left(\bar{px}^1\right)\right) + (1 - y^i) \ln\left(1 - g\left(\bar{px}^1\right)\right)$.

Сьогодні логістична регресія є лідером скорингових систем. Перевага логістичної регресії полягає ще й у тому, що вона може поділяти клієнтів як на дві групи (0 – поганий, 1 – хороший), так і на кілька груп (1, 2, 3, 4 групи ризику).

Дерева рішень. Дерева рішень — це модель, що будується на логічно-му ланцюжку правил, які намагаються описати окремі взаємозв'язки між даними щодо очікуваного результату. Структура дерев рішень відкрито показує аргументацію правил і тому дає змогу легко зрозуміти процес прийняття рішення [6].

Критерії якості моделі та оцінок прогнозів. Існує множина критеріїв, які визначають якість побудованої моделі і якість прогнозу. Подамо деякі з них, які використано у цій роботі.

Інформаційний критерій Акайке (AIC). Критерій використовується для порівняння моделей з різною кількістю параметрів, коли потрібно вибрати найкращий набір пояснювальних змінних. Для лінійної моделі множинної регресії значення критерію розраховується за такою формулою:

$$AIC = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2}{n}\right) + \frac{2k}{n},$$

де n — кількість спостережень; k — кількість параметрів моделі; $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2$ — сума квадратів залишків моделі, отриманих під час оцінювання коефіцієнтів моделі за методом найменших квадратів. Зі збільшенням кількості пояснювальних змінних перший доданок у правій частині зменшується, а другий збільшується. Таким чином, критерій не тільки винагороджує за якість наближення, але і штрафує за використання зайвої кількості параметрів моделі. Серед кількох альтернативних моделей перевага надається тій, значення AIC якої менше.

Інформаційний критерій Шварца (SC). Цей критерій, аналогічно критерію Акайке, дозволяє порівняти моделі з різною кількістю параметрів, коли потрібно вибрати кращу множину пояснювальних змінних. Для лінійної моделі множинної регресії значення критерію визначається за формулою

$$SC = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2}{n}\right) + \frac{k \ln(n)}{n},$$

де n — кількість спостережень; k — кількість параметрів моделі; $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2$ — сума квадратів залишків моделі, отриманих під час оцінювання коефіцієнтів моделі за методом найменших квадратів. Зі збільшенням кількості пояснювальних змінних перший доданок у правій частині формули зменшується,

а другий — збільшується. Серед кількох альтернативних моделей перевага віддається тій, значення SC якої менше.

Коефіцієнт детермінації розглядають, як правило, як основний показник, що відображає міру якості регресійної моделі, яка описує зв'язок між залежною і незалежними змінними моделі. Коефіцієнт детермінації показує, яка частка варіації пояснювальної змінної y врахована в моделі і зумовлена впливом на неї факторів, включених у модель:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

де y_i — значення спостережуваної змінної; \bar{y} — середнє значення спостережуваних даних; \hat{y} — модельні значення, побудовані за оціненими параметрами. Чим ближче значення R^2 до одиниці, тим вища адекватність моделі. Стандартна похибка регресії (стандартна похибка оцінки) розглядається як міра розсіювання даних спостережень від змодельованих значень. Чим менше значення стандартної похибки регресії, тим якість моделі вища. Сума квадратів величин розбіжності між змодельованими і фактичними значеннями, які пояснюються змінними на періоді ідентифікації, розраховується за формулою

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2,$$

де y_i — значення спостережуваної змінної; \hat{y} — модельні значення, обчислені за оціненими параметрами.

Критерій Дарбіна–Уотсона (DW-критерій). Це статистичний критерій, що використовується для знаходження автокореляції залишків першого порядку регресійної моделі; обчислюється за формулою $DW = 2 - 2\rho$, де ρ — коефіцієнт автокореляції першого порядку і

$$\rho = \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N [e(k) - \bar{e}][e(k-1) - \bar{e}];$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [e(k) - \bar{e}]^2, \quad e(k) = y(k) - \overline{y(k)}.$$

Критерій Ханана–Куїна (HQ). Критерій використовується для порівняння моделей за співвідношенням між якістю вибору і кількістю оцінюваних параметрів. Обчислюється тільки для моделей бінарного та множинного вибору за виразом

$$HQ = -2 \frac{\ln L}{n} + 2k \frac{\ln(\ln n)}{n},$$

де L — функція правдоподібності; n — кількість спостережень; k — кількість змінних моделі. Вибирається модель з найменшим значенням критерію.

Критерій Макфадена (McFadden Rsquared). Це аналог коефіцієнта детермінації для звичайної регресії:

$$\text{McFaddenRsquared} = 1 - \frac{\ln L}{\text{Restr} \ln L},$$

де $\ln L$ — логарифм функції правдоподібності; $\text{Restr} \ln L$ — залишок логарифма функції правдоподібності. Значення міститься в діапазоні (0, 1). Обчислюється тільки якщо модель містить константу. Найкращим вважається значення, що найближче до одиниці.

Середньоквадратична похибка (СКП) використовується для оцінювання адекватності моделі і обчислюється за формулою

$$\text{СКП} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y(k) - \hat{y}(k)]^2},$$

де $y(k)$ — значення спостережуваної змінної; $\hat{y}(k)$ — модельні значення, обчислені за оціненими параметрами. Середня абсолютна похибка у відсотках (САПВ) — це середнє абсолютних значень похибок оцінок прогнозу відносно фактичного значення показника:

$$\text{САПВ} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|y(k) - \hat{y}(k)|}{|y(k)|} 100,$$

де $y(k)$ — значення спостережуваної змінної; $\hat{y}(k)$ — модельні значення, обчислені за оціненими параметрами. Оскільки ця міра характеризує відносну якість прогнозу, то її використовують здебільшого для порівняння точності прогнозів різнорідних об'єктів (процесів) прогнозування. Однак вона завжди корисна для виконання порівняльного аналізу якості прогнозування одного й того ж самого процесу різними методами, оскільки відносна міра є чіткою і зрозумілою для дослідника і практичного користувача [7, 8].

Для аналізу якості моделей і встановлення кращої моделі для розв'язання певної задачі використовують кілька критеріїв для оцінювання адекватності моделей [9]: загальна точність моделі; помилки першого і другого роду; ROC-крива та індекс *GINI*. Загальна точність моделі (*CA* —

Common Accuracy) визначається так: $CA = \frac{\text{Correct Forecast}}{N}$, де

Correct Forecast — кількість правильно спрогнозованих випадків; N — загальна кількість випадків. Загальна точність моделі є дещо суб'єктивною оцінкою, оскільки вона залежить від частки дефолтів у моделі та від порога відсікання [9]. Для різних значень порога точність моделі також буде набувати різних значень. *ROC-крива* (*Receiver Operation Characteristic* — робоча характеристика приймача) показує залежність кількості правильно класифікованих позитивних прикладів від кількості неправильно класифікованих негативних прикладів. Перші називають істинно позитивними, а другі — негативними множинами. Припускається, що у класифікаторі є певний параметр, варіюючи яким можна отримати певне розбиття на класи. Цей параметр часто називають порогом або точкою відсікання (*cut-off*), залежно від якого будуть отримані різні величини помилок першого і другого роду (табл. 1).

Таблиця 1. Помилки першого і другого роду

Повернення/ Неповернення	Прогноз моделі: повернення кредиту (0)	Прогноз моделі: дефолт (1)
Фактично: повернення кредиту (0)	Правильно класифіковані (<i>TP</i>)	Помилки другого роду (<i>FN</i>)
Фактично: дефолт (1)	Помилки першого роду (<i>FP</i>)	Правильно класифіковані (<i>TN</i>)

Для аналізу якості моделі найчастіше використовують такі відносні показники (у відсотках):

– частка істинно позитивних прикладів (*True Positives Rate*):

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN};$$

– частка хибно позитивних прикладів (*False Positives Rate*):

$$FPR = \frac{FP}{TN + FP}.$$

Зазвичай для аналізу якості моделей використовують ще дві характеристики: чутливість та специфічність. Чутливість моделі — це частка істинно позитивних випадків, тобто $Se = TPR = \frac{TP}{TP + FN}$.

Специфічність моделі — це частка істинно негативних випадків, які були правильно класифіковані моделлю: $Sp = \frac{TN}{TN + FP}$. Очевидно, що

$$Sp = \frac{TN + FP - FP}{TN + FP} = 1 - \frac{FP}{TN + FP} = 1 - FPR.$$

Модель з високою чутливістю надає істинний результат за наявності позитивних випадків (виявляє позитивні приклади). Навпаки, модель із високою специфічністю найчастіше дає істинний результат за наявності негативних випадків (виявляє негативні приклади). Для побудови графіка *ROC*-кривої по осі *Y* відкладаються значення чутливості Se , а по осі *X* — частку хибно позитивних випадків FPR або $1 - Sp$. Графік ідеального класифікатора *ROC*-кривої (рис. 1) проходить через верхній лівий кут, де частка істинно позитивних випадків становить 1 (ідеальна чутливість), а частка хибно позитивних прикладів дорівнює нулю. Тому чим ближче крива наближається до верхнього лівого кута, тим кращою є здатність моделі передбачувати. Діагональна лінія відповідає класифікатору, який не здатний розпізнати ці два класи.

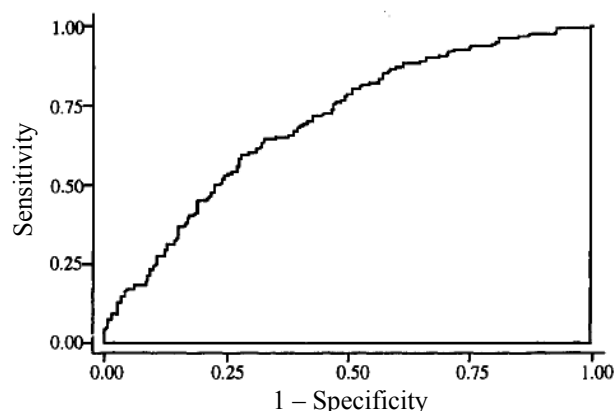


Рис. 1. Графік *ROC*-кривої

Оскільки візуальне порівняння *ROC*-кривих не завжди дає змогу визначити ефективнішу модель, застосовують оцінку площі під кривими. Число-

вий показник площі під кривою AUC (*Area Under Curve*) обчислюється, наприклад, за методом трапецій:

$$AUC = \int f(x)dx = \sum_i \left[\frac{X_{i+1} + X_i}{2} \right] (Y_{i+1} - Y_i).$$

Більш зрозумілим і частіше згадуваним у літературі параметром оцінювання якості моделі є індекс $GINI$, запропонований італійським статистиком К. Джіні, який тісно пов'язаний з числовим показником площі під ROC -кривою. Індекс $GINI$ — це площа ділянки між діагоналлю і кривою Лоренца, поділена на площу всієї ділянки під діагоналлю. Індекс $GINI$ широко використовується для аналізу роздільної здатності системи оцінювання під час управління кредитними ризиками, тобто оцінювання здатності моделі поділяти клієнтів на схильних та несхильних до дефолту. Якщо модель здатна оцінити клієнтів за ймовірністю дефолту, то більшість клієнтів, схильних до дефолту, мають отримати більшу ймовірність дефолту. Відповідно найменша ймовірність дефолту має бути для клієнтів, не схильних до дефолту. Індекс $GINI$ проілюстровано графіком, де сукупний відсоток дефолту для клієнтів показано поряд із сукупним відсотком клієнтів, коли вони упорядковані за ймовірністю дефолту (менша ймовірність дефолту — зліва, більша — справа). Цей графік відомий як крива Лоренца (рис. 2) [9].

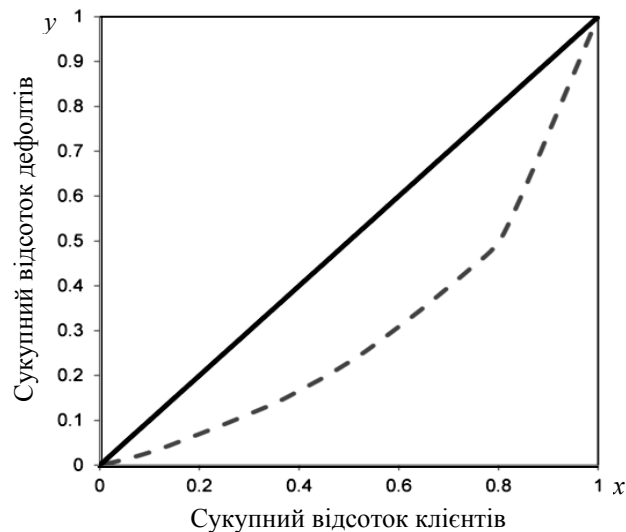


Рис. 2. Крива Лоренца для кредитування

Діагональна лінія — це лінія «випадкової моделі». На осі X клієнти впорядковані за заданою ймовірністю дефолту. Очевидно, що 80% дефолтів припадає саме на решту 20% клієнтів (20% клієнтів з найбільшою ймовірністю дефолту). Це означає, що модель виконує прийнятний поділ. Отже, чим більша ділянка між діагоналлю та кривою, тим вища якість моделі. Дефолти серед клієнтів з однаковою ймовірністю дефолту вважаються поділеними випадково серед цих клієнтів. Індекс $GINI$ можна визначити через площу фігури, що розміщена під ROC -кривою, таким чином: $GINI = 2 \cdot AUC - 1$. Діапазон значень індексу $GINI$ становить $0 \leq G \leq 1$, а моделі з найвищою роздільною здатністю, тобто моделі, які виконують високоякісне сортування схильних до дефолту клієнтів і клієнтів, не схильних до дефолту, отримають

найвищі коефіцієнти. Оцінка якості моделі істотно залежить від даних, за якими вона будується. Для застосування на практиці скорингу (оцінки фінансового стану нових клієнтів) індекс *GINI* на рівні 55% є вже дуже високим, у той час, як для скорингу поведінки (оцінювання фінансового стану існуючих клієнтів) індекс *GINI* зазвичай набуває значень, вищих за 70%. У літературі наведено шкалу значень індексу *GINI* (табл. 2) [9].

Таблиця 2. Оцінка якості моделі за площею *AUC* та індексом *GINI*

Інтервал <i>AUC</i>	Індекс <i>GINI</i>	Якість моделі
0,9 – 1,0	0,8 – 1,0	Відмінна
0,8 – 0,9	0,6 – 0,8	Дуже висока
0,7 – 0,8	0,4 – 0,6	Прийнятна
0,6 – 0,7	0,2 – 0,4	Середня
0,5 – 0,6	0 – 0,2	Незадовільна

Значення точок *ROC*-кривої можуть бути використані для знаходження оптимального порога відсікання — компромісу між чутливістю та специфічністю моделі. Критеріями вибору порога відсікання можуть бути вимоги:

- мінімальної величини чутливості (специфічності) моделі;
- максимальної сумарної чутливості та специфічності моделі, тобто

$$cut - off = \max_k (Se_k + Sp_k);$$

- балансу між чутливістю і специфічністю, тобто коли $Sp \approx Se$:

$$cut - off = \min_k |Se_k - Sp_k|.$$

ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДИКИ МОДЕЛЮВАННЯ

Для побудови моделі лінійної регресії, логістичної регресії та дерева рішень використано статистичні дані першої вибірки — All_1 (довжина вибірки даних — 15000 значень).

- x_1 — змінна, яка характеризує стать позичальника (*gender*);
- x_2 — змінна, яка характеризує вік позичальника (*Age*);
- x_3 — змінна, яка характеризує суму кредиту (*Credit_sum*);
- x_4 — змінна, яка характеризує термін кредитування у днях (*Term_of_crediting_in_day*);
- x_5 — змінна, яка характеризує сімейний стан позичальника (*Marital_status*);
- x_6 — змінна, яка характеризує кількість дітей позичальника (*Children*);
- x_7 — змінна, яка характеризує кількість найманих працівників в компанії позичальника (*Number_of_employees_in_company*);
- x_8 — змінна, яка характеризує дохід позичальника (*Income_customer*);
- x_9 — змінна, яка характеризує витрати позичальника (*Costs_customer*);
- y — змінна, яка характеризує результат повернення кредиту (*Result*).

Особливістю цієї вибірки є її висока асиметрія стосовно типів позичальників, тобто вона містить характеристики 750 клієнтів, які не повертають

кредити, і 14250 клієнтів, які повертають кредити. Результат побудови лінійної регресії показано на рис. 3.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.965872	0.009212	104.8455	0.0000
X1	0.016636	0.003582	4.644929	0.0000
X2	-0.000539	0.000188	-2.864474	0.0042
X3	7.47E-08	3.17E-08	2.352971	0.0186
X4	-2.23E-09	1.54E-09	-1.442450	0.1492
X5	0.002748	0.001968	1.396726	0.1625
X6	0.003767	0.002594	1.452080	0.1465
X7	-0.005106	0.001223	-4.176210	0.0000
X8	-6.93E-08	9.26E-08	-0.748356	0.4543
X9	3.50E-07	7.02E-07	0.497868	0.6186

R-squared	0.004825	Mean dependent var	0.950000
Adjusted R-squared	0.004227	S.D. dependent var	0.217952
S.E. of regression	0.217491	Akaike info criterion	-0.212651
Sum squared resid	709.0625	Schwarz criterion	-0.207574
Log likelihood	1604.885	F-statistic	8.074477
Durbin-Watson stat	1.854974	Prob(F-statistic)	0.000000

Рис. 3. Результати оцінювання лінійної регресії та її характеристики

Для вибору кращої моделі із множини різних специфікацій надано значення інформаційних критеріїв Акайке (AIC) та Шварца (SC), логарифмічну функцію правдоподібності. Для визначення міри якості лінійної регресійної моделі вибрано такі статистичні параметри: R^2 — коефіцієнт детермінації; стандартну похибку регресії; статистику Дарбіна–Уотсона; статистику Фішера (F -статистику) та відповідну ймовірність. Значення стандартної похибки регресії показує, що лінійна модель дає гірші результати ($SE = 0,212$), ніж нелінійна модель логіт ($SE = 0,173$).

Проаналізовано також іншу вибірку (BASE_ALL) для порівняння зі статистичними даними, які описують такі змінні (потужність вибірки даних становить 7568 значень):

- змінна, яка характеризує вік позичальника (Ageyears);
- змінна, яка характеризує стать позичальника (Sex);
- змінна, яка характеризує освіту позичальника (Education);
- змінна, яка характеризує сімейний стан позичальника (Maritalstatus);
- змінна, яка характеризує суму кредиту (Credit);
- змінна, яка характеризує регіон проживання позичальника (Region);
- змінна, яка характеризує сферу, де працює позичальник (Prev Employer Sector);
- змінна, яка характеризує статус в суспільстві позичальника (Occupation Status);

– змінна, яка характеризує досвід роботи позичальника (Work Experience Month);

– змінна, яка характеризує результат повернення кредиту (Good/Bad).

Для побудови моделі перетворено дані таким чином: стать позичальника (Sex): чоловіча (Male) — 1; жіноча (Female) — 0; освіта (Education): початкова (Elementary) — 0, середня (Meaddle) — 1, вища (High) — 2; дві вищі чи ступінь (Twohighand/ordegree) — 3; сімейний стан (Maritalstatus): неодружений (Notmarried) — 0, одружений (Registeringmarriage) — 1, вдова(ець) (Widow(er)) — 2, розведений (Divorced) — 3, цивільний шлюб (Civilmarriage) — 4; сфера праці (PrevEmployerSector): невизначена (none) — 0, інші (other) — 1, медицина (Medicine) — 2, сільське господарство (Agriculture) — 3, послуги (Services) — 4, будівництво (Building) — 5, освіта (Education) — 6, торгівля (Trade) — 7, виробництво (Manufacturing) — 8, фінанси (Finance) — 9, видобуток (Mining) — 10; статус у суспільстві (OccupationStatus): найманий робітник (Employee) — 0, урядовий офіцер (Governmentofficer) — 1, пенсіонер (Pensioner) — 2, власник/співвласник (Owner/coowner) — 3, військовий (Military) — 4; результат (Good/Bad): повернено кредит (Good) — 1, не повернено кредит (Bad) — 0.

Узагальнену порівняльну характеристику лінійної моделі та моделі логіт подано в табл. 3:

Таблиця 3. Результати застосування лінійної і нелінійної регресії

Варіант розрахунків	Якість моделі			Якість прогнозу		
	Коефіцієнт детермінації	Сума квадратів залишків	Статистика Дарбіна-Уотсона	Середня квадратична похибка	Середня абсолютна похибка	Коефіцієнт Тейла
Лінійна регресія						
All_1	0,0048	709,062	1,855	0,212	9,463	0,113
BASE_743	0,3840	114,416	0,272	0,309	34,056	0,302
Нелінійна регресія						
All_1	–	638,054	–	0,173	7,446	0,101
BASE_743	–	96,127	–	0,157	22,441	0,189

Отже, нелінійна регресія за всіма показниками якості прогнозу дає кращі результати ніж лінійна регресія. Побудована модель нелінійної регресії є кращою за показниками якості.

ПОБУДОВА ДЕРЕВ РІШЕНЬ ЗА СТАТИСТИЧНИМИ ДАНИМИ

У результаті застосування системи SPSS побудовано дерево рішень з відповідними характеристиками для вибірки All_1 (рис. 4).

За допомогою методу CHAID (CHi-squared Automatic Interaction Detection) отримано результат, який свідчить, що рівень доходу (x_8) є кращим предиктором кредитного рейтингу. Для категорії з низьким рівнем доходів кращий предиктор — рівень витрат (x_9), для малих витрат кращий предиктор — сума кредиту (x_3). Оскільки немає ніяких розгалужень, то це термінальний вузол. Клієнти цих вузлів мають досить прийнятний кредитний рейтинг (0,69 або 0,78), незважаючи на суму кредиту. Для великих

значень витрат немає розгалужень; це термінальний вузол. Для категорій середнього та високого доходів кращим предиктором є термін кредитування (x_4). Для середнього терміну кращий предиктор — сума кредиту (x_3), а для більшого терміну — стать позичальника (x_1).

Model Summary		
Specifications	Growing Method	CHAID
	Dependent Variable	y
	Independent Variables	$x_9, x_8, x_6, x_7, x_5, x_1, x_4, x_2, x_3$
	Validation	None
	Maximum Tree Depth	3
	Minimum Cases in Parent Node	100
	Minimum Cases in Child Node	50
Results	Independent Variables Included	$x_8, x_9, x_3, x_4, x_1, x_7$
	Number of Nodes	31
	Number of Terminal Nodes	21
	Depth	3

Рис. 4. Зведена таблиця загальних специфікацій дерева рішень

Gain Summary for Nodes			
Node	N	Percent,%	Mean
30	1091	7,30	1
27	1001	6,70	0,99
13	233	1,60	0,99
11	947	6,30	0,98
7	2042	13,60	0,98
21	1912	12,70	0,97
29	68	0,50	0,97
15	2737	18,20	0,97
23	507	3,40	0,97
28	176	1,20	0,97
25	417	2,80	0,96
6	108	0,70	0,94
20	318	2,10	0,94
24	689	4,60	0,94
22	298	2,00	0,94
9	678	4,50	0,93
26	171	1,10	0,91
12	106	0,70	0,9
5	366	2,40	0,86
19	612	4,10	0,79
18	523	3,50	0,69

Growing Method CHAID
 Dependent Variable: y

Risk

Estimate	Std Error
0,073	0,006

Growing Method CHAID

Рис. 5. Узагальнені результати оцінювання

Для клієнтів з високим рівнем доходів кращим предиктором є термін кредитування (x_4). Залежно від терміну кращими предикторами є дохід позичальника (x_8), кількість найманих робітників в компанії (x_7) або сума кредиту (x_3). Узагальнені результати за деревом рішень (оцінку ризику, його стандартну похибку, тобто міру точності прогнозу) показано на рис. 5.

Отже, за допомогою дерев рішень отримано оцінку ризику неправильного оцінювання клієнта 4,3% та стандартне відхилення 0,001. Узагальнені результати за деревом для другої вибірки (*BASE_743*) подано нижче. Діаграма дерева (рис. 6), що являє собою графічне зображення моделі дерева, показує, що з використанням методу *CHAID* регіон проживання позичальника (x_6) є кращим предиктором кредитного рейтингу. Оскільки глибина дерева одинична, то не відбувається ніякого додаткового розгалуження.

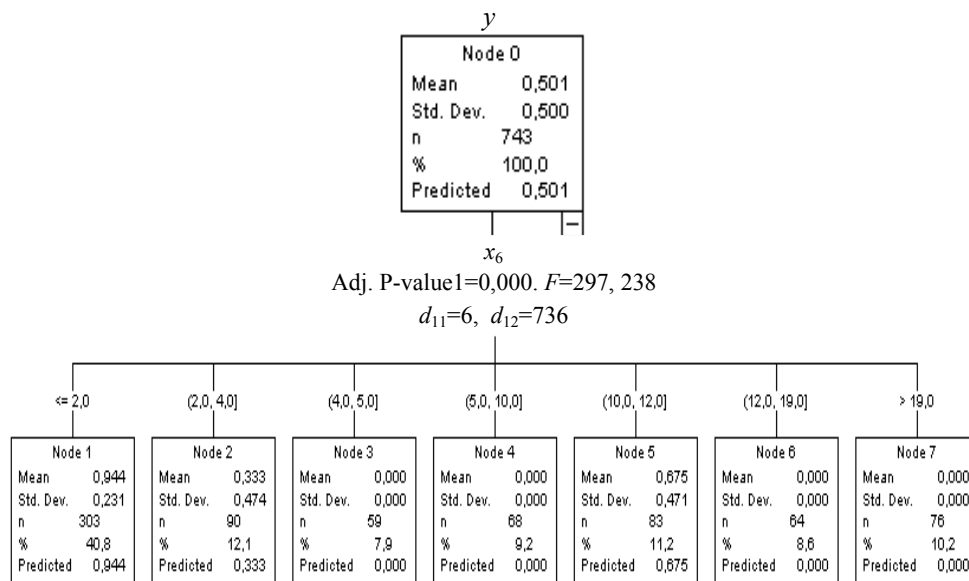


Рис. 6. Діаграма дерева рішень

Оцінку ризику та його стандартну похибку, тобто міру точності прогнозу дерева, подано на рис. 7.

Gain Summary for Nodes

Node	N	Percent, %	Mean
1	303	40,80	0,94
5	83	11,20	0,87
3	90	12,10	0,33
7	76	10,20	0
4	68	9,20	0
6	64	8,6	0
3	59	7,90	0

Growing Method: CHAID Dependent Variable: y

Risk

Estimate	Std Error
0,073	0,006

Growing Method CHAID

Рис. 7. Узагальнені результати та ризики

Отже, за допомогою дерев рішень отримано ризик неправильного оцінювання клієнта 7,3%, а стандартне відхилення становить 0,06. Результати ризику неправильного оцінювання та стандартне відхилення для двох вибірок наведено в табл. 4.

Таблиця 4. Оцінка ризику та стандартна похибка дерева рішень для двох множин статистичних даних

Вибірки	Ризик неправильної оцінки	Стандартне відхилення
ALL_1	0,043	0,001
BASE_743	0,073	0,006

Побудова мережі Байєса. Для побудови першої моделі (вибірка *ALL* — 15000 значень) використано статистичні дані для 15000 виданих кредитів, термін яких закінчився. Вибірку поділено на навчальну (13000 випадків) та перевірну (2000 випадків). Навчальна вибірка завантажується в підсистему побудови моделі. Для побудови моделі необхідно формалізувати дані у зручному для оброблення вигляді, тобто перевести їх у заданий формат, а у випадку неперервних змінних — дискретизувати їх. Для дискретизації використано ієрархічну дискретизацію. На наступному кроці порівнюються характеристики взаємовиключних змінних і вибираються змінні, які будуть використовуватись на етапі побудови мережі. Далі вибирається відповідний алгоритм навчання мережі; у разі потреби використовуються експертні знання і виконується навчання мережі.

Будуючи структуру мережі Байєса в програмі *GeNe*, слід пам'ятати, що обраний алгоритм впливає на швидкість і якість побудови структури. Фактично найшвидшим є алгоритм *Greedy Thick Thinning*, його і будемо використовувати для аналізу даних. У результаті роботи алгоритму отримуємо тільки одну структуру, яка є цілком логічною і оптимальною за критерієм максимальної правдоподібності (рис. 8).

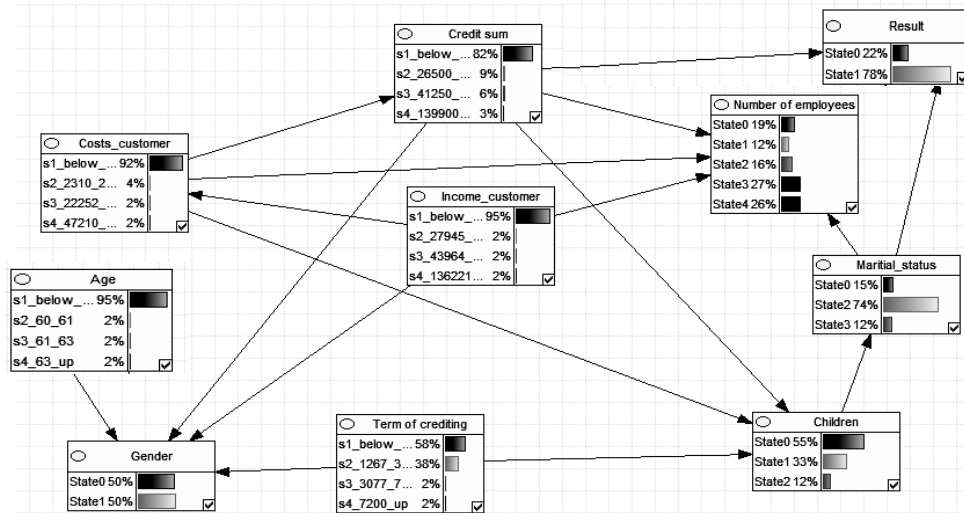


Рис. 8. Структура мережі Байєса у вигляді гістограм вибірки *ALL*

На основі перевірної вибірки перевіряється якість моделі з використанням відомих оцінок: загальної точності, помилок першого і другого роду. Для різних порогів відсікання обчислено помилки першого і другого роду (табл. 5).

Найбільша точність моделі досягається на рівні 0,75 зі встановленням порога 0,3 — буде пропущено 10 дефолтів. Очевидно, що мережа Байєса має схильність до «перестраховання», тобто вона частіше помиляється, усуваючи тих клієнтів, які б повернули кредит. Зрозуміло, що точність моделі та кількість помилок першого і другого роду будуть залежати від порога відсікання, встановленого банком. Слід пам'ятати, що, встановлюючи поріг відсікання, варто визначати не лише відсоток відсіяних клієнтів, а і нижню межу ймовірності повернення кредиту, тобто поріг, нижче за який клієнт вважається таким, що не поверне кредиту, або ж нижню межу ймовірності

дефолту, нижче від якої вважається, що клієнту слід видати кредит. Значення ймовірності дефолту 0,1 або 0,2 для клієнта є незначними і статистично малими, а тому поріг відсікання доцільно встановити на рівні 0,25 – 0,3. Зрозуміло, що встановлений поріг відсікання впливає на кількість помилок першого і другого роду. Для мережі Байєса побудовано *ROC*-криву (рис. 9).

Таблиця 5. Загальна точність моделі та помилки першого і другого роду для різних рівнів порога відсікання, отримані для мереж Байєса (*ALL*)

Характеристика: повернення/кредиту	Прогноз: повернення кредиту (0)	Прогноз: дефолт (1)	Точність, %
Cut-off=0,5			
Факт: повернення кредиту (0)	82	50	0,620
Факт: дефолт (1)	12	56	0,82
Загальна точність моделі			0,69
Cut-off=0,4			
Факт: повернення кредиту (0)	92	49	0,65
Факт: дефолт (1)	3	56	0,94
Загальна точність моделі			0,74
Cut-off=0,3			
Факт: повернення кредиту (0)	101	49	0,67
Факт: дефолт (1)	4	46	0,92
Загальна точність моделі	—	—	0,735

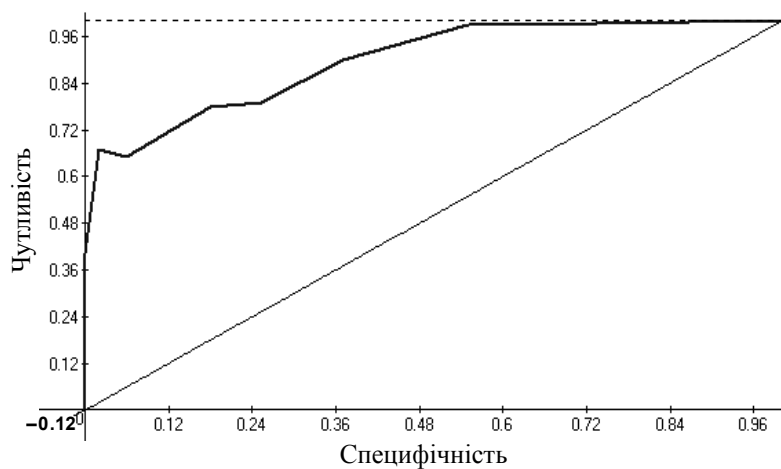


Рис. 9. *ROC*-крива для мережі Байєса

Для порівняння моделей використовуємо індекс *GINI*. Для цього спочатку обчислимо значення площі під кривою: $AUC = 0,86$. Відповідно індекс *GINI* становить: $GINI = 2AUC - 1 = 0,72$.

АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Таким чином, у праці використано три методи інтелектуального аналізу даних для прогнозування кредитоспроможності фізичних осіб за статистичними даними: лінійну регресію, логістичну регресію та дерева рішень. Для ви-

конання обчислювальних експериментів використано дві вибірки даних: для 15000 та для 7568 клієнтів банку. Вибрано множину статистичних критеріїв для аналізу якості класифікації клієнтів. Кращі результати класифікації клієнтів на дві групи отримано за допомогою дерев рішень (табл. 6), що можна пояснити можливістю досягнення високої якості класифікації на дві групи за допомогою цього методу на конкретних даних.

Таблиця 6. Стандартне відхилення для трьох моделей

Вибірки	Лінійна регресія	Логістична регресія	Дерева рішень
ALL_1	0,217	0,176	0,001
BASE_743	0,392	0,278	0,006

Результати порівняння якостей моделей на основі бінарної логістичної регресії та мереж Байєса наведено в табл. 7. Так, на основі моделей у формі мереж Байєса і бінарної логістичної регресії отримано дуже високі значення індексу *GINI*.

Таблиця 7. Порівняльна таблиця характеристик для мереж Байєса та бінарної логістичної регресії

All				
Назва методу	Індекс <i>GINI</i>	Значення <i>AUC</i>	Точність моделі	Якість моделі
Бінарна логістична регресія	0,74	0,87	0,77	Дуже висока
Мережа Байєса	0,72	0,86	0,74	Дуже висока
BASE				
Назва методу	Індекс <i>GINI</i>	Значення <i>AUC</i>	Точність моделі	Якість моделі
Бінарна логістична регресія	0,74	0,87	0,79	Дуже висока
Мережа Байєса	0,76	0,88	0,74	Дуже висока

Наведені результати свідчать, що надалі банкам доцільно використовувати відомі скорингові моделі і мережі Байєса, оскільки отримані результати та прогнозні якості мереж Байєса дають можливість усунути недобросовісних позичальників і таким чином зменшити втрати банків від неповернення кредитів. Високі значення параметрів точності моделі також дає логістична регресія. Ці результати ще раз підтверджують доцільність використання логістичної регресії для оцінювання кредитоспроможності позичальника.

Очевидно, що мережа Байєса має схильність до «перестраховання», тобто вона частіше помиляється, усуваючи тих клієнтів, які б повернули кредит. Зрозуміло, що точність моделі та кількість помилок першого і другого роду залежатиме від порога відсікання, який встановлюється банком.

ВИСНОВКИ

Виконано короткий огляд моделей оцінювання кредитоспроможності і проаналізовано їх переваги та недоліки. З наведеного огляду випливає, що існує потреба у створенні нових сучасних комп'ютерних систем для оцінювання ризиків з метою їх мінімізації та ризик-менеджменту. Описано три методи,

які можна використовувати для прогнозування кредитоспроможності фізичних осіб: логістичну регресію, лінійну регресію та дерева рішень. Незважаючи на те, що лінійна регресія використовується нечасто, її також можна використати для попереднього наближеного оцінювання та порівняльного аналізу результатів.

Виконано загальний огляд статистичних критеріїв аналізу якості класифікації клієнтів. Зазначено, що розрахунок критеріїв якості дещо відрізняється для лінійних і нелінійних моделей. Існує можливість вибрати саме ті критерії, які необхідні для аналізу якості класифікації клієнтів. Оцінено якість прогнозу та якість моделі за такими критеріями, як коефіцієнт детермінації, сума квадратів залишків, статистика Дарбіна–Уотсона, середня квадратична похибка та середня абсолютна похибка у відсотках. Нелінійна регресія дає можливість отримати значно кращі якісні показники, ніж лінійна за рядом критеріїв. Установлено, що кращі результати класифікації клієнтів отримано за допомогою дерев рішень (стандартне відхилення —0,1–0,6 %). Показано, що дерева рішень і байєсівські мережі дають змогу отримати прийнятний за якістю результат класифікації.

У подальших дослідженнях для оцінювання кредитоспроможності клієнтів фінансової установи доцільно побудувати спеціалізовану систему підтримки прийняття рішень на основі комбінованого використання методів регресійного та інтелектуального аналізу даних. Для підвищення достовірності результатів доцільно також використати статистичні дані, отримані з альтернативних джерел.

ЛІТЕРАТУРА

1. Матигорова И.Ю. Характеристика основных подходов к оценке кредитного риска / И.Ю. Матигорова // Экономическая наука и практика: материалы междунар. науч. конф. (г. Чита, февраль 2012 г.). — Чита: Изд-во «Молодой ученый», 2012. — С. 68–69.
2. Сиддики Н. Скоринговые карты для оценки кредитных рисков / Н.Сиддики. — М.: Изд-во «Манн, Иванов и Фербер», 2014. — 268 с.
3. Liu Y. The evaluation of classification models for credit scoring / Y. Liu. — Arbeitsbericht 02/2002. — Institut für Wirtschaftsinformatik, 2002. — 19 p.
4. Кузминчук Н.В. Методы оценки кредитного риска в банковской деятельности / Н.В. Кузминчук, О.С. Мандрыка // Бизнесинформ, 2009. — № 1. — С. 113–117.
5. Bielecki T.R. Credit Risk: modeling, valuation and hedging / T.R. Bielecki, M. Rutkowski. — Berlin: Springer, 2002. — 500 p.
6. Hosmer D.W. Applied Logistic Regression / D.W. Hosmer, S. Lemeshow. — New York: John Wiley & Sons, Inc. 1989. — 400 p.
7. Бідюк П.І. Аналіз часових рядів / П.І. Бідюк, В.Д. Романенко, О.Л. Тимошук. — К.: Політехніка, 2013. — 600 с.
8. Бідюк П.І. Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів / П.І. Бідюк // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 88–110.
9. Довгий С.О. СППР на основі ймовірнісно-статистичних методів / С.О. Довгий, О.М. Трофимчук. — К.: Логос, 2014. — 430 с.

