

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ» НТУУ «КПІ»
МОН ТА НАН УКРАЇНИ

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 3

2011

ЗАСНОВАНИЙ У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, проф., д. т. н.

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, чл.-кор. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, проф., д. ф.-м. н.

В.Г. БОНДАРЕНКО, проф., д. ф.-м. н.

Ж. БОННІН, проф., Франція

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

Р. ВОРОНКА, проф., США

О.Д. ГВІШАНИ, проф., д. ф.-м. н.,
Росія

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.С. МАКАРЕНКО, проф., д. ф.-м. н.

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н.

Т.Л. СААТІ, проф., д. ф.-м. н.

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,
пр. Перемоги, 37, корп. 35,
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»
НТУУ «КПІ» МОН та НАН України
Тел.: 406-81-44; Факс: 406-81-44
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
<http://journal.iasa.com.ua>

У номері:

• **Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу**

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах**

• **Проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі**

• **Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

• **Нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень**

• **Науково-методичні проблеми в освіті**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL-SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
AT THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE «KPI»
OF MES AND NAS OF UKRAINE

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 3

2011

IT IS FOUNDED IN JULY, 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Prof., Ukraine

Associate editors:

F.I. ANDON, Correspondent
member of NASU

A.V. ANISIMOV, Prof., Ukraine

V.G. BONDARENKO Prof., Ukraine

Z. BONNIN, Prof., France

E.A. FEINBERG Prof., USA

A.D. GVISHIANI Prof., Russia

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.S. MAKARENKO Prof., Ukraine

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

T.L. SAATY, Prof., USA

L. SAKALAUSKAS Prof., Lithuania

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

R. VORONKA, Prof., USA

G.-W. WEBER Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Educational-Scientific Complex
«Institute for Applied System Analysis» at the
National Technical University of Ukraine «KPI»
of MES and NAS of Ukraine
Phone: 406-81-44; Fax: 406-81-44
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
http://journal.iasa.com.ua

In the issue:

• **Theoretical and applied problems and methods of system analysis**

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Problem- and function-oriented computer systems and networks**

• **Methods of optimization, optimum control and theory of games**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

• **New methods in system analysis, computer science and theory of decision making**

• **Scientific and methodological problems in education**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного і прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «КПІ», директор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, академік НАН України Михайло Захарович ЗГУРОВСЬКИЙ.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**

Редактор **А.О. Млечко**

Молодший редактор **В.М. Литвин**

Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 16.09.2011. Формат 70x108/16.

Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ІПР від 17.03.2008 р.

Видавництво та поліграфія ВПК «Політехніка»

ВПІ НТУУ «КПІ»

03056, Київ–56, пр. Перемоги, 37, корп. 15

Dear Readers!

The Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine is published of the international scientific and technical journal

«SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES».

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is Rector of the National Technical University of Ukraine «KPI», Director of the Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis» at the National technical university of Ukraine «KPI» of MES and NAS of Ukraine, academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

3 • 2011

ЗМІСТ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ	
<i>Редько І.В., Татариков А.О., Семенченко М.П.</i> Открыто-замкнутые основания сред интеграции. Часть II	7
<i>Савченко І.О.</i> Методологічне і математичне забезпечення розв'язання задач передбачення на основі модифікованого методу морфологічного аналізу ...	18
ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ	
<i>Максимей І.В., Шевченко Д.Н.</i> Технология имитационного моделирования параметрических отказов технических систем	29
<i>Осіпенко Д.В.</i> Підхід до інтеграції системи кредитного скорингу та моделі керування активами та пасивами комерційного банку	38
<i>Каргин А.А., Пятикоп Е.Е.</i> Модели представления ключевых элементов в задаче покомпонентного распознавания символов текста	48
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Кондратенко Н.Р., Лужицький С.В., Чеборака О.В.</i> Нечіткі моделі в задачах підбору персоналу при формуванні соціальних груп	56
<i>Зайченко Ю.П., Ови Нафас Агаи Аг Гамиш.</i> Исследование двойственной задачи оптимизации инвестиционного портфеля в нечетких условиях	63
<i>Михалевич В.М.</i> К параметрической форме моделирования ситуации в общей задаче принятия решения	77
ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ	
<i>Мазурок Т.Л., Тодорцев Ю.К.</i> Нейромережева реалізація інтелектуальної підтримки прийняття рішень в автоматизованому управлінні навчанням	88
МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР	
<i>Панченко Б.Е., Писанко І.Н.</i> О топологии путей нормализации в реляционном каркасе	102
<i>Марценюк В.П., Вакуленко Д.В., Андрущак І.Є.</i> Оптимальне керування режимами медикаментозної терапії та фізіотерапії в задачі реконструкції кісткової тканини	108
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	
<i>Данилов В.Я., Науменко І.Я., Кизима В.І., Клименко С.М.</i> Згасання звуку в міжтрубному просторі свердловин	123
НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	
<i>Бохонов Ю.Є.</i> Про періодичні розв'язки квазілінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку	133
НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ В ОСВІТІ	
<i>Арсеньев Д.Г., Амбражсей А.Н., Головин Н.М. Таратухин В.В.</i> Сотрудничество Академического центра компетенции SAP СПбГПУ и высших учебных заведений стран СНГ в рамках программы «Университетский Альянс SAP» ...	138
Реферати	143
Відомості про авторів	149

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

3 • 2011

CONTENTS

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS	
<i>Redko I.V., Tatarikov O.O., Semenchenko M.P.</i> Open-close principles of the integration environments. Chapter II	7
<i>Savchenko I.O.</i> Methodological and mathematical support for solving foresight problems using the modified method of the morphological analysis	18
PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Maksimiy I.V., Shevchenko D.N.</i> The technology of the simulation modeling of the parametric failures of the technical systems	29
<i>Osipenko D.V.</i> Approach to the integration of credit scoring system and to the model of assets and liabilities management	38
<i>Kargin A.A., Pyatikop E.E.</i> Models of key elements representation in the problem of component recognition of the character of text	48
DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS	
<i>Kondratenko N.R., Luzhetskyi S.V., Cheboraka O.V.</i> Fuzzy models in staff recruitment problems during the social groups forming	56
<i>Zaychenko Yu., Ovi Nafas Agai Ag Gamish.</i> Investigation of the dual problem of the investment portfolio optimization in terms of fuzzy	63
<i>Mykhalevich V.M.</i> To parametric form of modeling the situation in the general problem of decision-making	77
PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS	
<i>Mazurok T.L., Todorcev Y.K.</i> Neural network implementation of intellectual support of decision-making in the automatically controlled training	88
METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM CONTROL AND THEORY OF GAMES	
<i>Panchenko B.E., Pysanko I.N.</i> About topology of normalization ways in the relation frame	102
<i>Martsenyuk V.P., Vakulenko D.V., Andrushchak I.Ye.</i> Optimal control of drug therapy and physiotherapy models for the problem of reconstruction of bone tissue	108
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Danylov V.Ia., Naumenko I.Ia., Kyzyma V.I., Klymenko S.M.</i> Sound attenuation in wells annulus	123
NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING	
<i>Bokhonov Ju.E.</i> On the periodic solutions of the quasilinear ordinary differential equations of second order	133
SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL PROBLEMS IN EDUCATION	
<i>Arseniev D.G., Ambrajei A.N., Golovin N.M., Taratoukhine V.V.</i> Cooperation of SAP Academic Competence Center in SPBSPU and higher educational institutions in CIS countries within the framework of SAP University Alliances Program	138
References	143
Information about the authors	149

**ОТКРЫТО-ЗАМКНУТЫЕ ОСНОВАНИЯ СРЕД ИНТЕГРАЦИИ.
ЧАСТЬ II**

И.В. РЕДЬКО, А.О. ТАТАРИКОВ, М.П. СЕМЕНЧЕНКО

В рамках концепции ОС-System рассмотрены понятия среды интеграции и интеграционной системы. Рассмотрены решения репрезентативных примеров задач в средах макро- и микроинтеграции. Описано применение метода эволюционного обогащения к сущностям типа бизнес-процеса в предметной области.

ВВЕДЕНИЕ

В [1] была рассмотрена понятийная система концепции ОС-System, где основное внимание было уделено разъяснению как собственно понятий открыто-замкнутой среды (ОЗСР), открыто-замкнутой системы (ОЗС), интеграционной среды (ИСР) и интеграционной системы (ИС), так и их логико-предметной взаимосвязи как ключевого элемента системы пошаговых обогащений любых сущностей в познании. При этом и сами понятия ОЗСР, ОЗС, ИСР и ИС и их логико-предметное взаимодействие были рассмотрены с позиции присущих им наиболее общих свойств и характеристик. В этом смысле они являлись ключевыми оракулами [2, 3] проводимого в [1] исследования как открыто-замкнутой среды, определяя логику последней.

Настоящая работа является естественным, в рамках ОС-System, продолжением статьи [1] и посвящена рассмотрению репрезентативных предметных обогащений вскрытой там понятийной системы. Здесь достаточно подробно рассматриваются вопросы редуцированного моделирования ИТС как важнейшего типа ОЗС, а также дается прагматико-обусловленная классификация ОЗСР ИТС. Все используемые и не излагаемые в работе определения и результаты понимаются в смысле [1, 4–6].

ИСР КАК ПРАГМАТИКО-ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОБОГАЩЕНИЯ ОЗСР

Несмотря на то, что ОЗСР является принципиальным обогащением сущностных сред [4–8], оно все же недостаточно содержательно. И поэтому нуждается в прагматико-обусловленном обогащении. Последнее же непосредственно связано с некоторой расплывчатостью упомянутых выше средств

актуализации и потенциализации составляющих ОЗСР, в частности средств актуализации ЛПО ОЗСР. Основным средством такого обогащения, здесь, как и ранее, выступит экспликативное сведение ОЗСР к ИСР как прагматико-мотивированная форма типизации, обусловленной прагматикой (ТОП).

Предпосылкой вовлечения сред интеграции послужило то, что, как известно, решение любой задачи суть интеграция решений ее подзадач. В [9–11] рассматривалась открыто-замкнутая точка зрения на ИСР как бипольную среду, представляющая собой взаимодействие макроинтеграционной (общезначимой, логической) и микроинтеграционной (предметной) сред, поддерживаемых интерфейсной средой (оракульным логико-предметным отношением).

В такой трактовке совершенно естественно смотреть на ИСР как на вид рода ОЗСР, на интеграционную систему (ИС), соответственно, — как на вид рода ОЗС, а на их взаимосвязь в биполе <ИСР, ИС> — как на прагматико-обусловленное обогащение взаимодополнения ОЗСР и ОЗС, описанного в [1] и составляющего общезначимую основу концепции ОС-System. Конкретнее говоря, любая ИС представляет собой прагматико-обусловленное замыкание соответствующей ИСР, в котором макроинтеграционная, микроинтеграционная и интерфейсная среды представлены соответствующими актуализациями — макроинтегратором, микроинтегратором и интерфейсной системой. Последняя представляет собой прагматико-обусловленное замыкание интерфейсной среды как оракульного логико-предметного отношения ИСР.