Надійшла 01.11.2016

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АКТУАРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ РИЗИКІВ

С.В. ДУБІНІНА, П.І. БІДЮК

Анотація. Подано результати застосування методів інтелектуального аналізу даних до актуарного моделювання та оцінювання ризиків страхових компаній. Як математичний апарат використано узагальнені лінійні моделі, метод групового врахування аргументів та нечіткий метод групового врахування аргументів, а також байєсівський підхід до оцінювання невідомих параметрів моделей. На підставі фактичних статистичних даних з галузі страхування побудовано нові узагальнені лінійні моделі для подальшого застосування під час оцінювання ризику втрат страхових компаній, розроблено й апробовано мережу Байєса для оцінювання ризику банкрутства страхових компаній у разі настання страхового випадку. Прийнятною для подальшого використання виявилась модель з гамма-розподілом та логарифмічною функцією зв'язку, параметри якої отримано за чотири ітерації алгоритму оцінювання. Великий ризик банкрутства страхових компаній свідчить про відсутність ефективного механізму управління коштами як власного капіталу, так і надходжень, отриманих від страхових договорів. Застосування методів інтелектуального аналізу даних є ефективним підходом до розв'язання задач прогнозування та оцінювання ризиків актуарних процесів.

Ключові слова: актуарні процеси, страхові ризики, узагальнені лінійні моделі, байєсівський підхід, методи інтелектуального аналізу даних, метод групового врахування аргументів, нечіткий метод групового врахування аргументів.

ВСТУП

У зв'язку з удосконаленням технологій пошуку та оброблення даних у суспільстві нагромаджуються великі масиви даних різного спрямування. Функціонування будь-яких підприємств супроводжується реєстрацією і записом детальної інформації щодо їх діяльності та споживачів. У результаті величезні скупчення даних утворюють хаотичні нагромадження, які без спеціального оброблення непотрібні; більше того, вони суттєво ускладнюють процес пошуку потрібної інформації. Критеріями ефективного оброблення даних є врахування таких особливостей: дані мають необмежений обсяг і є різно-рідними; результати мають бути конкретними і зрозумілими, а інструменти для їх оброблення — простими та зручними у використанні.

Одним з методів ефективного оброблення інформації є інтелектуальний аналіз даних (ІАД), який полягає у виявленні у первинних даних, раніше невідомих, доступних, практично корисних і нетривіальних інтерпретацій знань, необхідних для прийняття рішень у різних галузях діяльності. До методів і алгоритмів ІАД належать: нейронні мережі, дерева рішень, символічні правила, методи найближчого сусіда і k -найближчого сусіда, метод опорних векторів, байєсівські мережі (БМ), лінійна регресія, кореляційно-регресійний

аналіз, ієрархічні методи кластерного аналізу, неієрархічні методи кластерного аналізу, зокрема алгоритми k -середніх і k -медіани; методи пошуку асоціативних правил, зокрема алгоритм Аргіогі; метод обмеженого перебирання; еволюційне програмування і генетичні алгоритми; різноманітні методи візуалізації даних і т. ін. [1–4]. Інтелектуальний аналіз даних виник і набув подальшого розвитку на базі досягнень прикладної статистики, розпізнавання образів, методів штучного інтелекту, теорії баз даних тощо. Одним з актуальних застосувань ІАД є аналіз даних у страховій діяльності.

Страхова (актуарна) діяльність спрямована на перерозподіл грошових коштів та акумулювання їх безпосередньо для страхової діяльності; інвестування цих коштів у різні галузі діяльності сприяє їх подальшому розвитку. Таким чином, виникають задачі аналізу фінансових процесів та менеджменту фінансових ризиків з використанням сучасних методів математичного моделювання, прогнозування та ефективної підтримки прийняття рішень із застосуванням методів ІАД.

Актуальність дослідження полягає у застосуванні методів ІАД до моделювання актуарних процесів та оцінювання фінансових ризиків страхових компаній (СК). Це пояснюється тим, що сьогодні сучасний стан фінансів СК потребує пошуку нових форм та методів підвищення їх конкурентоспроможності, удосконалення та впровадження у практику економіко-математичних моделей для оцінювання і прогнозування їх подальшого розвитку в умовах невизначеності, ризику реалізації багатьох процесів, що відбуваються у діяльності фізичних осіб та підприємств різних форм власності. Розмаїття форм прояву ризику, частота та складність наслідків його реалізації зумовлюють необхідність поглибленого аналізу ризиків та економіко-математичного обґрунтування фінансової політики СК[5]. Використання економіко-математичних методів для аналізу та управління фінансовими ризиками зумовлено їх можливістю отримання обґрунтованої та достовірної оцінки основоположних характеристик фінансової стабільності. До основних характеристик фінансової стабільності СК належать такі показники: імовірність розорення, маржа платоспроможності, власний капітал, страхові тарифи. Отже, задача створення систем для ефективного оцінювання фінансового стану з метою уникнення і недопущення банкрутства СК та підвищення рівня її фінансової стабільності є надзвичайно актуальним завданням.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Мета роботи — застосування методів ІАД для моделювання актуарних процесів і оцінювання фінансових ризиків страхових компаній. Для досягнення поставленої мети необхідно: дослідити задачу оцінювання фінансових ризиків у страхуванні з використанням методів ІАД; на основі запропонованої методики моделювання з використанням структур узагальнених лінійних моделей (УЛМ) побудувати прогнозні моделі для оцінювання ризику втрат СК у разі настання страхового випадку; порівняти якість отриманих результатів за методом групового врахування аргументів (МГВА) та нечітким МГВА; розробити БМ для оцінювання ризику банкрутства СК; сформулювати аналіз отриманих результатів та зробити висновки щодо доцільності застосування ІАД в актуарному моделюванні та прогнозуванні.

МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ІАД У МОДЕЛЮВАННІ СТРАХОВИХ РИЗИКІВ

Широкого застосування ІАД набув у актуарних задачах, оскільки візуальні інструменти дають змогу виконувати аналіз даних предметними фахівцями, які не мають відповідних математичних знань. Інтелектуальний аналіз даних має велику значущість для керівників і актуаріїв у сфері страхування. За допомогою методів ІАД можна домогтися відчутних переваг у конкурентній боротьбі за допомогою прогнозування страхових виплат у разі настання страхового випадку; оцінювання фінансових ризиків СК для недопущення подальшого банкрутства; виявлення шахрайства та ін. Досвід багатьох підприємств свідчить про доцільність застосування ІАД.

Ризики — можлива небезпека втрат, зумовлена певними природними явищами (землетруси, повені, засуха тощо), випадковими подіями техніко-технологічного характеру (пожежа, аварії, вибухи тощо), кримінальними явищами (крадіжки, розбійні напади, шахрайство тощо) та явищами суто економічного характеру, розмаїтість яких стрімко зростає у зв'язку з поглибленням суспільного поділу праці, розвитком кредитної системи (порушення ритмічності поставок, криза неплатежів, інфляція тощо).

Страхова діяльність супроводжується страховим ризиком. Але головним фундаментом страхової справи є розподіл ризику. Ризик є об'єктивною передумовою виникнення страхових відносин: немає ризику — немає потреби в страхуванні. Однак не кожен ризик може лягти в основу страхових відносин. Застрахованим буде лише той ризик, стосовно якого можна оцінити ймовірність настання страхового випадку, визначити розмір можливого збитку та нарахувати еквівалентну страхову премію. Під страховим ризиком розуміють прогнозний збиток об'єкта страхування в результаті настання страхової події [6]. Розв'язання задачі оцінювання фінансових ризиків у сфері страхування є одним з найважливіших етапів фінансового аналізу, оскільки для управління ризиком його потрібно спочатку вміти проаналізувати, а потім оцінити. Під оцінюванням ризиків розуміють систематичний процес виявлення факторів і видів ризиків, їх кількісну оцінку, тобто методологія аналізу ризиків поєднує взаємодоповняльні кількісний та якісний підходи.

Теоретичні дослідження проблеми невизначеності здебільшого присвячені аналізу причин виникнення, класифікації та методам кількісної оцінки ризиків, проте менше уваги приділяється якісним методам з урахуванням впливу неекономічних факторів на фінансово-господарську діяльність підприємств, які для практичного застосування були б адекватнішими до реальних можливостей вітчизняних підприємств, а отримані результати мали б підґрунтя для застосування у подальшому аналізі. У межах цієї роботи виконується дослідження кількісних та якісних методів аналізу фінансових ризиків з метою впровадження їх при оцінюванні і розрахунку міри впливу індикаторів економічного та неекономічного характеру.

Оскільки пошук імовірності розорення СК є однією із найважливіших задач страхової математики, на основі якої будуються основні актуарні концепції щодо фінансової оцінки стабільності, — врахування не тільки відсутності банкрутства, а і його недопущення, то зростає потреба у застосуванні

економіко-математичних методів до моделювання та аналізу фінансових ризиків і побудови актуарних моделей для пошуку оптимальної (справедливої, раціональної) величини страхової премії на основі знайденої імовірності розорення. Можливість побудови і застосування актуарних моделей пояснюється можливістю робити припущення щодо розподілу розмірів страхових виплат та інтервалів часу між виплатами, покладеними в основу моделі. Виплати можуть мати однаковий розподіл з відомою функцією розподілу або з довільною функцією розподілу; інтервали між виплатами можуть мати неоднакові параметри розподілу, а послідовність виплат описуватися за допомогою пуассонівського процесу з урахуванням додаткових можливостей виплати дивідендів учасникам.

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ РИЗИКІВ У СТРАХУВАННІ

Ступінь (міра) ризику — це ймовірність настання випадку втрат, а також розмір можливих збитків від нього. Імовірність настання такої події може бути визначена як об'єктивними, так і суб'єктивними методами. Об'єктивний метод визначення ймовірності настання події ґрунтується на обчисленні частоти, з якою відбувається ця подія, а суб'єктивний метод — на використанні суб'єктивних критеріїв, що ґрунтуються на різних припущеннях. Отже, задача оцінювання фінансових ризиків полягає у знаходженні залежності між визначеними розмірами втрат і ймовірністю їх виникнення. Сьогодні існують ефективні математичні моделі для оцінювання фінансових ризиків у страхуванні. Наприклад, відомі стандарти Basel II і Solvency I стимулюють розвиток моделей для оцінювання та менеджменту ризиків у фінансовій сфері.

Для оцінювання ризику в страховій практиці використовують спеціальні методи, які постійно розвиваються і удосконалюються. Так, на практиці є два підходи до аналізу ризиків — з власне факторів ризику і з позиції наслідків дії ризикових подій. Виходячи з цього моделі для оцінювання ризиків поділяють на два класи: моделі, засновані на аналізі наслідків (або «високорівневі моделі»), та моделі, засновані на аналізі факторів ризику (або «низькорівневі моделі»). Як ознаку для класифікації моделей використовують множину завдань, для розв'язання яких цю модель можна використовувати. Наприклад, моделі, які дають можливість отримати у явному вигляді функцію розподілу втрат, використовують для оцінювання середніх втрат СК і максимальних втрат на заданому рівні значущості (табл. 1).

Таблиця 1. Класифікація моделей для аналізу і менеджменту фінансових ризиків

Клас моделей	Застосування для розподілу ризиків за групами критичності	Застосування для визначення середніх втрат	Застосування для визначення максимально можливих втрат	Застосування для виявлення подій, що ведуть до настання ризику
Моделі, засновані на аналізі наслідків (або високорівневі моделі)				
BIA	–	–	+	–
LDA	+	+	+	–
IMA	–	–	+	–

Моделі, засновані на факторах ризику (або низькорівневі моделі)				
Sb-АМА	+	+	+	–
Метод функціональних кореляцій	+	+	+	–
Регресійний аналіз	+	+	+	+
Байєсівські мережі	+	+	+	+
Методи нечіткої логіки	+	–	–	+

Моделі, засновані на аналізі наслідків. Цей клас методів ґрунтується на апараті математичної статистики. Більшість таких методів припускає збирання і дослідження даних про втрати, зумовлені фінансовим ризиком упродовж попередніх періодів з подальшою екстраполяцією втрат на наступні періоди. Найбільш поширеними є такі моделі [5–8]:

BIA (Basic Indicator Approach — метод базових показників). Модель ВІА описує вимоги до забезпечення достатності капіталу для покриття ризиків. Ця модель запропонована для оцінювання максимально можливих втрат від операційного ризику на заданому рівні значущості (наприклад, 99,0 %). Вона ґрунтується на припущенні про те, що операційні втрати є залишковими від загальних втрат, спричинених ризиками. Квантиль розподілу випадкової величини X , що характеризує величину втрат, задається формулою

$$\hat{Q}_{99\%} = \bar{G}_I \alpha,$$

де $\hat{Q}_{99\%}$ — оцінка 99%-го квантиля випадкової величини, що характеризує втрати; \bar{G}_I — середній валовий дохід за три попередні роки, протягом яких валовий річний дохід був додатним; $\alpha=15\%$ — коефіцієнт, визначений на основі дослідження галузевої практики (для фінансових організацій, банків) Базельським комітетом. Значення цього коефіцієнта зазвичай уточнюють з використанням результатів оцінювання втрат, спричинених фінансовим ризиком в українських СК. Недоліком моделі ВІА є те, що отримана оцінка обсягу можливих фінансових втрат залежатиме тільки від обсягу бізнесу і не залежатиме від особливостей страхового портфеля.

LDA (Loss Distribution Approach — метод розподілу збитків). В основі моделей класу LDA лежить припущення про те, що випадкову величину X , яка характеризує розмір втрат, що сталися протягом часу t , можна визначити так:

$$x = \sum_{i=1}^{n(t)} L_i,$$

де $n(t)$ — випадкова величина, яка характеризує кількість випадків утрат конкретного типу за певний період часу t ; L_i — множина випадкових величин, що характеризують величини можливих окремих втрат. Припуска-

ється, що величини з множини L_i — незалежні й однаково розподілені для конкретного типу збитків. Для побудови таких моделей виконується аналіз втрат за вибраний період для кожної пари «лінія бізнесу»/«тип втрат». Для кожної такої пари на підставі даних про частоту втрат і величину збитків, що спостерігались у минулому, розраховується вибіркоче середнє значення частоти виникнення ризикових подій $E(n(t))$ і вибіркоче середнє значення величини втрат у разі виникнення ризикової події $E(L)$. Після визначення функцій розподілу випадкових величин $n(t)$ і L будується функція розподілу випадкової величини x (зазвичай за методом Монте-Карло) [8]. Функція розподілу випадкової величини x , що характеризує загальний обсяг втрат за вибраним видом ризиків, дає змогу знайти точкову оцінку математичного сподівання втрат і розрахувати квантиль заданого рівня, тобто значення OpVaR (Operational Value-at-Risk).

Варіанти методу LDA поділяють на дві групи. Перша група моделей ґрунтується на безпосередньому аналізі ризикових подій і зумовлених ними втрат без урахування факторів ризику та причинно-наслідкових зв'язків у межах складнішої моделі. До таких моделей можна віднести як безпосередню оцінку характеристик розподілу частоти і дії ризикових подій, так і методики, що спираються на теорію екстремальних значень [5, 7]. Друга група моделей ґрунтується на розширеній множині змінних, до якої входять і фактори ризику.

ІМА (Internal Measurements Approach — метод внутрішніх вимірів). Метод ІМА дає змогу обчислити оцінку максимально можливих втрат для конкретного виду ризиків без побудови розподілу випадкової величини x , що характеризує розмір утрат. В основі цього підходу лежить таке припущення: якщо поділити всі збитки на очікувані (тобто близькі до математичного сподівання суми збитків за період) і непередбачені (такі, що перевищують середнє значення і належать до «хвоста» статистичного розподілу), то існує функціональна залежність між величинами очікуваних і непередбачених збитків. Простим випадком є лінійна залежність, тобто

$$\hat{Q}_{99\%} = E_1 P_E L_{GE} = \gamma E_L \alpha,$$

де $\hat{Q}_{99\%}$ — оцінка 99%-го квантиля розподілу можливих втрат (величини капіталу, необхідного для покриття ризику) за цим типом події; P_E — імовірність настання несприятливої події цього типу в даний період; L_{GE} — середня величина збитку конкретного типу за умови настання несприятливої події; E_L — коефіцієнт масштабу; γ — коефіцієнт для оцінювання вимог до капіталу через оцінку очікуваних збитків E_L . Сукупна оцінка максимально можливих втрат визначається сумою усіх оцінок, розрахованих для різних типів ризикових подій і ліній бізнесу.

Статистичний метод оцінювання ризику. Цей метод полягає у вивченні статистики втрат (негативних наслідків реалізації рішень) в аналогічних видах підприємницької діяльності. При цьому можуть використовуватись різні способи оцінювання, у тому числі і дисперсійний аналіз. Основним показником, який розраховується на підставі статистичного методу, є частота втрат, пов'язаних із певним видом діяльності:

$$f = \frac{n'}{n_{\text{заг}}},$$

де n' — кількість випадків настання втрат у статистичній вибірці; $n_{\text{заг}}$ — загальна кількість випадків, що розглядались у статистичній вибірці. При прийнятті рішення на основі цього методу показник частоти втрат переноситься на прогнозні дані і розглядається вже як імовірність настання втрат певного рівня. Натепер статистичний метод застосовують у різних модифікаціях і найбільш поширеним стає метод статистичного моделювання (метод Монте-Карло). Перевагою цього методу є можливість аналізувати й оцінювати різні сценарії розвитку досліджуваного проекту з урахуванням різних факторів впливу в межах одного підходу. Недолік методу — великий рівень використання імовірнісних характеристик, що іноді не задовольняє менеджерів проекту.

Середні величини дають можливість виразити типові розміри ознак якісно однорідних явищ та виміряти їх коливання в околі середнього рівня розвитку. Метод середніх величин є одним зі статистичних методів дослідження. У процесі оцінювання ризику передбачається розмежування окремих ризикових груп на дрібніші підгрупи з метою створення аналітичної бази для визначення ризику за певними ризиковими ознаками. Метод процентів належить до групи методів статистичного аналізу і у термінах оцінювання ризиків означає деяку сукупність додатних і від'ємних відхилень від середнього ризикового типу наявної аналітичної бази. Такі відхилення виражають у процентах або в проміле від середнього ризикового типу.

Використовуються також економетричні, статистичні методи оцінювання й аналізу ризиків, методи вербального аналізу тощо. У сучасних умовах вітчизняні та зарубіжні вчені володіють потужним аналітичним інструментарієм для оцінювання та відстежування ризику; застосовують актуарні розрахунки, моніторинг, комплексне моделювання страхових процесів, емпіричний досвід, методи експертних оцінок, асоціацій та аналогій, експертиз тощо.

Моделі на основі аналізу факторів ризику передбачають поглиблений аналіз процесів у організації і дають змогу використовувати інформацію про внутрішні причинно-наслідкові зв'язки. У межах моделей цього класу використовують різні математичні методи, зокрема Sb-АМА (Scenario-based Advanced Measurement Approach — сценарний аналіз); метод функціональних кореляцій; регресійні моделі; байєсівські мережі; методи нечіткої логіки та деякі інші.

Метод Sb-АМА ґрунтується на визначенні факторів ризику (тобто можливих джерел ризиків), на основі яких генеруються сценарії за правилом «що буде, якщо». Таким чином, на відміну від описаних вище методів, які припускають аналіз збитків, що сталися, ця модель ґрунтується на оцінюванні втрат, які можливі в майбутньому при реалізації деякої події. Для кожного сценарію на підставі історичних даних або експертних оцінок визначають частоту і розмір збитків. Після перевірки даних і виправлення некоректних оцінок сценарії групують за факторами ризику і для кожної групи сценаріїв оцінюють параметри статистичних розподілів частоти і величини збитків. Завершальним етапом є імітаційне моделювання за методом Монте-Карло, що дозволяє оцінити загальний розподіл збитків [9, 10]. Оцінювання виконується за припущення, що відома сім'я, до якої нале-

жить розподіл випадкових величин кількості збитків (наприклад, розподіл Пуассона) і величини збитків (розподіли з «важкими хвостами», наприклад лог-нормальний або розподіл Парето). Отже, постійний контроль за фінансовим станом у такий спосіб дає змогу заздалегідь прослідкувати негативні тенденції і тим самим зменшити ймовірність ризику банкрутства підприємства.

Метод функціональних кореляцій ґрунтується на створенні структурної моделі організації. У цьому випадку перехід до математичної моделі здійснюється через побудову орієнтованого графу, вершини якого відповідають співробітникам і підрозділам, а ребра — потокам інформації. Кожній вершині ставиться у відповідність випадковий процес, що відображає її функціональність. Особливістю методу є встановлення стохастичних залежностей між функціональністю зв'язаних вершин. При цьому аналіз ризиків виконується не стосовно наслідків або окремих факторів ризику, а стосовно співробітників, систем, бізнес-процесів, яким поставлено у відповідність вершини графу.

Аналогічно до методу LDA вводиться розподіл величин втрат (для вершини i цей розподіл реалізується випадковою величиною L_i), пов'язаних з окремими випадками реалізації ризиків. Випадки реалізації ризиків описуються для вершини i випадковим процесом $n_i(t)$, який має два стани: $n_i(t) = 0$, що відповідає нормальному функціонуванню, і $n_i(t) = 1$, що означає збій. Сукупні втрати $X_i(t + \Delta t)$ на момент $(t + \Delta t)$, спричинені збоями на i -й вершині графу, можна задати так:

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) + n_i(t + \Delta t)L_{i,t+\Delta t},$$

де $L_{i,t+\Delta t}$ — реалізація випадкової величини L_i . Для задання зв'язку між різними функціональними елементами вводиться поняття «підтримка», яку отримує кожний функціональний елемент від пов'язаних з ним елементів. У випадку, якщо обсяг підтримки стає меншим від заданої величини, відповідний функціональний елемент переходить у стан відмови (тобто для поставленої йому у відповідність i -ї вершини графу покладається $n_i(t) = 0$). Для відображення цієї структури в модель уводяться випадкові процеси $h_i(t)$:

$$h_i(t) = \vartheta_i - \sum_j w_{ij}n_j(t) + \varepsilon_i(t),$$

де ϑ_i — середній обсяг підтримки, яку i -й процес отримує у повністю функціональній системі (тобто, коли всі $n_i(t) = 1$); w_{ij} — обсяг підтримки, яку i -й процес отримує від j -го процесу (і відповідно втрачає, коли j -й процес перебуває у стані відмови); $\varepsilon_i(t)$ — гаусів білий шум. Цей метод орієнтовано на аналіз функціональності процесів і виявлення збоїв. Фінансові ризики мають іншу природу, пов'язану з відсутністю коштів на відшкодування страхового випадку, який настав за відповідним страховим договором.

Регресійні моделі ґрунтуються на виявленні причинно-наслідкових зв'язків між спостережуваними індикаторами і рівнем ризику. Розрізняють дві основні групи показників, які можна використовувати як спостережувані індикатори (пояснювальні змінні): 1) змінні оточення — це кількісні показ-

ники, що характеризують бізнес-процеси підприємства; 2) фактори ризику — кількісні показники, що характеризують спостережувані випадки реалізації ризиків. Така математична модель має вигляд

$$x = Af + b + \varepsilon,$$

де x — величина втрат, зумовлених фінансовим ризиком; f — вектор значень спостережуваних змінних; ε — випадкова величина, що визначає похибку моделі; A і b — оцінювані параметри, що характеризують залежність між змінною x та факторними змінними f . Для застосування цього методу необхідно мати достатній обсяг даних, щоб забезпечити високу точність оцінок.

Методи нечіткої логіки дають можливість найбільш повно використувати експертне оцінювання для аналізу ризиків у тих випадках, коли точних даних немає або вони неповні. Нечітка логіка наближує модель до міркувань людини в процесі прийняття і обґрунтування рішень. Методи нечіткої логіки можна застосовувати для оцінювання обсягу втрат і виявлення ризику банкрутства СК. На зарубіжних ринках часто застосовують автоматизовані системи для оцінювання фінансових ризиків, засновані на методах нечіткої логіки, наприклад RiskShield.

Байєсівські мережі дають змогу відображати причинно-наслідкові зв'язки між різними впливовими факторами ризику і змінами середовища. На відміну від регресійних моделей БМ дозволяють враховувати не лише безпосередні залежності рівня ризику від факторів ризику, а й залежності між факторами ризику. Крім того, цей клас моделей надає більше можливостей для формування висновку на підставі неповних даних. Із математичного погляду БМ — орієнтований граф, де вершинам відповідають фактори ризику і зміни середовища, а ребрам — виявлені або передбачувані взаємозв'язки [9–13]. Мережа також описується множиною умовних розподілів випадкових величин, що характеризують фактори ризику і змінні середовища. Нехай існує n випадкових змінних X_1, \dots, X_n . Спільну ймовірність розподілу значень цих змінних можна виразити через добуток n умовних ймовірностей:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \prod_{j=2}^n P(x_j | (x_1, \dots, x_{j-1})).$$

Перевагою БМ є можливість одночасного використання експертного оцінювання (наприклад, для оцінювання структури мережі шляхом визначення залежностей між змінними, вибір типів апріорних розподілів для змінних) і математичних методів для отримання висновку за мережею. За рахунок цього модель дає змогу зв'язувати вибірки статистичних даних з експертними знаннями.

Висновок на основі БМ можна сформулювати через поширення інформації у будь-якому напрямку. Байєсівські мережі використовують для формування ймовірнісного висновку — розрахунку умовної ймовірності отримання значень для частини випадкових величин за умови відомих значень інших величин. Математично цю задачу можна сформулювати як обчислення $P(y, x)$, де X — множина спостережуваних значень; Y — множина змінних, які потрібно оцінити. Таким чином, задача зводиться до пошуку умовних ймовірностей за формулою [10, 11]

$$P(y|x) = \frac{\sum_s P(y,x,s)}{\sum_{y,s} P(y,x,s)},$$

де S — множина всіх змінних, крім X і Y . Такі обчислення є трудомісткими, а задача формування висновку NP -повною. Для забезпечення високої точності та спрощення обчислень розроблено й апробовано ряд алгоритмів побудови висновку за БМ.

Залежно від повноти інформації, наявної у суб'єкта підприємницької діяльності, методи оцінювання ризиків умовно можна поділити на групи з урахуванням таких умов:

– *визначеності*, коли інформація про ситуацію ризику достатньо повна, наприклад, у вигляді бухгалтерського балансу, звіту про прибутки, збитків та ін.;

– *часткової невизначеності*, коли інформація про ситуацію ризику існує у вигляді частот появи ризикових подій;

– *повної невизначеності*, коли інформації про ситуацію ризику немає, але є можливість залучення фахівців та експертів для часткового подолання невизначеності.

Таким чином, зменшення обсягу вихідної інформації про середовище діяльності ускладнює оцінювання ступеня ризику через зменшення можливостей та зниження достовірності отриманих результатів.

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Експериментальне дослідження ефективності запропонованої методики виконано за допомогою фактичних статистичних даних. Обсяг статистичної вибірки становить 247 вимірів, які містять такі змінні: назву СК; грошовий еквівалент страхових виплат; статистичний рік; кількість договорів, укладених СК; страхові платежі; кількість страхових випадків за рік. Основна залежна змінна — страхові виплати — яка відображає здійснення грошових переказів з настанням страхового випадку. Решта змінних, включених у вибірку, є незалежними і беруться до уваги як фактори. Структуру статистичних даних подано в табл. 2.

Таблиця 2. Структура статистичних даних

№ з/п	Назва змінної	Характеристики
1	Загальний розмір вибірки	247
2	Статистичний рік	Період 2003–2016 рр.
3	Назва страхової компанії	Текстова змінна
4	Страхові виплати	Поточна сума страхових виплат, грн
5	Кількість страхових договорів	Ціле число, починаючи з 1
6	Страхові платежі	Поточна сума страхових платежів, грн
7	Кількість страхових випадків за рік	Ціле число, починаючи з 1
8	Частота страхових випадків	Задана величина, %
9	Темпи зростання капіталу	Задана величина, %

Як додаткові незалежні змінні використано частоту страхових випадків і темпи зростання капіталу СК. Обидві змінні вимірюються у відсотках і не корелюють із залежною змінною «страхові виплати». Для виконання аналізу

статистичних даних та реалізації алгоритму оброблення екстремальних значень використано такі програмні продукти: інструментальне середовище програмування R2.9.2 для статистичного оброблення даних та роботи з графікою; економетричний пакет Eviews 8.0 для побудови моделей та попереднього оцінювання невідомих параметрів. У пакеті Eviews 8.0 використано такі модулі: розрахунок описових статистик, побудову УЛМ, метод максимальної правдоподібності для оцінювання параметрів моделі. У середовищі програмування R2.9.2 виконано інтеграцію модулів Rcmdr, extRemes, evdbaues та mcmcPack.

У результаті практичного застосування запропонованої вище методики аналізу та прогнозування актуарних процесів побудовано 6 узагальнених лінійних моделей, які відрізняються розподілами залежної змінної (страхові виплати) та видом функції зв'язку. Для подальшого аналізу адекватності побудованих моделей у табл. 3 наведено характеристики кожного з дослідів з використанням середнього значення, стандартного відхилення, інформаційного критерію Акайке, відносної похибки та ін.

Таблиця 3. Характеристики побудованих моделей

Критерій / моделі	Роки	Гамма-логарифмічна	Гамма-тотожна	Пуассона-квадратична	Пуассона-логарифмічна	Обернено-гаусівсько-тотожна	Гауса-логарифмічна
	2003	5956,567	1596,049	1903,869	14916,1	1587,371	24009,31
	2004	11861,295	3904,354	6281,569	16694,01	4425,157	26919,5
	2005	16877,358	22079,792	15667,493	21740,06	17926,272	34320,73
	2006	20923,09	29895,616	21654,081	25026,9	24726,812	37800,2
	2007	22771,274	22403,975	18771,973	24340,78	21963,72	33729,53
	2008	54390,238	74479,367	68189,807	52402,72	61641,887	64950,78
	2009	35443,742	76409,957	60514,376	48730,2	60285,107	65039,51
	2010	38672,291	78164,192	63422,485	51836,74	63034,589	65412,27
	2011	64922,577	93430,554	88418,321	73063,17	79040,921	76376,65
	2012	97963,514	86874,603	90318,79	82214,12	81797,671	66440,83
	2013	118690,588	101936,093	108544,80	114782,69	98590,685	72200,03
	2014	540956,727	200852,822	325641,11	346712,41	158528,148	324616,07
	2015	468048,315	196525,368	311938,27	308718,25	153129,636	315676,9
	2016	23943,557	40046,852	28821,33	28910,16	32357,339	42790,09
	2017	287910,00	163050,00	193736,00	199781,00	51820,00	266978,00
	2018	249921,00	309798,00	173053,00	176268,00	354236,00	137645,00
Середнє значення	108672,94	73471,40	86434,88	86434,88	61359,67	89305,89	
Стандартне відхилення	171411,80	62670,63	104065,74	106348,93	49938,30	99396,10	
Інформаційний критерій Акайке	23,84	325,00	Inf	Inf	324,58	25,30	
Байєсівський інформаційний критерій	BIC-equivalent for q in (0,0028, 0,6772)	BIC-equivalent for q in (0,0293, 0,7131)	CBD	CBD	CBD	BICq equivalent for q in (0,4989, 0,7687)	
Відносна похибка, %	3,14	2,67	2,42	2,65	2,82	3,14	
Величина ризику втрат СК, %	11,27	6,09	8,60	8,79	5,81	7,95	
Скорингова функція Фішера	4	10	5	5	6	13	

Для того щоб визначити, яка з побудованих моделей є найкращим наближенням експериментальних даних до реальних, проаналізовано два класи інформаційних критеріїв: ті, що ґрунтуються на мінімізації відстані Кульбака–Лейблера (ступінь відхилення моделі від реального об’єкта), і ті, що ґрунтуються на байєсівському підході. Результати і порівняння побудованих УЛМ з МГВА показано на рис. 1, 2.

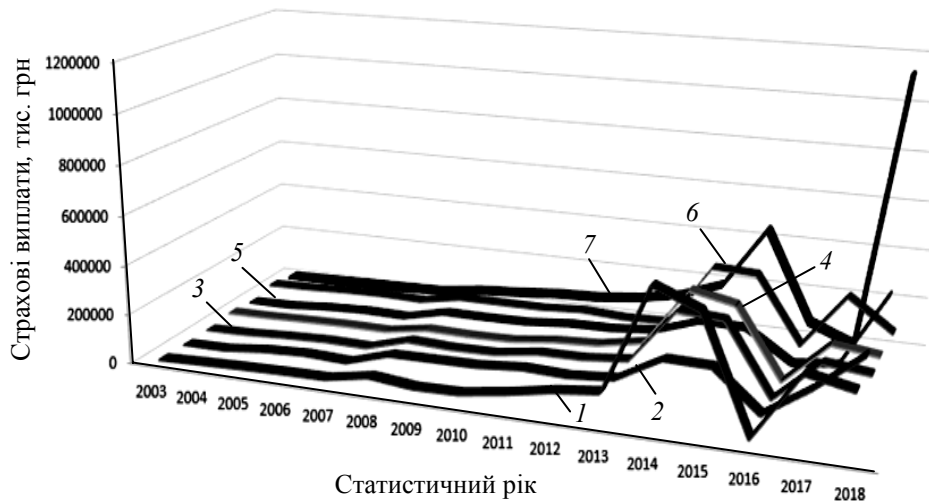


Рис. 1. Порівняння УЛМ з МГВА: 1 — Gamma-log; 2 — Gamma-identity; 3 — Poisson-sqrt; 4 — Poisson-log; 5 — Inverse-gaussian-identity; 6 — Normal-log; 7 — Damages

ID	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	+1	+2
Actual	1586.3	4587.8	8778	12059.5	17210.4	40299	51446.8	66679	72612.8	91535.9	126257	193406	448302	75328		
Predictions				9577	14071	32481	57425	28888	48947	89068	187712	280184	281340	159821	0	1127446
Residuals				-2482.5	-3139.4	-7818	5978.2	-37791	-23665.8	-2467.9	61454.6	86778.1	-166962	84493		

Рис. 2. Результати прогнозування за допомогою МГВА

У результаті порівняння результатів прогнозування, отриманих за допомогою УЛМ і МГВА встановлено, що МГВА дає дещо нижчі результати прогнозування у випадку, коли розподіл даних не відповідає нормальному. Але він дає кращі результати прогнозування за критерієм середньої абсолютної похибки (у відсотках) у випадку, коли дані відповідають нормальному розподілу (табл. 4). Використано НМГВА для прогнозування і за його допомогою отримано найкращий результат, оскільки він не залежить від розподілу.

Після оцінювання втрат, зумовлених страховими виплатами за полісами страхування наступним важливим завданням аналізу актуарних процесів є оцінювання операційного ризику. Для розв’язання цієї задачі побудовано модель у формі мережі Байєса, структуру якої показано на рис. 3.

Функціонування такої мережі апробовано на прикладах з використанням фактичних статистичних даних, а саме: рейтингів СК України за договорами страхування життя у період 2003–2016 рр. Результати оцінювання параметрів БМ подано на рис. 4.

Таблиця 4. Порівняльна таблиця результатів прогнозування нормованого процесу надходження премій

Модель	Сума квадратів похибок прогнозування SSE	Коефіцієнт детермінації R^2	Статистика Дарбіна-Уотсона DW	Середньо-квдратична похибка, %	Середньо-абсолютна похибка, %
AP(2)	4,78099	0,798	2,087	1,445	1,889
AP(6)	4,3953	0,814	1,971	0,928	1,321
АРКС(2;6)	4,39428	0,814	1,999	0,973	1,459
АРКС(6;1)	4,38665	0,815	1,991	0,821	1,235
ЕЗ(0.1)	6,06242	0,745	0,858	2,154	2,789
Тренд(1)	9,019479	0,037	0,487	1,523	1,976
AP(2)+Tr(1)	3,370058	0,640	2,122	1,239	1,627
МГУА	2,731	0,873	2,057	0,147	0,893
НМГУА	2,119	0,884	1,986	0,138	0,699

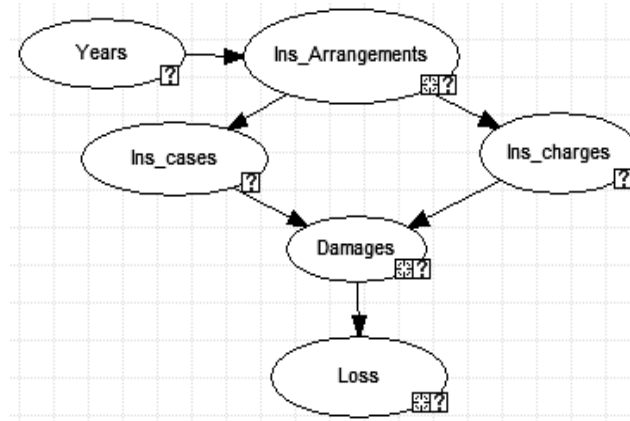


Рис. 3. Графічне зображення БМ довіри для ймовірного оцінювання актуарних процесів

Ranked Targets	Probability
Loss:PresentRisk	0.865
Ins_charges:PaidCharge	0.756
Ins_cases:AbsentCase	0.750
Damages.y2005	0.601
Ins_cases:PresentCase	0.250
Ins_charges:NotPaidCharge	0.244
Loss:AbsentRisk	0.135
Damages.y2006	0.058
Damages.y2004	0.056
Damages.y2009	0.047
Damages.y2003	0.045
Damages.y2011	0.039
Damages.y2010	0.034
Damages.y2007	0.029
Damages.y2008	0.029
Damages.y2014	0.027
Damages.y2012	0.023
Damages.y2013	0.013

Рис. 4. Результати оцінювання БМ

У результаті побудови БМ отримано такі результати: ризик банкрутства СК у випадку 25%-ї ймовірності настання страхового випадку та 100%-ї виплати страхової премії становить 87% за умови, що 78,2% страхувальників вчасно здійснюють платежі за договорами про страхування. Значна величина ризику банкрутства СК свідчить про відсутність ефективного механізму управління коштами як власного капіталу, так і отриманих від страхових договорів. Динаміку страхових виплат у випадку настання страхового випадку за 100%-ї сплати страхових платежів зображено на рис. 5.

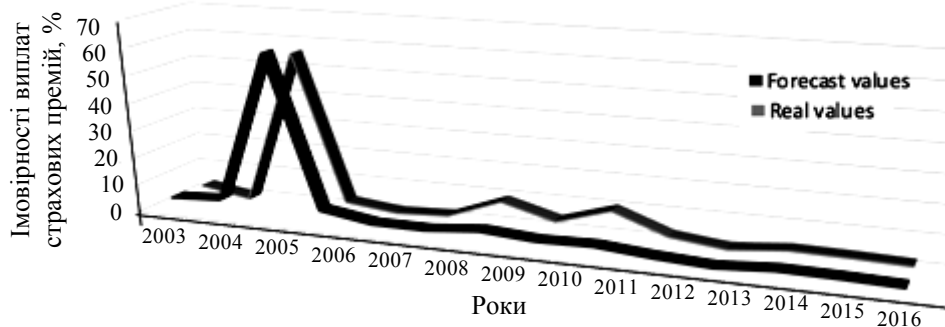


Рис. 5. Динаміка оцінювання страхових виплат

Із графічного зображення динаміки страхових виплат (рис. 5) видно, що прогнознi значення та апріорні ймовірності розрізняються несуттєво завдяки логічній структурі мережі Байєса та високій точності обчислень у мережі. Для навчання структури БМ згенеровано 248 експериментів з випадковими допустимими значеннями щодо кожної з вершин і використано ЕМ-алгоритм (максимізації математичного сподівання) для знаходження (локально) оптимальної максимальної ймовірності оцінок параметрів. Структуру БМ скорочено за допомогою послідовного вилучення вузлів та інверсії ребер початкового графу. Для оцінювання параметрів отриманої структури БМ обчислюється величина операційного ризику СК за 33,9%-ї або 44,2%-ї виплат страхової премії у разі настання (або відсутності) страхових випадків за договорами, за якими надходили/не надходили регулярні платежі. Порівняльні результати наведено в табл. 5.

Таблиця 5. Результати оцінювання спрощеної БМ

CASES	Present insurance case and Paid Charges	Absent insurance case and NotPaid Charges
Pr(Loss)	0,881	0,5
1-Pr(Loss)	0,119	0,5
Pr(Damages)	0,339	0,442

Із табл. 5 видно, що ризик є високим навіть для випадку з 34%-ю виплатою страхових премій СК у разі настання страхових випадків та 100%-ю вчасною сплатою платежів. Рівнозначні значення ризику отримано для протилежного випадку — не було страхового випадку і вчасно не сплачені платежі, тобто договір розірвано. У такому випадку БМ відображає «відсутність ризику» на заданій множині станів, оскільки величина виплати премій досить низька.

У результаті використання запропонованої методики моделювання та створення нових математичних моделей побудовано нові УЛМ та успішно розв'язано задачу оцінювання фінансових ризиків СК. Для вибору й обґрунтування кращої моделі виконано порівняння результатів побудов УЛМ із МГВА та НМГВА.

Для оцінювання ризику банкрутства СК побудовано БМ, функціонування якої апробовано із залученням фактичної статистичної вибірки. Залучення новітніх методів ІАД до розв'язання задачі актуарного моделювання та оцінювання фінансових ризиків відкриває нові можливості для дослідження особливостей методів математичного моделювання фінансових процесів у страхуванні.

ВИСНОВКИ

Виконано дослідження можливості застосування методів ІАД до розв'язання задачі моделювання актуарних процесів та оцінювання ризиків СК. Установлено, що існують методики побудови моделей для опису та оцінювання актуарних процесів, але не достатньо висвітлено питання моделювання актуарних процесів з використанням сучасних методів ІАД. Саме тому запропоновано використання методики моделювання та створення нових математичних моделей на основі використання структур узагальнених лінійних моделей та оцінювання фінансових ризиків СК за допомогою БМ. Для застосування запропонованої методики зібрано необхідні статистичні дані. Під час попереднього аналізу статистичної вибірки виявлено підмножину вироджених даних. Для подальшого опрацювання цих даних розв'язано задачу інтелектуального оброблення екстремальних значень. Оцінювання невідомих параметрів моделі виконано із застосуванням методів максимальної правдоподібності та байєсівського підходу, що належать до ІАД.

У результаті виконання обчислювальних експериментів побудовано нові УЛМ для обраних актуарних процесів, які забезпечують оцінювання високоякісних короткострокових прогнозів щодо страхових виплат. Установлено, що кращою у даному випадку є модель з гамма-розподілом та логарифмічною функцією зв'язку, результат якої отримано за 4 ітерації алгоритму оцінювання параметрів моделі. Проаналізовано якість побудованих моделей у формі УЛМ з використанням множини статистичних критеріїв. Установлено, що такий підхід до моделювання є перспективним, оскільки модель демонструє високі показники якості. Відносні похибки оцінок прогнозів є незначними і коливаються в межах 5 – 12% для всіх моделей, а за допомогою інформаційного критерію Акайке та Байєса обґрунтовано й обрано кращу модель. Отже, застосування УЛМ є ефективним підходом до розв'язання задач прогнозування та оцінювання актуарних процесів.

Розроблено мережу Байєса для ймовірнісного оцінювання операційних ризиків СК. Функціонування такої мережі апробовано на прикладах з використанням фактичних статистичних даних, зокрема рейтингів СК України за договорами страхування життя у період 2003–2016 рр. Отже, ризик банкрутства СК у випадку 25%-ї ймовірності настання страхового випадку та 100%-ї виплати страхової премії становить 87% за умови, що 78,2% страховальників вчасно здійснюють платежі за договорами страхування. Значна

величина ризику банкрутства СК свідчить про відсутність ефективного механізму управління коштами як власного капіталу, так і надходжень, отриманих від страхових договорів. Отже, БМ — це потужний і ефективний математичний інструмент ІАД для дослідження та відтворення реальної картини процесів у СК, який доцільно застосовувати для розв'язання задач імовірнісного прогнозування та оцінювання ризиків. У майбутніх дослідженнях варто вдосконалити структуру БМ та розробити методіку формування висновку в БМ з урахуванням особливостей процесів аналізу та управління операційними ризиками.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Jones M.T.* Artificial Intelligence: a systems approach / M.T. Jones. — Hingham, Massachusetts: Infinity Science Press LLC, 2008. — 516 p.
2. *Munakata T.* Fundamentals of the New Artificial Intelligence / T. Munakata. — London: Springer, 2008. — 266 p.
3. *Koski T.* Bayesian Networks / T. Koski, J.M. Noble. — Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2009. — 368 p.
4. *Darwiche A.* Modeling and Reasoning with Bayesian Networks / A. Darwiche. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 562 p.
5. *Дубініна С.В.* Методика аналізу екстремальних даних та її використання при оцінюванні параметрів узагальнених лінійних моделей / С.В. Дубініна, П.І. Бідюк // *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* — 2016. — № 1.
6. *McCullagh P.* Generalized Linear Models / P. McCullagh, J.A. Nelder. — New York: Chapman & Hall, 1990. — 526 p.
7. *Tripp M.H.* Quantifying operational risk in general insurance companies / M.H. Tripp // Working Paper [Presented to the Institute of Actuaries] (22 March 2004). — 137 p.
8. *Besag J.* Markov Chain Monte Carlo for Statistical Inference / J. Besag // Working Paper, Center for Statistics and the Social Sciences. — 2001. — N 9. — 25 p.
9. *Дубініна С.В.* Застосування мереж Байєса до побудови моделей оцінювання ризику актуарних процесів / С.В. Дубініна, П.І. Бідюк // *Scientific Journal ScienceRise.* — 2016. — 8, № 2 (25).
10. *Довгий С.О.* Системи підтримки прийняття рішень на основі ймовірнісно-статистичних методів / С.О. Довгий, П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук. — К.: Логос, 2014. — 419 с.
11. *Bidyuk P.I.* Forecasting based on Bayesian type models / P.I. Bidyuk, O.M. Trofymchuk, O.P. Gozhyj // *International Journal of Computers and Technology.* — 2015. — Vol. 15, N 3. — P. 6570–6584.
12. *Murphy K.* A Brief Introduction to Graphical Models and Bayesian Networks [Електронний ресурс] / K. Murphy // USA. — 1998. Режим доступу: URL: <http://www.ai.mit.edu/~murphyk/Bayes/bnintro.html>.
13. *Negnevitsky M.* A guide to intelligent systems / M. Negnevitsky. — London: Addison Wesley, 2005. — 435 p.

Надійшла 27.10.2016

ІНФОРМАЦІЙНО-МЕТОДИЧНА ОСНОВА ВИЗНАЧЕННЯ ОЦІНКИ ЕКОЛОГІЧНОСТІ СКЛАДНИХ ПРИРОДНО- ТЕХНОГЕННИХ ОБ'ЄКТІВ

Т.В. КОЗУЛЯ, М.О. БІЛОВА

Анотація. Визначено основні шляхи удосконалення комплексної системи оцінювання безпечності стану складних природно-техногенних об'єктів з виявленням факторів їх дестабілізації з метою регулювання сталого розвитку і прийняття керувальних заходів. Проаналізовано перспективи впровадження когнітивного моделювання в систему інформаційно-методичного забезпечення оцінки екологічності складних об'єктів. Надано практичну реалізацію запропонованої методики на прикладі прогнозування стану Харківського регіону.

Ключові слова: складні об'єкти, комплексна оцінка, безпечність стану, інформаційно-методичне забезпечення, графоаналітичне моделювання, когнітивна карта, компараторна ідентифікація, прогнозні розрахунки.

ВСТУП

Актуальність роботи визначається розв'язанням завдань сталого соціально-еколого-економічного розвитку в межах прийняття рішення щодо управління якістю системних об'єктів високого рівня складності.

Комплексний характер таких завдань визначається вивченням численних взаємодійних факторів під час дослідження стану і функціональних можливостей динамічного слабоструктурованого утворення природно-техногенної природи. Прийняття рішень за цих умов неможливе лише з використанням підходів, орієнтованих на аналіз кількісних даних, і методів теорії прийняття рішень щодо вибору найкращого варіанта із множини чітко сформованих альтернатив. За умови стохастичної поведінки «об'єкт – навколишнє середовище», невизначеності даних для певної ситуації та інформовативності щодо стану систем дослідження доцільним є звернення до об'єктивних засобів отримання інформації з урахуванням самоорганізаційних можливостей забезпечення рівноважного стану відповідно до змін в об'єкті на рівні «стан системи – процес – зміни в системі».

Вирішенню проблем, пов'язаних із дослідженням слабоструктурованих проблемних областей присвячено праці І.В. Прангішвілі [1], О.П. Кузнецова [2, 3], В.І. Максимова [2], Є.К. Корноушенка [4], Г.В. Горелової [5] та ін. Проблемні питання оцінювання екологічності з позицій стратегії сталого розвитку проаналізовано у науково-методичних працях М.З. Згуровського [6, 7], А.Б. Качинського [8], Б.М. Данилішина [9], А.Г. Шапара [10] та ін. Питання соціально-екологічного змісту відповідно до концепції сталого розвитку розглянуто в методичному сенсі у працях закордонних науковців В. Ness [11], А. Gasparatos [12], L. Xu [13], А.М. Omer [14], D. Dzemydiene [15] та ін.

Мета роботи — формування інформаційно-методичного забезпечення комплексної оцінки відповідності стану природно-техногенних об'єктів вимогам екологічної якості з установленням дестабілізуювальних факторів і визначенням механізмів регулювання напряму змін з отриманням безпечності стану систем і їх утворень. У цій роботі розглянуто і вирішено такі питання:

1) системнологічний аналіз забезпечення дослідження стану і функціональності складних слабоструктурованих систем у межах вимог екологічності та безпечності, визначення необхідної інформаційно-методичної підтримки щодо встановлення дестабілізуювальних факторів гомеостатичного розвитку систем і їх оцінювання;

2) упровадження когнітивного моделювання в комплекс методичного забезпечення оцінювання стану системних об'єктів різного рівня складності з метою отримання цілісної інформації на рівні «стан системи – процеси змін – рівноважний стан системи (початковий або новий)» для прийняття рішення;

3) практична реалізація запропонованої інформаційно-методичної бази комплексного аналізу та оцінювання якості складних природно-техногенних утворень на прикладі прогнозування розвитку Харківського регіону.

ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ПРАКТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ

Базовим поняттям комплексного дослідження є поняття системи, під яким розуміється сукупність взаємопов'язаних елементів, об'єднаних виконанням загальної мети і наявністю функціональної цілісності, згідно з якою властивості системи не зводяться до суми властивостей її елементів, а зміна одного з таких елементів призводить до зміни системи в цілому [2]. Складна ієрархічна система визначається як цілісний об'єкт, утворений із функціонально різнотипних систем, структурно взаємопов'язаних ієрархічною підпорядкованістю, і функціонально об'єднаних для досягнення заданих цілей за певних умов [16]. Природно-техногенні об'єкти локального, регіонального і глобального рівнів дослідження визначаються як «системні об'єкти», що характеризуються багатоаспектністю змісту, а звідси і високим рівнем складності відповідно до ієрархічності їх структури, яка містить екологічні, економічні та соціальні системи з різнорідними зв'язками між ними.

Управління системним об'єктом визначається проблемними завданнями регулювання стану і функціональності слабоструктурованих і складних організаційних ієрархічних систем. Завдання полягає у формуванні цілісної системи узгоджених методичних основ роботи одночасно з кількісними і якісними даними, які використовуються для встановлення залежностей у межах досліджуваної проблемної області. Слабка структурованість зумовлюється такими аспектами:

– система понять (факторів) і зв'язків між ними не визначена з достатньою повнотою, велика кількість факторів, зв'язків і параметрів визначається у процесі постановки завдання;

– основні параметри ситуації (значення факторів, ступінь впливу одних факторів на інші) мають якісний характер, тобто задані не числами, а вербальними, нечіткими або інтервальними оцінками;

– значення параметрів в основному отримані не на основі об'єктивних вимірювань, а шляхом експертних оцінок, що збільшує вміст суб'єктивних визначень у кінцевому результаті;

– немає попередньо сформованих альтернатив, їх надають у процесі аналізу відповідно до отриманих проміжних оцінок [3].

Використання формальних методів і відповідних інформаційних технологій для розв'язання наданих вище завдань у межах системи управління потребує підготовки, а саме:

– формування системи факторів і зв'язків між ними — методи структуризації в системному аналізі;

– параметризації отриманої системи факторів і дослідження ймовірностей реалізації зв'язків у межах допустимих областей — метод ланцюгів Маркова;

– формалізації предметної області за рахунок виду функцій, що визначають вплив зв'язків на фактори і методи їх обчислення — когнітивне моделювання [17].

Рішення щодо управління якістю об'єкта мають прийматися відповідно до його структури, характеристик взаємодії його складових частин та їх взаємодії із зовнішнім середовищем [3, 18]. Якість є комплексним показником стану еколого-соціально-економічних систем, властивістю, яка відображає відтворення життя і сталий розвиток суспільства. Показник якості включає в себе два основні елементи: екологічність — відповідність стану та функціональності об'єкта природним вимогам безпеки, і безпечність — характеристика техногенного впливу (дії негативних факторів) та відповідних умов навколишнього середовища з підтримання рівня безпеки для екосистем і людини.

У слабоструктурованих об'єктах велика кількість елементів і зв'язків формують складні причинно-наслідкові послідовності станів, які можуть змінюватися у часі залежно від структури системи і дії факторів зовнішнього середовища [19]. Побудова детермінованих моделей для таких систем неможлива через стохастичний характер процесів. Для проведення цільового об'єктно-орієнтованого аналізу слабоструктурованих систем використовуються основні положення теорії систем і системного аналізу, системного технологічного підходу, правила структуризації різного рівня складності [20, 21]. Для переходу від якісних до кількісних оцінок у практиці наукових досліджень застосовують ланцюги Маркова з визначенням імовірностей станів систем на основі структурної і параметричної подібності їх оригіналів з відповідним відображенням у марківських моделях [22].

У роботі для аналізу слабоструктурованих проблемних областей відповідно до завдань управління екологічною безпекою системних об'єктів пропонується в надану систему методичного забезпечення комплексного оцінювання екологічності природно-техногенних утворень [23–25] упровадити додатково метод когнітивного аналізу (КА). Це дозволяє отримувати обґрунтовану інформацію про поведінку і наслідки дії на системні об'єкти. Когнітивна оцінка базується на результатах розв'язання численних завдань у межах КА: відповідно до визначеної когнітивної карти (КК) — орієнтованого знакового графу, що дозволяє відобразити ситуаційні фактори і причинно-наслідкові зв'язки між ними; дослідження динаміки змін на основі дослі-

дження реакції об'єкта на імпульсні зовнішні дії, що дозволяє визначити тактику і стратегію подальшого управління.

Когнітивне моделювання визначається етапністю дослідження. На першому кроці розробляється когнітивна модель у вигляді КК вигляду

$$G = \langle U, E \rangle,$$

де G — знаковий оргграф (КК); $U = \{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ — множина концептів КК; $E = \{e_{i,j}\}$ — множина дуг причинно-наслідкового змісту для u_i і u_j .

Етапи КА у дослідженні об'єкта відображають:

- причинно-наслідкові зв'язки (кроки і цикли когнітивної моделі);
- структури моделей з визначенням механізмів функціонування систем;
- стійкість системи до збуджень і структурних змін;
- можливий розвиток процесів у системі шляхом імпульсного моделювання, тобто встановлення динаміки змін у системах [5].

За імпульсного режиму стан системи в момент часу $t + 1$ визначається як

$$v_i(t+1) = v_i(t) + \sum_{j=1}^n w(u_i, u_j) p_j(t), \quad (1)$$

де $v_i(t+1)$ — значення фактора u_i в момент $t + 1$; $v_i(t)$ — значення концепту u_i в момент t ; $p_j(t)$ — імпульсний сигнал у момент часу t ; $w(e_{ij})$ — ваговий коефіцієнт дуги з u_i в u_j , що встановлюється таким чином [26]:

$$\begin{cases} w(e_{ij}) = 1, & \text{якщо збільшення } v_i \text{ зумовлює збільшення } v_j; \\ w(e_{ij}) = -1, & \text{якщо збільшення } v_i \text{ зумовлює зменшення } v_j; \\ 0, & \text{немає } e_{ij}. \end{cases}$$

Методичне забезпечення з розв'язання завдань сталого розвитку соціально-еколого-економічних об'єктів будь-якого рівня складності має незавершеність з позиції недоінформованості стосовно поведінки факторів дестабілізації, що впливає на обґрунтованість прийняття рішення [23–25].

В інформаційно-методичному забезпеченні оцінки рівня якості системних об'єктів різного рівня складності у попередніх працях запропоновано проводити послідовно класифікаційний аналіз, метод головних компонент і метод компараторної ідентифікації [23–25], що дозволить загалом визначати фактори дестабілізації стану об'єкта дослідження. Аналітичні дії у методиці спрямовано на визначення управлінської стратегії на макрорівні з позицій розвитку системи і прийняття рішення щодо підвищення її якості. У цій роботі пропонується впроваджувати КА для доповнення інформації з метою обґрунтованості регулювальних дій з усунення перешкод для рівноважного розвитку об'єкта з урахуванням саморегуляції, самоорганізації і стабілізації за дією внутрішніх механізмів і процесів (рис. 1).

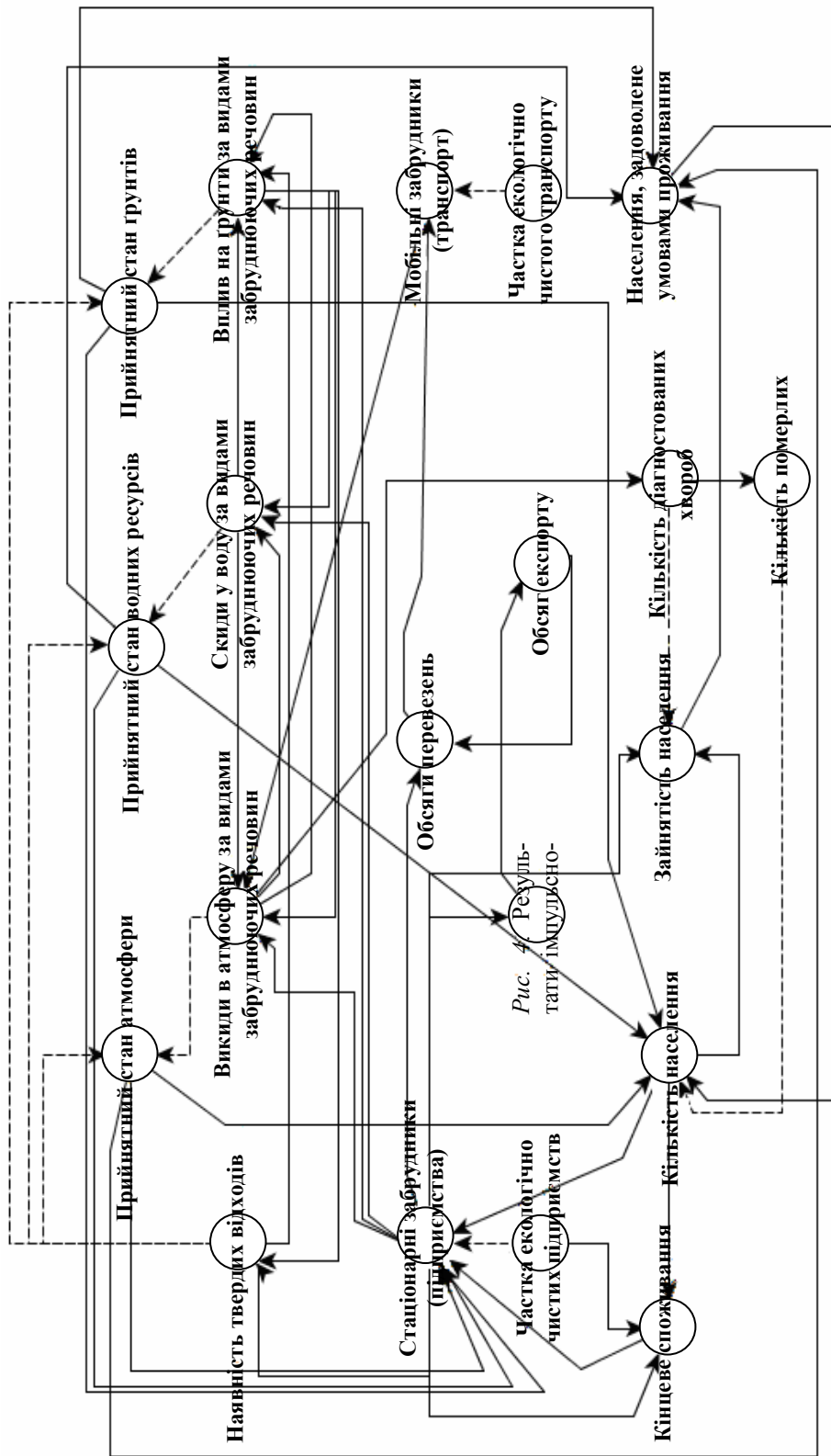


Рис. 2.. Когнітивна модель складного об'єкта з виділенням економічних, екологічних і соціальних аспектів

Дослідження проведено у середовищі MsathCad 14 за відповідними формулами (рис. 3 і 4).

На першому кроці дослідження $t = 1$

$$v_1^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

На другому кроці дослідження $t = 2$

$$v_2^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

На третьому кроці дослідження $t = 3$

$$v_3^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.1 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & -0.1 \end{array}$$

На четвертому кроці дослідження $t = 4$

$$v_4^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & -0.2 & -0.2 & -0.1 & -0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.6 \end{array}$$

Рис. 3. Результати імпульсного аналізу для першої альтернативи управління для чотирьох часових відрізків

На першому кроці дослідження $t = 1$

$$v_1^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

На другому кроці дослідження $t = 2$

$$v_2^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

На третьому кроці дослідження $t = 3$

$$v_3^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \end{array}$$

На четвертому кроці дослідження $t = 4$

$$v_4^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & 0.1 \end{array}$$

Рис. 4. Результати імпульсного аналізу для другої альтернативи управління для чотирьох часових відрізків

За отриманими результатами встановлено, що збільшення екологічно чистих підприємств дозволяє підвищити якість атмосферного середовища і водних ресурсів на 50% зі зменшенням викидів у них на 20% (рис. 5).

Таким чином, включення механізмів регулювання з урахуванням механізмів стабілізації в одній із систем шляхом правильного управлінського рішення дозволяє стабілізувати розвиток системного об'єкта загалом.

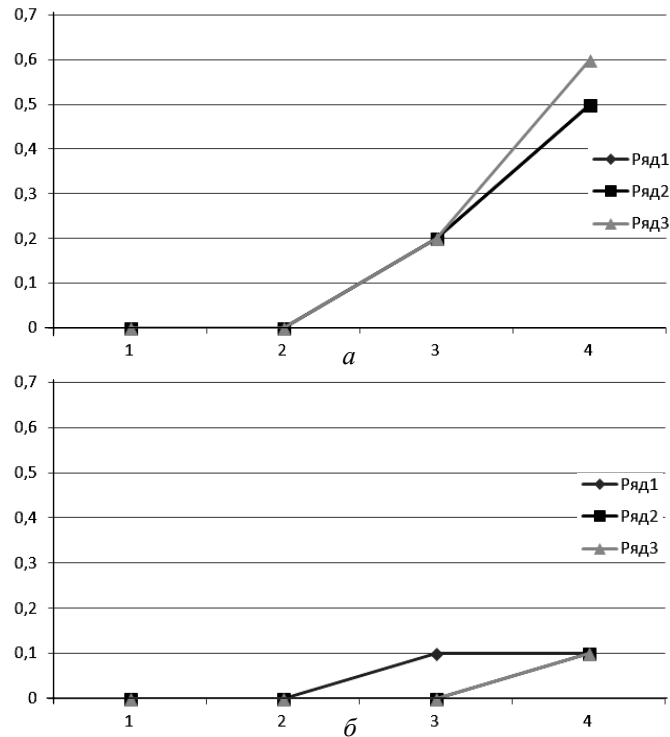


Рис. 5. Залежність стану навколишнього середовища від упровадження екологічно чистих підприємств: ряд 1 — «прийнятний стан атмосфери»; ряд 2 — «прийнятний стан водних ресурсів»; ряд 3 — «прийнятний стан ґрунтів»

ВИСНОВКИ

Уперше сформовано методичне забезпечення комплексного дослідження в системі екологічної безпеки у контексті концепції сталого розвитку з урахуванням складної ієрархічної структури об'єкта дослідження та виявлення факторів дестабілізації на основі узгодженого застосування положень теорії інформації, синергетики, компараторної ідентифікації, когнітивного аналізу. Уперше запропоновано системність підходу до аналізу складних об'єктів на рівні досліджень «стан системи – процес – стан змін у системі» і їх невідповідностей вимогам безпеки з метою надання комплексної узагальненої оцінки порушень рівноваги «система – навколишнє природне середовище».

Завдяки сформованому інформаційно-методичному забезпеченню комплексної оцінки якості та безпечності природно-техногенних об'єктів на основі запровадження системи послідовних методів аналізу складних систем: класифікації, факторного аналізу — методу головних компонент, компараторної ідентифікації, когнітивного аналізу отримано обґрунтовані об'єктивні управлінські рішення з регулювання сталого розвитку системного об'єкта.

Основні результати роботи:

1) визначено можливості сучасних розробок з методичного забезпечення комплексного аналізу складних об'єктів і доцільності системного формування методичних підходів до вирішення завдань прийняття рішень з регу-

лювання стану і розвитку соціально-еколого-економічних утворень на основі вивчення внутрішніх можливостей систем до саморегулювання і стабілізації, посилення цих механізмів;

2) упроваджено когнітивний аналіз у комплекс методичного забезпечення оцінки стану системних об'єктів різного рівня складності, посилення обґрунтованості отриманих результатів за рахунок можливостей самопідтвердження даних на різних етапах аналізу (рис. 1);

3) розроблено когнітивну модель соціально-еколого-економічного об'єкта дослідження (див. рис. 2) і виконано її практичну апробацію на прикладі комплексного оцінювання стану екологічності та безпечного розвитку Харківського регіону (див. рис. 3–5).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Прангишвили И.В.* Системные закономерности и системная оптимизация / И.В. Прангишвили. — М. : СИНТЕГ, 2004. — 204 с.
2. *Кузнецов О.П.* Анализ влияния при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт II Человеческий фактор в управлении / О.П. Кузнецов, А.А. Кулинич, А.В. Марковский; под ред. Н.А. Абрамовой, К.С. Гинсберга, Д.А. Новикова. — М.: КомКнига, 2006. — С. 313–344.
3. *Кузнецов О.П.* Интеллектуализация поддержки управляющих решений и создание интеллектуальных систем / О.П. Кузнецов // Проблемы управления. — № 3.1. — 2009. — С. 64–72.
4. *Корноушенко Е.К.* Целенаправленное управление состоянием когнитивной линейной модели с ограниченным множеством состояний / Е.К. Корноушенко // Управление большими системами. — 2014. — Вып. 51. — С. 6–25.
5. *Горелова Г.В.* Когнитивный подход к имитационному моделированию сложных систем / Г.В. Горелова // Известия Юж. федер. ун-та. Технические науки. — 2013. — №3(140). — С. 239–250.
6. *Згуровський М.З.* Глобальне моделювання процесів сталого розвитку в контексті якості та безпеки життя людей / М.З. Згуровський, Т.А. Маторина, Д.О. Прилуцький, Д.А. Аброськін // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 1. — С. 7–32.
7. *Згуровський М.З.* Сталий розвиток регіонів України / М. З. Згуровський. — К.: НТУУ «КПІ», 2009. — 197 с.
8. *Качинський А.Б.* Екологічна безпека України: системний аналіз перспектив покращення: моногр. / А.Б. Качинський. — К. : НІСД, 2001. — 312 с.
9. *Природно-ресурсний потенціал сталого розвитку України* / Б.М. Данилишин, С.І. Дорогунцов, В.С. Міщенко [та ін.]. — К.: РВПС України, 1999. — 716 с.
10. *Шапар А.Г.* Сучасні масштабні екологічні проблеми в контексті сталого розвитку / А.Г. Шапар // Екологія і природокористування: зб. наук. праць Ін-ту проблем природокористування і екології НАН України. — К., 2009. — Вип. 12. — С. 6–9.
11. *Ness B.* Categorising tools for sustainability assessment / B. Ness, E. Urbel–Piirsalu, S. Anderberg, L. Olsson // Ecological economics. — 2007. — Vol. 60. — Iss. 3. — P. 498–508.
12. *Gasparatos A.* A critical review of reductionist approaches for assessing the progress towards sustainability / A. Gasparatos, M. El–Haram, M. Horner // Environmental Impact Assessment Review. — 2008. — Vol. 28. — P. 286–311.

13. *Xu L.* Resilience of Social-ecological Systems to Human Perturbation: Assessing Dongting Lake in China / L. Xu, D. Marinova, X. Gu // *Journal of Sustainable Development*. — 2015. — Vol. 8. — №8. — P. 182–200.
14. *Omer A. M.* Energy, environment and sustainable development / A. M. Omer // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. — 2008. — Vol. 12. — Iss. 9. — P. 2265–2300.
15. *Dzemydiene D.* Preface to sustainable development problems in the issue / D. Dzemydiene // *Technological and Economic Development of Economy*. — 2008. — Vol. 14(1). — P. 8–10.
16. *Холина В.Н.* Основы экономики природопользования: учеб. для вузов / В.Н. Холина — СПб.: Питер, 2005. — 672 с.
17. *Згуровський М.З.* Основы системного аналізу / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. — К.: Вид. група ВНУ, 2007. — 546 с.
18. *Levich A.P.* Category-functor modelling of natural systems / A.P. Levich, A.V. Solov'yov // *Cybernetics and Systems*. — 1999. — № 30 (6). — P. 571–585.
19. *Бушуев С.Д.* Напрями дисертаційних наукових досліджень зі спеціальності «Управління проектами та програмами» / С.Д. Бушуев, В.Д. Гогунський, К.В. Кошкін // *Управління розвитком складних систем*. — 2012. — № 12. — С. 5–7.
20. *Гогунський В.Д.* Основные законы проектного менеджмента / В.Д. Гогунский, С.В. Руденко // IV міжнар. конф.: «Управління проектами: стан та перспективи». — Миколаїв: НУК, 2008. — С. 37–40.
21. *Тюрин О.Г.* Управление потенциально опасными технологиями // О.Г. Тюрин, В.С. Кальницкий, Е.Ф. Жегров. — Вологда: Инфра-Инженерия, 2011. — 288 с.
22. *Колеснікова К.В.* Розробка марківської моделі станів проектно керованої організації / К.В. Колеснікова, В.О. Вайсман, С.О. Величко // *Сучасні технології в машинобудуванні: зб. наук. праць*. — Вип. 7. — Х.: НТУ «ХП», 2012. — С. 217–222.
23. *Козуля Т.В.* Методичне забезпечення комплексної оцінки екологічності системних об'єктів методом компараторної ідентифікації / Т.В. Козуля, М.О. Білова // *Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Междунар. научно-техн. конф. SAIT 2014, Киев, 2014 / УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ»*. — К.: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2014. — С. 107–108.
24. *Козуля Т.В.* Обоснование методики компараторной идентификации для системы экологического мониторинга на региональном уровне исследования / Т.В. Козуля, М.О. Білова // *Проблеми інформаційних технологій*. — № 02(014). — 2013. — С. 45–49.
25. *Козуля Т.В.* Удосконалення комплексної методики оцінки екологічності складних систем методом компараторної ідентифікації / Т.В. Козуля, М.О. Білова // *Системный анализ и информационные технологии: материалы 17-й Междунар. научно-техн. конф. SAIT 2015, Киев, 2015 / УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ»*. — К.: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2015. — С. 74–76.
26. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф.С. Робертс: пер. с англ. — М.: Наука, 1986. — 496 с.
27. *Николис Г.* Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации / Г. Николис, И. Пригожин. — М.: Мир, 1979. — 512 с.

Надійшла до редакції 09.11.2016

**GENOTYPE DYNAMIC FOR AGENT NEUROEVOLUTION
IN ARTIFICIAL LIFE MODEL**

VALENTINE ZAVERTANYIY, ALEKSANDR MAKARENKO

Abstract. Cooperation behavior is one of the most used and spread Multi-agent system feature. In some cases emergence of this behaviour can be characterized by division of population on co-evolving subpopulations [1], [2]. Group interaction can take not only antagonistic conflict form but also genetic drift that results with strategies competition and assimilation [3]. In this work we demonstrate different relation between agent grouping and they behavior strategies. We use approach proposed in work [2] methodology of agent genotype dynamic tracking, due to this approach the evolving population can be presented in genotype space as a cloud of points where each point corresponds to one individual. In current work consider the movement of population centroid – the center of the genotype cloud. Analysis of such trajectories can shed the light on the regimes of population existence and genesis.

Key words: artificial life, multiagent systems, neuroevolution

INTRODUCTION

Artificial Life (Alife) is an interdisciplinary research field, which try to investigate and use the properties of living systems or systems which include a large number of living components (for example, individuals). Alife usually brings together biologists, philosophers, physicists, computer scientists, chemists, mathematicians, artists, engineers, and more. The examples of Alife fields are numerous and includes artificial (digital) ecosystems, artificial society, evolutionary robotics, biology, origin of life — see for examples in [4, 11], and many others. Alife systems are implemented as software and as hardware (see for recent review [10], [12]). Remark that one of the important examples of the software Alife studies build and explore digital ecosystems that provide novel methods to study evolution. These studies can be useful in answering questions about laws how evolution works and how to operate it. Traditional evolution in real biological systems is extremely slow to study. The computation Alife aims to put the evolution process into action on a computer so time for evolution to go on is only limited by processor performance. Embracing evolution instruments opens opportunities for researching a great variety of problems that are linked with it. Artificial evolving systems are used to build complex systems that expose intellectual behavior and study the link between intellectuality and complexity [13]. Alife systems are plau-

sible playground to explore the mechanisms of adaptation: general evolving system features such as speciation ([2], [13]), aging ([14]), cooperation ([15]), developmental processes in artificial systems [16], and learning.

Many models are developed in purpose to study social, ecological, swarming, artificial life and other topics. Despite the progress of other models, the interconnection between genotype and phenotype dynamic is still quite an unexplored issue; in current study we reveal an example of such unclearness that lurks in dynamic of the system. By one of the goals of the study, we want to concentrate on the more detailed research of agent phenotype sustainability and what it depends of. Further in this work, we discuss the dependency of combat interaction from input resource value and examine the sustainability of phenotypic assembly formation in homogeneous and heterogeneous spaces. These questions fit into the research field of Artificial Life determined by Bedau [11], and belong to a group of research areas that claim to:

- determine predictability of evolutionary consequences of manipulating organisms and ecosystems;
- determine minimal conditions for evolutionary transitions from specific to generic response systems;
- determine what is inevitable in the open-ended evolution of life.

Alife consolidate different research fields, such as, for example, hardware and software Alife. It could be used to study the evolution of complexity, robotics, and digital organisms. One of the main approach of constructing simulation models in Alife is multi-agent methodology that is broadly used in the study of complex adaptive systems. Individual-based approach surmounts difficulties of equation-based models by granting additional flexibility for both development and analysis of the model [12]. The popularity of multi-agent approach springs from early researches such as Sugarspace [2], Bugs [18], Echo [19] and Polyworld [17] models. One of pioneer models of Artificial Life is the model of bugs on spatial lattice that was proposed by Norman H. Packard [18] denotes the importance of shift from extrinsic to intrinsic adaptation approaches in the modeling of evolutionary processes. Packard proposed to change the point of view on fitness in models of biological systems. He claimed that extrinsic approach of adaptation such that is defined by an a priori fitness function that assumes averaging of the environment and individual interactions could inflict limitations on the biosphere. Such limitation takes place, for the organism affects its environment and other organisms, altering the whole biosphere and eventually its own possibility to exist, i. e. its own fitness [18]. The author defines the intrinsic adaptation of a system as a process of changes in interactions of all parts of the system aiming to fit it and permanently changing the environment. As a result of first simulations of his model, H. Packard introduced the notion of an a posteriori fitness function for the intrinsic adaptation evolutionary process and demonstrated with its help the emergence of specific behavior that is inherent for some individuals. This change in the concept of adaptation shifts the focus to the emerging characteristics of the system that can be treated as an a posteriori fitness function. The examples of such values could be population size over time, sustainability of emerging phenotypic assemblies under different factors such as environmental changes or arm races and other system features. In particular work the size of agents' group with common phenotype (behavior strategy) is treated as the a posteriori fitness function.

Echo model is a Complex Adaptive System that was built with a purpose of extending genetic algorithms approach to ecological setting by adding geography

(location), competition for resources and interaction among individuals (coevolution). The model itself is intended to study patterns of behavior that are how resources flow through different kinds of ecologies, how cooperation among agents can arise through evolution and arms races. Echo corresponds to a set of Echo models, in the system agents evolve empowered with combat, trade, move and mate abilities that are conditioned by their genotype and phenotype traits. Echo model consists of agents that are located in two-dimensional grid of sites, and each agent is located at a site, migration is supported. Many agents can occupy one site and there is a notion of neighborhood. The different kinds of resource randomly distributed between all cells. Agents use resource to pay metabolic tax and to perform trace, combat and mating actions. Reproduction can be sexual (crossover) and asexual (replication with mutation). The system study allows identifying parameters or collections of parameters that are critical for emergence of specific behavior, i.e., to perform sensitivity analysis [19]. Simulation results and their analysis allow scientists to build deep intuitions about how different aspects of the digital ecosystem interact one another, reveal important dependencies, and provide understanding of how evolution interacts with ongoing dynamics of the ecosystem [19].