В зависимости от уровня сложности и содержания задач роль интеграционной составляющей в их решении может достаточно сильно варьироваться. В первом приближении можно выделить микро- и макроуровни использования средств интеграции при решении реальных задач.

На микроуровне при решении задач ограничиваются фактически использованием только средствами микроинтеграции. Это означает, что интерфейсная система таких ИС как актуализация оракульного ЛПО соответствующей ИСР не имеет оракулов, т.е. такие интерфейсные системы лишь номинально могут рассматриваться как среды интеграции. Потому в контексте ИСР их еще называют *средами микроинтеграции*. Содержательно говоря, данный уровень интеграции характерен для так называемых замкнутых (жестко ориентированных на решение одной задачи) систем.

В случае макроуровня, в отличие от тривиального микроуровня, в решении задействуются средства не только микро-, но и макроинтеграции. Использование последних индуцировано ориентацией рассматриваемых прагматико-обусловленных обогащений ИСР на решение класса задач. Такая их ориентированность выражается в наличии у них оракулов (параметров). Получаемые при этом интерфейсные системы обладают реальной биабстрактностью, так как могут вовлекаться в рассмотрение как в роли ИС, так и в роли ИСР. В последнем случае они именуется *средами макроинтеграции*.

Выше отмечалось, что прагматика данной работы состоит в изучении информатико-технологических систем в рамках концепции ОС-System. Важнейшим частным случаем здесь являются системы программирования (СП). Поэтому рассмотрение СП в контексте проведенных обогащений

ТОП, т.е. точка зрения на ИТС и СП как на интеграционные системы, представляется прагматико-обусловленным. В этой связи, ниже, если не оговорено иное, понятия ИСР, ИС и их прагматико-обусловленные обогащения понимаются в разрезе информатико-технологической, а более конкретно, программистской направленности.

Индивидуализация сред микро- и макроинтеграции существенно обогащает представления об ИСР. Однако, очевидно, что ограничиться этим все же нельзя, необходимо дальнейшее обогащение. До сих пор, все рассмотренные относительно ОЗСР и ИСР носили характер непосредственных обогащений указанных понятий. Последующие шаги будут связаны с косвенным обогащением ИСР. Содержательно говоря, будут существенно учитывать то, что важны ИСР, но не столько сами по себе, как инструмент дескрипирования сущностей, сколько технология корректного применения этого инструмента.

Косвенное обогащение ИСР и ИС. Информатико-технологическая и программистская направленность рассматриваемых задач естественно накладывает свой отпечаток на ИСР и ИС как средства их дескрипирования. Прежде всего, это выражается в том, что в области конструктивного решения задач нельзя ограничиться лишь абстрактно-математическими средствами дескрипирования. Как минимум они должны быть обогащены средствами дескрипирования логики задач. Поэтому такие средства дескрипирования принято называть логико-математическими. В [12] дан обзор средств логико-математического дескрипирования. Показано, что в основе любого дескрипирования лежат явно или неявно выделенные логико-математические структуры задач. Ключевую роль среди последних играют функциональные и декомпозиционные структуры.

Предпосылкой вовлечения в рассмотрение функциональных структур служит то, что любая задача, в конечном счете, сводится к получению по исходным данным требуемых результатов, т.е. является функцией. В [5, 8, 13] показано, что в силу объективных причин, дескрипирование не может быть ограничено лишь классическими функциями, а приходится по необходимости привлекать неоклассические и даже неклассические функции.

Неоклассические функции, в отличие от классических, заданы на множествах не просто абстрактных элементов, а таких, которые имеют определенную структуру. Точнее говоря, это функции типа $f : A \rightarrow B$, где A и (или) B — множества именных множеств, которые в связи с этим стали называть именными функциями [13]. Что касается неклассических функций, то они представлены так называемыми импульсными функциями, подробно рассмотренными, например в [4–8, 14, 15]. В первом приближении, импульсная функция может быть разъяснена как вид существования импульсов. Частным случаем такой функции может рассматриваться хорошо согласующаяся с традициями следующая конкретизация приведенного определения: функция есть множество импульсов [4–8, 14, 15]. При этом нетрадиционность импульса как абстракции действия состоит в его существенной процессональности.

Целостная система классических, неоклассических и неклассических функциональных структур образует фундамент логико-математического дескрипирования. Применение же его для решения задач связано со вскры-

тием логики их решений. В основе последних лежат декомпозиционные структуры.

Решение любой задачи, как правило, сопряжено с декомпозицией ее на более простые задачи, а значит, с декомпозицией соответствующей ей функции. В основе этих декомпозиций лежат отношения между сложными и сравнительно простыми объектами. Особое место среди них занимают отношения типа *редукций*. Последние базируются на функциях, которые в определенном смысле упрощают исходную задачу (функцию) и этим сводят (редуцируют) их к программам экспликативного программирования [9–11].

Непосредственно из дескриптивного аналога теоремы Геделя о неполноте вытекает, что логико-математическое дескрипирование не сводится не только к абсолютно, но даже к релятивно полной совокупности редукций. Однако, как показано, например в [9–12], удается построить финитную систему редукционных отношений, которая является здесь прагматически полной. Покажем, что уже простейшие частные случаи таких отношений, как, например, базирующиеся на редукции и *h*-редукции, обеспечивают достаточно богатый арсенал средств дескрипирования.

Введем понятия редукции и *h*-редукции. Функцию *g* называют *редукцией* функции *f* справедливо тождество $g; f = f$. Функцию *g* называют *h*-редукцией функции *f* справедливо тождество $g; f = f; h$.

Заметим, что в приведенных определениях «;» — представляет собой оракул средств последовательного применения, точно так же, как *f*, *g* и *h* — оракулы законов, правил различной природы. Здесь они актуализируются в соответствии с заявленной ранее прагматикой, так «;» есть операция мультиплицирования, сопоставляющая упорядоченной паре функций (классических, неоклассических или неклассических) (*g, f*) новую функцию $g; f$, которая представляет собой последовательное выполнение исходных функций, обобщающее обычное произведение функций.

Значимость введенных понятий состоит в обоснованных, например, в [9–12] тезисах редукционности и *h*-редукционности, содержательный смысл которых состоит в том, что если функция *g* есть редукцией (*h*-редукцией) функции *f*, то последняя может быть представлена в виде следующей схемы программы: $F \equiv \text{repeat } g \text{ until } p \quad ((F \equiv \text{Init}; \text{repeat } g; h \text{ until } p)$. Здесь *p* — соответствующий *g* предикат, а *Init* — так называемая функция инициализации [8, 12].

Чтобы продемонстрировать возможности редукционного дескрипирования задач обратимся к ряду простых, но репрезентативных задачах численного анализа.

Дескрипирование в среде микроинтеграции. Пусть требуется решить класс задач, состоящий из одной единственной задачи вычисления \sqrt{x} с заданной точностью ε , где *x* и ε — положительные вещественные числа. Поэтому, ввиду сказанного, ее решение может быть адекватно представлено в среде микроинтеграции.

Пусть $\{y_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ — последовательность, в которой $y_0 = a$; $y_{i+1} = \frac{1}{2}\left(y_i + \frac{x}{y_i}\right)$; ($i = 0, 1, 2, \dots$), где a — некоторое положительное вещественное число. Известно, что эта последовательность независимо от a сходится к \sqrt{x} . Отсюда следует, что программирование вычисления \sqrt{x} с заданной точностью может быть сведено к детализации именной функции f , которая преобразует именованное множество $\{(u, x), (v, \varepsilon), (w, 0)\}$ в именованное множество $\{(w, y_n)\}$, где y_n — первый член указанной последовательности, для которого выполнено условие $|y_n^2 - y_{n-1}^2| < \varepsilon$.

Рассмотрим именованную функцию $w_{\text{pr}} := w$; $w := \frac{1}{2}\left(w_{\text{pr}} + \frac{u}{w_{\text{pr}}}\right)$, где ячейка с именем w_{pr} содержит предыдущий элемент по отношению к элементу, хранящемуся в ячейке с именем w . Очевидно, что эта именная функция является искомой редукцией функции f . Следовательно,

$$f \equiv \text{repeat } w_{\text{pr}} := w; w := \frac{1}{2}\left(w_{\text{pr}} + \frac{u}{w_{\text{pr}}}\right) \text{ until } |w_{\text{pr}}^2 - w^2| < \varepsilon.$$

При этом правильность вывода непосредственно вытекает из построения.

Дескриптивное в среде макроинтеграции. Ключевое отличие от предыдущего состоит в оракульности получаемых обогащений ИСР. При этом способы использования оракулов могут быть сколь угодно сложными. Это обуславливает необходимость прагматико-обусловленной индивидуализации среди них методов, адекватных сегодняшним представлениям о построении ИТС и СП. В [9, 11, 12] обстоятельно обосновано выделение среди сред макроинтеграции сред *рудиментарной* и *бипольной интеграции*. Для сред рудиментарной интеграции (рудиментарных сред (РС)) использование оракулов, содержательно говоря, ограничивается тривиальной подстановкой.

В случае же сред бипольной интеграции (бипольных сред (БС)) при решении задач задействуются не только средства макро- и микроинтеграции, но также, в полной мере, и интерфейсная среда. Обусловлено это не столько оракульностью обогащения ИСР, сколько необходимостью поддержания нетривиальных зависимостей между самими оракулами. Причем очевидно, что наличие таких «базовых» зависимостей порождает зависимости уже между самими процессами взаимодействия оракулов, т.е. зависимости высшего типа и т.д.

Проведем дескриптивное в РС применительно к задаче нахождения решений в классе уравнений вида $x = \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

- она определена и непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой;

- существует такое вещественное число $p < 1$, что для всех x модуль производной $|\varphi'(x)| \leq p$.

Известно, что применительно к такому классу уравнений метод последовательных приближений сходится. Иными словами, начав с произвольного вещественного числа x_0 (начального приближения), можно построить последовательность x_0, x_1, x_2, \dots , где $x_i = \varphi(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$, сходящуюся к решению исходного уравнения.

В основе дескриптивирования поиска решения уравнения, очевидно, лежит сведение его к вычислению приближенного решения, то есть такого элемента упомянутой последовательности приближений, который удовлетворяет двум условиям:

- для любого $i < n$ $|x_i - x_{i-1}| \geq \varepsilon$, где ε — наперед заданное положительное вещественное число;
- $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$.