In continuation to work with Echo model family Hraber and Milne discovered the notion of the emergence of community assemblies, they showed the existence of agent groups that share common behaviour that springs in order to response on interaction rules in model architecture [20]. Certain genotype assemblies (complementary genotypes) were born and formed quasi-stable domination that was based on pairwise interaction between agents. In particular work we consider digital ecosystem with such emergent feature and show that changing of system property such as space heterogeneity contributes to sustainability of complementary phenotypic assemblies over time. By saying phenotypic assembly we consider group of agents that share similar behaviour. It should be noted that such assemblies are less complex than community assemblies presented in Hraber and Milne study because agents action portfolio in that model is wider: its agents can trade and mate in addition. While in particular model phenotypic assembly by definition not necessarily support internal group interactions.

The further continuation of digital ecosystem models is the models where complex agent's behaviour arises from the first principles: where it never was predefined by fitness function and emerges through adaptation process. Remarkable examples of such models are Michael Burtsev's [2], [21] model and Robert Grass' [13] model. One of the main achievements of their research is that agent speciation i. e. phenotypic grouping and distinction emerges without predefined fitness function. Agents occupy niches that expose predator, prey or even more sophisticated behaviour without extrinsic predisposition but as the result of the evolutionary adaptation process.

Michael Burtsev proposed a model that resembles pioneer Artificial Life's Echo [19] and Bugs [18] models: the agents with simple behaviour are acting in a simple space. In the study [2] author develops latter models introducing kinship (by introducing culture affinity) and using the artificial neural network as a basis for agent's actions. In this model no agent was given a predefined strategy, instead it emerge as phenotype feature from agent's actions, defined by the neural network. By doing this, the author achieved a great variety of strategies that can take into account kinship of the object they interact with and are constructed from elementary actions as a result of evolution processes. Some of the strategies expose cooperative behaviour, where agents adjusted their behaviour due to

genotypic distance between each other. It was shown that in such model emerge strategies that correspond to those in well-known game theory - dove-hawk-bourgeois, where dove acts like peaceful harvester, hawk demonstrates aggressive behaviour attacking agents in neighborhood, and bourgeois that plays as dove when low on resource and displays hawk strategy in possession of it. Also, two new strategies of cooperative attack (when agent attack only non-relative ones) and defense (when agents gather in one location to defense themselves from aggression) were emerged [20]. The similar results with different model achieves research with novel artificial life model with predator-prey behavior in study [13], where agents are driven by fuzzy cognitive map. Considering results of artificial life modeling it can be concluded that such approach is not being controversial to game theory but on the contrary is an extension that provides new research horizons, such as finding evolutionary stable strategy, designing an open-ended evolution, exploring new sophisticated agent behavior, and analyzing system regularities, e. g. persistent emergence of group behavior and arm races. By studying the model, Burtsev proposed a novel methodology to categorize agents' behaviour into strategies and to trace population genotype dynamic [2]. Author proposes alternative view on evolving systems that is inspired by dynamical systems theory. He points that the main notion in this theory is the trajectory and provides mechanisms of tracing the Artificial Life model development as if it moves along its own trajectory. An evolving population can be presented in genotype space as a cloud of points where each point corresponds to one individual. It is proposed to consider the movement of population centroid — the center of the cloud. Analysis of such trajectories shed the light on the regimes of population existence and genesis.

Analysis of mentioned above researches of Alife models show that they open novel regularities and emergent behavior. Proceedings study of the similar models discovers new aspects of agents' behavior dynamic can be studied. Evolution processes in the models of digital ecosystems are far from being clear and traceable, the interconnection between emergent features and system parameters are not yet properly established. In this work we study the dynamic of agent's population genotype and phenotype using the novel methodologies from Burtsev's work [2]. The aim of the work is to illustrate phenotype and genotype dynamic in continuous space artificial ecosystem model. We open the questions of genotype and phenotype transition and the importance of understanding and tracking the nature of such transitions.

MODEL DESCRIPTION

Agent. Common predator-prey model with continuous space was developed in the work. Agent perceps certain environmental variables such as:

- resource allocated nearby;
- current energy value that belongs to agent itself (r);
- difference between maximum reachable ($r_{Max} = 500$) and current energy values (r);
- the most weaker and the most stronger nearby agent (affected by affinity mark: if agent is relative than input is multiplied with (-1));
- In reply to the input signals agent performs the following actions;
- 'rest': stay on the current position paying the smallest energy price;
- 'eat': start consumption of vegetation. Agent can consume defined vegetation value by one time;

- ‘move’: move towards current heading, if agent sees the vegetation he can change heading in order to reach it. Agent pays specified energy cost for movement;
- ‘attack’: jump to victim agent nearby (hunter pays additional penalty for jump action) and attack him. Attacker pays fee to initiate aggression, if he is successful he gains all victim’s energy (energy consumption is limited by maximum reachable energy threshold) and victim dies;
- ‘divide’: agent creates sibling nearby and gives to him a half of own energy. Sibling receives parent’s genotype with mutations;
- ‘escape’: if one agent wants to escape from another agent, he starts movement in opposite way from target agent with two times higher speed. Actions and their fee are listed in Table I.

Table 1. Agent’s fee for actions

Action	Payment type	Value
Rest	Once per action	15
Move	By overcome path (velocity*step)	25
Move forward		
Divide	Once per action	$20 + r/2$
Attack	Twice by overcome path (2*velocity*step)	50
Escape		

Agent’s behavior is determined by artificial neuronal network with one layer. Each agent’s sibling inherits neuronal matrix perturbed with some mutations after birth (action ‘divide’). Each agent is characterized by affinity marker: 3-dimensional vector which coordinates can take possible integer values in $[-2, 2]$ interval. Agents are considered as relatives if Euclidean distance between their markers are less than 0.2 threshold.

Probability to be succeed in attack is equals to ratio of victim’s and attacker’s accumulated energy.

Agent’s actions are categorized and vector of agent strategies is generated using the methodology firstly presented in [2]: to show agent phenotype behavior, each agent was placed in hypothetical situation as if he interacts with other agent under various conditions i. e. agent’s internal energy indicator, agent’s relative affinity. Thus, agent is being stressed with six input test vectors and then strategy vector was generated according to his reaction (Table 2). For example, strategy ‘020202’ is typical hawk strategy: regardless of internal agent energy level, he will attack any stranger in his area and make no harm to relatives. See agent’s population dynamic in Fig. 1. Population downfall is caused by conflicts between different culture groups.

Table 2. Vector of agent’s strategies. Where $a \in \{0: \text{“rest”}, \text{“eat vegetation”}; 1: \text{“escape”}; 2: \text{“attack”}; 3: \text{“divide”}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$

Low resource, $r = 0,02r_{max}$		Half of resource, $r = 0,5r_{max}$		Many resources, $r = 0,98r_{max}$	
Relative behind	Non-relative behind	Relative behind	Non-relative behind	Relative behind	Non-relative behind
A_i					

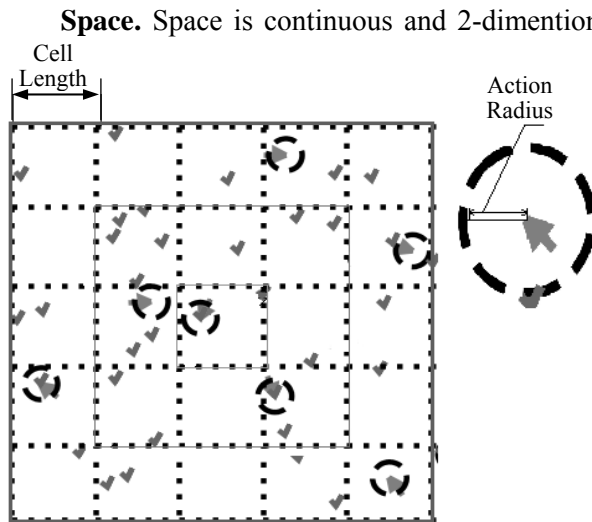


Fig. 2. Agent's space. Agent are presented with arrows, vegetation as checks

Space is continuous and 2-dimensional. Agent's position is defined with real coordinates (x, y) . Space is logically divided on cells (Fig. 2), agent can overcome one cell by two time series with average speed. Agent can perform actions with object on distance closer than Action Radius. Agent is aware of all objects that are located in cells that bear to his cell. New vegetation is randomly appears in space with each time series.

For heterogeneous space vegetation checks appears in some areas more frequently that in others (see Fig. 3).

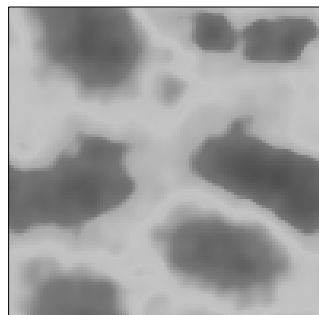


Fig. 3. Example of the map of heterogeneous space

ANALYSIS

Population Genotype Centroid. In addition to presenting phenotype as behavior strategies in current work method of tracking Population Genotype Centroid was used [2]. Consider genotype space G , its dimension equals to number of genes for each agent from population P (quantity of elements in agent's matrix of neural network — $W_{n \times m}$). Let genotype of agent A be $g \in G$, each element of g : g_k , $k=1, \dots, nm$ corresponds to element of the matrix W : w_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$. Thus, g defines the point in space G that corresponds to agent A . We should track its centroid C^P to analyse the movement of the whole agent's population cloud:

$$C_i = \frac{1}{N} \sum_i^N g_i .$$

Centroid trajectory can be maintained for a long time in some compact area (gravity field) of the space G , form closed curves corresponding to a specific period cycles, accidentally wander around space or jump from one area of attraction to

another. To identify patterns in these behaviors the following characteristic is used [2]:

$$d(t, T) = \sqrt{\sum_i^N (C_i(t+T) - C_i(t))^2} \quad (1)$$

Expression (1) gives the distance between the centroid locations at time t and $t+T$ [2]. Visualizing of dynamics of values $d(t, T)$ for different values of period T can get an idea of the character of centroid movement in space. For example, in case of random walk of centroid in space $d(t, T)$ will increase with increasing T (Fig. 4,a) If for some period of time centroid moves along a closed trajectory of period T_c , then during this period of time the value of $d(t, T_c)$ will be close to zero. Other examples of such visualization shown in Fig. 4.

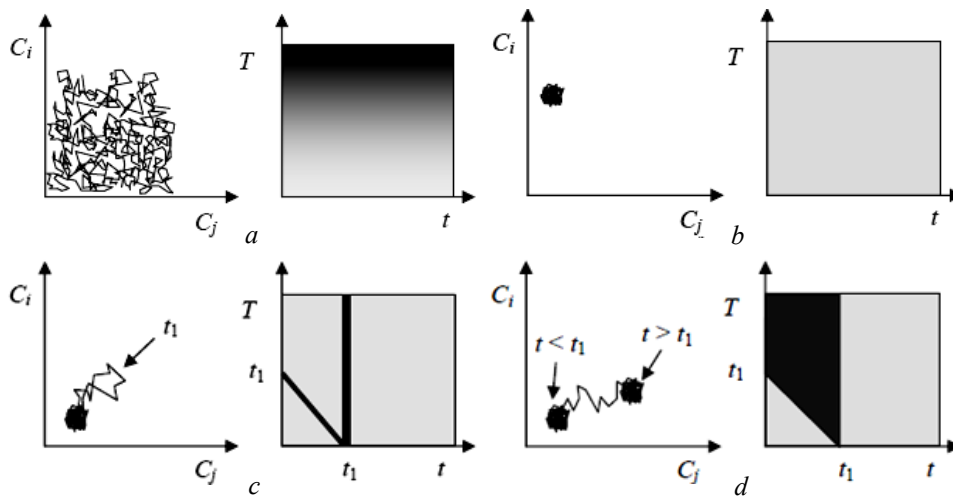


Fig. 4. Example of the different centroid behavior dynamics and visualization of $d(t, T)$ characteristic. Figures are taken from [2]

In the context of the model considered in this paper genotype is a low-level rule for behavior — he abstract specification for agent — that then participates in local interaction of a large set of other types of behavior. Phenotype is the behavior patterns in time and space that develop from these non-linear, local interactions [2] (Fig. 5).

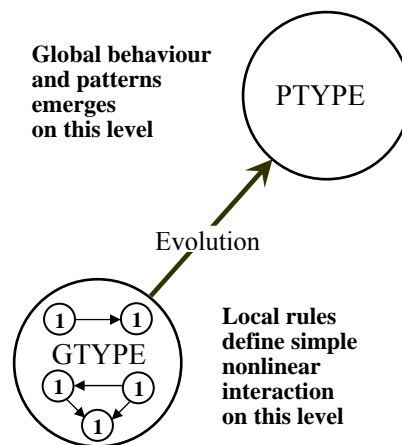


Fig. 5. Interaction of genotype (GTYPE) and (PTYPE) [8]

MAS BEHAVIOUR

Mutli-agent system display variety of different scenarios of agent interactions: predator-prey cycles [2], [13], [5], competition between different behaviour strategies [1], [5], quasi-stable domination of certain strategy for a long period of time or intense variability of strategies.

Let us show competitive interaction between behaviour strategies with similar behavior. Refer to Fig 1 we can see that in some time series population dramatically decreases (for 410, 700, and 900 thousands time series). Considering successful attack actions time series (Fig. 6) we can infer that aggressive competition was taking place for this cases.

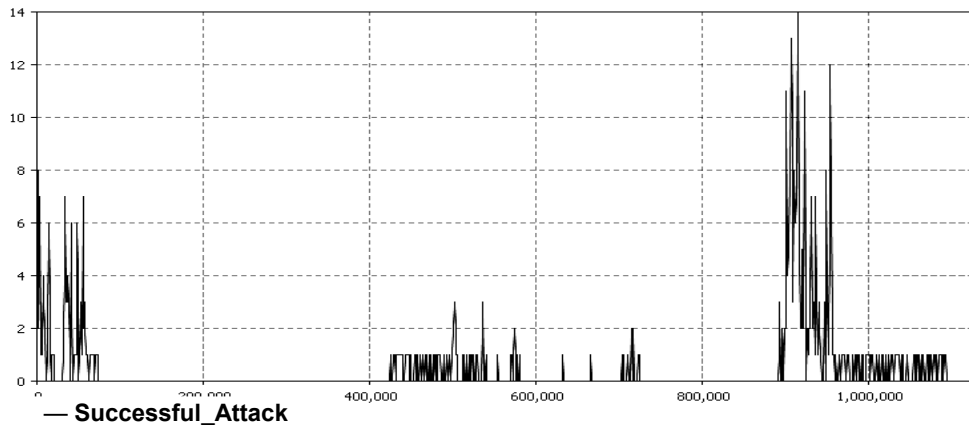


Fig. 6. Successful attack actions count for experiment from Fig. 1

Consider fist crisis episode: population decrease near 400 thousands time series (Fig. 7) — we can see coexistence of the almost similar strategies: “333020” and “333030”, the main and crucial difference between them is that first strategy provides aggressive actions to relative agents. Time passed leads to extinction of aggressive non-cooperative strategy.

On the visualization of centroid dynamic (Fig. 8), we can see that all popula-

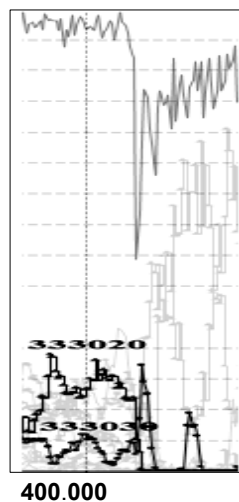


Fig. 7. Detailed fragment from Fig. 1 view. Competitive interaction between strategies with similar behaviour. “333020” — triangles, “333030” — circles

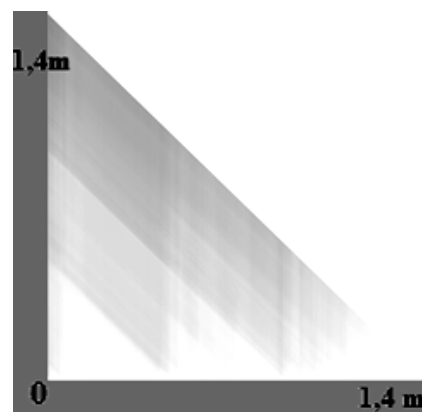


Fig. 8. Visualization of $d(t,T)$ characteristic for centroid behavior dynamics for experiment from Fig. 1

tion crisis periods are accompanied with centroid transition from one area of attraction to another (similar to Fig. 4,d dynamic).

However, it is not clear enough whether centroid relocates from one state to another under aggression actions or under peaceful assimilation of agents, such cases were described other models [2].

Culture marker and genotype vector. Let us emphasize on interconnection between genotype vector and vector of relative affinity. Consider two experiments with various behaviour strategies dominate in different periods of time (Fig. 9 and Fig. 10).

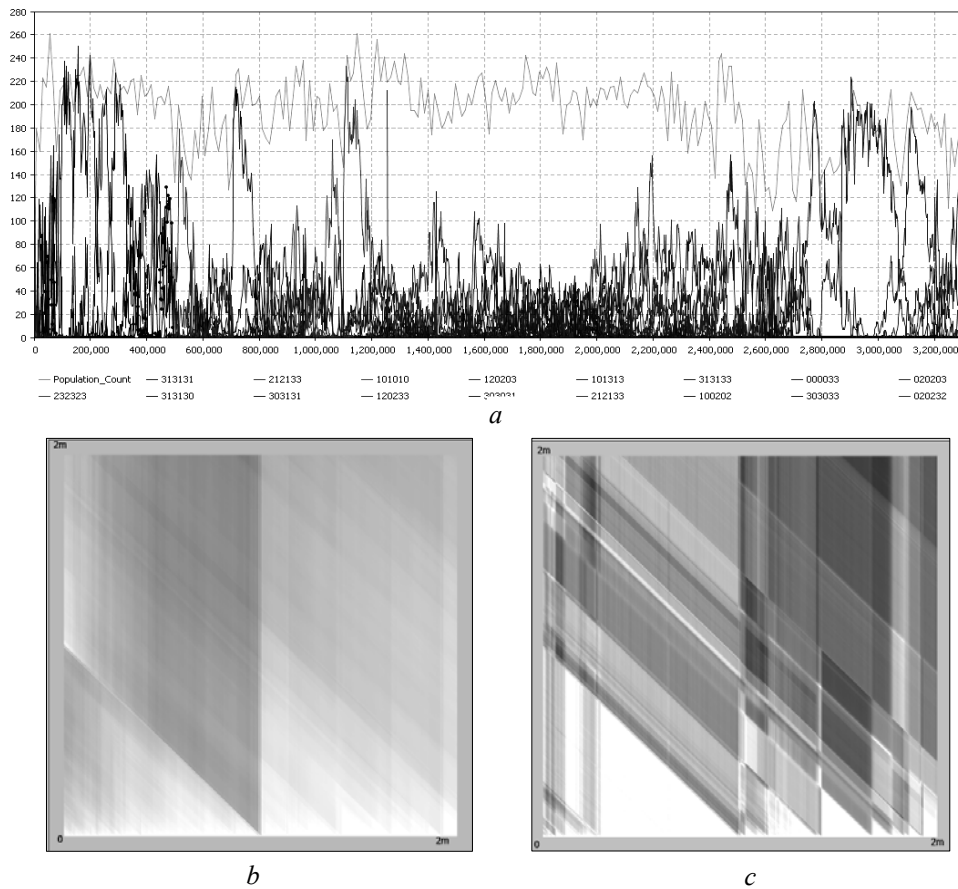


Fig. 9. Experiment with correlated transition of genotype and culture marker centroids: *a* — strategy series; *b* — genotype centroid transition dynamic visualization; *c* — marker of culture features dynamic visualization

As we can see for the first experiment culture marker centroid dynamic is closely connected (Fig. 9,b and Fig. 9,c). Culture centroid even has additional transitions from one area of attraction to another. But, for the second experiment no significant culture marker centroid transitions were tracked unlike to genotype centroid dynamics (Fig. 10,b and Fig. 10,c). Such behaviour causes new questions like dependency of centroids transitions from culture transition between agents and culture marker dimension (as dimension was stated important parameter in [8]), formation of agent groups settlement in different areas and possible swarm-

like behaviour, indicate and observe the crucial for transition components of agent's genotype vector, provide clearness in stating of aggressive or peaceful (assimilative) centroid transition.

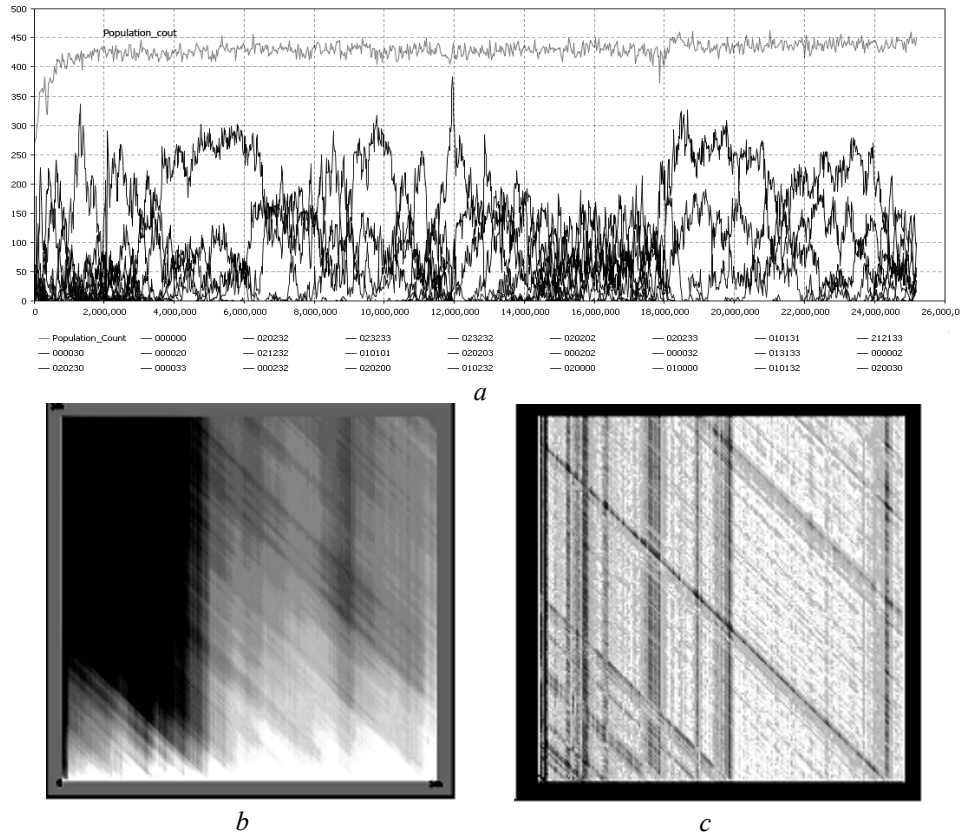


Fig. 10. Experiment where transition of genotype and culture marker centroids are not corresponded: *a* — strategy series; *b* — genotype centroid transition dynamic visualization; *c* — marker of culture features dynamic visualization

DISCUSSION

In the work we presented own variation of common model of digital ecology and demonstrated dynamics both of phenotype and genotype agent groups. The formation and further extinction of culture groups caused either by aggressive predator-prey interaction or by competition of strategies with antagonistic or similar behavior. The following issues are important for further development of the model:

- building new tools for analysis of agents population to enlighten how different interactions affect on group formation and its persistence;
- determine influence of aggressive behavior and genetic transition to the change in the dominance of one strategy over the other;
- analysis of agent group formation and its coevolution;
- introduction of new types of interaction between agents.

REFERENCES

1. *Kenneth Stanley O.* Competitive coevolution through evolutionary complexification / Kenneth O. Stanley, Risto Miikkulainen // *Journal of Artificial Intelligence Research*. — 2004.
2. *Burtsev M.S.* Research into new types of self-organization and behavioral strategies: phd dis. / M.S. Burtsev // IAM M.V. Keldysh RAS. M. — 2005. — 120 p.
3. *Epstein Joshua M.* Growing artificial societies: social science from the bottom up / Joshua M. Epstein, R. Axtell. — Brookings Institution Press, 1996. — 307 p.
4. *Adamatskii A.* Artificial Life Models in Software / A. Adamatskii, M. Komosinski // Springer-Verlag.
5. *Adami C.* Introduction to Artificial Life / C. Adami // Springer. — Berlin, 2005.
6. *Aguilar W.* The Past, Present, and Future of Artificial Life, *Frontiers in Robotics and AI V. 1.* / W. Aguilar, B.G. Santamaria, T. Froese, C. Gershenson. — 2014. — Doi: 10.3389/frobt.2014.00008.
7. *Bedau M.A.* Open problems in artificial life. *Artif. Life 6* / M.A. Bedau, J.S. McCaskill, N.H. Packard, S. Rasmussen, C. Adami, G. Green. — 2000. — P. 363–376. — Doi:10.1162/106454600300103683, doi:10.3389/frobt.2014.00008.
8. *Langton C.G.* Artificial Life: An Overview / C.G. Langton. — Cambridge, MA: MIT Press, 1997.
9. *Penn A.* Artificial Life and Society: Philosophies and Tools for Experiencing, Interacting and Managing Real World Complex Adaptive Systems. *Proc. Int. Conf. Acai / A. Penn.* — Mexico: Cancun, 2016. — P. 26–27.
10. *Taylor T.* A Review of the First 21 Year of Artificial Life on the Web / T. Taylor, J.E. Auerbach, J. Bongard // *Artificial Life (USA)*. — Vol. 22, N 3. — Massacusetts: MIT, 2016. — P. 364–407.
11. *Wikipedia.* Artificial Life. — Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_life
12. *Dorin A.* Biological Bits. A Brief Guide to the Ideas and Artefacts of Computational Artificial Life / A. Dorin. — Melbourne: Animaland, 2014.
13. *Gras R.* Speciation without Pre-Defined Fitness Functions. *PLoS ONE 10(9): e0137838* / R. Gras, A. Golestani, A.P. Hendry, M.E. Cristescu. 2015. — Doi: 10.1371/journal.pone.0137838
14. *Krivenko S.* Simulation of the evolution of aging: effects of aggression and kin-recognition. In *Advances in Artificial Life / S. Krivenko, M. Burtsev // 9th European Conference, ECAL, Lecture Notes in Computer Science, 2007.* — P. 84–92.
15. *Lindgren K.* Cooperation and Community structure in artificial ecosystems / K. Lindgren, N.G. Nordahl // *Artificial Life, 1994.* — P. 15–37.
16. *D'Ambrosio D.B.* Generative encoding for multiagent learning / D.B. D'Ambrosio, K.O. Stanley // In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference.* — New York: ACM Press, 2008. — Doi: 10.1145/1389095.1389256.
17. *Yaeger L.* Computational Genetics, Physiology, Learning, Vision, and Behavior or PolyWord: Life in a New Context. In *Langton, C. G. (ed.) / L. Yaeger // Artificial Life III. Addison-Wesley, 1994.* — P. 263–298.

18. *Packard N.* Intrinsic adaptation in a simple model for evolution / N. Packard, C.G. Langton // *Artificial life*, Redwood City, Addison-Wesley, CA, 1989. — P. 141–155.
19. *Forrest S.* Modeling complex adaptive systems with Echo. *Complex Systems: Mechanisms of Adaptation* / S. Forrest, T. Jones. — Amsterdam: IOS Press, 1994. — P. 3–21.
20. *Hraber P.T.* Community Assembly in a Model Ecosystem. / P.T. Hraber, B.T. Milne // *Ecological Modeling*. — 1997. — P. 267–285.
21. *Burtsev M.* Evolution of Cooperative Strategies From First Principles / M. Burtsev, P. Turchin // *Nature*. 2006. — P. 1041–1044.
22. *Zavertanyy V.* Aggressive and peaceful behavior in multiagent systems on cellular space / V. Zavertanyy, A. Makarenko // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — № 2. — 2016. — P. 36–44.

Received 31.10.2016

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

FUZZY-РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ В УСЛОВИЯХ НАЛИЧИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ВЫБОРКЕ НЕЧИСЛОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ю.А. ЗАК

Аннотация. Рассмотрены алгоритмы решения задач нечеткого регрессионного анализа в условиях, когда входные и выходная переменные представлены Fuzzy-множествами, определенными с точностью до неизвестных параметров, а коэффициенты регрессии — действительные числа. Предложены некоторые новые критерии аппроксимации, основанные на сравнении свертки длин сечений и координат центров тяжести функций принадлежности Fuzzy-множеств, которые могут быть использованы для нечетких множеств переменных задачи общего вида. Описаны алгоритмы преобразования переменных, представленных терминами лингвистической переменной или параметрами числовых шкал, в нечеткие множества и использования этих данных в задачах Fuzzy-регрессионного анализа. Полученные результаты позволят решать многие прикладные проблемы в экономике, логистике, социологии и маркетинге.

Ключевые слова: Fuzzy-регрессионный анализ, нечисловая статистика, лингвистические переменные, параметры числовых шкал, Fuzzy-множества, критерии аппроксимации, метод наименьших квадратов.

ВВЕДЕНИЕ

В эконометрике, маркетинговых и социологических исследованиях при построении математических моделей широко используется аппарат математической статистики и построения регрессионных моделей [1]. Широкое распространение здесь получили методы нечисловой статистики. В экономике доля нечисловых данных существенно больше, чем в технике и технологии, и неопределенность приходится описывать в терминах теории нечеткости или математики и статистики интервальных данных.

В ситуациях, когда многие входные факторы модели могут быть представлены лишь булевыми, лингвистическими или нечеткими данными, либо некоторыми градациями числовых шкал, в качестве альтернативных подходов могут использоваться методы Fuzzy-регрессионного анализа. Результатом расчета на основе математических моделей Fuzzy-регрессионного анализа является некоторое нечеткое множество с функцией принадлежности непрерывного вида, которое определяет диапазон возможных значений выходной переменной и оценку (некоторый аналог вероятности) получения этого значения в пределах данного диапазона.

СОСТОЯНИЕ РАЗРАБОТОК В ОБЛАСТИ FUZZY-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Математическим моделям и алгоритмам решения задач Fuzzy-регрессионного анализа посвящено большое количество публикаций. Функции регрес-

сии в общем случае, когда входные, выходная переменные и коэффициенты модели — нечеткие множества, рассмотрены в работах Ю.П. Зайченко [2, 3, 5, 20], где предложены методы решения таких задач алгоритмами нечеткого МГУА. В работах С.Д. Штовбы [8], Х. Танака (1982 г.) [10, 11], как и в статьях [13–15] и многих других публикациях, также рассмотрена модель линейной регрессии с нечеткими коэффициентами. В работах [10, 11] для определения значений этих коэффициентов, минимизирующих суммарную средневзвешенную размытость параметров функции принадлежности и рассматриваемую в различных метриках, предложены методы линейного программирования. В 1987 г. А. Селминс и П. Даймонд [14], а также Янг и Лиу в 2003 г. [19] предложили методику построения моделей нечеткой регрессии, основанной на методе наименьших квадратов [13–15, 18, 19]. Для построения критериев аппроксимации (целевой функции нечеткой идентификации) использовались различные метрики, среди которых наибольшее распространение получили показатели α -сечений нечетких множеств. В ряде случаев сформулированная оптимизационная задача становится нелинейной и многоэкстремальной. Для решения ее применялись градиентные, поисковые методы и генетические алгоритмы (см., например, [15]). Робастые регрессионные модели представлены в работах [9, 17, 18]. Решения для частных случаев функции принадлежности треугольного типа рассмотрены в работах [4, 10–15, 17–19]. Формулирование и решение задачи нечеткого регрессионного анализа в виде многокритериальной задачи линейного программирования описаны в статье [4]. Решение задачи нечеткого регрессионного анализа представлено в условиях, когда входные и выходная переменные — Fuzzy-множества, а коэффициенты регрессии — действительные числа. Свободный член уравнения регрессии — нечеткое множество. Рассмотрены некоторые новые критерии аппроксимации, основанные на сравнении свертки длин сечений и координат центров тяжести функций принадлежности Fuzzy-множеств. Разработаны детерминированные эквиваленты сформулированных задач и алгоритмы расчета параметров критериев аппроксимации, т.е. детерминированных значений коэффициентов уравнения регрессии и свободного члена, представленного Fuzzy-множеством, определенным с точностью до неизвестных параметров. Предложены критерии адекватности Fuzzy-регрессионных моделей. Хотя рассматриваемая постановка является частным случаем моделей [2, 3, 5, 20], полученные в работе и перечисленные результаты имеют большое прикладное значение и позволяют решить многие прикладные проблемы в экономике, логистике, социологии и маркетинге.

ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая постановка задачи Fuzzy-регрессионного анализа. Пусть матрица наблюдений (XY), каждая строка которой — комплект входной и выходной информации, представлена нечеткими множествами. Таблица исходных данных содержит N комплектов экспериментальных данных (строк). Необходимо найти нечеткую линейную регрессионную модель вида

$$\bar{Y} = a_1 \otimes \bar{X}_1 + a_2 \otimes \bar{X}_2 + \dots + a_j \otimes \bar{X}_j + \dots + a_n \otimes \bar{X}_n + \bar{a}_0, \quad (1)$$

где $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_j, \dots, \bar{X}_n$; \bar{a}_0 — некоторые нечеткие множества с заданными функциями принадлежности (в частном случае некоторые из них — действительные числа), а коэффициенты модели $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n$ — некоторые действительные числа.

Отрицательное влияние некоторых входных факторов на выходную переменную можно представить также в виде соотношения (1), заменив их сопряженными Fuzzy-числами. Причем в Fuzzy-регрессионных моделях знаки этих коэффициентов в результате расчетов не меняются.

Ограничимся рассмотрением треугольных и трапецевидных функций принадлежности LR-представления, где (λ_i, m_i, μ_i) и $(\lambda_i, m_i^1, m_i^2, \mu_i)$ — соответственно параметры этой функции принадлежности. Рассмотрим математические модели этой задачи в случае, когда Fuzzy-множества входных и выходных переменных представлены треугольными функциями принадлежности. Центральные точки функций принадлежности $\mu(\bar{X}_{ij})$ и $\mu(\bar{Y}_i)$ соответственно входных \bar{X}_{ij} и выходных переменных \bar{Y}_i этих Fuzzy-множеств обозначим соответственно m_{ij} и \bar{m}_i , левые крайние точки — λ_{ij} , λ_i , а правые крайние точки — γ_{ij} и γ_i , где $j=1, \dots, n$, $i=1, \dots, N$.

Критерий качества аппроксимации — минимум средневзвешенной суммы квадратов отклонений расчетных параметров выходной переменной по Fuzzy-регрессионной модели от их фактических значений:

$$\Phi_1 = \eta_1 \sum_{i=1}^N \left[\bar{m}_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j m_{ij} + a_0 \right) \right]^2 + \eta_2 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\lambda}_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j \lambda_{ij} + a_0 \right) \right]^2 + \eta_3 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\gamma}_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j \gamma_{ij} + a_0 \right) \right]^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

В случае трапецевидных функций принадлежности входных \bar{X}_{ij} и выходных переменных \bar{Y}_i обозначим соответственно m_{ij}^1 , m_{ij}^2 и \bar{m}_i^1 , \bar{m}_i^2 , левые крайние точки — λ_{ij} , λ_i , а правые крайние точки — γ_{ij} и γ_i , где $j=1, \dots, n$, $i=1, \dots, N$. Критерий аппроксимации в этом случае имеет вид

$$\Phi_2 = \eta_1 \sum_{i=1}^N \left[\bar{m}_i^1 - \left(\sum_{j=1}^n a_j m_{ij}^1 + a_0 \right) \right]^2 + \eta_2 \sum_{i=1}^N \left[\bar{m}_i^2 - \left(\sum_{j=1}^n a_j m_{ij}^2 + a_0 \right) \right]^2 + \eta_3 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\lambda}_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j \lambda_{ij} + a_0 \right) \right]^2 + \eta_4 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\gamma}_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j \gamma_{ij} + a_0 \right) \right]^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

В уравнениях (2), (3) η_1, η_2, η_3 или $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, где $0 < \eta_r \leq 1$, $r=1, 2, 3, 4$ — весовые коэффициенты, определяющие важность значения каждого из параметров, причем в выражении (2) $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1$, а в выражении (3) — $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 1$.

Координата абсцисс центра тяжести нечеткого множества вычисляется по формуле

$$G(\bar{X}_{ij}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}_{ij} \mu_i(\bar{X}_{ij}) d\bar{X}_{ij}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(\bar{X}_{ij}) d\bar{X}_{ij}}; \quad G(\bar{Y}_i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{Y}_i \mu_i(\bar{Y}_i) d\bar{Y}_i}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(\bar{Y}_i) d\bar{Y}_i},$$

$$j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, N,$$

которая для функций принадлежности треугольного типа имеет вид

$$G(\bar{X}_{ij}) = \frac{1}{3}(\lambda_{ij} + m_{ij} + \gamma_{ij}); \quad G(\bar{Y}_i) = \frac{1}{3}(\bar{\lambda}_i + \bar{m}_i + \bar{\gamma}_i), \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\Phi_3 = \sum_{i=1}^N \left[G(\bar{Y}_i) - \sum_{j=1}^n a_j \cdot G(\bar{X}_{ij}) + a_0 \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[(\bar{\lambda}_i + \bar{m}_i + \bar{\gamma}_i) - \sum_{j=1}^n a_j (\lambda_{ij} + m_{ij} + \gamma_{ij}) + a_0 \right]^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Выражение (4) представим в виде $\Phi_4 = \sum_{i=1}^N \left[Y_i - \sum_{j=1}^n a_j z_{ij} + a_0 \right]^2 \rightarrow \min,$

где для треугольных и трапецевидных функций принадлежности значения $z_{ij} \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, N$, вычисляются соответственно по формулам:

$$z_{ij} = \sum_{p=1}^P 0,5 \omega_p \{ [m_{ij} - (m_{ij} - \lambda_{ij})(1 - \beta_p)] + [m_{ij} + (\gamma_{ij} - m_{ij})(1 - \beta_p)] \},$$

$$z_{ij} = \sum_{p=1}^P 0,5 \omega_p \{ [m_{ij}^1 - (m_{ij}^1 - \lambda_{ij})(1 - \beta_p)] + [m_{ij}^2 + (\gamma_{ij} - m_{ij}^2)(1 - \beta_p)] \},$$

где $0 \leq \omega_p \leq 1, \quad p = 1, \dots, P$ — весовые коэффициенты, удовлетворяющие соотношению $\sum_{p=1}^P \omega_p = 1$; $0 \leq \beta_p \leq 1,0, \quad p = 1, \dots, P$ — значения функции принадлежности в различных сечениях.

Критерий аппроксимации (4) является частным случаем критерия аппроксимации (2).

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ FUZZY-РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Необходимыми и достаточными условиями достижения локального минимума значения критериев Φ_1 и Φ_2 является система линейных уравнений вида

$$\frac{d\Phi_p}{da_0} = 0, \quad \frac{d\Phi_p}{da_j} = 0, \quad p = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Вычислив частные производные по каждому из оптимизируемых параметров, после некоторых алгебраических преобразований получаем, например, для критерия (3) следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения значений коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n$ —

$$\sum_{j=1}^n \beta_{kj} a_j + a_0 = B_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Как и в классических методах регрессионного анализа, перейдем к нормированным показателям. Вычислим

$$M(z_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{ij}, \quad \sigma^2(z_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[\sum_{i=1}^N z_{ij} - M(z_j) \right]^2, \quad j = 1, \dots, n; \quad (6)$$

$$M(Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i, \quad \sigma^2(Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[\sum_{i=1}^N Y_i - M(Y) \right]^2; \quad (7)$$

$$\rho_{kj} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [z_{ik} - M(z_k)][z_{ij} - M(z_j)]}{\sigma(z_k) \sigma(z_j)}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad k \neq j;$$

$$\rho_{kk} = 1; \quad \rho(y, z_k) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [z_{ki} - M(z_k)][Y_i - M(Y)]}{\sigma(z_k) \cdot \sigma(Y)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и перейдем к решению следующей системы n линейных алгебраических уравнений относительно переменных $\delta_j, j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n \rho_{kj} \delta_j = \rho(y, z_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Вычислив значения коэффициентов $\delta_j, j = 1, \dots, n$, определим значения коэффициентов $\bar{a}_j, j = 1, \dots, n$, в нормальном масштабе измерения по формулам $\bar{a}_j = \delta_j \cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(z_j)}, j = 1, \dots, n$.

Значение свободного члена уравнения нечеткой регрессии a_0 в виде нечеткого множества \bar{A}_0 , определенного с точностью до неизвестных параметров, который для критериев $\Phi_1 - \Phi_3$ не обязательно должен совпадать с видом нечетких множеств выходной переменной, вычисляется по приведенным ниже формулам.

Рассмотрим в качестве примеров следующий случай.

Параметры нечеткого множества треугольного вида

$$\lambda_0 = \lambda(\bar{A}_0), \quad \gamma_0 = \gamma(\bar{A}_0) \quad \text{и} \quad m = m(\bar{A}_0) \quad (\text{или} \quad m_0^1 = m_0^1(\bar{A}_0) \quad \text{и} \quad m_0^2 = m_0^2(\bar{A}_0))$$

определяются в результате минимизации одного из следующих критериев:

$$F_1 = \min_{(\lambda_0, m_0, \gamma_0)} \left\{ \eta_1 \sum_{i=1}^N \left[\bar{m}_i - \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j m_{ij} + m_0 \right) \right]^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \eta_2 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\lambda}_i - \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j \lambda_{ij} + \lambda_0 \right) \right]^2 + \eta_3 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\gamma}_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j \gamma_{ij} + \gamma_0 \right) \right]^2 \Bigg\}; \\
 & F_2 = \\
 & = \min_{(\lambda_0, m_0^1, m_0^2, \gamma_0)} \left\{ \begin{aligned} & \eta_1 \sum_{i=1}^N \left[\bar{m}_{ij}^1 - \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j m_{ij}^1 + m_0^1 \right) \right]^2 + \eta_2 \cdot \sum_{i=1}^N \left[\bar{m}_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j m_{ij}^2 + m_0^2 \right) \right]^2 + \\ & + \eta_3 \sum_{i=1}^N \left[\bar{\lambda}_i - \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j \lambda_{ij} + \lambda_0 \right) \right]^2 + \eta_4 \cdot \sum_{i=1}^N \left[\bar{\gamma}_i - \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j \gamma_{ij} + \gamma_0 \right) \right]^2 \end{aligned} \right\}; \\
 & F_3 = \min_{(\lambda_0, m_0, \gamma_0)} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[Y_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_j z_{ij} + z_0(\lambda_0, m_0, \gamma_0) \right]^2 \right\},
 \end{aligned}$$

где значения z_{ij} и Y_i вычисляются соответственно по формулам соответственно (5) или (6) и (7), а $z_0(\lambda_0, m_0, \gamma_0)$ или $z_0(\lambda_0, m_0^1, m_0^2, \gamma_0)$ определяется в виде

$$\begin{aligned}
 & z_0(\lambda_0, m_0, \gamma_0) = \\
 & = \sum_{p=1}^P 0,5 \omega_p \{ [m_0 + (m_0 - \lambda_0)(1 - \beta_p)] + [m_0 + (\gamma_0 - m_0)(1 - \beta_p)] \} \quad (8)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & z_0(\lambda_0, m_0^1, m_0^2, \gamma_0) = \\
 & = \sum_{p=1}^P 0,5 \omega_p \{ [m_0^1 + (m_0^1 - \lambda_0)(1 - \beta_p)] + [m_0^2 + (\gamma_0 - m_0^2)(1 - \beta_p)] \}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Кроме того, могут использоваться критерии аппроксимации

$$F_4 = \min_{(\lambda_0, m_0, \gamma_0)} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[(\bar{\lambda}_i + \bar{m}_i + \bar{\gamma}_i) - \sum_{j=1}^n \bar{a}_j (\lambda_{ij} + m_{ij} + \gamma_{ij}) + (\lambda_0 + m_0 + \gamma_0) \right]^2 \right\} \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned}
 & F_4 = \min_{(\lambda_0, m_0^1, m_0^2, \gamma_0)} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{i=1}^N \left[(\bar{\lambda}_i + \bar{m}_i + \bar{\gamma}_i) - \sum_{j=1}^n \bar{a}_j (\lambda_{ij} + m_{ij} + \gamma_{ij}) + (\lambda_0 + m_0^1 + m_0^2 + \gamma_0) \right]^2 \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Решение каждой из оптимизационных задач (8)–(11) может быть получено решением системы линейных алгебраических уравнений, полученной аналогично (5).

ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ FUZZY-РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Результат расчета выходных показателей на основе нечеткой регрессионной модели — Fuzzy-множество треугольного или трапецевидного типа. В качестве детерминированного эквивалента прогнозируемой величины может быть принята координата абсцисс центра тяжести нечеткого множества, полученного в результате расчета по Fuzzy-регрессионной модели.

Как оценки качества прогнозирования на основе нечеткой регрессионной модели могут рассматриваться следующие два показателя:

- среднеквадратическое значение суммы отклонений фактической координаты абсцисс центра тяжести нечеткого множества выходной переменной $G(Y_i^\Phi)$ от соответствующего значения, рассчитанного по Fuzzy-регрессионной математической модели нечеткого множества $G(Y_i^P)$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [G(Y_i^P) - G(Y_i^\Phi)]^2};$$

- среднеквадратическое значение суммы отклонений расчетного и фактического значений функций принадлежности одних и тех же значений выходной переменной:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T w^{t,-} [\{Y_i^{\Phi,t,-} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\} - \{\bar{Y}_i^{P,t,-} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}]^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T w^{t,+} [\{Y_i^{\Phi,t,+} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\} - \{\bar{Y}_i^{P,t,+} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}]^2 \right)}.$$

Здесь

$\{Y_i^{\Phi,t,-} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}$ и $\{Y_i^{\Phi,t,+} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}$ — соответственно t -е фактическое минимальное и максимальное значение выходной величины в i -м комплекте контрольной выборки статистических данных, соответствующие значению $\mu_i^t(Y_i) = \beta^t$;

$\{\bar{Y}_i^{P,t,-} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}$ и $\{\bar{Y}_i^{P,t,+} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}$ — соответственно t -е минимальное и максимальное значение выходной величины в i -м комплекте контрольной выборки статистических данных, соответствующие значению $\mu_i^t(Y_i) = \beta^t$ и рассчитанные по уравнению Fuzzy-регрессионного анализа;

$0 < w^{t,-} < 1$, и $0 < w^{t,+} < 1$, $t = 1, \dots, T$ — значения весовых коэффициентов, определяющих степень важности учета каждого из значений отклонений, причем $\sum_{t=1}^T (w^{t,-} + w^{t,+}) = 1$.

Значения $\{Y_i^{t,-} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}$ и $\{Y_i^{t,+} | \mu_i^t(Y_i) = \beta^t\}$ определяются по формулам:

- для треугольных функций принадлежности

$$\{Y_i^{t,-} | \bar{\mu}_i(Y_i^{t,-}) = \beta^t\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } Y_i^{t,-} \leq m_i(Y_i^{t,-}) - \lambda(Y_i^{t,-})_i \text{ или } Y_i^{t,-} \geq m_i(Y_i^{t,-}) + \gamma(Y_i^{t,-})_i, \\ \lambda_i(Y_i^t) + \beta^t [m_i(Y_i^{t,-}) - \lambda_i(Y_i^{t,-})], & \text{если } m_i(Y_i^{t,-}) - \lambda_i(Y_i^{t,-}) > Y_i^{t,-}, \\ & \text{и } Y_i^{t,-} \leq m_i(Y_i^{t,-}), \end{cases}$$

- для трапецевидных функций принадлежности

$$\{Y_i^{t,+} \mid \bar{\mu}_i(Y_i^{t,-}) = \beta^t\} = \begin{cases} 0, & \text{если } Y_i^{t,+} \leq m_i(Y_i^{t,+}) - \lambda(Y_i^{t,-})_i \text{ или } Y_i^{t,-} \geq m_i(Y_i^{t,+}) + \gamma(Y_i^{t,+})_i, \\ \gamma_i(Y_i^{t,-}) + \beta^t [\gamma_i(Y_i^{t,-}) - m_i(Y_i^{t,-})], & \text{если } m_i(Y_i^{t,+}) - \gamma_i(Y_i^{t,+}) > Y_i^{t,-}, \\ & \text{и } Y_i^{t,-} \leq m_i(Y_i^{t,-}). \end{cases}$$

С достаточной для практических приложений точностью в большинстве случаев могут использоваться построенные Fuzzy-регрессионные модели для прогнозирования значения переменной составляющей затрат, если справедливы следующие показатели их адекватности:

$$\sigma \leq \vartheta \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [G(Y_i^\Phi) - M\{G(Y_i^\Phi)\}]^2},$$

где $M\{G(Y_i^\Phi)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(Y_i^\Phi)$, а $\vartheta \leq 0,1$, либо $\vartheta \Psi \leq \Delta$, где

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \{w^{t,-} [M(Y_i^{\Phi,-}) - Y_i^{\Phi,t,-}]^2 + w^{t,+} [M(Y_i^{\Phi,+}) - Y_i^{\Phi,t,+}]^2\}},$$

$$M(Y_i^{\Phi,t,-}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^{\Phi,t,-}, \quad M(Y_i^{\Phi,t,+}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^{\Phi,t,+}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях, когда в статистической выборке некоторые или все входные и выходная переменные представлены нечисловой информацией (булевы, лингвистические переменные, данные числовых шкал, нечеткие множества и т.п.), использование Fuzzy-регрессионных моделей является эффективной альтернативой получения количественных зависимостей, установленных экспертами качественных закономерностей изучаемых явлений.

В отличие от традиционных регрессионных зависимостей в Fuzzy-регрессионных моделях рассчитанное значение выходной переменной представлено в виде некоторого диапазона возможных значений с оценкой веса каждого из этих значений в пределах этого диапазона. Это позволит в ряде случаев более объективно оценить риск принимаемых решений на основе полученных результатов расчета.

Предложенные в работе ранее не описанные в литературе критерии аппроксимации, алгоритмы построения нечетких регрессионных моделей и методов преобразования многих видов нечисловой информации в действительное число или нечеткое множество, а также использование этой информации в вычислительных схемах расчета детерминированных коэффициен-

тов уравнения регрессии расширят область применения полученных результатов в экономике, социологии, маркетинге и других приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Расин Дж.* Непараметрическая эконометрика: вводный курс / Расин Дж. // Квантиль. — 2008. — № 4. — С. 7–56.
2. *Зайченко Ю.П.* Нечеткий метод группового учета аргументов при неопределенных входных данных / Ю.П. Зайченко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 3. — С. 100–112.
3. *Зайченко Ю.П.* Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах / Ю.П. Зайченко. — К.: Изд. Дом « Слово», 2008. — 354 с.
4. *Зак Ю.А.* Математические модели прогнозирования затрат времени и стоимости перевозки грузов / Ю.А. Зак // Логистика сегодня, Grebennikov. — 2015. — № 1. — С. 162–172.
5. *Згуровский М.* Модели и методы принятия решений в нечетких условиях / М. Згуровский, Ю. Зайченко. — К.: Наук. думка, 2013. — 275 с.
6. *Зак Ю.А.* Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных / Ю.А. Зак // URSS, М., 2013. — 352 с.
7. *Ярушкіна Н.Г.* Основы теории нечетких и гибридных систем / Н.Г. Ярушкіна. — М.: Финансы и статистика, 2004. — 320 с.
8. *Штовба С.Д.* Нечеткая идентификация на основе регрессионных моделей параметрической функции принадлежности / С.Д. Штовба // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 6. — С. 1–8.
9. *Грицюк В.И.* Нечеткий робастный регрессионный анализ для нечетких входных и выходных данных / В.И. Грицюк // Технологический аудит и резервы производства. — 2015. — № 6. — С. 4–8.
10. *Tanaka H.* Linear regression analysis with fuzzy model / H. Tanaka, S. Uejima, K. Asai // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. — 1982. — 12, N 6. — P. 903–907.
11. *Tanaka H.* Possibilistic linear system and their application to the linear regression model / H. Tanaka, J. Warada // Fuzzy Sets and Systems. — 1988. — N 27. — P. 275–289.
12. *Diamond P.* Fuzzy least squares / P. Diamond // Information Sciences. — 1988. — N 46. — P. 141–157.
13. *Celmins A.* Least Squares model fitting to fuzzy vector data / A. Celmins // Fuzzy Sets and System. — 1987. — Vol. 22. — P. 260–269.
14. *Diamond P.* Least squares fitting of several Fuzzy variables / P. Diamond // Proceedings of Second IFSA Congress. — Tokyo, 1987. — P. 20–25.
15. *Aliev R.* Genetic algorithms-based fuzzy regression analysis / R. Aliev, B. Fazlollahi, R. Vahidov // Soft Computing. — 2002. — N 6. — P. 470–475.
16. *Papadopoulos B.* Similarities and distances in fuzzy regression modeling / B. Papadopoulos, M. Sirpi // Soft Computing. — 2004. — № 8. — P. 556–561.
17. *D-Urso P.* Robust fuzzy regression analysis / P. D-Urso, R. Massan, A. Santoro // Informations Sciences. — 2011. — Vol. 181. — P. 1154–1174.
18. *Rousseeuw P.* Applying robust regression to insurance / P. Rousseeuw // Insurance: Mathematics and Economics. — 1984. — Vol. 3, N 1. — P. 67–72.
19. *Yang M-S.* Fuzzy Least Squares algorithms for Interactive fuzzy linear regression models / M-S. Yang, H.H. Liu // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — Vol. 135, N 2. — P. 305–316.
20. *Zaychenko Yu.* The Fuzzy group method of data handling and Its Application for Economical Processes forecasting / Yu. Zaychenko // Scientific Inquiry. — 2006. — Vol. 7, N 1. — P. 83–98.

Поступила 16.06.2016

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ БИФУРКАЦИОННОЙ КАРТИНЫ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

В.А. ГРОМОВ

Аннотация. В рамках нелинейного обобщенного метода Канторовича предложен новый подход к локализации и анализу особых точек решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана: решение нелинейной краевой задачи сводится к решению последовательности нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Одномерные краевые задачи решаются с помощью метода сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши, в процессе реализации которого строится матрица Фреше, вырожденность которой является необходимым и достаточным условием существования ветвления. Численное построение уравнений разветвления позволяет построить ветви, исходящие из точки бифуркации. Вычислительный эксперимент позволил установить бифуркационную картину для случая уравнения Кармана с обобщенной правой частью: решение характеризуются существованием ветвей первичного и вторичного ветвлений.

Ключевые слова: уравнения Кармана, ветвление решений нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, нелинейный обобщенный метод Канторовича, первичное ветвление, вторичное ветвление.

ВВЕДЕНИЕ

Существенная нелинейность уравнений Кармана вместе с наблюдаемой в большом количестве приложений множественностью возможных решений обуславливает интерес к созданию алгоритма, позволяющего построить бифуркационную картину для нелинейной краевой задачи для указанных уравнений.

Отметим, прежде всего, ряд работ, устанавливающих возможность ветвления в уравнениях Кармана. В работе Рао [1] рассматриваются уравнения Маргерра–Кармана и даются условия существования нетривиальных решений этих уравнений. Работа [2] посвящена исследованию бифуркаций, сохраняющих и нарушающих симметрию, для уравнений Кармана. Здесь подавляющее количество исследований связано с нахождением бифуркаций решения, близкого к тривиальному.

В работах М. Губинелли [3] в рамках алгебраического формализма с использованием восходящего еще к Т. Лионсу понятию грубых путей (rough paths) [4, 5] вводится понятие разветвляющихся грубых путей (ramifying rough paths), которое позволяет построить общую схему установления существования ветвления. Отметим, также, работу [6], в которой устанавливаются необходимые и достаточные условия неединственности решения для нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переходя к рассмотрению численных методов построения ветвей решения, исходящих из точки бифуркации, отметим, что здесь магистральным направлением является применение той или иной аппроксимации с последующим решением конечномерной нелинейной задачи на собственные значения в точках неединственности решения: полученные в ходе решения этой задачи собственные функции используются для получения ветвей решения, связанных с рассматриваемой точкой неединственности. Так, в работе [7] данный подход реализован с помощью конечноэлементной аппроксимации, в работе [8] — с использованием конечноразностной аппроксимации; в работах [9–12] используется разложение неизвестных функций задачи в ряд Фурье.

Существенным недостатком этого подхода является зависимость результатов от порядка аппроксимации вместе со сложностью решения возникающих в рамках этого подхода систем нелинейных алгебраических уравнений высокой размерности.

В настоящей работе предлагается подход к получению бифуркационной картины, основанный на численном построении уравнений разветвления [13], причем размерность уравнений разветвления определяется исключительно порядком вырожденности матрицы Фреше в соответствующей точке бифуркации.

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Задача формулируется на прямоугольной области $\Omega = \{x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}\} \subset R^2$, ограниченной кусочно-постоянным контуром $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bigcup_{i=1,2} \{x_i = x_i^{\min}, x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}\} \cup \{x_i = x_i^{\max}, x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}\}$, $j = (i+1) \bmod 2$.

Система уравнений в частных производных записывается в виде:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 &= \lambda; \\ a_2 \nabla^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \alpha &\equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \\ L(\alpha, \beta) &\equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее $X = (x_1, x_2)$; $U \equiv U(X) \equiv (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$ — вектор неизвестных функций задачи; λ — параметр задачи; k_1, k_2, a_1, a_2 — некоторые константы. Для построения краевой задачи уравнения (1) должны быть дополнены условиями на границе Γ :

$$S(U, \lambda)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Среди особых точек решения данной нелинейной краевой задачи можно выделить точки бифуркации (ветвления), в которых исходная ветвь решения пересекается с другой ветвью, и предельные точки, для которых в окрестности соответствующего в особой точке значения параметра нагрузки $\lambda = \lambda^*$ либо не существует ни одного решения, либо существуют два решения, которые имеют общую касательную при $\lambda = \lambda^*$. Также выделяется комбинированный случай — симметричная точка бифуркации — для которой одна из ответвляющихся ветвей имеет горизонтальную касательную.

Обобщенное решение рассматриваемой нелинейной краевой задачи дается парой функций $U = (u_1, u_2)$, $u_1 \in W_2^2(\Omega)$, $u_2 \in H_0(\Omega)$, удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1, u_2, v_1) - \lambda v_1] dx_1 dx_2 ;$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1, v_2)] dx_1 dx_2$$

для пары произвольных функций $v_1 \in W_2^2(\Omega)$, $v_2 \in H_0(\Omega)$, где

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} ;$$

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} ,$$

$$Q_2(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} ;$$

$H_0(\Omega)$ — замыкание пространства функций $\left\{ \alpha \in W_2^2(\Omega), \alpha|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$

в норме $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2$; $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$ — производная по направлению, нормальному

к контуру Γ ; μ — параметр задачи.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА (НОМК)

Для отыскания решения нелинейной краевой задачи (1), (2) строится последовательность приближений к ее обобщенному решению с помощью представления вектора неизвестных функций задачи на итерациях алгоритма в виде [14]:

$$U(x_1, x_2) = \{u_j(x_1, x_2)\} = \left\{ h_j^{(i-1)}(x_1) g_j^{(i)}(x_2) \right\}_{j=1,2}, \quad i \rightarrow \infty ;$$

$$h_1^{(i-1)}(x_1)g_1^{(i)}(x_2) \in W_2^2(\Omega), \quad h_2^{(i-1)}(x_1)g_2^{(i)}(x_2) \in H_0(\Omega), \quad (3)$$

Для нечетных итераций функции $h_j^{(i-1)}(x_1)$ вычислены на предыдущей $i-1$ -й итерации, и уравнения разрешаются относительно функций $g_j^{(i)}(x_2)$; произвольные функции v_j представляются в виде $v_j = h_j^{(i-1)}(x_1)\varphi_j(x_2)$, где $\varphi_j(x_2)$ — произвольные функции переменной x_2 . Аналогично для четных итераций известны функции $g_j^{(i-1)}(x_2)$ и уравнения разрешаются относительно $h_j^{(i)}(x_1)$ с представлением функций v_j в виде $v_j = \psi_j(x_1)g_j^{(i-1)}(x_2)$, где $\psi_j(x_1)$ — произвольные функции переменной x_1 .

Представление (3) позволяет заменить разрешающие соотношения нелинейной краевой задачи (1), (2) последовательностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dh_j}{dx_1} = f_j^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad j = \overline{1,8}; \quad (4)$$

$$\frac{dg_j}{dx_2} = f_j^{x_2}(g(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda), \quad j = \overline{1,8}. \quad (5)$$

Здесь и далее для краткости опущен верхний индекс, соответствующий номеру итерации. Векторы $h(x_1)$ и $g(x_2)$ определяются как

$$h(x_1) = \{h_1(x_1), h_1'(x_1), h_1''(x_1), h_1'''(x_1), h_2(x_1), h_2'(x_1), h_2''(x_1), h_2'''(x_1)\};$$

$$g(x_2) = \{g_1(x_2), g_1'(x_2), g_1''(x_2), g_1'''(x_2), g_2(x_2), g_2'(x_2), g_2''(x_2), g_2'''(x_2)\}.$$

Компоненты векторов $a^{x_1}(x_2)$, $a^{x_2}(x_1)$ представляют собой определенные интегралы от компонент вектор-функций $h(x_1)$ и $g(x_2)$ соответственно. Каждая из задач (4), (5) должна быть дополнена граничными условиями на концах промежутков интегрирования, которые следуют из граничных условий (2), сформулированных на контуре Γ .

Рассматриваемый алгоритм предполагает организацию итерационного процесса, в рамках которого подсистемы (4), (5) вычисляются отдельно, на последовательных итерациях, при этом в качестве подынтегральных функций выбираются приближения, полученные на предыдущей итерации. Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи сводится к отысканию решений последовательности нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: таким образом, определённый итерационный процесс аналогичен обобщённому методу Канторовича [15].

МЕТОД СВЕДЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ

Для отыскания решения указанных нелинейных одномерных краевых задач использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши (метод Ньютона).

Для описания указанного метода представим задачи (6),(7) в векторной форме:

$$\frac{dY}{dx} = F(Y, \lambda), \quad x \in [a; b], \quad (6)$$

$$P = 0, \quad (7)$$

где $Y(x) = \{y_1(x), \dots, y_N(x)\}$ — неизвестная вектор-функция краевой задачи; $F(Y, \lambda) = \{f_1(Y, \lambda), \dots, f_N(Y, \lambda)\}$ — вектор-функция правых частей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; $P = \{P_1, P_2\}$ — вектор граничных условий, где P_1 соответствует граничным условиям, удовлетворяемым в начале промежутка интегрирования, P_2 — в конце; λ — параметр.

Для интегрирования задачи Коши, соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6), использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка, который предполагает задание начального вектора $Y^0 = Y(x_0) = \{y_1(x_0), \dots, y_N(x_0)\}$ в некоторой точке промежутка интегрирования $x_0 \in [a; b]$.

Будем полагать, что задача Коши эквивалентна краевой задаче (6), (7), если решение $Y(x)$ задачи Коши, полученное интегрированием, начиная с начального вектора Y^0 , удовлетворяет граничным условиям (7) рассматриваемой краевой задачи.

Поскольку решение $Y(x)$ полностью определяется заданным начальным вектором Y^0 , невязки граничных условий P могут рассматриваться как функции указанного начального вектора:

$$P \equiv P(Y(Y^0), \lambda) \equiv P(Y^0, \lambda) = 0. \quad (8)$$

Вследствие нелинейности оператора $Y(Y^0)$ решение $Y(x)$ и вектор граничных условий P являются нелинейными функциями Y^0 . Вид оператора $P = P(Y^0, \lambda)$ неизвестен, но существует алгоритм вычисления значений вектора P по вектору Y^0 и параметру λ . Данный алгоритм представляет собой численное интегрирование задачи Коши из точки x_0 в точки $x = a$ и $x = b$, в которых удовлетворяются краевые условия. Отметим, что построенное таким образом неявно заданное отображение P является конечномерным, причем его размерность не зависит от способа аппроксимации и определяется лишь порядком уравнений Кармана.

Задача отыскания начального вектора Y^0 для эквивалентной задачи Коши состоит в разрешении векторного уравнения (8), т. е. системы N неявно заданных нелинейных алгебраических уравнений. Для решения данной задачи использовался метод Ньютона:

$$Y^{0(l+1)} = Y^{0(l)} - J^{-1}P(Y^{0(l)}, \lambda).$$

Здесь $Y^{0(l)}$ обозначает l -е приближение к решению; J — матрица Фреше системы уравнений (8), вычисленная для $Y^0 = Y^{0(l)}$:

$$J = \left[\frac{\partial p_k}{\partial y_j^0} \right]_{Y^0 = Y^0(t)} .$$

Поскольку аналитические выражения для функций $P(Y^0)$ — невязок граничных условий — не существуют, то используется приближенное представление матрицы Фреше, полученное путем замены частных производных их конечноразностными аналогами:

$$\frac{\partial p_k}{\partial y_j^0} \approx \frac{p_k(y_1^0, \dots, y_j^0 + \Delta y_j^0, \dots, y_N^0) - p_k(y_1^0, \dots, y_j^0, \dots, y_N^0)}{\Delta y_j^0} .$$

Получение начального приближения, близкого к решению, обеспечивается применением метода продолжения по параметру. Вычислительный процесс по этому методу начинается со значений параметра λ , близких к нулю, для которых решение $Y(X)$ почти линейное и, следовательно, решение соответствующей линейной краевой задачи может рассматриваться как хорошее начальное приближение.

Увеличивая значение параметра $\lambda_0 + \Delta\lambda$, $\lambda_0 + 2\Delta\lambda$, ... и применяя рассмотренный выше итерационный процесс при каждом фиксированном значении параметра, можно шаг за шагом построить ветвь решения, при этом в качестве начального приближения выбирается результат экстраполяции по решениям, полученным при предыдущих значениях параметра. Если для полученного таким образом начального приближения сходимость не достигнута, то шаг по параметру уменьшается в два раза («дробится»), после чего итерационный процесс повторяется для нового начального приближения, также получаемого с использованием формулы экстраполяции. Если, напротив, сходимость метода достигнута за малое количество итераций, то шаг движения по параметру может быть удвоен.

Следует отметить, что не только параметр нагружения, но и всякий монотонно меняющийся компонент решения может использоваться в качестве параметра продолжения. Критерием смены параметра является достижение в результате «дробления» величины шага, меньшей некоторого предзаданного значения. В частности, в окрестности предельной точки параметр продолжения обычно меняется на самый быстроменяющийся компонент покомпонентного произведения двух начальных векторов Y^0 для двух одномерных нелинейных краевых задач — (4) и (5). При этом бывший параметр продолжения включается в переменные задачи и подлежит определению с помощью итерационного процесса.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК

При реализации метода Ньютона, используемого для решения одномерных нелинейных задач (4) и (5), вычисляются матрицы Фреше J_{x_1} и J_{x_2} соответственно, вырожденность которых эквивалентна неединственности решения соответствующих краевых задач [6]:

$$\det J_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Характерный вид зависимости параметр λ — определитель матрицы Фреше вдоль ветви решения показан на рис. 1. Точки O и A характеризуются двукратным вырождением, точка B — однократным.

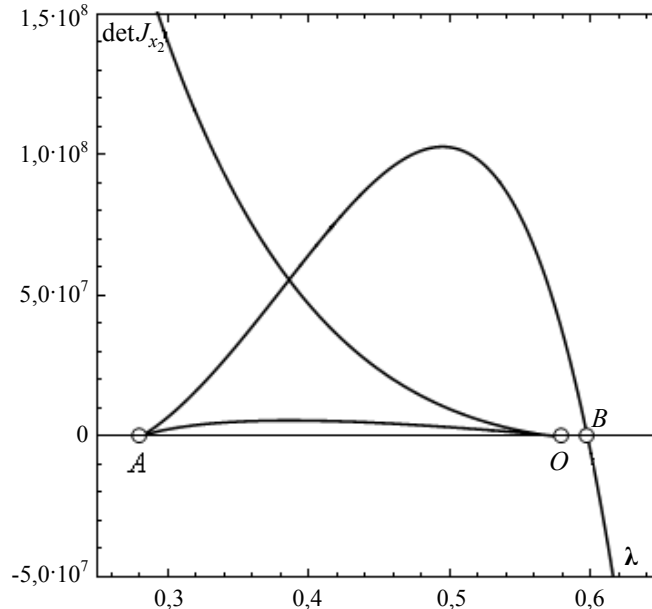


Рис. 1. Характерный вид зависимости: параметр λ — определитель матрицы Фреше вдоль ветви решения; точки O и A — двукратное вырождение; точка B — однократное

Для определения типа особой точки, локализованной с помощью условия (9), рассматривается расширенная матрица Фреше, дополненная столбцом производных «точечных» граничных условий по параметру продолжения, J_λ и множество квадратных матриц J_k , полученных из J_λ путём удаления k -го столбца. Тогда в точке бифуркации (в точке ответвления нового решения) выполняется условие $\text{rank } J = \text{rank } J_k < N, \forall k = \overline{1, N}$, в предельной точке — $\text{rank } J < N, \text{rank } J_k = N, \forall k = \overline{1, N}$.

Указанные условия могут быть записаны в виде, удобном для алгоритмической реализации:

- симметричная точка бифуркации — $\det J = \det J_k = 0, \forall k = \overline{1, N}$;
- предельная точка — $\det J = 0, \det J_k \neq 0$.

Проверка этих условий не предполагает существенных дополнительных вычислительных затрат (по сравнению с уже выполненным $2(N+1)$ -кратным решением задачи Коши, необходимым для построения матриц Фреше).

Порядок вырожденности матрицы J в особой точке является важной характеристикой при построении уравнений разветвления и анализе бифуркационной картины в целом: указанная величина определяется как разность между размерами матрицы и ее рангом $\text{corank } J = N - \text{rank } J$. Для определения порядка вырожденности матрицы вычисляются сингулярные значения

рассматриваемой матрицы, т.е. собственные значения произведения матрицы J на транспонированную J^T . В рассматриваемой задаче фиксировались только особые точки с порядком вырожденности $l=1$ или $l=2$. Характерное поведение двух наименьших сингулярных значений (случай однократной вырожденности) показано на рис. 2.

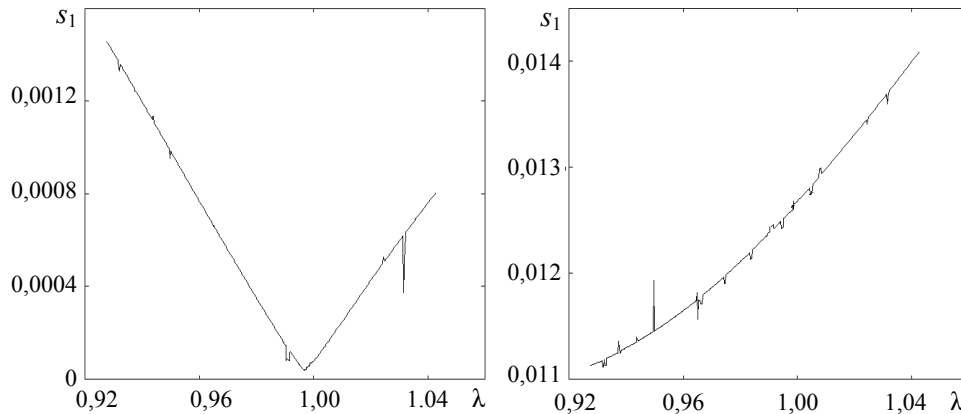


Рис. 2. Характерное поведение двух наименьших сингулярных значений (случай однократной вырожденности)

Формы функций решения, соответствующие ветвям решения, ответвляющиеся в точках бифуркации, могут перестраиваться, либо вдоль одного из координатных направлений, либо вдоль обоих направлений одновременно. Это отражается в вырождении либо одной из матриц Фреше, либо в вырождении обеих матриц одновременно:

- 1) $\det J_{x_1} = 0, \det J_{x_2} \neq 0$;
- 2) $\det J_{x_1} \neq 0, \det J_{x_2} = 0$;
- 3) $\det J_{x_1} = 0, \det J_{x_2} = 0$.

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕНИЯ

Используемый алгоритм позволяет построить малые решения системы (решения, принадлежащие малой окрестности точки бифуркации), ответвляющиеся в рассматриваемой особой точке, и тем самым задать для каждой ветви решения, исходящей из соответствующей точки бифуркации решения нелинейной краевой задачи (6), (7), лежащую на ней точку, которая может быть использована как стартовая позиция для движения (в рамках метода продолжения по параметру) вдоль данной ветви. Здесь осуществляется построение уравнений разветвления для одномерных нелинейных краевых задач, формируемых на последней итерации НОМК; при этом множитель, определяющий вид решения в одном направлении, остается неизменным — таким, каким он был получен на предпоследней итерации алгоритма.

Для отыскания малых решений осуществляется численное построение уравнений разветвления [13], невязки уравнений разветвления представляются как неявно заданные функции их аргументов; соответствующие уравнения являются конечномерными, и их размерность равна порядку вырожденности в соответствующей точке бифуркации — один или два.

Для численного построения уравнений разветвления представим неизвестные величины задачи в виде $Y = Y^0 + \tilde{Y}^0$, $\lambda = \lambda^* + \tilde{\lambda}$, где (Y^0, λ^*) — соответственно значение вектора неизвестных величин и значение параметра в точке бифуркации, а \tilde{Y}^0 , $\tilde{\lambda}$ — малы, и запишем невязки уравнений в вариациях в виде:

$$\tilde{P}(\tilde{Y}^0, Y^0, \tilde{\lambda}, \lambda^*) = P(\tilde{Y}^0 + Y^0, \tilde{\lambda} + \lambda^*) - P(Y^0, \lambda^*).$$

Ранг матрицы Фреше r системы (6), (7) в точке бифуркации (Y^0, λ^*) строго меньше ее порядка $r < N$; будем предполагать, что точка бифуркации изолирована, т.е. существует такая ее окрестность, в которой отсутствуют другие особые точки системы. Тогда для малых решений системы используем разложение вида:

$$\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} \tilde{\lambda} + \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \end{vmatrix} = 0, \det J_{11} \neq 0,$$

$$\tilde{Y}_1 = \{\tilde{y}_j\}, j = \overline{1, r}, \tilde{Y}_2 = \{\tilde{y}_j\}, j = \overline{r+1, N}; C_1 = \{c_k\}, k = \overline{1, r},$$

$$C_2 = \{c_k\}, k = \overline{r+1, N};$$

$$J_{11} = |j_{kj}|, k, j = \overline{1, r}, J_{12} = |j_{kj}|, k = \overline{1, r}, j = \overline{r+1, N},$$

$$J_{21} = |j_{kj}|, k = \overline{r+1, N}, j = \overline{1, r}, J_{22} = |j_{kj}|, k, j = \overline{r+1, N};$$

матрица $J = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}$; N_1, N_2 — высшие члены разложения, порядка $o(\|\tilde{Y}^0\| + \|\tilde{\lambda}\|)$.

Будем предполагать, что ненулевой минор порядка r матрицы J занимает ее верхний левый угол.

Произведя необходимые алгебраические преобразования [13], представим уравнения разветвления в виде

$$R(\tilde{Y}_2) = (J_{21}J_{11}^{-1}C_1 - C_2)\tilde{\lambda} + J_{21}J_{11}^{-1}N_1 - N_2 = 0. \quad (10)$$

Соотношения (10) представляют собой систему неявно заданных алгебраических уравнений относительно \tilde{Y}_2 , в котором отсутствуют члены, линейные по \tilde{Y} . В монографии М.М. Вайнберга и В.А. Треногина доказана теорема, утверждающая, что количество малых решений данной системы равно количеству малых решений задачи (6), (7), ответвляющихся в исследуемой точке бифуркации.

В качестве иллюстрации на рис. 3 в координатах $\tilde{\lambda}$ — $\frac{\|u_1(x_1, x_2)\|_{L_2}}{\|u_1(x_1, x_2)\|_C}$ представлен характерный вид малых решений в окрестности точки бифуркации. Выбор системы координат обуславливается

тем, что, с одной стороны, выбранная система координат не зависит от фактической амплитуды, а с другой — в данных координатах различные малые решения наиболее четко отличимы друг от друга.

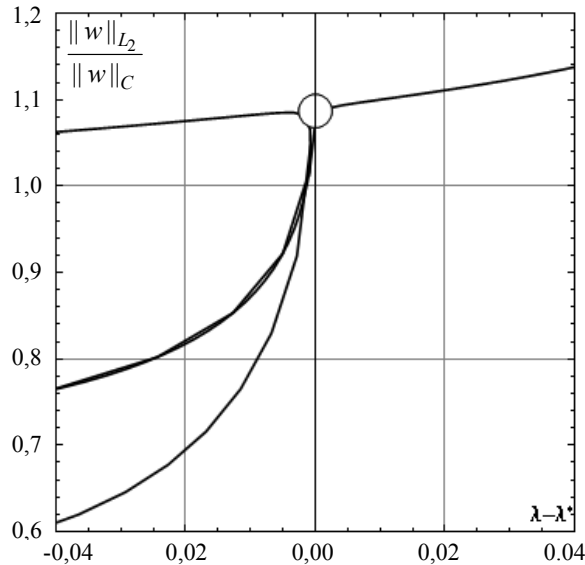


Рис. 3. Характерное поведение ветвей решения в окрестности точки бифуркации

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОТЫСКИВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕНИЯ

Для обеспечения устойчивости вычислительного процесса предлагается немного отступить от точки бифуркации и искать решения на гиперсфере малого радиуса с центром в этой точке (своеобразный способ регуляризации вычислительного процесса). При этом параметр, служивший параметром продолжения при движении вдоль ветви, на которой была зафиксирована точка бифуркации, вводится в переменные и определяется с использованием вычислительного процесса [16].