Отсюда следует, что поиск приближенного решения уравнения $x = \varphi(x)$ поддерживается функцией f , которая преобразует именное множество $\{(v, x_0), (u, \varepsilon)\}$ в именное множество $\{(v, x_n)\}$, где x_n — первый член последовательности приближений, для которого выполняется второе условие.

В качестве редукции функции f , очевидно, может быть выбрана именная функция $v_{pr} := v; v := \varphi(v_{pr})$. Здесь v_{pr} — имя ячейки, в которой содержится предыдущий элемент по отношению к элементу, присвоенному ячейке с именем v .

Отыскав нужную редукцию, можем автоматически построить заведомо корректную схему программ:

$$f \equiv \text{repeat } v_{pr} := v; v := \varphi(v_{pr}) \text{ until } |v_{pr} - v| < u.$$

Дескриптивирование в БС проиллюстрируем применительно к задачам вычисления операции суммирования. При этом под функцией, заданной операцией суммирования, понимают функцию, определяемую равенством

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, m) = \sum_{i=1}^m g(x_1, \dots, x_{n-1}, i), \text{ где } g(x_1, \dots, x_{n-1}, i) \text{ — произвольная, но}$$

фиксированная функция, зависящая от вещественных переменных $x_1, \dots, \dots, x_{n-1}$ и переменной i , принимающей натуральные значения.

В качестве функциональной структуры программы вычисления функции $f(x_1, \dots, x_n)$, зависящей от вещественных переменных x_1, \dots, x_{n-1} и переменной x_n , принимающей натуральные значения, целесообразно выбрать именную функцию F , которая отображает именное множества $\{(v_1, a_1), \dots, (v_{n-1}, a_{n-1}), (v_n, m)\}$ в именное множества $\{(w, f(a_1, \dots, a_{n-1}, m))\}$, где a_1, \dots, a_{n-1} — вещественные числа, а m — натуральное число. Что же касается построения соответствующей ИС, то ее задание упирается в построение подходящей h -редукции функции F .

Чтобы построить такую h -редукцию, обратимся к основному свойству функции $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, 1),$$

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, m+1) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, m) + g(x_1, \dots, x_{n-1}, m+1).$$

Непосредственно отсюда следует, что оператор присваивания $v_n := v_n + 1$ является $v_n := v_n + 1; w := w + G$ -редукцией функции f , где G — именная функция, сопоставляющая каждому именованному множеству $\{(v_1, a_1), \dots, (v_{n-1}, a_{n-1}), (v_n, m)\}$ число $g(a_1, \dots, a_{n-1}, m)$. Поэтому имеет место равенство:

$$F \equiv u := 0; w := 0; \text{repeat } u := u + 1; w := w + G \text{ until } u = v_n.$$

Характерной особенностью данной схемы является ее относительность, проявляющаяся во вхождении функции G . Поэтому, как и в случае РС, она представляет собой структуру не конкретной программы, а программы с оракулом (схемы программ). Конкретные программы получаются из этой схемы путем замены функции G конкретной функцией.

Возьмем, например, в качестве $g(x_1, \dots, x_{n-1}, i)$ функцию $g(i) = \frac{1}{i}$.

Производя указанную замену, получим программу часто рассматриваемой функции $\sum_{i=1}^m \frac{1}{i}$: $F \equiv u := 0; w := 0; \text{repeat } u := u + 1; w := w + 1/i \text{ until } u = v$.

Совершенно аналогичным образом дескриптируется вычисление функции, определяемой равенством:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, k, m) = \sum_{i=k}^m g(x_1, \dots, x_{n-1}, i), \quad (k \leq m).$$

А именно: $F \equiv u := k - 1; w := 0; \text{repeat } u := u + 1; w := w + G \text{ until } u = v_{n+1}$.

Используя эту программу, не представляет никакого труда построить программу для вычисления функции, заданной равенством:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=k(x_1, \dots, x_n)}^{m(x_1, \dots, x_n)} g(x_1, \dots, x_n, i),$$

где $k(x_1, \dots, x_n)$ и $m(x_1, \dots, x_n)$ — такие функции вещественного аргумента и натурального значения, что $k(x_1, \dots, x_n) \leq m(x_1, \dots, x_n)$ для всех x_1, \dots, x_n . Ниже представлена соответствующая схемы программы:

$$F \equiv v_{n+1} := m\{v_1, \dots, v_n\}; u := k\{v_1, \dots, v_n\} - 1; w := 0;$$

$$\text{repeat } u := u + 1; w := w + G \text{ until } u = v_{n+1},$$

где $m\{v_1, \dots, v_n\}$ и $k\{v_1, \dots, v_n\}$ — именные функции, соответствующие функциям $k(x_1, \dots, x_n)$ и $m(x_1, \dots, x_n)$.

В отличие от случая рудиментарных сред, задачи, решаемые в рамках бипольных сред, как задачи высшего типа характеризуются нетривиальной взаимосвязью многих оракулов. Поэтому адекватное решение их нецелесообразно ограничивать рамками РС, так как оно объективно требует более высокого уровня интеграции, индуцированного нетривиальным взаимодействием оракулов, как между собой, так и с макро- и микросредой интеграции.

Рассмотренные функциональные и декомпозиционные структуры, являются важнейшими аналитическими инструментами логико-математического дескрипирования задач и их решений. Однако очевидно, что ограничиться в решении задач лишь анализом нельзя. Ведь синтез решения любой задачи, опирающийся на предварительно проведенный ее анализ является необходимой составляющей процесса решения. Такое взаимодополнение анализа и синтеза играет ключевую роль в концепции ОС-System. Оно нашло непосредственное отражение в общезначимом статусе логико-предметной взаимосвязи понятий ОЗСР и ОЗС, которая естественно переносится как на уровень интеграционных сред и систем, так и любых других видов открыто-замкнутых сред и систем. Следствием общезначимости ЛПО в открыто-замкнутых, в частности, интеграционных рассмотрениях является его малосодержательность. Поэтому необходимо прагматико-обусловленное обогащение ЛПО ИСР. Предварим его некоторыми содержательными соображениями.

Ранее отмечалось, что прагматика данной работы тесно связана с изучением *бизнес-процессов*, как *процессов поддерживающих решение тех или иных задач в иерархически организованной среде*. В свете ранее изложенного предположение о том, что любой такой процесс опирается на адекватное прагматике задачи разбиение ее на более простые составляющие, не является излишне обремененным конкретикой. При этом остовом такого разбиения является, очевидно, поддерживающее иерархию среды отношение подчиненности, а глубина и широта разбиения ограничена лишь требованием адекватности прагматике. Поэтому индивидуализация среди ЛПО ИСР логико-предметных отношений иерархического типа соответствует прагматике данной работы, а следовательно, является лейбницевым обогащением. Последнее, являясь сущностью, может быть рассмотрено с точки зрения ОЗС.

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ЛПО В КОНТЕКСТЕ ОС-SYSTEM

В первом приближении любая система, поддерживающая иерархическое ЛПО представляет собой предметное обогащение остова отношения подчиненности. Ключевым элементом микросреды остова, рассматриваемого в контексте ОЗСР, очевидно, является биполь <главный, подчиненный>, погруженный в логику частичного порядка. По сути, реализация такого звена подчиненности является редукцией процесса экспликации отношения подчиненности любой иерархически организованной среды. При этом, природа упомянутого ЛПО как обогащения отношения подчиненности обладает явно выраженной нетривиальной оракульностью и, соответственно, сама иерархическая среда — макроинтеграционностью. Необходимо отметить, что та или иная прагматико-мотивированная актуализация оракулов ЛПО обогащает рассмотрения, переводя их в плоскость рассмотрения более конкретных сред и систем.

Рассмотрим в рамках ОС-System один прагматико-обусловленный вид такого обогащения, направленный на поддержание процессов анализа бизнес-процессов в предметной области и реализованный авторами в виде ИТС «СКИФ». В первом приближении это обогащение сводится к рассмотрению биполя подчиненности как ИСР, которая поддерживает взаимодействие ассоциированных с биполем задач, функций и информационных потоков (информации). Рассмотрим это взаимодействие с логико-предметной точки зрения, т.е. как оракульное ЛПО, в котором задачи, функции и информация вовлекаются как оракулы. Дескриптивное, ввиду изложенного выше проведем в бипольной среде интеграции.

Биполь *<задача, функция>* поддерживает взаимодополнительность задач и функций рассматриваемого биполя подчиненности. Его обогащение в системе «СКИФ» поддерживается операциями «распараллеливание» и «функциональная конкретизация». Заметим, что здесь и далее термин «операция» понимается в широком, естественно-научном, а не формально-математическом смысле. Содержательно, суть первой состоит в конкретизации связи *от полюса «главный» к полюсу «подчиненный»* как узлов иерархии. Здесь параметр (оракул) «задание» как носитель наиболее общих, в том числе непроцедурных, представлений о присущей биполю задаче (т.е. «то, что надо сделать») обогащается неким агрегатом параметров (оракулов) «функция» как конкретизаций того, «что надо сделать» тем, «как это делать». При этом сам агрегат также, очевидно, есть оракулом этой системы, который может быть актуализирован, например, как множество. Сказанное, в первом приближении, можно представить в виде диаграммы (рис. 1).

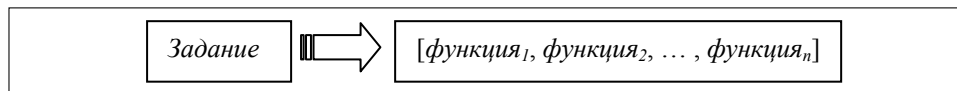


Рис. 1. Операция распараллеливания

Операция распараллеливания обогащает лишь природу взаимодополнительности биполя *<задача, функция>* и никак не затрагивает природу собственно полюсов. Обогащение ее, естественно, связано с исключением абстракции оракульности этих полюсов.

Роль функциональной конкретизации (ФК) в дескриптивном биполя *<задача, функция>* состоит в обеспечении применимости функции к аргументу. Природа таких применений обстоятельно рассмотрена в [8, 12]. Среди всего их многообразия были мотивировано индивидуализированы два их общезначимых типа: непосредственное и опосредованное применения. Содержательный смысл ФК состоит в том, что функция биполя *<задача, функция>* может быть применена к аргументу либо непосредственно, и тогда это означает, что дальнейшего ее обогащения не требуется, либо опосредованно. Поэтому функции первого типа именуют *базисными функциями*. В последнем случае речь идет об апплицировании функции [12], которое также имеет явно выраженный оракульный характер. В ИТС «СКИФ» апплицирование функции актуализируется в виде задания «применить функцию к аргументу» одному из подчиненных узлов иерархии. В этом случае новое задание должно будет пройти весь процесс обогащения на подчиненном узле. Поэтому естественно такие функции называть *составными функциями*.

Таким образом, процесс обогащения биполя <задача, функция> может быть в первом приближении представлен следующей диаграммой (рис. 2).