В предположении изолированности рассматриваемой точки бифуркации ответвляющиеся в ней решения уравнений разветвления представляют собой непрерывные кривые в пространстве R^{N-r+1} . Для формализации понятия малости решения введем в рассмотрение гиперсферу $G_{N-r+1}((Y^0, \lambda^*), \eta)$ с центром в точке (Y^0, λ^*) и радиусом η , и в дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнений разветвления внутри данной сферы. Представление

ветвей решения в координатах $\tilde{\lambda} = \frac{\|u_1(x_1, x_2)\|_{L_2}}{\|u_1(x_1, x_2)\|_C}$ позволяет определить радиус η : целесообразно выбирать η порядка 10^{-1} от величины

отношения $\frac{\|u_1(x_1, x_2)\|_{L_2}}{\|u_1(x_1, x_2)\|_C}$ на ветви, на которой была зафиксирована исследуемая точка бифуркации.

Выбирая радиус указанной сферы достаточно малым, можно добиться того, что малые решения уравнения разветвления пересекают ее только один раз, а графики решений, ответвляющихся в других точках бифуркации, вообще не пересекают. Это приводит к необходимости решения системы уравнений (10) на гиперсфере $G_{N-r+1}((Y^0, \lambda^*), \eta)$, определяемой соотношением

$$R_{add}(\tilde{Y}) \equiv \left\| (\tilde{Y}^0, \tilde{Y}^0) + (\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) \right\|^2 - \eta^2 = 0.$$

Таким образом, задача отыскания решений уравнения разветвления сводится к отысканию решения неявно заданной системы нелинейных уравнений

$$\bar{Y}_2 \equiv (\tilde{Y}_2, \tilde{\lambda}) \rightarrow \bar{R} \equiv (R, R_{add}), \quad (11)$$

размерность которой мала и определяется порядком вырожденности в соответствующей точке бифуркации $\dim \bar{R} = \text{corank } J|_{(Y^0, \lambda^*)} + 1 = \{2, 3\}$. Блок-схема алгоритма отыскания решения уравнений разветвления показана на рис. 4.

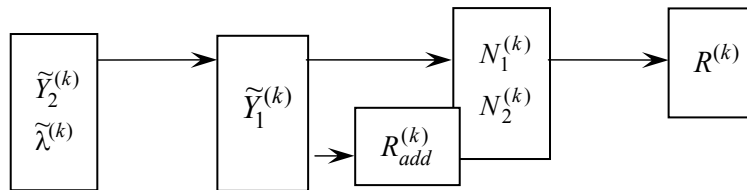


Рис. 4. Блок-схема алгоритма отыскания решений уравнений разветвления

Для локализации малых решений, ответвляющиеся в точке бифуркации, многообразие возможных значений векторов $\bar{Y}_2 \equiv (\tilde{Y}_2, \tilde{\lambda})$ покрывается сеткой достаточно малого шага, и в каждом узле сетки вычисляется значение невязок (11). Для уточнения локализованных таким образом решений использовался тот же нелинейный обобщенный метод Канторовича.

Окончательно алгоритм анализа структуры ветвления нелинейной краевой задачи может быть описан следующим образом:

1. Исходная двумерная нелинейная краевая задача сводится к последовательности одномерных.
2. Каждая из одномерных краевых задач разрешается путем сведения к эквивалентной задаче Коши путем нахождения вектора Y^0 , обеспечивающего удовлетворение условия $S(Y^0) = 0$.
3. Для построения ветви решения (и обеспечения хорошего начального приближения для НОМК) используется продолжение по параметру.
4. В случае фиксации предельной точки (Y^0, λ^*) ($\det J_{x_i} = 0$, $\det J_{x_i, k} \neq 0 \quad \forall k = \overline{1, N}, i = 1, 2$) происходит смена ведущего параметра.

5. В случае фиксации точки бифуркации (Y^0, λ^*) (определители $\det J_{x_i} = \det J_{x_i, k} = 0, \forall k = \overline{1, N}, i = 1, 2$) осуществляется локализация областей пересечения закритических ветвей, исходящих из данной точки бифуркации с окружающей ее сферой малого радиуса с помощью покрытия многообразия возможных значений векторов решения сеткой достаточно малого радиуса. Полученные таким образом точки лежат на закритических ветвях и были использованы как начальные точки для построения этих ветвей с помощью метода продолжения по параметру.

СТРУКТУРА ВЕТВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Метод построения бифуркационной картины для анализа нелинейной краевой задачи уравнений Кармана (1), описывающей поведение замкнутой цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления ($\lambda = \text{const}$). Соответственно область Ω представляет собой замкнутый круговой цилиндр $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}$, $a_1 = 0, 1$; $a_2 = -1$; $k_1 = 150$; $k_2 = 0$; $\mu = 0, 3$. В рассматриваемом случае структура решения прямой задачи (рис. 5) включает в себя следующие элементы (здесь ветви описываются в терминах «норма решения — значение параметра λ »: исходящие из нуля значений параметра ветвь решения с близкими к нулю нормами решений, ветви первичного ветвления, которым соответствуют регулярные в направлении x_2 решения, и ветви вторичного ветвления, которым соответствуют решения, локализованные в направлении x_2 . Ветви вторичного ветвления соединяют между собой ветви первичного ветвления, которым соответствуют решения с различными номерами главных гармоник разложения функции в ряд Фурье (в направлении x_2 ; в направлении x_1 номер главной гармоники равен 1 для всех ветвей первичного ветвления).

Здесь каждый последующий тип ветви характеризуется решениями с меньшим количеством симметрий (в направлении x_2) в сравнении с предыдущим. Так, решения, соответствующие исходящей из нуля ветви, характеризуются бесконечным количеством симметрий, группа симметрий для решений ветвей первичного ветвления конечна и состоит из поворотов на угол $\frac{2\pi}{n}$ (здесь n — номер главной гармоники решения в направлении x_2), локальные формы характеризуются либо полным отсутствием симметрий, либо (редкие исключения) одной симметрией; в последнем случае наблюдаются ветви третичного ветвления, для которых указанная симметрия утрачивается.

Все зафиксированные на ветвях особые точки имеют однократное вырождение и связаны с вырождением матрицы Фреше для системы, определяющей вид решения в направлении x_2 .

Значения параметра λ , при которых на исходящей из нуля ветви фиксируются точки бифуркации, образуют спектр первичного ветвления нелинейной краевой задачи.

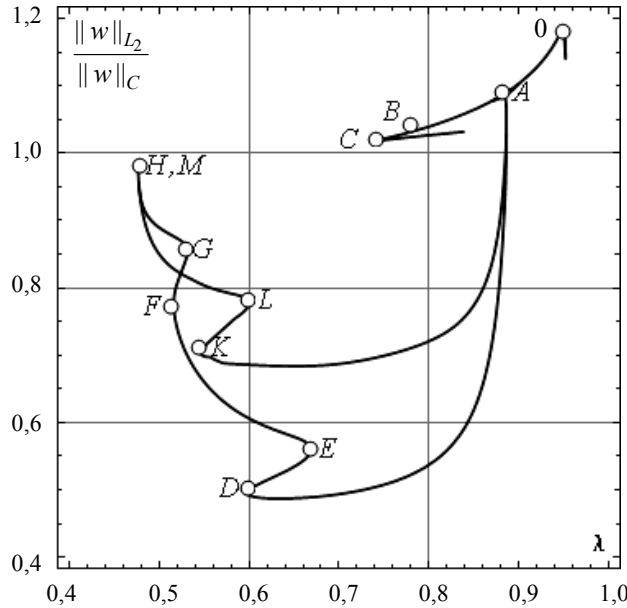


Рис. 5. Характерный вид ветвей первичного и вторичного ветвлений в координатах $\frac{\|w\|_{L_2}}{\|w\|_C}$: — λ ветвь $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$ ($A-D-E-F-G-H$) и ветвь $5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$ ($A-K-L-M$)

Ветвь первичного ветвления характеризуется наличием симметричной точки бифуркации, в которой она ответвляется от исходящей из нуля ветви и предельной особой точки (иногда это также симметричная точка бифуркации). На нисходящем участке ветви фиксируется по две точки бифуркации, на восходящем – в зависимости от ветви – либо фиксируется одна точка бифуркации, либо не фиксируется ни одной.

Структура ветвей вторичного ветвления, ответвляющихся от различных ветвей первичного ветвления, одинакова, что позволяет в дальнейшем ограничиться исследованием лишь нескольких ветвей первичного и вторичного ветвлений.

Структура ветви вторичного ветвления характеризуется некоторым количеством участков роста и падения значений параметра, соответствующих этапам перестройки от решения одной ветви первичного ветвления к решению другой ветви первичного ветвления; указанным участкам соответствуют локализованные решения с различным количеством и расположением минимумов и максимумов функции решения (рис. 6, 7).

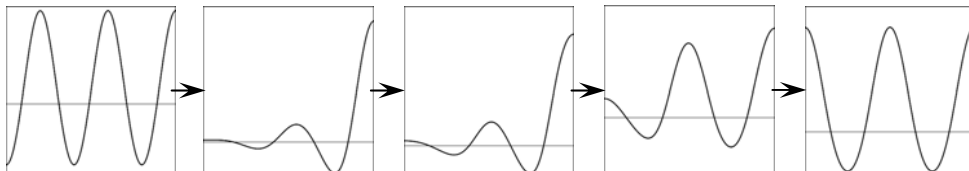


Рис. 6. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви вторичного ветвления $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$ (ветвь $A-D-E-F-G-H$ на рис. 5)

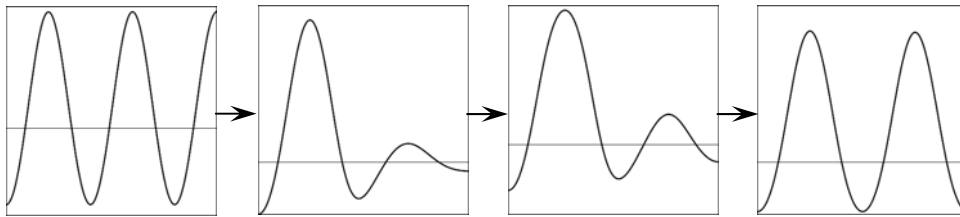


Рис. 7. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви вторичного ветвления $5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$ (ветвь $A - K - L - M$ на рис. 5)

Обычно ветвь первичного ветвления с решениями, характеризуемыми номером главной гармоники решения в направлении x_2 , равным n , соединяется через ветви вторичного ветвления с ветвями первичного ветвления, которым соответствуют решения, номер главной гармоники которых меньше n и составляет $n = n - 1$, $n = n - 2$.

Алгоритм позволил построить ветви вторичного ветвления, область существования которых по параметру λ расположена левее, чем значение параметра в первой точке спектра первичного ветвления. Например, для $n_{x_2}^p = 5$ (номер главной гармоники для ветви первичного ветвления) такими являются ветви $6_{\max} \rightarrow 5_{\min}$, $6_{\min} \rightarrow 5_{\min}$, $6_{\min} \rightarrow 4_{\min}$, $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$, $5_{\max} \rightarrow 3_{\min}$, $5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$, $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$, $4_{\max} \rightarrow 3_{\max}$ (здесь числа означают номер главной гармоники, а индексы указывают на то, что максимум или минимум наблюдается в нуле координат для решения, соответствующего ветви первичного ветвления).

Таким образом, описанная выше структура решения прямой задачи теории бифуркаций проиллюстрирована на рис. 5–11.

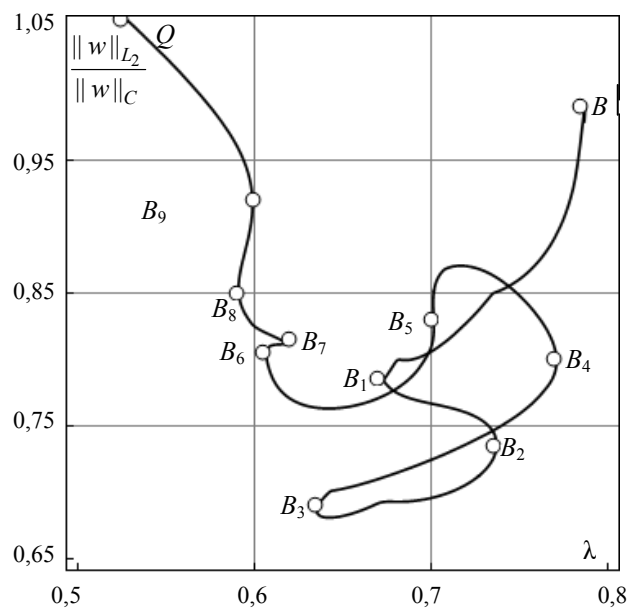


Рис. 8. Ветвь вторичного ветвления $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$

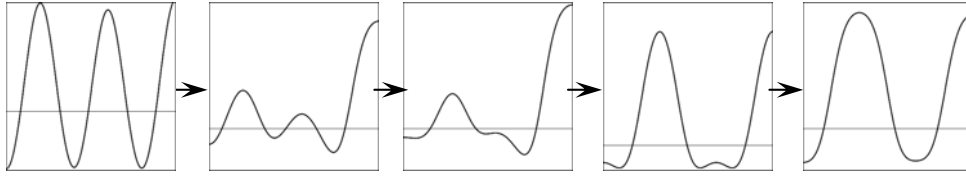


Рис. 9. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$ ($B - \dots - Q$, рис. 8)

Ветвь первичного ветвления, связанная с первой точкой спектра, и ответвляющиеся от нее в первой точке бифуркации ветви вторичного ветвления ($5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$ и $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$) в координатах $\lambda - \frac{\|u_1\|_{L_2}}{\|u_1\|_C}$, изображены на рис. 5. Последовательность сечений функций решения вида $x_1 = \frac{(x_1^{\max} + x_1^{\min})}{2} = \text{const}$, фиксируемых на ветвях вторичного ветвления, показана на рис. 6 и 7. Вследствие симметрии функций решения на рис. 5–11 приведены лишь значения сечения на промежутке $[0; \pi]$.

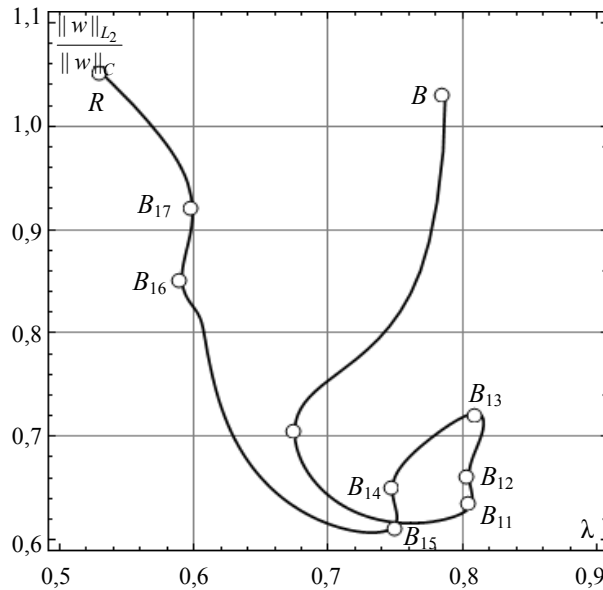


Рис. 10. Ветвь вторичного ветвления $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$

Здесь ветви вторичного ветвления $A - D - E - G - F - H$ и $A - K - L - M$ соединяют между собой ветвь первичного ветвления, которой соответствует решение с номером гармоники $n = 5$, с ветвями первичного ветвления, которым соответствуют формы деформации оболочки с номером гармоники $n = 4$.

На первой из этих ветвей ($A - D - E - G - F - H$) фиксируются точка бифуркации A , симметричная точка бифуркации H и четыре предельные точки (D, E, G, F).

Участку $A - D$ соответствует форма решения с одним минимумом, участкам $D - E$ и $E - G$ — переход к решению с тремя минимумами, уча-

стам $G-F$ и $F-H$ — перестройка к решению другой ветви первичного ветвления.

На второй ветви ($A-K-L-M$) фиксируются точка бифуркации A , симметричная точка бифуркации M и две предельные точки (точки K , L). На ветви перестройка к решению другой ветви первичного ветвления осуществляется в два этапа: на участках $A-K$ и $K-L$ происходит формирование и развитие формы с двумя минимумами, а на участке $L-M$ — перестройка к форме другой ветви первичного ветвления.

Серия рис. 8, 9 и 10, 11 описывает характерную структуру ветвей вторичного ветвления, связанного со второй точкой бифуркации, фиксируемой на первой ветви первичного ветвления.

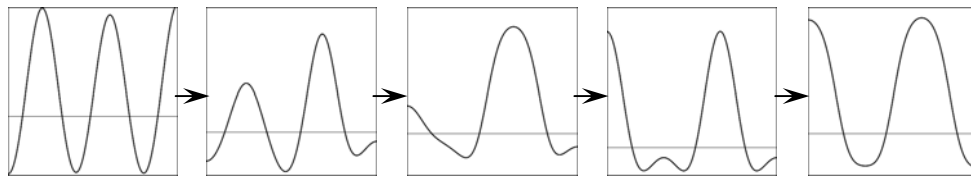


Рис. 11. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви $5_{\max} \rightarrow 3_{\min}$ ($B-\dots-R$, рис. 10)

ВЫВОДЫ

1. Применение нелинейного обобщенного метода Канторовича в сочетании с методом продолжения по параметру позволяет строить ветви решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана; метод сведения нелинейных одномерных нелинейных краевых задач к эквивалентным задачам Коши, составляющий неотъемлемую часть НОМК, позволяет локализовать и провести анализ особых точек решения.

2. Численное построение уравнений разветвления позволяет построить ветви, исходящие из точки бифуркации; прием смены параметра продолжения — преодолеть предельные особые точки.

3. При постоянной правой части $\lambda = \text{const}$ уравнения Кармана характеризуются существованием ветвей первичного и вторичного ветвлений; особые точки имеют порядок вырожденности, равный 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rao B. Marguerre-von Karman equations and membrane model / B. Rao // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. — 1995. — Vol. 24, N 8. — P. 1131–1140.
2. Vanderbauwhede A. Generic and Nongeneric Bifurcations for the von Karman Equations / A. Vanderbauwhede // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. — 1977. — Vol. 66. — P. 550–573.
3. Gubinelli M. Ramification of rough paths / M. Gubinelli // *J. Differential Equations*. — 2010. — N 248. — P. 693–721.
4. Feyel D. Curvilinear integrals along enriched paths / D. Feyel, A. de La Pradelle // *Electron. J. Probab.* 11. — 2006. — P. 860–892.

5. *Lyons T.* System Control and Rough Paths / T. Lyons, Z. Qian. — Oxford: Oxford University Press, 2002. — 300 p.
6. *Keller J.B.* Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems / J.B. Keller, S. Antman (Eds). — N.-Y.: Benjamin WA inc, 1969. — 250 p.
7. *Fujii F.* Static path jumping to attain postbuckling equilibria of a compressed circular cylinder / F. Fujii, H. Noguchi, E. Ramm // *Comp. Mech.* — 2000. — № 26. — P. 259–266.
8. *Гуляев В.И.* Устойчивость нелинейных механических систем / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк. — Львов: Львов. гос. ун-т, 1982. — 255 с.
9. *Григолюк Э.И.* Неосесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // *Прикладная математика и механика.* — 2003. — Т. 67, № 6. — С. 921–932.
10. *Григолюк Э.И.* О методе непрерывного продолжения по параметру / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // *Докл. РАН.* — 1994. — Т. 335, № 5. — С. 582–585.
11. *Григолюк Э.И.* Продолжения решения нелинейных уравнений в окрестности точек бифуркации / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 1998. — Т. 41, № 1. — С. 35–46.
12. *Лопаницын Е.А.* Модификация метода непрерывного продолжения для отыскания бифуркационных решений стационарных самосопряженных краевых задач / Е.А. Лопаницын, А.Б. Фролов // *ПММ.* — 2012. — Т. 76, № 6. — С. 993–1002.
13. *Вайнберг М.М.* Теория ветвления нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
14. *Obodan N.I.* Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N.I. Obodan, O.G. Lebedeyev, V.A. Gromov // Springer. — 2013. — 180 p.
15. *Kantorovich L.V.* Approximate Methods of Higher Analysis / L.V. Kantorovich, V.I. Krylov. — N.-Y.: Interscience, 1958. — 682 p.
16. *Пешков И.М.* Ветвление решений математических моделей гипотетических генных сетей / И. М. Пешков // *Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.* — 2007. — Т. 7, № 3. — С. 59–72.

Поступила 19.07.2016

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЯВНЫХ МЕТОДОВ ВАРИАЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Л. ГАРТ

Аннотация. Исследовано проекционно-итерационные методы регуляризации, основанные на явных методах вариационного типа (скорейшего спуска и минимальных невязок), для решения некорректных линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, для которых не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость). Предложенный подход состоит в замене исходного некорректного уравнения некоторой последовательностью более простых аппроксимирующих его уравнений, заданных в конечномерных подпространствах исходного пространства. Для каждого из «приближенных» уравнений строится с помощью явного вариационного метода лишь несколько приближений, последнее из которых принимается в качестве начального приближения в итерационном процессе для следующего «приближенного» уравнения. Доказаны теоремы о сходимости проекционно-итерационных методов, получены оценки погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего количества итераций.

Ключевые слова: некорректное уравнение, оператор, пространство, последовательность, приближение, итерационный метод, невязка, погрешность, проекционно-итерационный метод, сходимость, оценка.

ВВЕДЕНИЕ

Теория некорректных задач и методов их приближенного решения — активно развивающееся направление математики, имеющее разнообразные приложения во многих областях естествознания, техники и управления. Некорректно поставленные задачи возникают в процессе математического моделирования в геофизике, астрофизике, компьютерной томографии, при обработке и интерпретации данных физических экспериментов [1–3]. Интенсивное развитие теории некорректных задач во многом обусловлено появлением в последние десятилетия высокопроизводительных вычислительных систем. Такие задачи формулируются, как правило, в виде операторных уравнений, задач минимизации функционалов, а также задач вычисления значений неограниченных операторов. Операторы задаются обычно с той или иной погрешностью, поскольку источником исходных данных на практике часто являются эксперименты и измерения.

Значительная часть некорректных задач может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Au = f \tag{1}$$

с заданным оператором A , действующим из X в Y (X, Y — метрические пространства, в отдельных случаях банаховы или гильбертовы), и элементом $f \in Y$.

Основные результаты по некорректным задачам отражены в работах М.М. Лаврентьева [4], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [5], В.А. Морозова [6], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [7], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [8]. Наиболее общим из известных подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. Первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные (оператор A и правая часть f) заданы точно, были предложены в 30-е годы прошлого века в работах Т. Карлемана, Г.М. Голузина и В.И. Крылова, И.Г. Малкина. В работе [4] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. Изучению итерационных методов посвящены работы В.Н. Страхова [9], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [10]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным, В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, В. Липфертом, А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским, В.А. Морозовым, В.В. Васиным, применялись для решения многих некорректных задач в банаховых и гильбертовых пространствах. Метод простой итерации и итерационные методы вариационного типа для решения некорректных уравнений с приближенными данными изучались в работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [1], О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [11].

Помимо итерационных методов для приближенного решения некорректных задач широко применяются проекционные методы, позволяющие (по Л.В. Канторовичу) уравнение (1), рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменить приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве, и принять точное решение приближенного уравнения как приближение к решению исходного уравнения. Теоретическому обоснованию и различным приложениям проекционных методов посвящены работы С.Г. Михлина, Л.В. Канторовича, Н.И. Польского, М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, В.В. Иванова, В.В. Петришина, а также Ю.И. Грибанова, Б.Г. Габдулхаева, А.Ю. Лучки, С.Д. Балашовой и других авторов. При этом привлечение идей функционального анализа дало возможность выработать единый подход к решению разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют недостатки. Хотя приближенные уравнения и проще исходного, тем не менее получение их точных решений на практике затруднительно, а иногда и нецелесообразно (из-за погрешностей задания исходных данных). Сложным является также выбор порядка приближенного уравнения, который обеспечил бы получение решения с заданной точностью. Если решение приближенного уравнения некоторого порядка n не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать уравнение более высокого порядка, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Синтез проекционных и итерационных методов, основанный на возможности применения итерационных методов для приближенного решения приближенных уравнений, привел к возникновению группы методов под названием проекционно-итерационных. Так, согласно идее С.Д. Балашовой [12], реализованной для корректно поставленных задач, для каждого из приближенных уравнений (n -го уравнения) следует находить итерационным методом лишь несколько (k_n) приближений, последнее из которых полагать равным начальному приближению к решению следующего ($(n+1)$ -го) уравнения. Такой подход естественно устраняет трудности, возникающие при решении исходного уравнения обычным проекционным методом. Кроме того, применение итерационных методов не к исходному уравнению, а к более простым приближенным уравнениям позволяет наиболее просто строить последовательность приближений к решению, а также облегчает задачу о выборе начального приближения.

В данной работе согласно общей методологии [12, 13] впервые исследуются проекционно-итерационные методы решения некорректного линейного операторного уравнения (1) с приближенной правой частью, основанные на явных итерационных методах вариационного типа, в частности методах минимальных невязок и скорейшего спуска.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задано уравнение вида (1), в котором A — линейный ограниченный самосопряженный и положительный оператор, действующий в гильбертовом пространстве \mathbf{H} со скалярным произведением (u, v) произвольных элементов $u, v \in \mathbf{H}$ и порождаемой им нормой $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $u \in \mathbf{H}$. Предположим, что обратный оператор A^{-1} существует, но не является ограниченным в \mathbf{H} , т.е. не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость) [5]. Некорректность уравнения (1) обуславливается тем, что собственные значения λ_m , $m = 1, 2, \dots$ оператора A , упорядоченные по убыванию ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \dots > 0$), стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$, что влечет плохую его обусловленность. Будем обозначать через $u^* \in \mathbf{H}$ точное решение уравнения (1).

Отметим, что если в уравнении (1) оператор A не является самосопряженным и положительным, то можно провести предварительную симметризацию по Гауссу и рассматривать вместо уравнения (1) эквивалентное ему симметризованное уравнение $A^* A u = A^* f$ с положительным (а значит, самосопряженным) в \mathbf{H} линейным оператором $A^* A$, где A^* — сопряженный оператор по отношению к A .

Цель работы — теоретическое обоснование проекционно-итерационного подхода для решения некорректных линейных операторных уравнений вида (1) в гильбертовом пространстве, а именно получение достаточных условий сходимости, оценок погрешности и скорости сходимости проекционно-итерационной реализации явных методов вариационного типа.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Наряду с уравнением (1) рассмотрим последовательность приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где A_n — линейный оператор в \mathbf{H}_n ; $\{\mathbf{H}_n\}$ — возрастающая последовательность конечномерных подпространств исходного пространства \mathbf{H} ($\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}_2 \subset \dots \subset \mathbf{H}_n \subset \dots \subset \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1 \neq \emptyset$); $f_n = P_n f$, P_n — оператор ортогонального проектирования \mathbf{H} на \mathbf{H}_n ($P_n^2 = P_n$, $P_n^* = P_n$, $\|P_n\| = 1$).

Введенные пространства и операторы при каждом натуральном $n \in \mathbf{N}$ свяжем условиями близости:

$$\|Au - P_n Au\| \leq \xi_n \|u\|, \quad \forall u \in H; \quad (3)$$

$$\|A_n u_n - P_n A u_n\| \leq \alpha_n \|u_n\|, \quad \forall u_n \in H_n; \quad (4)$$

$$\|P_n f - u\| \leq \eta_n \|f\|, \quad \forall f \in H, \quad (5)$$

где ξ_n, α_n, η_n — положительные числа, не зависящие от $u \in H$ и $u_n \in H_n$, причем $\xi_n \rightarrow 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\text{Ker } A = \{u \in \mathbf{H} : Au = 0\}$ — подпространство нулей оператора A ($\text{Ker } A = \{0\}$), $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \setminus \text{Ker } A$ — фактор-пространство пространства \mathbf{H} по подпространству $\text{Ker } A$, а $\bar{A} : \bar{H} \rightarrow H$ — линейный оператор, индуцированный оператором A в фактор-пространстве $\bar{\mathbf{H}}$ [14]. Сходимость в \mathbf{H} проекционного метода решения уравнения (1) установлена с использованием результатов работы [15].

Теорема 1. Пусть уравнение (1) разрешимо при любой правой части $f \in \mathbf{H}$ и выполнены условия близости (4), (5), а также условие

$$\forall u_n \in H_n \exists z_n \in H_n : \|A u_n - z_n\| \leq \beta_n \|u_n\|, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Тогда при всех $n \geq N_0 \geq 1$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho_n = \|\bar{A}^{-1}\|(\alpha_n + 2\beta_n) < 1,$$

приближенные уравнения (2) также разрешимы при любой правой части $f_n \in \mathbf{H}_n$ и последовательность $\{u_n^*\}$ их точных решений сходится в \mathbf{H} к решению u^* уравнения (1) с оценкой погрешности

$$\|u_n^* - u^*\| \leq \gamma_n, \quad n \geq N_0, \quad (7)$$

где $\gamma_n = 2 \|\bar{A}^{-1}\| \|f - A u_n^*\| = O(\eta_n + \alpha_n + 2\beta_n)$.

Отметим, что из положительности исходного оператора A в \mathbf{H} и выполнимости условий близости (3), (4) вытекает свойство положительности каждого из операторов A_n в \mathbf{H}_n , начиная с некоторого номера $n = N_1 \geq 1$

[12]. Кроме того, из выполнимости условий (3), (4) следует, что для каждого собственного значения λ_m оператора A существует последовательность $\{\lambda_{m,n}\}$ собственных значений операторов A_n такая, что $\lambda_{m,n} \rightarrow \lambda_m$ при $n \rightarrow \infty$, и наоборот, всякая предельная точка любой последовательности собственных значений операторов A_n является собственным значением оператора A . При этом, если $A_n = P_n A$, то $\lambda_m \leq \lambda_{m,n}$ и $\lambda_{m,n+1} \leq \lambda_{m,n}$ для всех натуральных номеров $m \in N$ и $n \geq N_1$ [10]. В частности, если оператор A переводит \mathbf{H}_n в \mathbf{H}_n , то с учетом (3), (4) можно получить для любого $u_n \in \mathbf{H}_n$ оценку

$$\begin{aligned} (A_n u_n, u_n) &= (A u_n, u_n) + ((A_n - A) u_n, u_n) \leq \lambda_1 \|u_n\|^2 + \|(A_n - A) u_n\| \|u_n\| \leq \\ &\leq \lambda_1 \|u_n\|^2 + (\|A_n u_n - P_n A u_n\| + \|P_n A u_n - A u_n\|) \|u_n\| \leq \\ &\leq (\lambda_1 + \alpha_n + \xi_n) \|u_n\|^2 = \lambda_{1,n} \|u_n\|^2, \end{aligned}$$

из которой следует вследствие экстремального свойства собственных значений самосопряженных ограниченных операторов, что верхние границы λ_1 и $\lambda_{1,n}$ спектров A и A_n соответственно связаны соотношением

$$\lambda_{1,n} = \lambda_1 + \alpha_n + \xi_n, \quad n \geq N_1.$$

Таким образом, при сделанных предположениях об операторе A исходной задачи очевидно, что собственные значения $\lambda_{j,n}$ ($j=1, 2, \dots, \ell_n$, $\ell_n = \dim \mathbf{H}_n$) операторов A_n , упорядоченные по убыванию ($\lambda_{1,n} \geq \lambda_{2,n} \geq \dots \geq \lambda_{\ell_n,n} > 0$), стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, что влечет малую устойчивость каждого из приближенных уравнений (2), начиная с номера $n = N = \max \{N_0, N_1\}$.

Во многих прикладных исследованиях типичной является ситуация с заданием исходных данных с погрешностью. Эту общую ситуацию промоделируем предположением, что правая часть уравнения (1) задана с погрешностью $\delta > 0$, т.е. вместо $f \in \mathbf{H}$ известно $f_\delta \in \mathbf{H}$ такое, что

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta. \quad (8)$$

Требуется по $f_\delta \in \mathbf{H}$ построить приближенное решение $u^*(\delta) \in \mathbf{H}$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u^*(\delta) \rightarrow u^*$ при $\delta \rightarrow 0$.

Для приближенного решения задачи (1) при условии (8) аппроксимируем уравнение

$$A u = f_\delta \quad (9)$$

по той же схеме, что и выше, последовательностью приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n(\delta), \quad n \geq N, \quad (10)$$

где $f_n(\delta) = P_n f_\delta$. Так как P_n — ортогональный проектор \mathbf{H} на \mathbf{H}_n , то отклонение правых частей соответствующих приближенных уравнений (2) и (10) по норме \mathbf{H} не превышает погрешности δ задания правой части уравнения (1):

$$\|f_n - f_n(\delta)\| = \|P_n f - P_n f_\delta\| \leq \|P_n\| \|f - f_\delta\| \leq \delta. \quad (11)$$

На основании теоремы 1 из разрешимости уравнения (1) при любой правой части и выполнении условий (4)–(6) следует разрешимость каждого из приближенных уравнений (10), причем последовательность точных решений $u_n^*(\delta) \in \mathbf{H}_n$ уравнений (10) сходится к точному решению $u^*(\delta) \in \mathbf{H}$ уравнения (9) с оценкой погрешности

$$\|u_n^*(\delta) - u^*(\delta)\| \leq \gamma_n(\delta) = 2 \|\bar{A}^{-1}\| \|f_\delta - A u_n^*(\delta)\|, \quad n \geq N.$$

Для решения каждого из приближенных уравнений (10) будем применять явный двухслойный итерационный метод Рундсона вида

$$u_n^{(k+1)}(\delta) = u_n^{(k)}(\delta) - \tau_n^{(k+1)} (A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad n \geq N, \quad (12)$$

где $u_n^{(k)}(\delta) \in \mathbf{H}_n$ — k -е итерационное приближение к точному решению $u_n^*(\delta) \in \mathbf{H}_n$ уравнения (10); $\tau_n^{(k+1)} > 0$ — итерационный параметр. Известно [16], что для метода (12) с положительным оператором A_n существует способ выбора оптимальных (чебышевских) итерационных параметров, однако из-за близости к нулю нижней границы спектра оператора A_n сложно конкретизировать скорость сходимости такого метода в \mathbf{H}_n и указать априорное число итераций $k_n(\delta)$, согласованное с заданным уровнем погрешности правой части (оценка (11)).

Будем выбирать параметры $\tau_n^{(k+1)}$ в формуле (12) из условия минимума погрешности $\|u_n^{(k+1)}(\delta) - u_n^*(\delta)\|_{D_n}$ итерационного метода при заданной погрешности $\|u_n^{(k)}(\delta) - u_n^*(\delta)\|_{D_n}$, где D_n — положительный оператор в \mathbf{H}_n , $\|u_n\|_{D_n} = \sqrt{(D_n u_n, u_n)}$. В зависимости от выбора D_n получают различные итерационные методы, преимущество которых состоит в том, что они не требуют знания границ спектра оператора A_n в отличие от метода с чебышевским набором параметров.

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Обозначим через $r_n^{(k)}(\delta) = A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)$ невязку метода (12) на k -й итерации, полученную при подстановке k -го итерационного приближения $u_n^{(k)}(\delta)$ в уравнение (10), а через $z_n^{(k)}(\delta) = u_n^{(k)}(\delta) - u_n^*(\delta)$ — погрешность метода (12) на k -й итерации. Заметим, что погрешность и невязка связаны

равенством $A_n z_n^{(k)}(\delta) = r_n^{(k)}(\delta)$, с учетом которого из (12) легко получить, что невязка $r_n^{(k)}(\delta)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и погрешность:

$$r_n^{(k+1)}(\delta) = r_n^{(k)}(\delta) - \tau_n^{(k+1)} A_n r_n^{(k)}(\delta), \quad n \geq N. \quad (13)$$

Метод минимальных невязок состоит, как известно, в выборе итерационного параметра $\tau_n^{(k+1)}$ в формуле (12) из условия минимума $\|r_n^{(k+1)}(\delta)\|$ при заданной норме $\|r_n^{(k)}(\delta)\|$, что приводит с учетом уравнения (13) к явному выражению для параметра

$$\tau_n^{(k+1)} = \frac{(A_n r_n^{(k)}, r_n^{(k)})}{\|A_n r_n^{(k)}\|^2}, \quad r_n^{(k)} \equiv A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta). \quad (14)$$

Очевидно, роль оператора D_n при каждом $n \geq N$ выполняет тождественный оператор.

Рассмотрим проекционно-итерационный принцип решения задачи (1) при условии (8), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (10), начиная с номера $n = N$, итерационного метода (12), (14). Построив с помощью этого метода для n -го приближенного уравнения несколько приближений $u_n^{(k)}(\delta) \in H_n$, $k = 1, 2, \dots, k_n$ ($k_n \leq k(\delta)$) и положив последнее из них равным начальному приближению для следующего, $(n+1)$ -го уравнения, получим последовательность $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$ приближений к решению $u^* \in \mathbf{H}$ уравнения (1):

$$u_n^{(k+1)}(\delta) = u_n^{(k)}(\delta) - \tau_n^{(k+1)} (A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta)), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \quad (15)$$

$$u_{n+1}^{(0)}(\delta) = u_n^{(k_n)}(\delta), \quad n \geq N; \quad u_N^{(0)}(\delta) \in H_N. \quad (16)$$

Достаточные условия сходимости проекционно-итерационного варианта метода минимальных невязок устанавливает теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и в проекционно-итерационном методе (14)–(16) при каждом $n \geq N$ количество итераций $k_{nk} \leq k(\delta)$, причем $k(\delta)\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда последовательность $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$, определяемая по формулам (14)–(16), сходится в \mathbf{H} к решению u^* уравнения (1) при условии (8), если $\delta \rightarrow 0$, и справедлива оценка погрешности

$$\|u_n^{(k_n)}(\delta) - u^*\| \leq \chi_n(\delta), \quad n \geq N, \quad (17)$$

где $\chi_n(\delta) = \mu'_n \|z_N^{(0)}\| + \mu''_n + \delta \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^{(k)} + \gamma_n$; $z_N^{(0)} = u_N^{(0)}(\delta) - u^*$, γ_n дается

$$\text{формулой} \quad (7), \quad \mu'_n = \prod_{j=N}^n q_j^{k_j}, \quad \mu''_n = \sum_{m=N}^{n-1} \left(\delta \sum_{k=1}^{k_m} \tau_m^{(k)} + \gamma_m + \gamma_{m+1} \right) \prod_{j=m+1}^n q_j^{k_j},$$

$$0 < q_j < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим при $n \geq N$ неравенство

$$\|u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^*\| \leq \|u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^*\| + \|u_n^* - u^*\|, \quad (18)$$

где $u_n^* \in H_n$ — точное решение приближенного уравнения (2). Для второго слагаемого неравенства (18) имеем оценку (7). Оценим первое слагаемое.

Из уравнения (15) непосредственно получаем

$$u_n^{(k_n)}(\delta) = \left(\prod_{j=0}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n-j)} A_n) \right) u_n^{(0)}(\delta) + \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_n) \right) f_n(\delta), \quad n \geq N, \quad (19)$$

где $u_n^{(0)}(\delta) \in \mathbf{H}_n$ — начальное приближение, определяемое по формулам (16).