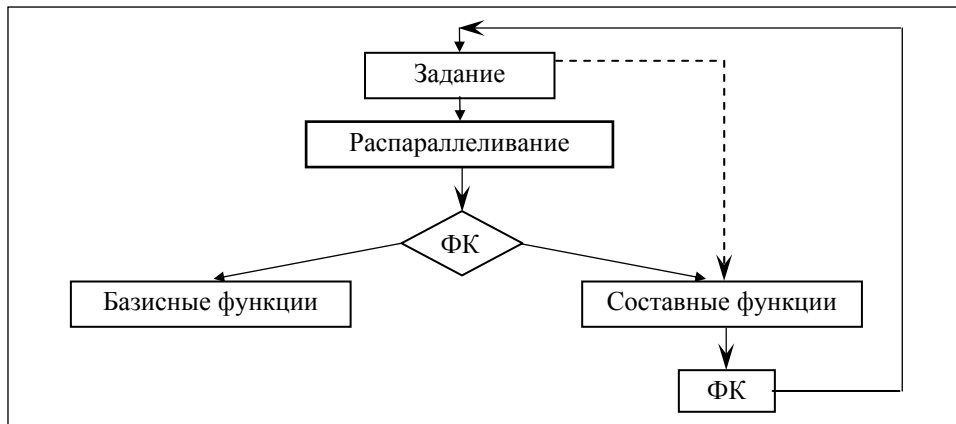


Рис. 2. Обогащение биполя

Информационное обогащение параметров «задание» и «функция» также взаимное. С одной стороны актуализация оракула «информация» непосредственно обогащает базисные функции и опосредованно — составные функции и задания. С другой — функции не только получают, но и продуцируют информацию, обогащая этим в целом информационное поле. Ввиду достаточной прозрачности этих процессов, обстоятельно останавливаться на них не стоит. Хотя отметим, что любая базисная функция узла должна быть полностью конкретизирована на нем. Ведь последующих конкретизаций ее не предусмотрено. Это означает, что дескриптивное базисных функций по необходимости выполняется в среде микроинтеграции.

Рассмотренные здесь операции распараллеливания, функциональной конкретизации и информационного обогащения составляют остов взаимодействия задач, функций и информации биполя <главный, подчиненный> дерева подчиненности исследуемой иерархически организованной среды. Именно он составляет ядро системы анализа бизнес-процессов ИТС «СКИФ».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение любой задачи суть интеграция решений ее подзадач. Значимость интеграционной проблематики в информатико-технологической области сегодня признается практически всеми. При этом современное ее состояние характерно тем, что применяемые здесь традиционные методы решения задач носят явно выраженную экстенсивную природу. Содержательно говоря, все они поддерживают стратегию интеграции «от достигнутого», т.е. от отдельных решений подзадач. Ярким представителем этого подхода является, например, так называемое модульное программирование, в котором основное внимание уделено стандартизации собственно модулей, в частности, присущих им средств коммутации как универсального средства интеграции. Однако для интеграционных задач не столько важна потенциальная возможность их решения, сколько то, что, во-первых, с любой из них *нераз-*

ривно связан определенный прагматикой решаемой задачи смысл (интенционал), и, во-вторых, эффективное решение любой интеграционной задачи возможно только посредством учета ее интенционала в рассмотрении. Именно это обуславливает рассмотрение сред интеграции, презентующих смыслы задач. Поэтому создание инструментария, поддерживающего построение прагматико-обусловленных ИСР является ключевой задачей в интеграционной проблематике ИТС. Предложенный в работе подход к исследованию ИТС посредством вовлечения в рассмотрение взаимодействия полюсов биполя <ИСР, ИС> позволяет реально, а не номинально поддерживать взаимодополнение процессов решения информатико-технологических проблем с их результатами и, следовательно, не просто обеспечить потенциальную возможность решения интеграционной задачи, но и, что наиболее важно, поддержать процесс пошагового порождения соответствующей среды интеграции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Редько И.В.* Открыто-замкнутые основания сред интеграции. Часть 1. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 4. — С. 1–17.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972. — 624 с.
3. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 391 с.
4. *Редько В.Н., Редько И.В., Гришко Н.В.* Дескриптивные системы: концептуальный базис // Проблемы программирования. — 2006. — № 2–3. — С. 75–80.
5. *Дескриптивные аспекты системного подхода* // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 3. — С. 7–28.
6. *Редько И.В.* Экзистенциальный базис дескриптивных сред // Проблемы программирования. — 2008. — № 1–2. — С. 15–24.
7. *Редько И.В.* Экзистенциальный базис сущностных сред // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 3. — С. 16–31.
8. *Редько И.В.* Теория дескриптивных сред и ее применения // Докт. дисерт. — К.: НТУУ «КПІ». — 2008. — 403 с.
9. *Редько И.В.* Експлікативне моделювання середовищ інтеграції // Наук. зап. НАУКМА. — 1999. — Т. № 16: Комп'ютерні науки. — С. 30–35.
10. *Редько И.В.* Процесологічні аспекти середовища моделювання // Наук. зап. НАУКМА. — 2003. — Т. № 21: Комп'ютерні науки. — С. 38–50.
11. *Редько И.В.* Экспликативное моделирование в среде интеграции // Вестн. Междунар. Соломонова ун-та. — 2000. — № 4. — С. 92–102.
12. *Редько В.Н., Гришко Н.В., Редько И.В.* Экспликативное программирование в среде логико-математических спецификаций // Тр. Первой междунар. науч.-практ. конф. по программированию УкрПРОГ'98 (доклад). — Киев. — 1998. — С. 71–76.
13. *Редько В.Н.* Основания композиционного программирования // Программирование. — 1979. — № 3. — С. 3–13.
14. *Редько В.Н., Редько И.В.* Экзистенциальные основания композиционной парадигмы // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 3–12.
15. *Редько И.В.* Прагматические основания дескриптивных сред // Проблемы программирования. — 2005. — № 3. — С. 3–25.

Поступила 30.04.2010

**МЕТОДОЛОГІЧНЕ І МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПЕРЕДБАЧЕННЯ
НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ
МОРФОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ**

І.О. САВЧЕНКО

Запропоновано системний підхід до дослідження задач, що виникають у процесі технологічного передбачення, за допомогою модифікованого методу морфологічного аналізу (ММА). Наведено формалізований математичний апарат застосування методу для їх розв'язання. Розглянуто одноетапну та двоетапну варіації ММА на основі експертного оцінювання, а також процедуру методу за наявності фіксованих параметрів морфологічної таблиці.

ВСТУП

У сучасному світі прогресивні технології відіграють основну роль у забезпеченні конкурентноздатності економіки. Здатність передбачити розвиток певних галузей або ринків є суттєвим фактором успішності як окремих підприємств, так і міст або держав. Крім того, враховуючи швидкоплинність подій у сучасному техногенному світі, під час планування стратегій на майбутнє необхідно враховувати не лише існуючі на даний момент проблеми, але й ті, які потенційно можуть виникнути. Це викликає постійну необхідність прийняття рішень для складних систем з людським фактором щодо їх можливої поведінки в майбутньому. Такий процес прийняття рішень формується за допомогою методології сценарного аналізу, що зводиться до застосування окремих методів якісного аналізу в певній послідовності зі встановленням чітко визначених взаємозв'язків між ними [1]. Складність задач, які виникають у цьому процесі, постійно збільшується, отже, методологічний апарат технологічного передбачення необхідно постійно вдосконалювати. Одним із потужних методів якісного аналізу з недостатньо розкритим потенціалом є ММА.

Методи морфологічного аналізу складних проблем у систематизованому вигляді були розроблені швейцарсько-американським астрофізиком і фахівцем з аерокосмонавтики Ф. Цвікі [2], як методи для впорядкування та дослідження повного набору відношень у багатовимірних комплексах задач, які не піддаються розрахунку. У подальшому метод був розширений і найчастіше використовувався різними дослідниками для створення та вдосконалення технічних систем [3–5]. Однак існують роботи, що використовують метод у галузі сценарного аналізу і вивчення майбутнього [6–11], зокрема, оцінювання підготовленості до катастроф, пов'язаних із небезпечними матеріалами [7]; аналіз геополітичної ситуації у світі через деякий проміжок часу [8]; дослідження терористичних загроз на атомній електростанції [9, 10] тощо.

Варто зазначити, що під час використання ММА для розв'язання задач передбачення практично не залучався математичний апарат, тобто кількісні процедури для оцінки елементів методу; відсутня чітка формалізація ММА для розв'язання задач технологічного передбачення; у задачах, що розглядались за допомогою ММА, раніше не враховувались ризики і параметр часу. Тому було вирішено розробити методологічне та математичне забезпечення використання модифікації ММА в задачах технологічного передбачення.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Запропонована така постановка задачі для застосування ММА в процесі технологічного передбачення:

Дано:

- множина альтернативних описів об'єкта (проблеми), що відрізняються за своєю структурою;
- множина альтернатив рішень, які доцільно враховувати в умовах проблеми, яка розглядається.

Потрібно:

- розробити методологічне і математичне забезпечення побудови моделі об'єкта з урахуванням зв'язків між його структурними елементами, ризиків, що виникають при різних реалізаціях об'єкта та змін, які відбуваються в об'єкті з часом;
- розробити формалізований апарат оцінювання результативності альтернатив рішень в умовах невизначеності та ризиків різної природи.

Для розв'язання поставленої задачі запропоновано системний підхід, структурна схема якого наведена на рисунку.

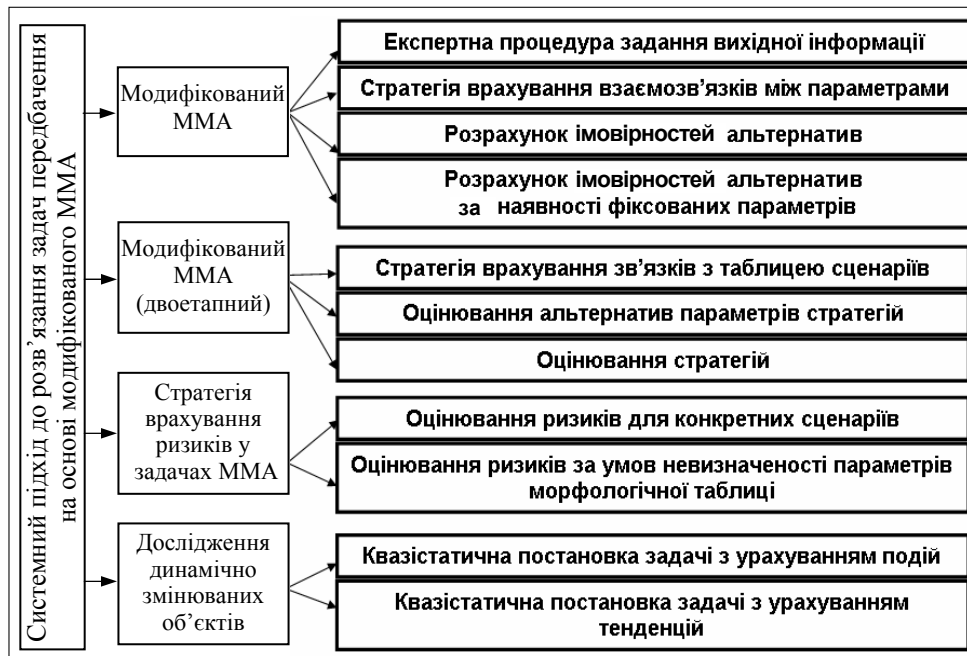


Рисунок. Структурна схема системного підходу до розв'язання задач передбачення на основі модифікованого ММА

Метою модифікованого ММА є оцінка всіх альтернатив параметрів морфологічної таблиці з урахуванням зв'язків між ними на основі експертного оцінювання. Ця інформація може бути використана в процесі технологічного передбачення [12]. При окремому застосуванні модифікованого ММА можна використовувати двохетапну процедуру для оцінювання засобами методу стратегій впливу на об'єкт, що розглядується. Крім того, структурованість методу дозволила розробити спеціальні підходи до оцінювання ризиків [13] і врахування параметра часу.

ЕКСПЕРТНА ПРОЦЕДУРА ЗАДАННЯ ВХІДНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Основним об'єктом ММА є морфологічна таблиця. Вона складається з N характеристичних параметрів F_i , $i \in \overline{1, N}$. Кожному характеристичному параметру F_i відповідає множина альтернатив $a_j^{(i)}$, $j \in \overline{1, n_i}$. Конфігурацією морфологічної таблиці назвемо вектор $\{a_{j_1}^{(1)}, a_{j_2}^{(2)}, \dots, a_{j_N}^{(N)}\}$, що складається з альтернатив кожного характеристичного параметра таблиці. Вигляд морфологічної таблиці представлено в табл. 1.

Під час застосування ММА в задачах технологічного передбачення характеристичними параметрами, як правило, є фактори, стан яких характеризує стан проблеми в цілому; альтернативами характеристичних параметрів є альтернативні стани відповідних факторів, конфігурацією морфологічної таблиці є сценарій. Для деякої конкретної проблеми структура морфологічної таблиці визначається спеціалістами з технологічного передбачення, можливо, на основі даних, отриманих на етапі попереднього вивчення проблеми.

Таблиця 1. Морфологічна таблиця

F_1	F_2	...	F_N
$a_1^{(1)}$	$a_1^{(2)}$...	$a_1^{(N)}$
$a_2^{(1)}$	$a_2^{(2)}$...	$a_2^{(N)}$
...
$a_{n_1}^{(1)}$	$a_{n_2}^{(2)}$...	$a_{n_N}^{(N)}$

залежить від стану факторів, стан яких характеризує стан проблеми в цілому; альтернативами характеристичних параметрів є альтернативні стани відповідних факторів, конфігурацією морфологічної таблиці є сценарій. Для деякої конкретної проблеми структура морфологічної таблиці визначається спеціалістами з технологічного передбачення, можливо, на основі даних, отриманих на етапі попереднього вивчення проблеми.

важливою вимогою до множини альтернатив кожного з параметрів є повнота, тобто альтернативи мають охоплювати всі можливі стани відповідного параметра. Наявність неврахованих альтернатив може призвести до спотворення результатів дослідження через наявність прихованих зв'язків між такими альтернативами та рештою параметрів морфологічної таблиці. Якщо набором альтернатив неможливо охопити всі стани, або передбачається, що їх множина може з часом змінитись, варто додати допоміжну альтернативу для залишку потенційних станів параметра, наприклад «Інші».

Для подальших розрахунків необхідно отримати початкові наближення $p_j^{(i)}$ для ймовірностей альтернатив характеристичних параметрів. В ідеалі це мають бути незалежні ймовірності, однак для реальних задач виконання цієї умови практично неможливе, тому для отримання цих величин пропонується застосувати експертне оцінювання [14]. Розглядаються такі способи отримання початкових наближень:

Для подальших розрахунків необхідно отримати початкові наближення $p_j^{(i)}$ для ймовірностей альтернатив характеристичних параметрів. В ідеалі це мають бути незалежні ймовірності, однак для реальних задач виконання цієї умови практично неможливе, тому для отримання цих величин пропонується застосувати експертне оцінювання [14]. Розглядаються такі способи отримання початкових наближень:

1. Рівномірний розподіл. У випадку, якщо неможливо апріорно отримати адекватні оцінки ймовірності, або використання експертної процедури для цього не є раціональним через значну невизначеність оцінок або через їх близькість, можна всім альтернативам надати однакових значень $p_j^{(i)} = 1/n_i$. Тоді результат роботи модифікованого ММА буде базуватись на використанні матриці взаємної узгодженості.

2. Пряме експертне оцінювання. Для кожної альтернативи $a_j^{(i)}$, $j \in \overline{1, n_i}$ параметра F_i , $i \in \overline{1, N}$ експертами надається оцінка $\tilde{p}_j^{(i)}$ за шкалою Міллера (табл. 2).

Таблиця 2. Шкала Міллера для оцінювання альтернатив морфологічної таблиці

Номер рівня s	Якісна характеристика s -го рівня	Кількісна характеристика s -го рівня
1	Практично неможливо	$[0 \div 0,1]$
2	Дуже мала ймовірність	$[0,1 \div 0,25]$
3	Мала ймовірність	$[0,25 \div 0,4]$
4	Середня ймовірність	$[0,4 \div 0,6]$
5	Велика ймовірність	$[0,6 \div 0,75]$
6	Дуже велика ймовірність	$[0,75 \div 0,9]$
7	Практично гарантовано	$[0,9 \div 1]$

Отримані оцінки альтернатив для кожного параметра нормують:

$$p_j^{(i)} = \tilde{p}_j^{(i)} / \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{p}_j^{(i)}.$$

3. Експертне оцінювання попарними порівняннями. Для кожного параметра F_i , $i \in \overline{1, N}$ експерти оцінюють кожну пару його альтернатив з точки зору переваги однієї альтернативи над іншою. Для пари альтернатив $a_j^{(i)}$, $a_k^{(i)}$ дається оцінка $m_{jk}^{(i)}$ згідно з табл. 3.

Таблиця 3. Шкала визначення оцінки переваги

Кількісна оцінка переваги	Якісна характеристика переваги
1	Однакова ймовірність
3	Помірна перевага
5	Суттєва перевага
7	Дуже сильна перевага
9	Абсолютна перевага
2, 4, 6, 8	Проміжні значення

Якщо оцінка $m_{jk}^{(i)}$ подана на основі порівняння j -ї та k -ї альтернатив, то оцінка $m_{kj}^{(i)}$ має обернене значення: $m_{kj}^{(i)} = 1/m_{jk}^{(i)}$. Тоді оцінки ймовірності альтернатив мають вигляд:

$$p_j^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} m_{jk}^{(i)}}{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} m_{jk}^{(i)}}.$$

Кількість питань до експертів під час прямого оцінювання становить $\sum_{i=1}^N n_i$, у випадку оцінювання попарними порівняннями — $\sum_{i=1}^N \frac{n_i(n_i - 1)}{2}$.

Метод попарних порівнянь має найбільшу точність серед розглянутих, однак він має також і більшу кількість питань для експертів. Метод отримання початкових наближень обирають у залежності від того, наскільки важливим це є для задачі, що розглядається. Чим більше залежностей між параметрами морфологічної таблиці, тим менше результат залежить від початкових наближень і, відповідно, можна обирати менш трудомісткі методи. Для більшості задач достатньо прямого експертного оцінювання.

СТРАТЕГІЯ ВРАХУВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ПАРАМЕТРАМИ

Для врахування зв'язків між параметрами морфологічної таблиці пропонується використовувати числову матрицю взаємної узгодженості. Відповідно до розробленої стратегії кожній парі альтернатив $a_{j_1}^{(i_1)}, a_{j_2}^{(i_2)}$ різних параметрів F_{i_1}, F_{i_2} присвоюється оцінка $c_{i_1 j_1, i_2 j_2} \in [-1, 1]$ згідно з табл. 4.

Таблиця 4. Пояснення оцінок матриці взаємної узгодженості

Оцінка	Пояснення
-1	Альтернативи повністю неузгоджені; конфігурація з цією парою альтернатив неможлива
(-1;0)	Альтернативи неузгоджені; вибір однієї з них певною мірою зменшує ймовірність вибору іншої
0	Альтернативи незалежні; вибір однієї з них не впливає на вибір іншої
(0;1)	Альтернативи узгоджені; вибір однієї з них певною мірою збільшує ймовірність вибору іншої
1	Альтернативи повністю узгоджені; вибір однієї з них тягне за собою вибір іншої

Таблиця 5. Шкала експертних оцінок матриці взаємної узгодженості

Відповідь експерта	Числове значення
Абсолютно невірно	-1
В цілому невірно	-0,7
Скоріше «ні», ніж «так»	-0,3
Частково вірно, частково невірно	0
Скоріше «так», ніж «ні»	0,3
В цілому вірно	0,7
Абсолютно вірно	1

Для заповнення матриці взаємної узгодженості експертам пропонуються питання щодо узгодженості кожної пари альтернатив різних характеристик параметрів. Кількість питань можна зменшити завдяки виключенню очевидних питань. Форма питань може бути різною, зручно ставити питання у формі оцінки правомірності висловлювання, що пов'яже відповідні альтернативи. Відповіді експертів переводяться в числову форму за шкалою (табл. 5).

У результаті цієї процедури формується матриця взаємної узгодженості, як показано в табл. 6. Вважається, що параметри в парі однаково впливають один на одного, тому, як правило, наводять тільки половину матриці.