Для точного решения $u_n^* \in H_n$ можно воспользоваться аналогичным представлением

$$u_n^* = \left(\prod_{j=0}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n-j)} A_n) \right) u_n^* + \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_n) \right) f_n, \quad n \geq N,$$

которое соответствует итерационному решению уравнения (2), когда начальное приближение совпадает с его точным решением.

С учетом (19) для погрешности $z_n^{(k_n)} = u_n^{(k_n)}(\delta) - u_n^*$ получим выражение

$$z_n^{(k_n)} = v_n^{(k_n)} + w_n^{(k_n)}, \quad n \geq N, \quad (20)$$

где

$$v_n^{(k_n)} = \left(\prod_{j=0}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n-j)} A_n) \right) z_n^{(0)},$$

$$w_n^{(k_n)} = \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_n) \right) (f_n(\delta) - f_n). \quad (21)$$

Первое слагаемое в выражении (20) является стандартным для проекционно-итерационных методов, во втором же слагаемом учитывается погрешность в задании правой части уравнения (2).

Обозначим через $T_n^{(k)} = E - \tau_n^{(k)} A_n$ самосопряженный в \mathbf{H}_n оператор перехода от итерации к итерации в методе (12), (14) и с учетом уравнения (13) будем иметь:

$$r_n^{(k+1)}(\delta) = (E - \tau_n^{(k+1)} A_n) r_n^{(k)}(\delta) = T_n^{(k+1)} r_n^{(k)}(\delta);$$

$$\|r_n^{(k+1)}(\delta)\| \leq \|T_n^{(k+1)}\| \|r_n^{(k)}(\delta)\|, \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1. \quad (22)$$

В то же время для указанных номеров k при выборе $\tau_n^{(k+1)}$ согласно выражению (14) норма невязки $\|r_n^{(k+1)}(\delta)\|$ достигает минимума; поэтому,

положив в уравнении (13) вместо $\tau_n^{(k+1)}$ любое другое, постоянное при данном $n \geq N$, значение $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \|r_n^{(k+1)}(\delta)\| &= \|(E - \tau_n^{(k+1)} A_n) r_n^{(k)}(\delta)\| \leq \\ &\leq \|(E - \tau_n A_n) r_n^{(k)}(\delta)\| \leq \|E - \tau_n A_n\| \|r_n^{(k)}(\delta)\|. \end{aligned}$$

А так как для положительного в \mathbf{H}_n оператора A_n при условии $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$ имеем [1] $\|E - \tau_n A_n\| = q_n < 1$, то $\|r_n^{(k+1)}(\delta)\| \leq q_n \|r_n^{(k)}(\delta)\|$ для всех $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$. Тогда с учетом (22) получаем следующую оценку для нормы оператора перехода:

$$\|T_n^{(k)}\| = \|E - \tau_n^{(k)} A_n\| \leq q_n < 1, \quad k = 1, 2, \dots, k_n, \quad n \geq N. \quad (23)$$

Для выражения $w_n^{(k_n)}$, $n \geq N$ в (21) на основании соотношений (11) и (23) будем иметь

$$\begin{aligned} \|w_n^{(k_n)}\| &\leq \|f_n(\delta) - f_n\| \sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} \|E - \tau_n^{(k_n+i-j)} A_n\| \leq \\ &\leq \|f_n(\delta) - f_n\| \sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)} q_n^{k_n-i} \leq \delta \sum_{i=1}^{k_n} \tau_n^{(i)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, поскольку начальная погрешность метода для уравнения (2) с учетом (16) представима в виде $z_n^{(0)} = u_n^{(0)}(\delta) - u_n^* = u_{n-1}^{(k_{n-1})}(\delta) - u_n^*$, то

$$\|z_n^{(0)}\| \leq \|z_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \|u_{n-1}^* - u_n^*\| + \|u_n^* - u_n^*\| \leq \|z_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n, \quad n > N,$$

и для $v_n^{(k_n)}$ на основании соотношений (20), (21), (23), (24) выполняется рекурсивное неравенство

$$\begin{aligned} \|v_n^{(k_n)}\| &\leq \|z_n^{(0)}\| \prod_{j=0}^{k_n-1} \|E - \tau_n^{(k_n-j)} A_n\| \leq \left(\|z_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) q_n^{k_n} \leq \\ &\leq \left(\|v_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \|w_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) q_n^{k_n} \leq, \\ &\leq \left(\|v_{n-1}^{(k_{n-1})}\| + \delta \sum_{i=1}^{k_{n-1}} \tau_{n-1}^{(i)} + \gamma_{n-1} + \gamma_n \right) q_n^{k_n} \quad n > N; \\ \|v_N^{(k_N)}\| &\leq \|z_N^{(0)}\| \prod_{j=0}^{k_N-1} \|E - \tau_N^{(k_N-j)} A_N\| \leq \|z_N^{(0)}\| q_N^{k_N}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями, получим оценку

$$\|v_n^{(k_n)}\| \leq \|z_N^{(0)}\| \prod_{j=N}^n q_j^{k_j} + \sum_{m=N}^{n-1} \left(\delta \sum_{i=1}^{k_m} \tau_m^{(i)} + \gamma_m + \gamma_{m+1} \right) \prod_{j=m+1}^n q_j^{k_j}, \quad n \geq N. \quad (25)$$

Возвращаясь к неравенству (18) и оценивая первое слагаемое в нем с учетом формул (20), (24), (25), приходим к оценке погрешности (17), из которой видно, что проекционно-итерационная последовательность приближений $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^\infty$ сходится в H к решению u^* уравнения (1) при условии (8), когда $n \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь проекционно-итерационный метод решения задачи (1), (8), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (10), начиная с номера $n = N$, итерационного метода скорейшего спуска. Параметр $\tau_n^{(k+1)}$ в формулах (15), (16) выбираем из условия минимума энергетической нормы погрешности $\|z_n^{(k+1)}(\delta)\|_{A_n}$ при заданной норме $\|z_n^{(k)}(\delta)\|_{A_n}$, которое с учетом уравнения для погрешности (вида (13)) приводит к выражению

$$\tau_n^{(k+1)} = \frac{(r_n^{(k)}, r_n^{(k)})}{(A_n r_n^{(k)}, r_n^{(k)})}, \quad r_n^{(k)} \equiv A_n u_n^{(k)}(\delta) - f_n(\delta). \quad (26)$$

Как и в теореме 2 легко показать, что

$$\begin{aligned} \|z_n^{(k+1)}(\delta)\|_{A_n} &= \|(E - \tau_n^{(k+1)} A_n) z_n^{(k)}(\delta)\|_{A_n} \leq \\ &\leq \|(E - \tau_n A_n) z_n^{(k)}(\delta)\|_{A_n} \leq \|E - \tau_n A_n\| \|z_n^{(k)}(\delta)\|_{A_n} \end{aligned}$$

при любых значениях $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$, $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$, $n \geq N$. Поэтому для оператора перехода в методе скорейшего спуска (12), (26) справедлива та же оценка, что и в методе минимальных невязок (12), (14):

$$\|T_n^{(k)}\| = \|E - \tau_n^{(k)} A_n\| \leq \|E - \tau_n A_n\| = q_n < 1, \quad k = 1, 2, \dots, k_n, \quad n \geq N,$$

откуда следует, что утверждения теоремы 2 сохраняет силу и для проекционно-итерационной реализации (15), (16), (26) метода скорейшего спуска.

Из доказательства теоремы 2 о сходимости явных проекционно-итерационных методов вариационного типа для решения задачи (1), (8) вытекает, что последовательность $\{u_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^\infty$ сходится к u^* , если $\delta \rightarrow 0$, при произвольном выборе чисел k_n , в частности, все числа k_n могут быть равными 1. Следует, однако, иметь в виду, что с возрастанием n увеличивается объем вычислительной работы, необходимы для нахождения очередного приближения. Поэтому нужно стремиться к тому, чтобы за счет подходящего выбора k_n по возможности максимально приблизиться к искомому решению при данном n и только тогда переходить к уравнению (10) большей размерности. Не следует также выбирать число k_n при данном n слишком большим, поскольку, начиная с некоторого момента, увеличение этого числа не приводит к существенному улучшению (по отношению к решению

u^* исходного уравнения) очередных приближений. Таким образом, возникает вопрос о целесообразном выборе чисел k_n ($n \geq N$), ответ на который в общем случае затруднителен, однако могут быть даны некоторые рекомендации.

Подстановка формул (20), (24) и (7) в неравенство (18) приводит к оценке

$$\|u_n^{(k_n)}(\delta) - u^*\| \leq \|v_n^{(k_n)}\| + \delta k_n \tilde{\tau}_n + \gamma_n, \quad n \geq N, \quad (27)$$

где $\tilde{\tau}_n = \max_{1 \leq k \leq k_n} \tau_n^{(k)}$. Эта оценка показывает, что в случае применения проекционно-итерационных методов (15), (16) с выбором итерационных параметров согласно выражению (14) (или (26)) для решения задачи (1), (8) параметром регуляризации является количество итераций k_n , которое следует согласовывать как с погрешностью δ в задании правой части, так и с погрешностью γ_n проекционного метода. Первое слагаемое в правой части (27) стремится к нулю при $k_n \rightarrow \infty$, второе — растёт с количеством итераций, третье же не зависит от k_n . Понятно, что число k_n достаточно выбрать таким, чтобы величины $\|v_n^{(k_n)}\|$, $k_n \tilde{\tau}_n \delta$ и γ_n имели один и тот же порядок малости; в частности, роль k_n может играть наименьшее из чисел k ($k = 0, 1, \dots$), удовлетворяющих неравенству

$$\|v_n^{(k)}\| \leq M (k \tilde{\tau}_n \delta + \gamma_n), \quad n \geq N, \quad (28)$$

где $M > 0$ — некоторая константа.

Следует отметить, что способом (28) определения чисел k_n удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда используемые здесь величины, входящие в оценку погрешности (27), легко вычисляются, что не всегда выполняется при решении практических задач. Некоторые другие способы выбора чисел k_n ($n \geq N$) можно найти в работе [13].

Отметим, что методы минимальных невязок (12), (14) и скорейшего спуска (12), (26) при решении устойчивых уравнений вида (10) сходятся с той же скоростью, что и метод простой итерации с оптимальным параметром $\tau_n = 2/(\lambda_{1,n} + \lambda_{\ell_n,n})$ [16]. При решении же некорректных уравнений (10), когда отношение $\lambda_{1,n}/\lambda_{\ell_n,n}$ наибольшего и наименьшего собственных значений оператора A_n велико, эти методы сходятся довольно медленно. Проекционно-итерационный подход позволяет ускорить сходимость процесса итерационных приближений к решению исходной задачи (1), (8) и тем самым уменьшить количество вычислительных затрат, поскольку значительная часть этих приближений строится для приближенных уравнений (10) меньшей размерности при неизменной погрешности δ их правых частей. Ускорить сходимость итерационных методов при решении приближенных уравнений (10) можно применением неявных итерационных методов, в том числе с переменными итерационными параметрами.

ВЫВОДЫ

В работе впервые рассмотрен вопрос теоретического обоснования проекционно-итерационных методов, основанных на явных методах вариационного типа (скорейшего спуска и минимальных невязок), для решения некорректных линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, для которых не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость). Доказаны теоремы о сходимости методов, получены оценки погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего количества итераций при решении каждого из приближенных уравнений, рассматриваемых в конечномерных подпространствах исходного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М.: Изд-во ЛКИ, 2009. — 480 с.
2. Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. междунар. конф. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — 306 с.
3. Матысик О.В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О.В. Матысик. — Брест: Изд-во БрГУ, 2014. — 213 с.
4. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. — 92 с.
5. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
6. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. — М.: Изд-во МГУ, 1974. — 320 с.
7. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
8. Вайникко Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. — М.: Наука, 1986. — 178 с.
9. Страхов В.Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1973. — **13**, № 6. — С. 1602–1606.
10. Красносельский М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский и др. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
11. Константинова Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. — 1973. — № 1. — С. 9–15.
12. Балашова С.Д. Приближенные методы решения операторных уравнений / С.Д. Балашова. — Д.: ДГУ, 1980. — 112 с.
13. Гарт Л.Л. Явный проекционно-итерационный метод решения некорректных операторных уравнений / Л.Л. Гарт // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: РВВ ДНУ, 2015. — Вип. 15. — С. 33–47.
14. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — СПб.: Невский Диалект, 2004. — 816 с.
15. Габдулхаев Б.Г. Теория приближенных методов решения операторных уравнений / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. — 112 с.
16. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

Поступила 13.06.2016



MULTIVARIATE CONVERGENCE-TARGETED OPERATOR FOR THE GENETIC ALGORITHM

O. SHADURA, A. PETRENKO, S. SVISTUNOV

Abstract. Optimization of complex particle transport simulation packages could be managed using genetic algorithms as a tuning instrument for learning statistics and behavior of multi-objective optimisation functions. Combination of genetic algorithm and unsupervised machine learning could significantly increase convergence of algorithm to true Pareto Front (PF). We tried to apply specific multivariate analysis operator that can be used in case of expensive fitness function evaluations, in order to speed-up the convergence of the "black-box" optimization problem. The results delivered in the article shows that current approach could be used for any type of genetic algorithm and deployed as a separate genetic operator.

Keywords: machine learning, genetic algorithm, Pareto Front, principle component analysis, transport particle simulations.

INTRODUCTION

A set of scientific researches that required data verification or generating big set of datasets like the studies in cosmology, high energy physics (HEP), biology and genetics, require the development of new approaches and methods for their efficient analysis on modern computer platforms.

In the point of the work on analyzing and optimizing the performance of the GeantV code [1], which is the prototype of the next-generation particle transport simulation software intended to succeed to Geant4 [2], which is the current golden standard in high energy physics (HEP) and beyond. Geant4 is a toolkit for simulation of the passage of particles through different kinds of matter, with application including high energy and nuclear physics, accelerator physics, medicine and space science and it is widely used in HEP experiments at the Large Hadron Collider (LHC) located at CERN (Geneva, Switzerland).

As a history, GeantV project had been started in 2013 with an R&D phase focused on optimal exploitation of instruction level parallelism for particle transport simulation both on CPU and on accelerators such as GPUs and Intel Xeon Phi [3].

GeantV is based on a specially developed vectorized computational solid geometry (CSG) modeler, which provides a set of optimized shape primitives and highly parallel geometry navigator and necessary *ray-tracing* functionality for the efficient propagation of particles through the target geometry [4].

The goal of GeantV project is to optimize the simulation algorithms to get maximum benefit from highly massive parallel SIMD/MIMD architectures [5] while finding the optimal point for factors focused on computational performance (floating-point performance, off-chip memory bandwidth, usage of cache and memory hierarchy and etc.). As a consequence, a large number of parameters have to be optimized and GeantV optimization task can be treated as a black-box problem.

DTLZ [6] set of benchmarks is covering cases in convex and non-convex, separable and non separable and multimodal functions with degenerate Pareto optimal fronts or disconnected Pareto optimal fronts, and disconnected Pareto optimal sets. These helps us to prototype of behavior of our algorithm in case of different set of realistic functions. The objective of this work is to observe whether, by using unsupervised machine learning, we can accelerate the process of finding a Pareto front.

Also using genetic algorithm together with machine learning approach we will try to analyze convergence and fixed points of evolutionary systems, trying to accelerate convergence rate of algorithm for “black-box” optimization. Before going to optimize Geant-V simulations, we will try to prototype algorithm’s performance on a set of numerical DTLZ benchmarks [6] in order to accelerate their convergence to the true Pareto front via the integration of multi-objective search/optimisation (MOO) algorithms and unsupervised machine learning Principal Component Analysis (PCA) and kernel PCA.

GENETIC ALGORITHMS AS A DYNAMIC SYSTEM

Genetic algorithm is one of the widely used evolutionary algorithms for studies of various optimization problems, in the same time the theory of genetic algorithms (GA) was a subject of research for the last decades. The easiest model for studying GA is a simple model of genetic algorithm (SGA)[7], that could be used as a prototype of evolutionary system. This model is describing genetic algorithm (GA) as a dynamical system with accurate mathematical definitions and well studied in a literature.

In the model for description of GA as a Markov chain is used next definitions where states are populations and transition are operated by sets of genetic operators: selection, crossover and mutation [8]. Mutation ensures that the Markov chain is connected, therefore there is an unique equilibrium distribution over populations, the probability to produce a particular population in one generation depends only on the previous generation external influencing factors. This randomized process is described by a Markov chain, characterized by a transition matrix $\Theta_{\bar{q}, \bar{p}}$ from the population \bar{p} to the population \bar{q} .

Dynamical systems describe the evolution of individuals in the finite space of possible populations of fixed size m , where m is number of measurements during the experiment. While rethinking the genetic algorithms as a discrete dynamical system, many interesting mathematical objects like fixed points could be found. These objects are apparently not only generic for simple genetic algorithms, but also general for optimization problems. Let’s briefly recall the results presented in [7] and establish the possible links with the task of optimizing our parameters.

We have a population of N different types of individuals in search sample space Ω . Each element of Ω can be thought of as a “unique individual” with a given fitness value defined by the cost function.

A population consists of m -subsets ($m = N$) each of which contains v_{α_i} of the α_i -type individual where $i = 1, \dots, m$ and defined by vector

$$\vec{b} = (b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \dots, b_{\alpha_m})^t,$$

where $\alpha_i \in \Omega$. The size of the population is $\bar{m} = \sum_{i=1}^m b_{\alpha_i}$.

We can redefine the population vector in the following form

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^t,$$

where $p_\alpha (p_{\alpha_i} = b_{\alpha_i} / \bar{m})$ is the probability of occurrence α -th individual in the population vector \vec{b} .

In the mentioned before representation the repeated application of the genetic algorithm gives a sequence of vectors $\vec{p} \in \Lambda$ where

$$\Lambda = \{(p_1, p_2, \dots, p_N)^t \in R^N \mid 0 \leq p_\alpha \leq 1, \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha = 1\}.$$

Λ is a set of admissible states for the populations. We can consider Λ as a $(N - 1)$ -dimensional simplex (a hyper-tetrahedron).

$G_\alpha(\vec{p})$ is a certain probability of producing individual α in the next generation if the previous population was \vec{p} and define map $G: \Lambda \rightarrow \Lambda$, where $G(\vec{p}) = \prod_{\alpha \in \Omega} G_\alpha(\vec{p})$, and $G(\vec{p}) \in \Lambda$ could be considered as heuristic function. $G(\vec{p})$ is GA procedure on $\vec{p} \in \Lambda$ and the map G is actually the composition of three different maps: selection, mutation and crossover.

Let define genetic selection operator $F: \Lambda \rightarrow \Lambda$, where $F(\vec{p}) = \prod_{\alpha \in \Omega} F_\alpha(\vec{p})$ and the α -th component, $F_\alpha(\vec{p})$, represents the probability of the appearance of an individual of type α if the selection is applied to $\vec{p} \in \Lambda$. A selection operator chooses individuals from the current population using the cost function vector, $\vec{f} = \{f_\alpha\} \in R^N$, where $f_\alpha = f(\alpha)$, $\alpha \in \Omega$. This generic type of selection collects elements with probability proportional to their fitness. This corresponds to a heuristic function

$$F(\vec{p}) = \frac{\text{diag}(\vec{f}) \cdot \vec{p}}{\vec{f}^t \cdot \vec{p}},$$

where $\vec{p} \in \Lambda$ is the population vector, and $\text{diag}(\vec{f})$ is the matrix with entries from \vec{f} along the diagonal and zeros elsewhere.

The mutation operator $U: \Lambda \rightarrow \Lambda$ is an $N \times N$ real valued matrix with (α, β) -th entry $u_{\alpha, \beta} > 0$ for all α, β , and $u_{\alpha, \beta}$ represents the probability that individual $\beta \in \Omega$ mutates into $\alpha \in \Omega$. Then $(U \cdot \vec{p})_\alpha$ is the appearance of an individual of type α after applying a mutation to the population \vec{p} .

Crossover operator is defined $C : \Lambda \rightarrow \Lambda$ as

$$C(\bar{p}) = (\bar{p}^t \cdot \hat{C}_1 \cdot \bar{p}, \dots, \bar{p}^t \cdot \hat{C}_N \cdot \bar{p}),$$

for $\bar{p} \in \Lambda$, where $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_N$ is a sequence of symmetric non-negative $N \times N$ real-valued matrices. Here $\hat{C}_\alpha(\bar{p})$ represents the probability that an individual α is generated by applying the crossover to population \bar{p} .

Combining the selection, mutation and crossover maps we obtain the complete operator \hat{G} for the genetic algorithm (GA map)

$$\hat{G} : \Lambda \rightarrow \Lambda, \quad \hat{G}(\bar{p}) = \hat{C} \circ \hat{U} \circ F(\bar{p}).$$

If we know the heuristic function G , we can write the transition matrix which is stochastic and based on the probability of transforming the population \bar{p} into the population \bar{q} :

$$\Theta_{\bar{q}, \bar{p}} = \bar{m}! \prod_{\alpha \in \Omega} \frac{(G_\alpha(\bar{p}))^{\bar{m}q_\alpha}}{(\bar{m}q_\alpha)!}, \quad (1)$$

where $G_\alpha(\bar{p})$ is probability of producing individual α in the next generation and $\bar{M}q_\alpha$ is the number of copies of individuals α in the population \bar{q} , \bar{m} is the size of the population.

As a brief review, the convergence properties of the simple genetic algorithm evolution schema was properly explored in the work [9]. While [10] showed that the convergence rate of the genetic algorithm is determined by the second largest eigenvalue of the transition matrix (1). The details of the proof was performed for diagonalizable transition matrices and transferred to matrices in Jordan normal form.

Another remarkable feature of the SGA is the presence of a rich structure of fixed and metastable points (for a detailed discussion see [8]).

Describing GA model through Markov chain representation we try to discover "hotspots" and find algorithmic or data patterns that could be used for improvement of the GA.

For the optimization of the GeantV simulation, we identify a set of optimization parameters important for the performance of particle transport simulations (e.g. the size of vector of particles to be transported or other significant design features) and build the data matrix $X_{\alpha,i} = \{(\bar{x}_\alpha)_i\} = \{\bar{x}_\alpha\}$ which contains the values of these parameters. In this matrix index i enumerates the tuning parameters ($i=1, \dots, n$) and index α enumerates the number of measurements of the parameters ($\alpha=1, \dots, M$ for M measurements), while in terms of GA index α enumerates M individuals and the population vector is constituted by $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M)$

Recall the data and probabilistic sample representation. In the first case we can associate the vector based on the measurements of the i -th parameter $\bar{x}'_i = \{(\bar{x}'_i)_\alpha\} = \{(\bar{x}'_i)_1, (\bar{x}'_i)_2, \dots, (\bar{x}'_i)_M\}$, where the component $(\bar{x}'_i)_\alpha$ corresponds to the value of the i -th parameter in the α -th measurement with the population vector $(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n)$.

In the second case $P_i(x)$ be the probability distribution function of the measurements of the i -th parameter, with normalization

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P_i(x) = 1.$$

Using the previous strategy we associate the population vector

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) \quad \text{with} \quad (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n),$$

where

$$\bar{p}_i = \{(\bar{p}_i)_1, (\bar{p}_i)_2, \dots, (\bar{p}_i)_M\},$$

and the component $(\bar{p}_i)_\alpha$ is the probability to measure of the i -th parameter value $(\bar{x}'_i)_\alpha$ in the α -th measurement.

One of the challenges of a Markov chains is to determine the evolution of the components along an appropriate direction for faster convergence to equilibrium. Using Principal Component Analysis (PCA) allows to check the genetic algorithm parameter sensitivity and the possible correlation between parameters. For this we introduce a operator that will be based on PCA and inverse PCA noise reduction operation for a genetic algorithm's optimisation of set of parameters.

We considered a possibility to improve the convergence rate by adding to a standard set of GA operator's (selection, mutation, crossing), a new operator \hat{P} performing uncentered PCA on the GA populations. We will analyze the result of the implementation of the operator on the uncentered data matrix on standard GA performance benchmarks. From the experimental output we see that as in the SGA case [10], the convergence rate of genetic algorithm depends on the eigenvalues following the highest one, and for this reason the proposed operator \hat{P} was applied on them.

UNCENTERED PCA AS A SVD APPROXIMATION FOR POPULATION DATA MATRIX

In PCA, we usually manipulate with centered data matrix in order to reduce a complex data set (in our case performance measurements data) to a lower dimensional set through analyzing the covariance matrix. Here is presented a way that a "sort of PCA" could be implemented on an uncentered data matrix. This is particularly convenient in the case of transformations of constrained data measurements using genetic algorithms, which are in our case highly constrained and multi-scaled performance parameters. As a basis of ideas about the connection between the centered and uncentered data matrix was used ideas from [11, 12].

PCA for centered data matrix and SVD

Let briefly recall PCA for the centered data matrix. The elements of the data matrix \hat{X} of size $m \times n$ are described through m -samples of data from an n -dimensional space. In our case m is the number of individuals in the generation

and n is the size of the individual (n is the dimension of vector of genes $\bar{x} = \{x_i\} (1 \leq i \leq n)$).

Let $\bar{x}_\alpha = \{(\bar{x}_\alpha)_i\} (1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq i \leq n)$ is α -th individual of the population and

$$\hat{X} = \{X_{\alpha,i}\} = \{(\bar{x}_\alpha)_i\},$$

be a uncentered data matrix, size $m \times n$. Let us define the centered data matrix \hat{Y} :

$$\hat{Y} = \{Y_{\alpha,i}\} = \{X_{\alpha,i} - \mu_i\} = \{(\bar{y}_\alpha)_i\},$$

where μ_i is mean over M -individuals of i -th component of the gene:

$$\mu_i = \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^m X_{\alpha,i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \bar{\mu} = \{\mu_i\}.$$

The centered data matrix defines the covariance matrix $\hat{\Sigma}$:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \hat{Y}^t \cdot \hat{Y} = \{\Sigma_{i,j}\} = \frac{1}{m} Y_{i,\alpha}^t Y_{\alpha,j}$$

with the matrix multiplication repeated induces imply summation. Similarly for the uncentered data matrix we obtain the matrix of non-central second moments,

$$\hat{T} = \frac{1}{m} \hat{X}^t \cdot \hat{X} = \{T_{i,j}\} = \frac{1}{m} X_{i,\alpha}^t X_{\alpha,j}.$$

In standard PCA terms the first principal component (PC) $\bar{v}_1 = \{v_{\alpha,1}\} (\alpha = 1, \dots, m)$ is the linear combination

$$v_{\alpha,1} = \bar{y}_\alpha^t \cdot \bar{u}_1 = \sum_{i=1}^n Y_{\alpha,i} u_{i,1}, \quad \bar{u}_1^t \cdot \bar{u}_1 = 1,$$

where the orthonormal n -dimensional vector $\bar{u}_1^t = (u_{1,1}, \dots, u_{n,1})^t$ is defined from condition that the first principal component has the largest variance

$$\sigma_{u1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^m \left[\sum_{i=1}^n Y_{\alpha,i} u_{i,1} \right]^2.$$

The second principal component is the linear combination with the second largest variance and orthogonal to the first principal component, and so on.

To calculate PC, it is more comfortable to review the variational problem. For $\bar{v} = \{v_\alpha\} = \{Y_{\alpha,i} u_i\}$ we have

$$\text{Var}(\bar{v}) = \frac{1}{m} \bar{u}^t \cdot \hat{Y}^t \cdot \hat{Y} \cdot \bar{u} = \bar{u}^t \cdot \hat{\Sigma} \cdot \bar{u} \quad (2)$$

and the Lagrangian for the variational problem

$$L = \bar{u}^t \cdot \hat{\Sigma} \cdot \bar{u} + \lambda(\bar{u}^t \bar{u} - 1).$$

The stationary condition is

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}} = 2\hat{\Sigma} \cdot \bar{u} - 2\lambda \bar{u} = 0, \quad \hat{\Sigma} \cdot \bar{u} = \lambda \bar{u}.$$

This matrix equation has n solutions

$$\hat{\Sigma} \cdot \vec{u}_j = \lambda_j^{(c)} \vec{u}_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

where \vec{u}_j are eigenvectors of $\hat{\Sigma}$ with the eigenvalue λ_j and \vec{u}_j satisfy the orthonormality condition

$$\vec{u}_i^t \cdot \vec{u}_j = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (3)$$

and

$$\vec{u}_j^t \cdot \hat{\Sigma} \cdot \vec{u}_j = \lambda_j. \quad (4)$$

Then the direction with maximum variance is the eigenvector with the largest eigenvalue. This procedure can be iterated to get the second largest variance projection (orthogonal to the first one), and so on.

From (2) it follows that the variance of the i -th centered principal component

$$\text{Var}(\vec{v}_i) = \vec{u}_i^t \cdot \hat{\Sigma} \cdot \vec{u}_i = \lambda_i$$

and the covariance of the i -th and j -th centered principal components

$$\text{Cov}(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \vec{u}_i^t \cdot \hat{\Sigma} \cdot \vec{u}_j = 0, \quad i \neq j.$$

Defining the matrix as $U_{i,j} = \vec{u}_j = (u_i)_j$, which consists from the eigenvectors of the covariance matrix $\hat{\Sigma}$. From (3) this matrix satisfies the orthogonality condition

$$U_{i,i}^t U_{i',j} = \delta_{i,i'}. \quad (5)$$

Then from (4) we have

$$\hat{U}^t \cdot \hat{\Sigma} \cdot \hat{U} = \hat{\Lambda}, \quad \Lambda_{i,j} = \lambda_i \delta_{i,j}, \quad (6)$$

Let define the matrix $V_{\alpha,j} = \{\vec{v}_j\} = \{(v_\alpha)_j\}$, where \vec{v}_j — j -th centered principal component. Then

$$V_{\alpha,j} = Y_{\alpha,i} U_{i,j}, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad (7)$$

and the first principal component \vec{v}_1

$$v_{\alpha,1} = V_{\alpha,1} = Y_{\alpha,i} U_{i,1} = \vec{y}_\alpha^t \cdot \vec{u}_1$$

if λ_1 is the largest eigenvalue. From (5), (6) we have

$$V_{i,\alpha}^t V_{\alpha,j} = m \Lambda_{i,j} = m \lambda_i \delta_{i,j}.$$

It is convenient to define the new matrix $\tilde{V}_{\alpha,j}$

$$V_{\alpha,j} = \sqrt{m} \tilde{V}_{\alpha,i} \Lambda_{i,j}^{1/2}, \quad \Lambda_{i,j}^{1/2} = \lambda_i^{1/2} \delta_{i,j},$$

which satisfy the condition

$$\tilde{V}_{i,\alpha}^t \tilde{V}_{\alpha,j} = \delta_{i,j},$$

The matrix $\tilde{V}_{\alpha,j} = \{(\tilde{v}_j)_\alpha\}$ consists from eigenvectors $(\tilde{v}_j)_\alpha$ of the matrix $\hat{K} = \hat{Y} \cdot Y^t$ of the size $m \times m$

$$K_{\alpha,\beta}(\tilde{v}_j)_\beta = Y_{\alpha,k} Y_{k,\beta}^t (\tilde{v}_j)_\beta = \lambda_j (\tilde{v}_j)_\alpha.$$

with the same eigenvalues as in (4). From (7) we have

$$Y_{\alpha,i} = V_{\alpha,j} U_{j,i}^t,$$

and obtain the Singular Value Decomposition (SVD) [13] for the centered data matrix

$$Y_{\alpha,i} = \sqrt{m} \tilde{V}_{\alpha,i} \Lambda_{i,j}^{1/2} U_{j,i}^t. \quad (8)$$

We suppose that the covariance matrix $\hat{\Sigma}$ has $(n-p)$ smallest eigenvalues $\lambda_j = 1, p+1 \leq j \leq n$. Then we can apply the dimension reduction and after the reverse PCA, we obtain the output data matrix $\bar{Y}_{\alpha,i}$:

$$\bar{Y}_{\alpha,i} = \sqrt{m} \tilde{V}_{\alpha,i} \tilde{\Lambda}_{i,j}^{1/2} U_{j,i}^t = \sqrt{m} (\lambda_1^{1/2} \tilde{V}_{\alpha,1} U_{1,i}^t + \dots + \lambda_p^{1/2} \tilde{V}_{\alpha,p} U_{p,i}^t). \quad (9)$$

The approximation of matrix $Y_{\alpha,i}$ is the matrix $\bar{Y}_{\alpha,i}$ of reduced rank $m < n$. This transformation is also known as the discrete Karhunen-Loève or the Hotelling transformation [16].

Using the SVD representation (8) and (9) for the centered data matrix we can calculate the mean square error (the standard error)

$$\begin{aligned} \eta_m &= \frac{1}{nm} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n (Y_{\alpha,i} - \bar{Y}_{\alpha,i})^2 = \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{m} \sum_{k=p+1}^n \sqrt{\lambda_k} \tilde{V}_{\alpha,k} U_{k,i}^t \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^n \lambda_k. \end{aligned}$$

Thus the minimum error is obtained if the covariance matrix $\hat{\Sigma}$ has $(n-p)$ smallest eigenvalues $\lambda_j, p+1 \leq j \leq n$ and the Hotelling transformation can be considered as the “*eigenvalue control parameter*” approximation.

PCA for uncentered data matrix and SVD

Next step is to apply the PCA method for the uncentered data matrix \hat{X} .

Vectors $\bar{w}_j (1 \leq j \leq n)$ are eigenvectors of the matrix of non-central second moments

$$\hat{T} = \frac{1}{m} \hat{X}^t \cdot \hat{X},$$

with the corresponding eigenvalues t_j

$$\hat{T} \cdot \bar{w}_j = t_j \bar{w}_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (10)$$

and satisfy the orthonormality condition

$$\bar{w}_i^t \cdot \bar{w}_j = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Then

$$\bar{w}_j^t \cdot \hat{T} \cdot \bar{w}_j = t_j. \tag{11}$$

We define matrix $W_{i,j} = \{\bar{w}_j\} = (w_i)_j$ that satisfies the orthogonality condition

$$\hat{W}^t \cdot \hat{W} = \hat{I}. \tag{12}$$

From (11) we have

$$\hat{W}^t \cdot \hat{T} \cdot \hat{W} = \hat{\Delta}, \quad \Delta_{i,j} = t_i \delta_{i,j}. \tag{13}$$

Let $\bar{\theta}_j = \{(\theta_j)_\alpha\} = \{\bar{x}_\alpha^t \cdot \bar{w}_j\} (\alpha=1, \dots, m)$ is j -th uncentered principal component. By analogy with (7) we define the matrix $\Theta_{\alpha,j} = \{\bar{\theta}_j\} = \{(\theta_j)_\alpha\}$

$$\Theta_{\alpha,j} = X_{\alpha,i} W_{i,j}, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \tag{14}$$

which from (12) and (13) satisfy the condition

$$\Theta_{i,\alpha}^t \Theta_{\alpha,j} = m \Delta_{i,j} = m t_i \delta_{i,j}. \tag{15}$$

For the variance of j -th uncentered principal component we obtain

$$\text{Var}(\bar{\theta}_j) = \sigma_{\theta,j}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (X_{\alpha,i} - \mu_i) W_{i,j} \right]^2 = t_j - \bar{\mu}^2 \cos^2(\bar{\mu}, \bar{w}_j),$$

For case of uncentered matrix we do not have a simple relationship between the eigenvalues t_j and the variance j -th uncentered principal component $(\sigma_{\theta,j})^2$ as for the centered data matrix. However, this property is not essential for the usage of the PCA method for the GA and in this case it is convenient to apply the “eigenvalue control parameter” approximation. The idea is to use the PCA method for the SVD representation of the uncentered data matrix.

We define the matrix $\tilde{\Theta}_{\alpha,j}$

$$\Theta_{\alpha,j} = \sqrt{m} \tilde{\Theta}_{\alpha,i} \Delta_{i,j}^{1/2}, \quad \Delta_{i,j}^{1/2} = t_i^{1/2} \delta_{i,j}. \tag{16}$$

From (15) and (16) we obtain:

$$\tilde{\Theta}_{i,\alpha}^t \tilde{\Theta}_{\alpha,j} = \delta_{i,j}.$$

Using (16), (15) and (11) it is not hard to show that $\tilde{\Theta}_{\alpha,j} = \{\tilde{\theta}_j\}$ is the matrix of eigenvectors $(\tilde{\theta}_j)_\alpha$ of the matrix $\tilde{K} = \hat{X} \cdot \hat{X}^t$ of size $m \times m$

$$\tilde{K}_{\alpha,\beta} (\tilde{\theta}_j)_\beta = X_{\alpha,k} X_{k,\beta}^t (\tilde{\theta}_j)_\beta = t_j (\tilde{\theta}_j)_\alpha.$$

From (14) we obtain the representation for the uncentered data matrix

$$X_{\alpha,i} = \Theta_{\alpha,j} W_{j,i}^t,$$

from which we get the SVD representation for the uncentered data matrix

$$X_{\alpha,i} = \sqrt{m} \tilde{\Theta}_{\alpha,k} \Delta_{k,j}^{1/2} W_{j,i}^t.$$

If the matrix of non-central second moments \hat{T} has $(n-q)$ smallest eigenvalues $t_j, 1, q+1 \leq j \leq n$ we can use the “eigenvalue control parameter” approximation and get the output data matrix $\tilde{X}_{\alpha,j}$ of rang q

$$\tilde{X}_{\alpha,i} = \sqrt{m} \tilde{\Theta}_{\alpha,k} \tilde{\Delta}_{k,j}^{1/2} W_{j,i}^t = \sqrt{m} (t_1^{1/2} \tilde{\Theta}_{\alpha,1} W_{1,i}^t + \dots + t_q^{1/2} \tilde{\Theta}_{\alpha,q} W_{q,i}^t), \quad (17)$$

where the eigenvalue matrix $\tilde{\Delta}_{k,j}$ has rang q ($t_{q+1} = t_{q+2} = \dots = t_n = 0$).

We approximate $X_{\alpha,i}$ with rank n by the matrix $\tilde{X}_{\alpha,i}$ which has rank q . This is the analog of the Hotelling transformation.

Using the SVD representation we can estimate the mean square error η_q for this approximation:

$$\begin{aligned} \eta_q &= \frac{1}{mn} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n (X_{\alpha,i} - \tilde{X}_{\alpha,i})^2 = \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{m} \sum_{k=q+1}^n \sqrt{t_k} \tilde{\Theta}_{\alpha,k} W_{k,i}^t \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^n t_k. \end{aligned}$$

The minimum error is obtained in the case if the matrix of non-central second moments \hat{T} has $(n-q)$ smallest eigenvalues $t_j, q+1 \leq j \leq n$.

The second case we can get this approximation using a projector \hat{P} , which projects the data matrix \hat{X} onto the subspace spanned by the principal axes with largest eigenvalues $t_j, 1 \leq j \leq q$. Let define matrix $\tilde{W}_{i,k'} = \{\tilde{w}_{k'}\} = (w_{k'})_i$ ($1 \leq k' \leq q$) of the size $n \times q$. This matrix consists from the first q largest eigenvectors $\tilde{w}_{k'}$ (20).