Таблиця 6. Матриця взаємної узгодженості

Параметри морфологічної таблиці		F_1				...	F_{N-1}			
		$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$...	$a_{n_1}^{(1)}$...	$a_1^{(N-1)}$	$a_2^{(N-1)}$...	$a_{n_{N-1}}^{(N-1)}$
F_2	$a_1^{(2)}$	$c_{11,21}$	$c_{12,21}$...	$c_{1n_1,21}$					
	$a_2^{(2)}$	$c_{11,22}$	$c_{12,22}$...	$c_{1n_1,22}$					
					
	$a_{n_2}^{(2)}$	$c_{11,2n_2}$	$c_{12,2n_2}$...	$c_{1n_1,2n_2}$					
...				
F_N	$a_1^{(N)}$	$c_{11,N1}$	$c_{12,N1}$...	$c_{1n_1,N1}$	$c_{(N-1)1,N1}$	$c_{(N-1)2,N1}$...	$c_{(N-1)n_{N-1},N1}$	
	$a_2^{(N)}$	$c_{11,N2}$	$c_{12,N2}$...	$c_{1n_1,N2}$	$c_{(N-1)1,N2}$	$c_{(N-1)2,N2}$...	$c_{(N-1)n_{N-1},N2}$	
	
	$a_{n_N}^{(N)}$	c_{11,Nn_N}	c_{12,Nn_N}	...	c_{1n_1,Nn_N}	$c_{(N-1)1,Nn_N}$	$c_{(N-1)2,Nn_N}$...	$c_{(N-1)n_{N-1},Nn_N}$	

РОЗРАХУНОК ІМОВІРНОСТЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ

Оскільки з побудовою матриці взаємної узгодженості вибори тих чи інших альтернатив параметрів вже перестають бути незалежними подіями, потрібно знайти ймовірності $p_j^{(i)}$ вибору кожної альтернативи $a_j^{(i)}$, $j \in \overline{1, n_i}$, $i \in \overline{1, N}$, враховуючи вплив матриці взаємної узгодженості на оцінки альтернатив параметрів. Для цього розв'язують систему рівнянь Байеса:

$$\left\{ \begin{aligned}
 p_1^{(1)} &= \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} P(a_1^{(1)} | a_{i_2}^{(2)}, a_{i_3}^{(3)}, \dots, a_{i_N}^{(N)}) \prod_{j=2}^N p_{i_j}^{(j)}, \\
 &\dots \\
 p_{n_1}^{(1)} &= \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} P(a_{n_1}^{(1)} | a_{i_2}^{(2)}, a_{i_3}^{(3)}, \dots, a_{i_N}^{(N)}) \prod_{j=2}^N p_{i_j}^{(j)}, \\
 &\dots \\
 p_1^{(N)} &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_{N-1}=1}^{n_{N-1}} P(a_1^{(N)} | a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}, \dots, a_{i_{N-1}}^{(N-1)}) \prod_{j=1}^{N-1} p_{i_j}^{(j)}, \\
 &\dots \\
 p_{n_N}^{(N)} &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_{N-1}=1}^{n_{N-1}} P(a_{n_N}^{(N)} | a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}, \dots, a_{i_{N-1}}^{(N-1)}) \prod_{j=1}^{N-1} p_{i_j}^{(j)}, \\
 \sum_{i=1}^{n_1} p_i^{(1)} &= 1, \\
 &\dots \\
 \sum_{i=1}^{n_N} p_i^{(N)} &= 1.
 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Вирази вигляду $P(a_j^{(i)} | \dots)$ означають імовірність вибору альтернативи $a_j^{(i)}$ за умови, що інші параметри набули певних альтернатив, перерахованих після вертикальної риски. Значення умовної ймовірності апроксимуються, виходячи з таких умов:

$$P(a_j^{(i)} | V) = \begin{cases} 0, & (c_{ij,V_1} = -1) \vee \dots \vee (c_{ij,V_{N-1}} = -1), \\ p_j^{(i)}, & (c_{ij,V_1} = 0) \wedge \dots \wedge (c_{ij,V_{N-1}} = 0), \\ 1, & (c_{ij,V_1} = 1) \wedge \dots \wedge (c_{ij,V_{N-1}} = 1). \end{cases}$$

Тут V — набір альтернатив, набутих усіма параметрами, крім i -го, у зазначеній конфігурації; c_{ij,V_k} — значення матриці взаємної узгодженості для j -ї альтернативи i -го параметра й альтернативи V_k ; $p_j^{(i)}$ — оцінка для j -ї альтернативи i -го параметра, отримана від експертів.

У системі рівнянь (1) $\sum_{i=1}^N m_i$ невідомих та $\sum_{i=1}^N m_i + N$ рівнянь. Для кожного параметра одне з рівнянь є надлишковим. Після виключення цих рівнянь кількість рівнянь і змінних збігатиметься.

Система рівнянь (1) є нелінійною, найефективнішими для її розв'язання є ітераційні методи, оскільки система легко зводиться до необхідного вигляду, і початкові наближення є достатньо близькими до розв'язку.

Розв'язавши систему (1), отримуємо морфологічну таблицю, що містить імовірності вибору альтернатив з урахуванням взаємозв'язків між параметрами морфологічної таблиці. Ці значення можуть бути використані для визначення найбільш важливих станів параметрів об'єкта, що розглядається, ранжування цих станів за ймовірністю виникнення, вибору найбільш імовірних конфігурацій, а також в якості вхідних даних для подальших методів, зокрема для другого етапу двохетапної процедури морфологічного аналізу.

РОЗРАХУНОК ІМОВІРНОСТЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ ЗА НАЯВНОСТІ ФІКСОВАНИХ ПАРАМЕТРІВ

У розглянутій задачі вважалося, що стани всіх параметрів морфологічної таблиці є невизначеними. Однак під час розгляду деяких проблем може бути корисним дослідити характеристики об'єкта при конкретних значеннях певних його параметрів. Таким чином, створюється модель виводу «what-if» («що буде, якщо»). Гнучкість ММА дозволяє зафіксувати будь-який параметр або параметри й отримати розподіли ймовірностей альтернатив інших параметрів.

Нехай існує підмножина параметрів $F' \subset F$, стан яких зафіксовано, тобто вважається, що поява однієї з альтернатив є гарантованою. Позначимо множину індексів фіксованих параметрів B , тоді $F' = \{F_i | i \in B\}$. Кожному фіксованому параметру F_i відповідає індекс b_i його фіксованої альтернати-

ви $a_{b_i}^{(i)}$. Для цієї альтернативи $p_{b_i}^{(i)} = p_{b_i}'^{(i)} = 1$, для інших альтернатив фіксованого параметра $p_j^{(i)} = p_j'^{(i)} = 0, j \in \overline{1, n_i}, j \neq b_i$.

Це означає, що потрібно змінити систему рівнянь (1) для розрахунку ймовірностей альтернатив параметрів і виключити з неї рівняння, що відповідають фіксованим параметрам:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_l'^{(k)} = \sum_{i_m} \dots \sum_{m \in \overline{1, N} \cap B, m \neq k} P(a_l^{(k)} | \{a_{i_m}^{(m)} | m \in \overline{1, N} \cap B, m \neq k\}) \prod_{j \in \overline{1, N} \cap B, j \neq k} p_{i_j}'^{(j)}, \\ k \in \overline{1, N} \cap B, l \in \overline{1, n_k}, \\ \left\{ \sum_{i=1}^{n_k} p_i'^{(k)} = 1 \right\}, k \in \overline{1, N} \cap B. \end{array} \right.$$

Розв'язком системи будуть імовірності альтернатив нефіксованих параметрів при обраних альтернативах фіксованих параметрів.

ДВОХЕТАПНИЙ МОДИФІКОВАНИЙ МОРФОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ

У процесі технологічного передбачення часто буває доцільним застосування двохетапної процедури ММА. При цьому на першому етапі здійснюється аналіз неконтрольованих факторів, так званих факторів «зовнішнього світу» для об'єкта, проблеми або явища, що розглядається. Другий етап дослідження полягає в синтезі стратегій, які найефективніше враховувати в умовах сукупності можливих реалізацій об'єкта, визначених на першому етапі.

Так само, як і на першому етапі, на другому етапі морфологічного дослідження будується морфологічна таблиця, у цьому випадку для стратегій, які будуть розглядатися з точки зору впливу на ситуацію, описану в результатах роботи методу на першому етапі. Відмінність процедури ММА на другому етапі полягає в тому, що параметри морфологічної таблиці другого етапу залежать від зовнішніх даних, у цьому випадку — від параметрів морфологічної таблиці першого етапу. Для врахування цих зв'язків пропонується використовувати матрицю узгодженості, схожу на матрицю взаємної узгодженості першого етапу морфологічного дослідження, однак зв'язок між параметрами в цьому випадку є одностороннім.

Відповідно до розробленої стратегії кожній парі альтернатив $a_{j_1}^{(i_1)}, a_{j_2}^{(i_2)}$ параметрів F_{i_1}, F_{i_2} таблиць першого та другого етапів присвоюється оцінка $c_{i_1 j_1, i_2 j_2} \in [-1, 1]$ згідно з табл. 7.

Матриця заповнюється експертами за допомогою процедури, аналогічної до заповнення матриці взаємної узгодженості.

Таким чином, на основі результатів розрахунку першого етапу морфологічного дослідження та матриці узгодженості необхідно розрахувати:

- оцінки результативності $E_j^{(i)}$ кожної з альтернатив параметрів стратегій $a_j^{(i)}$;

- оцінки результативності $E\{S_l\}$ стратегій S_l , заданих конфігураціями морфологічної таблиці стратегій.

Таблиця 7. Пояснення оцінок матриці узгодженості

Оцінка	Пояснення
-1	Альтернатива параметра стратегії є повністю неефективною під час вибору відповідної альтернативи параметра сценарію
(-1;0)	Вибір відповідної альтернативи параметра сценарію певною мірою зменшує ефективність альтернативи параметра стратегії
0	Ефективність альтернативи параметра стратегії ніяк не залежить від вибору відповідної альтернативи параметра сценарію
(0;1)	Вибір відповідної альтернативи параметра сценарію певною мірою збільшує ефективність альтернативи параметра стратегії
1	Альтернатива параметра стратегії є повністю ефективною під час вибору відповідної альтернативи параметра сценарію

Для кожного з параметрів стратегії вибір найефективнішої альтернативи фактично є прийняттям рішення в умовах ризику. Значення очікуваної ефективності можна виразити таким співвідношенням:

$$E\{a_j^{(N+i)}\} = \sum_k P(a_j^{(N+i)} | V^{(k)})P(V^{(k)}),$$

де $a_j^{(N+i)}$ — j -а альтернатива $(N+i)$ -го параметра стратегії; $V^{(k)} = \{a_{i_k,1}^{(1)}; \dots; a_{i_k,N}^{(N)}\}$ — вектор сценарію, що складається з альтернатив кожного параметра сценарію; $P(a_j^{(N+i)} | V^{(k)})$ — результативність альтернативи $a_j^{(N+i)}$ за умов сценарію $V^{(k)}$, яка апроксимується, виходячи зі значень матриці узгодженості для цієї альтернативи параметра стратегії та заданих вектором $V^{(k)}$ альтернатив параметрів сценарію; $P(V^{(k)})$ — імовірність сценарію, яка розраховується на основі даних, отриманих на першому етапі морфологічного дослідження.

Альтернативна оцінка результативності стратегій або елементів стратегій полягає у визначенні відстані до гіпотетичної «ідеальної» стратегії, в якій для кожного сценарію обираються найефективніші альтернативи характеристичних параметрів.

$$\begin{aligned} W\{a_j^{(N+i)}\} &= \sum_k (P(a_{\max_k}^{(N+i)} | V^{(k)}) - P(a_j^{(N+i)} | V^{(k)}))P(V^{(k)}) = \\ &= E_{\max}^{(N+i)} - E\{a_j^{(N+i)}\}, \end{aligned}$$

де $E_{\max}^{(N+i)} = \sum_k P(a_{\max_k}^{(N+i)} | V^{(k)})P(V^{(k)})$ — результативність гіпотетичної «ідеальної» стратегії, в якій для кожного можливого сценарію обирається найефективніша альтернатива.

Величина $W\{a_j^{(N+i)}\}$ показує очікуване зменшення результативності елемента стратегії з урахуванням можливості появи несприятливого сценарію.

Способи оцінювання альтернатив, які було розглянуто, стосуються всієї сукупності сценаріїв з відповідним розподілом імовірності. Однак, у деяких дослідженнях можуть виникнути інші задачі, пов'язані з вибором стратегії при фіксованих значеннях одного або декількох параметрів сценарію. Такі задачі характерні, якщо шукається не одна універсальна стратегія, а декілька стратегій реакції на різні варіанти сценаріїв; або необхідно позбутися окремих, найбільш небажаних альтернатив параметрів сценарію. В такому випадку один або декілька параметрів сценарію фіксуються в якості вхідних, і результативність елементів стратегії розглядається для сценаріїв, що містять відповідні альтернативи фіксованих параметрів:

$$E\{a_j^{(N+i)} | a_{j_{in}}^{(in)}\} = \sum_k P(a_j^{(N+i)} | \tilde{V}^{(k)} \cup a_{j_{in}}^{(in)})P(\tilde{V}^{(k)} | a_{j_{in}}^{(in)}),$$

де $a_{j_{in}}^{(in)}$ — фіксоване значення вхідного параметра сценарію; $\tilde{V}^{(k)} = \{a_{j_{k,1}}^{(1)}, \dots, a_{j_{k,in-1}}^{(in-1)}, a_{j_{k,in+1}}^{(in+1)}, \dots, a_{j_{k,N}}^{(N)}\}$ — вектор альтернатив усіх інших параметрів сценарію.

У найпростішому випадку, якщо параметри стратегії не пов'язані між собою, оцінку результативності всієї стратегії $S_l = \{a_{j_1}^{(1)}, a_{j_2}^{(2)}, \dots, a_{j_{N'}}^{(N')}\}$ можна отримати способом, аналогічним до оцінювання результативності окремих її параметрів:

$$E\{S_l\} = \sum_k \left(\prod_{i=N+1}^{N+N'} P(a_{j_i}^{(i)} | V^{(k)}) \right) P(V^{(k)}),$$

де N' — кількість параметрів таблиці стратегій. У випадку, якщо параметри стратегії пов'язані між собою матрицею взаємної узгодженості, потрібно виконати перерахунок оцінок результативності альтернатив параметрів стратегій за допомогою процедури, аналогічної першому етапу ММА, використовуючи отримані значення ефективності як початкові наближення. Слід зазначити, що представлення результатів у вигляді значень ефективності окремих альтернатив параметрів є інформативнішими, оскільки кількість стратегій росте експоненційно зі збільшенням кількості параметрів, тому використання оцінок стратегій у цілому доцільно за необхідності порівняти або проранжувати невеликий набір стратегій.

ВИСНОВКИ

Створений системний підхід до використання модифікованого ММА в задачах технологічного передбачення має суттєві переваги: він дозволяє перетворити заплутану проблему в чітко структуровану задачу; одночасно розглянути дуже велику кількість різних реалізацій об'єкта та подати об'єкт у наглядному, зручному для розуміння вигляді. Крім того, створена модель є гнучкою — будь-який параметр може бути заданим в якості вхідного, після чого можна прослідкувати поведінку інших параметрів. Певним недоліком є велика кількість необхідної експертної інформації, тому є сенс шукати способи зменшення кількості експертних питань або, якщо метод використовується паралельно з іншими методами якісного аналізу, використовувати запропоновані експертні форми для декількох методів.

Розроблене математичне та методологічне забезпечення ММА дозволяє створити модель досліджуваного об'єкта (проблеми), основу на його структурі; базуючись на цій структурі, оцінити ймовірність реалізації різних його конфігурацій або певних окремих характеристик; спостерігати поведінку об'єкта, фіксуючи певні його характеристики; ранжувати за ефективністю елементи стратегій в умовах сукупності реалізацій досліджуваного об'єкта; оцінювати ризики для об'єкта, заданого морфологічною таблицею.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Згуровский М.З., Панкратова Н.Д.* Технологическое предвидение. — Киев: ІВЦ «Вид-во «Політехніка»», 2005. — 156 с.
2. *Zwicky F., Wilson A.* New methods of thought and procedure / Contributions to the symposium on methodologies, May, 22–24. — Pasadena. — 1967. — P. 273–297.
3. *Одрин В.М.* Метод морфологического анализа технических систем. — М.: ВНИИПИ, 1989. — 312 с.
4. *Одрин В.М.* Морфологический синтез систем: постановка задачи, классификация методов, морфологические методы «конструирования». — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1986. — 37 с.
5. *Mark Sh. Levin, Roman O. Vishnitskiy.* Towards Morphological Design of GSM Network // Информационные процессы. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 183–190.
6. *Ritchey T.* Futures studies using morphological analysis // Adapted from an article for the UN University Millennium Project: Futures Research Methodology Series, 2005. — 14 p.
7. *Ritchey T., Stenström M., Eriksson H.* Using morphological analysis for evaluating preparedness for accidents involving hazardous materials // Adapted from an article presented at the 4-th International conference for local authorities, November, 2002— Shanghai. — 6 p.
8. *Eriksson T., Ritchey T.* Scenario development using computerised morphological analysis // Adapted from papers presented at the Cornwallis and Winchester international OR conferences. — England, 2002. — 8 p.
9. *Ritchey T.* Strategic decision support using computerised morphological analysis // 9-th International command and control research and technology symposium, September, 2004. — Copenhagen. — 8 p.
10. *Ritchey T.* Nuclear Facilities and Sabotage: Using morphological analysis as a scenario and strategy development laboratory // Adaptation of a paper delivered to the 44-th annual meeting of the institute of nuclear materials management, July, 2003. — Phoenix. — Arizona. — 6 p.
11. *Ritchey T.* Morphological Analysis — a general method for non-quantified modeling / Adapted from a paper presented at the 16-th euro conference on operational analysis, July, 1998. — Brussels. — 11 p.
12. *Панкратова Н.Д., Савченко І.О.* Стратегія застосування методу морфологічного аналізу в процесі технологічного передбачення // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 2. — С. 35–44.
13. *Панкратова Н.Д., Савченко І.О.* Оцінювання багатofакторних ризиків в стратегії розв'язання задач технологічного передбачення // Доп. НАН України. — 2010. — № 8. — С. 36–42.
14. *Zgurovsky M.Z., Pankratova N.D.* System analysis: Theory and Applications. — Springer. — 2007. — 475 p.

Надійшла 14.12.2010

ТЕХНОЛОГИЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОТКАЗОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.В. МАКСИМЕЙ, Д.Н. ШЕВЧЕНКО

Предложен подход и средства автоматизации дискретно-событийного имитационного моделирования параметрических отказов технических систем. Представлен пример создания модели и решения известной теоретической задачи анализа параметрического отказа механической системы. Показаны возможности имитационного моделирования более сложных практических задач.

ВВЕДЕНИЕ

Если функционирование объекта можно описать количественными параметрами, то отклонение значения хотя бы одного рабочего параметра объекта за пределы допуска называется параметрическим отказом [1, 2]. Параметрические отказы обуславливаются воздействием множества деградационных факторов, в основе которых лежит вероятностная природа (случайные нагрузки и условия эксплуатации, анизотропия материалов и т.д.). Поскольку качество функционирования объекта может определяться несколькими параметрами (величина износа, коэффициент трения, предел прочности и т.п.), то в общем случае параметрический отказ представляет собой многомерный случайный процесс с непрерывным временем и непрерывным фазовым пространством.

Цель работы — автоматизация имитационного моделирования параметрических отказов технических систем.

Для достижения поставленной цели в работе предлагается:

- подход формализации параметрических отказов;
- средства автоматизации имитационного моделирования;
- технология и пример их использования.

ХАРАКТЕРИСТИКА ДЕГРАДАЦИОННЫХ ФАКТОРОВ

Деградационные факторы, определяющие процесс параметрического отказа и технических систем различаются по:

1. Типу фазового пространства:

- дискретные (например, условия применения элементов типа «вкл./выкл.»);

- непрерывные (действующие механические нагрузки).
- 2. Времени:
 - с непрерывным временем (например, износ режущего инструмента);
 - с дискретным временем (циклические, ударные нагрузки);
 - регулярные (плановые замены изношенных элементов).
- 3. Характеру изменения:
 - необратимые процессы, которые могут быть описаны монотонными функциями (например, износ или коррозия);
 - обратимые процессы (тепловая деформация);
 - периодические (изменения температуры окружающей среды).
- 4. Скорости изменения:
 - быстропротекающие процессы (например, вибрация, ударные нагрузки, внезапные отказы и процессы восстановления элементов — скачкообразное изменение значения параметра);
 - процессы средней скорости (износ режущего инструмента, рабочие нагрузки);
 - медленно протекающие процессы (износ, коррозия, ползучесть материалов).
- 5. Размерности (метры, Паскалы, количество оборотов в минуту и т.п.).
- 6. Динамическому размаху фазового пространства:
 - процессы с малым динамическим размахом (например, износ узлов подвижных сопряжений);
 - процессы с большим динамическим размахом (значения нагрузок, действующих на элементы силовой системы).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОТКАЗА

Изучение процесса параметрического отказа аналитическими методами осложняется тем, что данный процесс не является стационарным; неудовлетворительно описывается известными теоретическими моделями (такими, как пуассоновские, диффузионные и т.д.); представляет собой многомерный случайный процесс, компоненты которого, зачастую, зависимы и обладают различными вероятностными свойствами.

Одна из первых аналитических моделей параметрического отказа была предложена еще в середине 20-го века [3]. С использованием ряда допущений и упрощений для данной модели были получены значения основных показателей надежности объектов [1, 2]. Другим известным подходом изучения параметрических отказов является вероятностное физическое моделирование [4], когда деградиционный процесс имитируется физическим процессом на электронном стенде с использованием генераторов случайных напряжений, преобразователей (делителей, усилителей), компараторов, счетчиков и других электронных элементов. Однако возможности такого подхода ограничены сложностью реализации произвольных моделей деградиционных процессов, а также сбора и анализа статистики.