The projector $\hat{P}^{(1,q)}$ is defined the following way

$$\hat{P}_{i,j}^{(1,q)} = \tilde{W}_{i,k'} \tilde{W}_{k',j}^t, \quad \hat{P}^{(1,q)} \cdot \hat{P}^{(1,q)} = \hat{P}^{(1,q)}.$$

Then it is not hard to show that the approximation $\tilde{X}_{\alpha,i}$ in (17) can be written using the projector $\hat{P}^{(1,q)}$

$$\tilde{X}_{\alpha,j} = X_{\alpha,i} \hat{P}_{i,j}^{(1,q)} = t_1 \Theta_{\alpha,1} W_{1,j}^t + \dots + t_q \Theta_{\alpha,q} W_{q,j}^t.$$

Analysis of eigenvalues in SVD representation of the uncentered input data matrix $X_{\alpha,i}$ used as population in GA can significantly accelerate the processes of finding the Pareto front for the MOP. We verified this hypothesis for the standard GA test problems [6].

Eigenvectors with the largest eigenvalues likely determine the subspace of solutions of the MOP in which lies the Pareto front. Using an iterative procedure

for uncentered data matrix from MOP we can faster converge to the optimal solution subspace.

PCA-based genetic operator $G_p(\vec{p}) = \hat{P} \circ \hat{C} \circ \hat{U} \circ F(\vec{p})$ allows to check the genetic algorithms parameter sensitivity and the possible correlation between parameters. We introduced a new algorithmic step applied to generation modification step that performs data transformation based on PCA and inverse PCA noise reduction operation the set of parameters used for GA.

EVOLUTIONARY SCHEMA PERFORMANCE IMPROVEMENT FOR NSGA-II

In the article we propose to modify NSGA-II [14] as one of the most common GAs with specific operator shown on figure 1 that can be regarded as a denoising factor for faster approximation and convergence to the true Pareto front consisting of ideal individuals, we can apply orthogonal transformation to be able to discover strong patterns in data set. NSGA-II features fast non-dominance sorting procedure of population and preservation of a good convergence rate to the optimal Pareto set and it preserves a spread of best individuals is using a diversity preservation operation called crowding distance and non-dominated ranking procedure. In case of NSGA-III [15] as a evolution of NSGA-II has more specific algorithm schema based on reference point’s selection procedure.

On a Fig. 1 is shown how was integrated operator performing UPCA in the algorithm. It is particularly important to notice that authors tested more combinations, and case of schema described on Fig. 1, we got maximum of benefits in speedup and algorithm convergence caused by increased size of population matrix used for tournament selection pool.

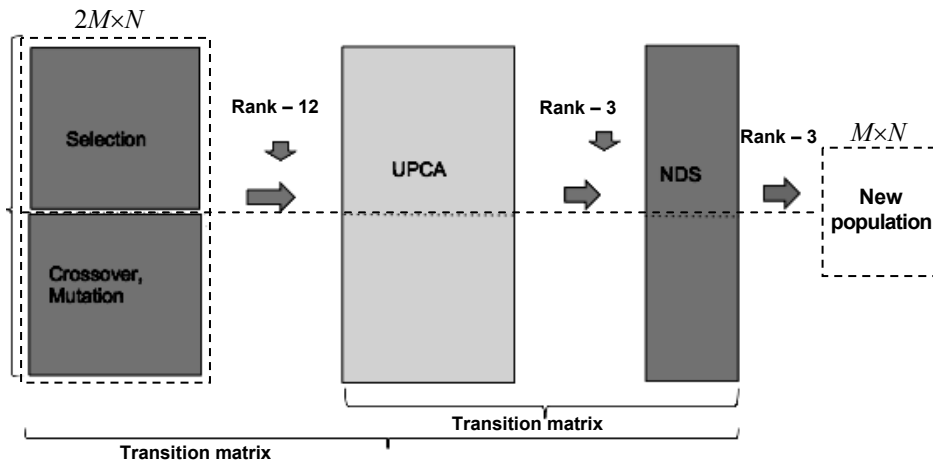


Fig. 1. New schema of algorithm

RESULTS OF RUNNING DTLZ BENCHMARKS

The DTLZ problems [6] are a set of numerical MOP benchmarks that are used for comparing and validating results from different GA algorithms. We present results of the DTLZ benchmarks [6] for NSGA-II and NSGA-II with PCA noise cleanup operator. We recognized that currently NSGA-III is outperforming NSGA-II but here results are provided as a proof of concept. On Figure 2, 5 are

presented the parameter distribution (mean and standard deviation values) and cost function values behavior depending on used algorithms.

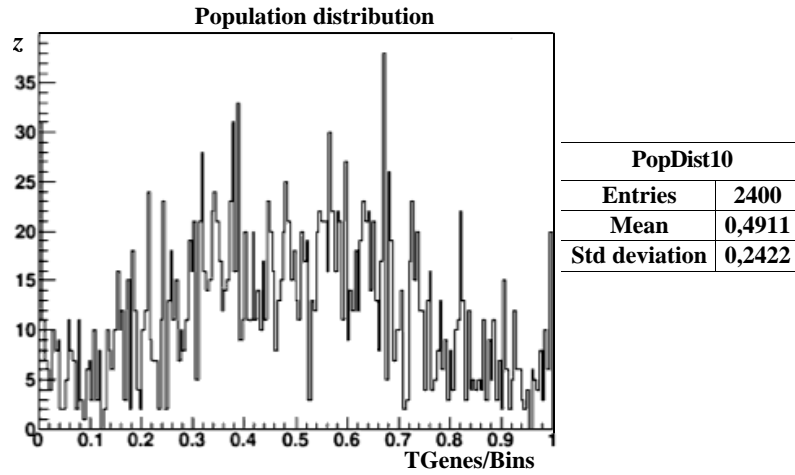


Fig. 2. Population distribution on 10th generation - NSGA-II - DTLZ2

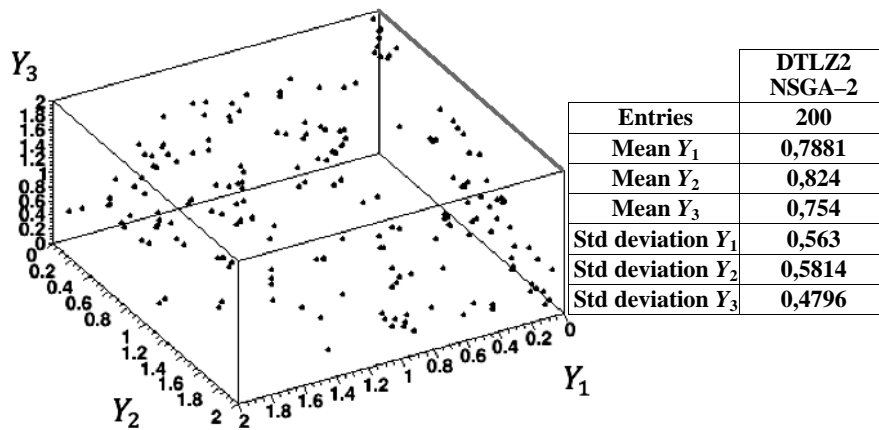


Fig. 3. Pareto Front on 10th generation of NSGA-II - DTLZ2

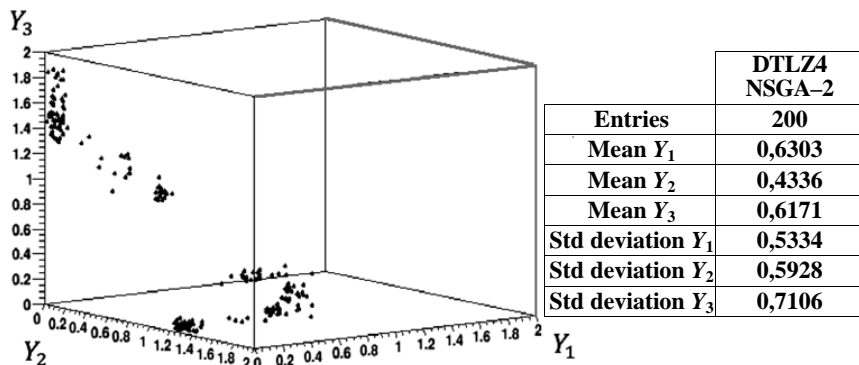


Fig. 4. Pareto Front on 40th generation of NSGA-II - DTLZ4

Comparing Fig. 5, 6 and Fig. 7 where was applied noise-removing procedure and Figure 2, 3 and Figure 4 where was not, we can observe faster convergence to

the ideal values of the parameters in the first case. Fig. 7 and Fig. 6 show the first approach to Pareto front in combination with correct set of parameters.

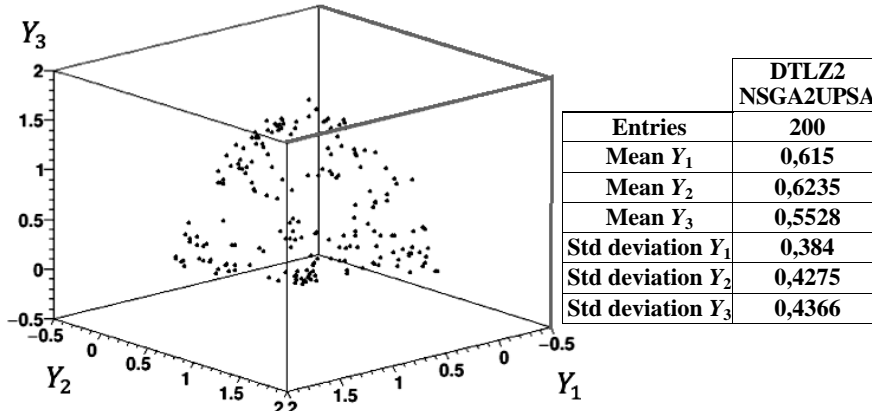


Fig. 5. Population distribution on 10th generation — NSGA-II with preprocessing of data -DTLZ2

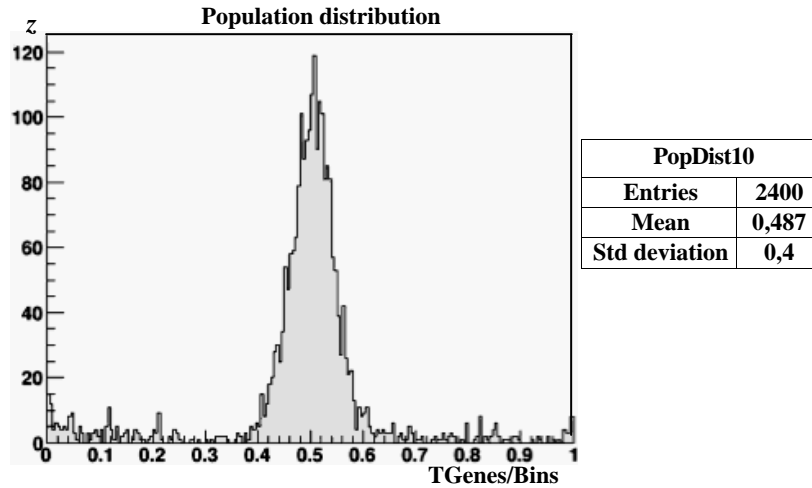


Fig. 6. Pareto Front on 10th generation of NSGA-II with preprocessing of data - DTLZ2

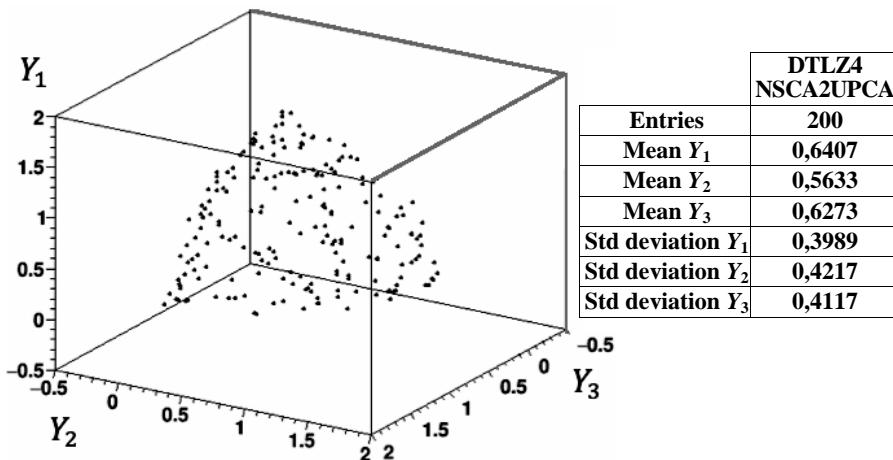


Fig. 7. Pareto Front on 40th generation of NSGA-II with preprocessing of data - DTLZ4

The next steps of our work will be to agree our concept with the existence of fixed points in dynamical systems, to re-evaluate a possible speedup comparing to other algorithms together with the “black-box” benchmarks [17] and port a new algorithm as a part of the optimization framework for GeantV particle transport simulations code.

CONCLUSIONS

In this work we tried to explore the possibility to combine genetic algorithms and unsupervised machine learning (PCA/UPCA/SVD/KPCA) to obtain a powerful combination that speedup existing GA algorithms. Usage of this algorithm for performance optimization of simulation of particle physics with clearly give benefit in finding optimal value with smaller number evolutions with costly fitness function. Next step of work is to implement this algorithm as a part of optimization routine in Geant-V project and test a benefits in full scale mode system.

REFERENCES

1. *Amadio G.* GeantV: from CPU to accelerators / G. Amadio, A. Ananya, J. Apostolakis, A. Arora, M. Bandieramonte, A. Bhattacharyya, C. Bianchini, R. Brun, P. Canal, F. Carminati, L. Duhem, D. Elvira, A. Gheata, M. Gheata, I. Goulas, R. Iope, S. Jun, G. Lima, A. Mohanty, T. Nikitina, M. Novak, W. Pokorski, A. Ribon, R. Sehgal, O. Shadura, S. Vallecorsa, S. Wenzel, Y. Zhang // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2016. — Vol. 762, N 1. — P. 012019.
2. *Allison J.* Geant4 developments and applications / J. Allison, K. Amako, J. Apostolakis, H. Araujo, P. Arce Dubois, M. Asai, G. Barrand, R. Capra and others // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. — 2006. — Vol. 53, N 1. — P. 270–278.
3. *Amadio G.* The GeantV project: preparing the future of simulation / G. Amadio, J. Apostolakis, M. Bandieramonte, A. Bhattacharyya, C. Bianchini, R. Brun and others // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2015. — Vol. 664, N 7. — P. 072006.
4. *Apostolakis J.* Towards a high performance geometry library for particle-detector simulations / J. Apostolakis, M. Bandieramonte, G. Bitzes, R. Brun, P. Canal, F. Carminati and others // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2015. — Vol. 608, N 1. — P. 012023.
5. *Apostolakis J.* Adaptive track scheduling to optimize concurrency and vectorization in GeantV / J. Apostolakis, M. Bandieramonte, G. Bitzes, R. Brun, P. Canal, F. Carminati and others // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2015. — Vol. 608, N 1. — P. 012003.
6. *Deb K.* Scalable Test Problems for Evolutionary Multi-Objective Optimization, *Evolutionary Multiobjective Optimization: Theoretical Advances and Applications* / K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, E. Zitzler // *Advanced Information and Knowledge Processing - Evolutionary Multiobjective Optimization* - Springer London. — 2015. — P. 105–145.
7. *Vose M.* *The Simple Genetic Algorithm: Foundations and Theory* / M. Vose // MIT Press. Cambridge. — 1999. — 251 p.
8. *Rowe J.E.* Genetic algorithm theory / J.E. Rowe // *Proceedings of the 14th Annual Conference Companion on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO2012)*. — New York, USA. — 2012. — P. 917–940.

9. *Rudolph G.* Convergence properties of evolutionary algorithms / G. Rudolph // Kovac, Hamburg. — 1997. — 286 p.
10. *Schmitt F.* On the Importance of the Second Largest Eigenvalue on the Convergence Rate of Genetic Algorithms / F. Schmitt, F. Rothlauf // Proceedings of the 14th Symposium on Reliable Distributed Systems. — 2001. — P. 559–564.
11. *Cadima J.* On Relationships between Uncentered and Column-centered Principal Component Analysis / J. Cadima, I. Jolliffe // Pakistan Journal of Statistics. — 2009. — Vol. 25(4). — P. 473–503.
12. *Honeine P.* An eigenanalysis of data centering in machine learning / P. Honeine // Preprint ArXiv ID: 1407.2904. — 2014. — 14 p.
13. *Baker K.* Singular value decomposition tutorial / K. Baker. — Available at: <https://datajobs.com/data-science-repo/SVD-Tutorial-%5BKirk-Baker%5D.pdf>
14. *Deb K.* A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II / K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2002. — Vol. 6. — P.182–197.
15. *Haitham S.* U-NSGA-III: A unified evolutionary algorithm for single, multiple, and many-objective optimization / S. Haitham, K. Deb // Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 6019. — P. 34–49.
16. *Annadurai S.* Fundamentals of digital image processing / S. Annadurai // Pearson Education India. — 2007. — 440 p.
17. *Hansen N.* COCO: A platform for Comparing Continuous Optimizers in a Black-Box Setting / N. Hansen, A. Auger, O. Mersmann, T. Tuar, D. Brockhoff // Preprint ArXiv ID: 1603.08785. — 2016. — 10 p.

Received 19.01.2017

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І
МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS
AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS

УДК 517.9, 519.816

Модель оцінювання рівня небезпеки ситуацій в задачах функціонування складних об'єктів / Панкратова Н.Д, Сльота М.Р. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 7–19.

Запропоновано модель оцінювання інформаційного забезпечення особи, що приймає рішення (ОПР), яка ґрунтується на дослідженні якісних показників інформованості: повноти, достовірності та своєчасності інформованості ОПР. На основі цих показників сформовано рівень небезпеки ситуації під час функціонування складних об'єктів. Для реалізації моделі використовувалися методи однопараметричної класифікації з операціями перетину нечітких множин і сильного перетину, методи інтервальної класифікації з операціями об'єднання і перетину нечітких множин, а також з операціями сильного об'єднання і перетину нечітких множин. Запропоновані методи дозволяють класифікувати ситуації для інформування ОПР про обґрунтованість і безпеку прийняття рішення за наявного інформаційного забезпечення. Розроблена модель базується на дослідженні якісних показників інформованості ОПР і може бути застосована для оцінювання рівня небезпеки ситуацій в задачах функціонування складних об'єктів. Рис.: 1. Табл.: 5. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 517.9, 519.816

Модель оценивания уровня опасности ситуаций в задачах функционирования сложных объектов / Панкратова Н.Д, Сльота М.Р. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 7–19.

Предложена модель оценивания информационного обеспечения лица, принимающего решения (ЛПР), основанная на исследовании качественных показателей информированности: полноты, достоверности и своевременности информированности ЛПР. На основе этих показателей сформирован уровень опасности ситуаций при функционировании сложных объектов. Для реализации модели использовались методы однопараметрической классификации с операциями пересечения нечетких множеств и сильного пересечения, методы интервальной классификации с операциями объединения и пересечения нечетких множеств, а также с операциями сильного объединения и пересечения нечетких множеств. Предложенные методы позволяют классифицировать ситуации для информирования ЛПР об обоснованности и безопасности принятия решения при имеющемся информационном обеспечении. Разработанная модель базируется на исследовании качественных показателей информированности ЛПР и может быть применена для оценивания уровня опасности ситуаций в задачах функционирования сложных объектов. Fig.: 1. Tabl.: 5. Refs.: 11 titles.

УДК 51-77

Оценка уровня социальной динамики и перспектив развития общества, основанного на знаниях / Лазаренко И.С., Пышнограев И.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 20–32.

Исследование и моделирование общества, основанного на знаниях, являются важными направлениями политики перехода стран на новый улучшенный уровень существования и тесного экономического, социального и технологического сотрудничества. Рассмотрены основные принципы построения модели k -общества, проблема неполноты статистических данных и методы их восстановления, в частности детально проанализирована и построена компонента модели — индекс социальной

динамики и перспектив развития для 126 стран мира. Анализ результатов представлен как в текущей рейтинговой системе для 10 стран-лидеров, 10 стран-аутсайдеров и Украины, так и в динамике за последние 10 лет. Данный индекс достаточно хорошо коррелирует с индексом экономического измерения, что позволяет утверждать о целесообразности и важности исследований в этом направлении, которые позволят строить стратегии развития стран, используя модель k -общества. Рис.: 4. Табл.: 1. Библиогр.: 25 назв.

UDC 51-77

Estimation of social dynamics and development prospects of knowledge society / Lazarenko I.S., Pyshnograiev I.O. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 20–32.

Research and modeling of the knowledge society is very important from the point of view of the country's transition to a new improved standard of living and economic, social and technological cooperation. In this article, the basic principles of the k -society modeling, problem of missing statistical data and methods to recover these data were considered. In addition, the model's component, the index of social dynamics and prospects of development, was analyzed in detail and constructed for 126 countries. Analysis of the results was presented for the current rating system and the dynamics for the past 10 years for 10 leading countries, 10 outsider countries, and Ukraine. This index correlates reasonably well with the index of economic measurement of sustainable development that demonstrates the feasibility and importance of research in this area which helps to create the development strategy by using k -society models. Fig.: 4. Tabl.: 1. Refs.: 25 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL
AND SOCIAL SYSTEMS

УДК 519.226, 330.322

Оценивание кредитных рисков методами интеллектуального анализа данных / Данилов В.Я., Жиров А.Л., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 33–48.

Проанализированы кредитные риски финансовых организаций с помощью методов интеллектуального анализа данных. Фактические статистические данные, которые характеризуют заемщиков кредитов, использованы для построения математических моделей в форме уравнений типа логит, деревьев решений и байесовских сетей. Качество построенных моделей проанализировано с помощью множества соответствующих статистических критериев, которые дают основание для выбора лучшей альтернативной модели. С использованием двух выборок банковских данных выполнен ряд вычислительных экспериментов и установлено, что лучшими оказались модели типа логит и байесовские сети. Предусматриваются расширение множества методов построения математических моделей и реализация идеи комбинирования оценок, сгенерированных альтернативными методами. Обоснованы целесообразность разработки и реализация специализированной системы поддержки принятия решений для выполнения исследований в сфере оценивания и прогнозирования финансовых рисков. Рис.: 9. Табл.: 7. Библиогр.: 9 назв.

UDC 519.226, 330.322

Estimation of credit risks using the data mining methods / Danylov V.Ya., Jirov O.L., Bidiuk P.I. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 33–48.

In this research, credit risks are analyzed for financial organizations using data mining techniques applied to actual data. The two sets of actual statistical data

characterizing the borrowers are employed for constructing mathematical models in the form of the nonlinear logit regression, decision trees, and Bayesian networks. The constructed models are analyzed with a set of appropriate statistical criteria, providing a basis for selecting the best alternative model. A series of computational experiments have been carried out using the two sets of actual statistical data from a Ukrainian bank. As a result of the performed computations, it was established that the best models in this application turned out to be nonlinear logit equations and Bayesian networks. In the future studies, we suppose to expand the number of model constructing techniques and to apply the idea of combining the estimates generated by the alternative models. Also, a specialized decision support system is to be constructed for the purpose of carrying research in the area of financial risks estimation and prediction. Fig.: 9. Tabl.: 7. Refs.: 9 titles.

УДК 004.852

Применение методов интеллектуального анализа данных к решению задач актуарного моделирования и оценивания финансовых рисков/ Дубініна С.В., Бідюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 49–64.

Представлены результаты применения методов интеллектуального анализа данных к актуарному моделированию и оценивания рисков страховых компаний. В качестве математического аппарата использованы обобщенные линейные модели, метод группового учета аргументов и нечеткий метод группового учета аргументов, а также байесовский подход к оцениванию неизвестных параметров моделей. На основе фактических статистических данных из области страхования построены новые обобщенные линейные модели для их дальнейшего использования при оценивании рисков потерь страховых компаний, разработана и апробирована сеть Байеса для оценивания риска банкротства страховой компании при наступлении страхового случая. Приемлемой для дальнейшего использования оказалась модель с гамма-распределением данных и логарифмической функцией связи, параметры которой получены за четыре итерации алгоритма оценивания. Большой риск банкротства страховой компании свидетельствует об отсутствии эффективного механизма управления денежными средствами как собственного капитала, так и прибыли от страховых договоров. Применение методов интеллектуального анализа данных является эффективным подходом к решению задач прогнозирования и оценивания рисков актуарных процессов. Рис.: 5. Табл.: 5. Библиогр.: 13 назв.

UDC 004.852

Application of data mining methods to solving the problems of actuarial modeling and estimation of financial risks / Dubinina S.V., Bidyuk P.I. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 49–64.

Results of application of the data mining to solving the problem of actuarial processes modeling and risk estimation for insurance companies are presented. As a mathematical modeling tool the following approaches were used: generalized linear models, Bayesian networks, the group method for data handling, fuzzy GMDH, and Bayesian parameter estimation techniques. Using actual statistical data from the insurance industry, new generalized linear models were constructed that were used for estimation of a possible loss by an insurance company. Also, a model in the form of a Bayesian network was constructed that was applied to estimate the bankruptcy risk in a case of insurance losses. The best model constructed in this case turned out to be the gamma distribution based model and logarithmic link function whose parameters were estimated within four iterations of the estimation algorithm. A substantial computed value of the insurance company bankruptcy risk reflects the fact that the company under consideration does not possess an effective mechanism for managing its own capital and the payments from clients. Thus, an application of data mining is an effective approach to solving the

problems of short-term forecasting financial processes and estimation of actuarial risks. Fig.: 5. Tabl.: 5. Refs.: 13 titles.

УДК 519.713: 504.064

Информационно-методическая основа определения оценки экологичности сложных природно-техногенных объектов / Козуля Т.В., Белова М.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 65–74.

Определены основные пути усовершенствования комплексной системы оценки безопасности состояния сложных природно-техногенных объектов с выявлением факторов их дестабилизации в целях регулирования устойчивого развития и принятия управляющих мероприятий. Проанализированы перспективы внедрения когнитивного моделирования в систему информационно-методического обеспечения оценки экологичности сложных объектов. Дана практическая реализация предложенной методики на примере прогнозирования состояния Харьковского региона. Рис.: 5. Библиогр.: 27 назв.

UDC 519.713: 504.064

Information and methodological basis for the definition of complex ecological assessment of natural and man-made objects / Kozulia T.V., Bilova M.O. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 65–74.

The basic ways are identified to improve the integrated system of safety evaluation of the state of the complex natural and man-made objects according to the identification of destabilizing factors for the purpose of controlling the sustainable development and employing the control measures. The prospects of introducing the cognitive modeling into the information and methodological support of the environmental assessment of complex objects are analyzed. The practical implementation of the proposed method is given using the forecasting of the state of Kharkov region as an example. Fig.: 5. Refs.: 27 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 518.58:519.2:504

Динаміка генотипу в нейроеволюції агентів у моделях штучного життя / Завертаній В.В., Макаренко О.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 75–87.

Кооперативна поведінка є однією з найбільш часто використовуваних та поширених рис для багатоагентних систем. У деяких випадках поява такої поведінки пов'язана із поділом населення на співіснуючі субпопуляції [1, 2]. Групова взаємодія може набувати не лише форми антагоністичного конфлікту, але й зумовлюватися генетичним дрейфом, який приводить до конкуренції поведінкових стратегій та можливої асиміляції [3]. Продемонстровано різні види залежностей між групами агентів та їх поведінковими стратегіями. Використано методологію спостереження за динамікою агентного генотипу [2], відповідно до якої популяція у просторі генотипів може мати вигляд хмари точок, кожна точка якої відповідає одній особині. Розглянуто динаміку центроїда населення — центра хмари генотипу. Аналіз таких траєкторій може сприяти дослідженню різних режимів існування популяції та їх зародження. Рис.: 10. Табл.: 2. Бібліогр.: 22 назв.

УДК 518.58:519.2:504

Динамика генотипа в нейроеволюции агентов в моделях искусственной жизни / Завертаній В.В., Макаренко А.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 75–87.

Кооперативное поведение является одной из наиболее часто используемых и распространенных черт для многоагентных систем. В некоторых случаях появление такого поведения связано с разделением населения на сосуществующие субпопуляции [1, 2]. Групповое взаимодействие может принимать не только форму антагонистического конфликта, но и обуславливаться генетическим дрейфом, приводящим к конкуренции поведенческих стратегий и возможной ассимиляции [3]. Продемонстрированы различные виды зависимостей между группами агентов и их поведенческими стратегиями. Использована методология наблюдения за динамикой агентного генотипа [2], согласно которой популяция может быть представлена в пространстве генотипов в виде облака точек, где каждая точка соответствует одной особи. Рассмотрена динамика центроида популяции — центр облака генотипа. Анализ таких траекторий может помочь исследованию различных режимов существования популяции и их зарождения. Рис.: 10. Табл.: 2. Библиогр.: 22 назв.

УДК 519.24

Fuzzy-регресійні моделі в умовах наявності в статистичній вибірці нечислової інформації / Зак Ю.О. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 88–96.

Розглянуто алгоритми розв'язання задач нечіткого регресійного аналізу в умовах, коли вхідні і вихідні змінні величини подані Fuzzy-множинами, визначеними з точністю до невідомих параметрів, а коефіцієнти регресії — дійсні числа. Запропоновано деякі нові критерії апроксимації, засновані на порівнянні згортки довжин перетинів і координат центрів тяжіння функцій належності Fuzzy-множин, які можуть бути використані для нечітких множин змінних задач загального вигляду. Описано алгоритми перетворення змінних, поданих термами лінгвістичної змінної або параметрами числових шкал, у нечіткі множини і використання цих даних в задачах Fuzzy-регресійного аналізу. Отримані результати дозволяють вирішувати багато прикладних проблем в економіці, логістиці, соціології та маркетингу. Бібліогр.: 20 назв.

UDC 519.24

Fuzzy-regression models under conditions of the presence of non-numeric data in the statistical sample / Zack Y.A. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 88–96.

Algorithms are presented for solving the problems of the fuzzy regression analysis under the conditions when the input and output variables are represented by Fuzzy-sets defined up to unknown parameters and the regression coefficients are real numbers. We proposed several new approximations of criteria based on the comparison of the convolution of the cross sections lengths and the center of gravity coordinates of membership functions of the Fuzzy-sets, which can be used for the fuzzy set variables of the problem of a general form. The algorithms convert a variable represented by linguistic terms of variable parameters or numerical scales into fuzzy sets and use these data in the problems of the Fuzzy-regression analysis. The results will allow to solve many practical problems in economics, logistics, sociology, and marketing. Refs.: 20 titles.

УДК 519.6, 539.3

Алгоритм побудови біфуркаційної картини нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана / Громов В.О. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 97–113.

У межах нелінійного узагальненого методу Канторовича запропоновано новий підхід до локалізації та аналізу особливих точок розв'язку нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана: розв'язання нелінійної крайової задачі зводиться до розв'язання послідовності нелінійних крайових задач для звичайних диференціаль-

них рівнянь. Одновимірні крайові задачі розв'язуються за допомогою методу зведення нелінійної крайової задачі до еквівалентної задачі Коші, у процесі реалізації якого будується матриця Фреше; її виродженість є необхідною і достатньою умовою існування розгалуження. Числова побудова рівнянь розгалуження дозволяє будувати гілки, що виходять з точки біфуркації. Обчислювальний експеримент дозволив установити біфуркаційну картину для випадку рівнянь Кармана з узагальненою правою частиною: розв'язок характеризується наявністю гілок первинного та вторинного розгалужень. Рис.: 11. Бібліогр.: 16 назв.

UDC 519.6, 539.3

Algorithm to construct bifurcation structure of non-linear boundary problem for von Karman equations / Gromov V.A. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 97–113.

In the frameworks of the generalized Kantorovich method, a novel approach to detect and analyze singular points of a non-linear boundary problem for von Karman equations is proposed: an algorithm suggests that a sequence of single-dimensional boundary problems is constructed in order to solve the two-dimensional boundary problem in question. The aforesaid single-dimensional boundary problems are reduced to the equivalent Cauchy problems. In doing so, one calculates the Frechet matrix, whose degeneracy is necessary and sufficient conditions of branching. The simulation reveals the bifurcation structure for von Karman equations with the constant right term. In that case, the structure includes primary and secondary bifurcation paths. Fig.: 11. Refs.: 16 titles.

УДК 519.6

Проекційно-ітераційна реалізація явних методів варіаційного типу для розв'язання некоректних операторних рівнянь / Гарт Л.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 114–125.

Досліджено проекційно-ітераційні методи регуляризації, що ґрунтуються на явних методах варіаційного типу (найшвидшого спуску та мінімальних нев'язок), для розв'язання некоректних лінійних операторних рівнянь у гільбертовому просторі, для яких не виконується третя умова коректності задачі за Адамаром (стійкість). Запропонований підхід полягає у заміні вихідного некоректного рівняння деякою послідовністю більш простих апроксимованих рівнянь, заданих у скінченновимірних підпросторах вихідного простору. Для кожного з «наближених» рівнянь будується за допомогою явного варіаційного методу лише декілька наближень, останнє з яких береться за початкове наближення в ітераційному процесі для наступного «наближеного» рівняння. Доведено теореми про збіжність проекційно-ітераційних методів, отримано оцінки похибки. Надано рекомендації щодо вибору регуляризувальної кількості ітерацій. Бібліогр.: 16 назв.

UDC 519.6

Projection-iteration implementation of explicit variation type methods of solving ill-posed operator equations / Hart L.L. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 1. — P. 114–125.

Projection-iteration regularizing methods based on explicit variation type methods (steepest descent and minimal residual methods) are investigated for solving ill-posed linear operator equations in a Hilbert space which do not satisfy the third condition of the correctness of the problem by Hadamard (stability). The proposed approach is to replace the original ill-posed equation by a sequence of simpler equations that approximate it defined in finite-dimensional subspaces of the original space. Then, only few approximations for each of the "approximate" equations are constructed using an explicit variation method, and the last of them is used as the initial approximation in the iterative process for the next "approximate" equation. The theorems on the convergence of the

projection-iteration methods are proved, error estimates are obtained. The recommendations on the choice of the regularizing number of iterations are given. Refs.: 16 titles.

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ
СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ
І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND
CONTROL IN CONDITIONS OF RISK
AND UNCERTAINTY CONDITIONS

УДК 519.85, 539.3

Багатофакторний конвергенційно-націлений оператор для генетичного алгоритму / Шадура О.В., Петренко А.І., Свістунов С.Я. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 126–140.

Складні пакети моделювання транспорту частинок можна оптимізувати за допомогою генетичних алгоритмів, що дає змогу застосовувати для таких задач підходи статистичного навчання та методи оптимізації декількох цільових функцій. Поєднання генетичного алгоритму та неконтрольованого машинного навчання значно підвищує збіжність алгоритму до істинного парето-фронту. У межах багатофакторного аналізу запропоновано додатковий оператор, який може бути застосований для задач оптимізації багатоцільових функцій, що потребують великого обсягу ресурсів та часу, зокрема для пришвидшення збіжності задачі оптимізації «чорного ящика». Отримані результати показують, що запропонований підхід можна використовувати для генетичного алгоритму будь-якого типу, а додатковий оператор розглядати як окремий генетичний оператор. Рис.: 7. Бібліогр.: 17 назв.

УДК 519.85, 539.3

Многофакторный конвергенцино-нацеленный оператор для генетического алгоритма / Шадура О.В., Петренко А.И., Свистунов С.Я. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 1. — С. 126–140.

Сложные пакеты моделирования транспорта частиц можно оптимизировать с помощью генетических алгоритмов, что позволяет применять для таких задач подходы статистического обучения и методы оптимизации нескольких целевых функций. Сочетание генетического алгоритма и неконтролируемого машинного обучения может значительно повышает сходимость алгоритма к истинному парето-фронта. В рамках многофакторного анализа предложен дополнительный оператор, который может быть применен для задач оптимизации многоцелевых функций, требующих большого объема ресурсов и времени, в частности для ускорения сходимости задачи оптимизации «черного ящика». Полученные результаты показывают, что предложенный подход можно использовать для генетического алгоритма любого типа, а дополнительный оператор рассматривать как отдельный генетический оператор. Fig.: 7. Refs.: 17 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Білова Марія Олексіївна,

аспірантка кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Гарт Людмила Лаврентіївна,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, завідувач науково-дослідної лабораторії оптимізації складних систем кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики факультету прикладної математики Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара, Україна, Дніпро

Громов Василь Олександрович,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики факультету прикладної математики Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара, Україна, Дніпро

Данилов Валерій Якович,

професор, доктор технічних наук, професор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Дубініна Світлана Віталіївна,

аспірантка Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Жиров Олександр Леонідович,

кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання економічних систем НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Завертаний Валентин Вікторович,

аспірант кафедри математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Зак Юрій Олександрович,

доктор технічних наук, науковий експерт і консультант, Німеччина, Аахен

Козуля Тетяна Володимирівна,

доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Лазаренко Ірина Сергіївна,

кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математичного моделювання економічних систем факультету менеджменту і маркетингу НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Макаренко Олександр Сергійович,

професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу прикладного нелінійного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Панкратова Наталія Дмитрівна,

професор, доктор технічних наук, заступник директора Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Петренко Анатолій Іванович,

професор, доктор технічних наук, завідувач відділу інформаційних ресурсів та кафедри системного проектування Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Пишнограсв Іван Олександрович,

кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри математичного моделювання економічних систем факультету менеджменту і маркетингу НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Свістунов Сергій Якович,

кандидат технічних наук, завідувач відділу комп'ютерного забезпечення наукових досліджень і науково-технічної інформації Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

Сльота Максим Русланович,

студент Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Шадур Оксана Віталіївна,

інженер Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для журналу

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

1. Стаття з анотаціями та іншою інформацією подається з використанням веб-сайту журналу (<http://journal.iasa.kpi.ua>).

Назва статті, прізвище та ініціали автора (авторів), а також анотація (від 700 до 1000 символів) подаються українською, російською та англійською мовами.

2. Текст статті набирається в редакторі Microsoft Word 2003 шрифтом Times New Roman із вирівнюванням по ширині.

3. На початку статті вказується індекс УДК, назва статті, ініціали та прізвище автора (авторів).

4. Список літератури подається в порядку посилання після тексту статті. Якщо є можливість, у списку вказується DOI кожного посилання.

5. Набір формул здійснюється в редакторі формул «Equations». Для змінних з індексами та без індексів застосовуються дужки клавіатурного набору, наприклад (x_i^j, y_k^l) , $[x_i^j, y_k^l]$.

6. Символи у формулах (крім особливих випадків) набираються курсивом. Допускаються прямі символи, але їх треба розмітити або включити до списку спеціальних символів.

7. Нумерувати необхідно тільки ті формули (винесені на середину рядків), на які є посилання в тексті.

8. Таблиці та рисунки виконуються в одному стилі, їм надається номер, назва і розташовуються після посилань у тексті. Не слід повторювати в статті підписи до рисунків та таблиць.

9. Стаття разом із таблицями, рисунками і списком літератури має бути не більше 15 сторінок. Оглядові статті обсягом до 25 сторінок приймаються за домовленістю із редколегією.

10. До рукопису додаються відомості про кожного автора: країна, місто, місце роботи, службова посада, вчений ступінь та звання, сфера наукових досліджень, контактні телефони, адреса та e-mail.