В данной ситуации видится перспективным использование компьютерного имитационного моделирования, которое заключается в воспроизведении процесса параметрического отказа во времени с учетом всех деградационных процессов и их взаимосвязей на ЭВМ. Собранные статистику по множеству реализаций имитационной модели процесса параметрического отказа можно оценить все интересующие нас показатели надежности объекта.

ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОТКАЗА НА ЭВМ

Основными задачами имитационного моделирования параметрического отказа объектов на ЭВМ являются [5, 6]:

1) создание или использование существующих средств автоматизации имитационного моделирования;

2) создание концептуальной модели процесса параметрического отказа, которая включает:

- выбор способа описания процесса с непрерывным временем и непрерывным фазовым пространством на компьютере — дискретном устройстве, т.е. выбор значений и количества уровней дискретизации модельного времени и фазового пространства случайного процесса (СП);

- выбор способа изменения модельного времени;

- выбор способа организации квазипараллелизма нескольких деградационных СП в исследуемом объекте;

3) создание формальной модели, которая включает определение количества и состава деградационных факторов, а также характер их совместного влияния на объект;

4) компьютерная реализация имитационной модели с использованием выбранных средств автоматизации;

5) верификация и доказательство адекватности созданной имитационной модели;

6) планирование и проведение имитационного эксперимента, а также статистический анализ данных, полученных в процессе моделирования.

ВЫБОР СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОТКАЗА

Обзор существующих средств автоматизации имитационного моделирования показал, что:

- специализированные средства автоматизации имитационного моделирования параметрических отказов технических систем отсутствуют.

- универсальные средства имитационного моделирования (в том числе, непрерывных процессов, например, Simulink, Dymola, Arena, AweSim, Extend [5]) не специализируются на данной предметной области, а поэтому требуют существенной доработки (если таковая допускается).

- средства моделирования электронных устройств (Pspice, OrCAD, Electronics Workbench и др.) при реализации вероятностного физического моделирования также требуют существенной доработки.

Поэтому для моделирования параметрических отказов объектов предлагается использовать оригинальный пакет автоматизации имитационного моделирования СМ-ДЭС [7]. Пакет СМ-ДЭС предназначен для дискретно-событийного имитационного моделирования систем; реализует агрегатно-процессный способ формализации компонентов; организует квазипараллельное моделирование компонентов способом просмотра активностей; использует способ изменения модельного времени «шаг до следующего события» [6].

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОТКАЗА В СМ-ДЭС

Для моделирования параметрического отказа в СМ-ДЭС предполагается использовать три типа агрегатов. Агрегаты первого типа генерируют «элементарные» СП, модели которых широко известны [8]. Агрегаты второго типа предназначены для функционального преобразования одного или нескольких «элементарных» СП. Агрегаты третьего типа предназначены для сбора статистики о процессе параметрического отказа. Концептуальная модель параметрического отказа в СМ-ДЭС представлена на рис. 1.

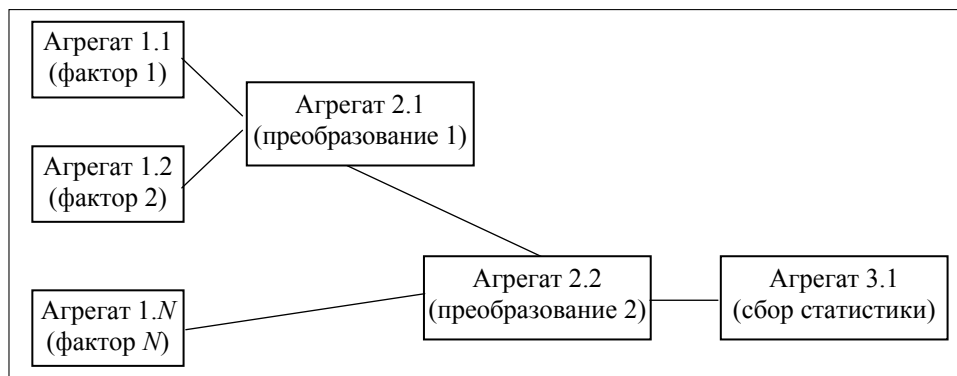


Рис. 1. Концептуальная модель параметрического отказа в пакете СМ-ДЭС (1.1. — 1.N — агрегаты первого типа; 2.1, 2.2 — агрегаты второго типа; 3.1 — агрегаты третьего типа)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ В СМ-ДЭС

Описание и моделирование процесса параметрического отказа осложнено представлением СП с непрерывным временем и непрерывным фазовым пространством на ЭВМ (дискретном устройстве) и требует решения нескольких задач:

- (1) выбор количества уровней квантования значений непрерывных процессов и шага дискретизации шкалы времени;
- (2) выбор способа изменения модельного времени и способа организации квазипараллелизма при моделировании нескольких деградационных процессов.

Решение задачи (1) связано со следующими противоречивыми стратегиями: обеспечение большой точности моделирования для детальной и

правдоподобной имитации СП; обеспечение большой скорости моделирования. В частности, для обеспечения высокой точности следует увеличивать количество уровней квантования значений СП, уменьшать шаг шкалы времени, изменять модельное время «фиксированным шагом», равным выбранному шагу шкалы времени, или использовать способ изменения модельного времени «шаг до следующего события» при условии, что рассматриваемыми событиями являются изменения значений СП на один «квант». Для обеспечения высокой скорости, напротив, целесообразно использовать способ изменения модельного времени «шаг до следующего события».

Поскольку на различных этапах жизненного цикла имитационной модели (верификация, проверка адекватности, исследование и т.д.) к ней предъявляются разные требования (по точности и скорости), а также учитываемые деградационные процессы имеют существенно различающиеся размерности и динамический размах.

Поэтому возможности изменения количества уровней квантования значений непрерывных СП, величины «кванта» и шага шкалы времени целесообразно предоставить разработчику модели на этапе формального описания объекта моделирования [6]. Для возможности воспроизведения непрерывных СП с высокой точностью фазовое пространство значений сигналов агрегатов и модельного времени в СМ-ДЭС описывается вещественным типом Extended (в системе программирования Delphi), что обеспечивает точность значений состояний СП в 18–20 значащих цифр.

Решение задачи (2) обусловлено существующей реализацией пакета СМ-ДЭС (способ изменения модельного времени: «шаг до следующего события», способ организации квазипараллелизма: просмотр активностей [6]). Поэтому, в отличие от дискретных агрегатов (моделирующих процессы с двумя состояниями «логический 0» и «логическая 1»), время следующей активизации которых единообразно определяется в СМ-ДЭС только параметрами агрегатов, на аналоговые агрегаты наряду с функциями переходов и выходов возложена дополнительная функция собственной пассивизации. Назначение аналоговым агрегатом активности «самому себе» может происходить через фиксированный интервал времени (используется для моделирования временных рядов), а также интервал времени, необходимый для изменения значения непрерывного сигнала агрегата на один «квант». Данный способ целесообразно использовать для моделирования СП с непрерывным временем. Время до очередной активизации агрегата определяется методом линеаризации моделируемого СП в рассматриваемый момент модельного времени. Методическая погрешность воспроизведения СП в этом случае сокращается по мере уменьшения величины «кванта».

АГРЕГАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ В СМ-ДЭС

Для моделирования широкого класса деградационных процессов, обуславливающих параметрический отказ технических объектов, в СМ-ДЭС реализованы агрегаты, генерирующие следующие известные СП, допускающие алгоритмическое описание (табл. 1), и агрегаты выполняющие следующие функциональные преобразования СП (табл. 2). Списки указанных агрегатов СМ-ДЭС могут дополняться.

Таблица 1. Случайные процессы, реализуемые агрегатами пакета СМ-ДЭС

СП с непрерывным временем	СП с дискретным временем
Веерный, диффузионный, марковский, полумарковский	Процесс с независимыми приращениями, процесс случайного блуждания, марковская цепь, ARMA, стационарный и нестационарный гауссовский СП с произвольным трендом, ARTA, ARCH, Gamma, TES

Таблица 2. Функциональные преобразования, реализованные агрегатами пакета СМ-ДЭС

Над одним СП	С двумя СП
Сравнение с константой (результат дискретный); сумма с константой; выбор минимального (максимального) значения в сравнении с константой; логарифмирование	Сравнение (результат дискретный); сумма; разность; произведение; отношение; выбор минимального (максимального) значения; среднее значение

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАЛИЗАЦИЙ ПРОЦЕССА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОТКАЗА

Статистический анализ реализаций имитационной модели процесса параметрического отказа предполагается проводить по двум направлениям:

- Сбор статистики о реализациях СП параметрического отказа с целью оценки математического ожидания и дисперсии данного процесса. Т.к. процесс параметрического отказа не является эргодическим, то статистический анализ данного процесса необходимо проводить по множеству реализаций, полученных при одинаковых исходных данных и начальных условиях.
- Сбор статистики о реализациях наработки объекта до отказа — момента, когда значение процесса параметрического отказа выйдет из области допустимых значений. Если оценке подлежит только вероятность безотказной работы объекта, то моделирование процесса параметрического отказа можно проводить лишь в течение требуемой наработки (если при этом отказ не возник). Учитывая, что средняя наработка до отказа часто значительно превышает нормативную наработку, данный подход существенно уменьшает ресурсоемкость исследования.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИМИТАЦИОННЫМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ

Продemonстрируем пример имитационного моделирования параметрического отказа, для которого известно аналитическое решение и значения основных показателей надежности [2].

Если изменение во времени параметра X (например, зазор между элементами подвижного сопряжения, износ и т.п.) объекта происходит по линейному закону

$$X = \alpha + \gamma t, \quad (1)$$

где α — начальное значение параметра, γ — скорость изменения параметра X , подчиняющиеся нормальному распределению с параметрами $M[\alpha] = 10$ мкм, $\sigma[\alpha] = 2$ мкм, $M[\gamma] = 5 \times 10^{-10}$ мкм/мкс, $\sigma[\gamma] = 1 \times 10^{-10}$ мкм/мкс, то вероятность безотказной работы объекта определяется выражением [2]:

$$P(t) = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{X_{\max} - M[\alpha] - M[\gamma]t}{\sqrt{(\sigma[\alpha])^2 + (\sigma[\gamma]t)^2}} \right), \quad (2)$$

где X_{\max} — максимально допустимое значение параметра X (например 50 мкм).

Имитационная модель рассматриваемого параметрического отказа в

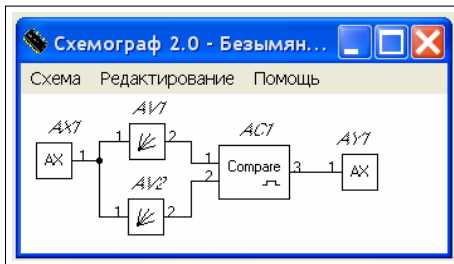


Рис. 2. Имитационная модель параметрического отказа в пакете СМ-ДЭС

пакете СМ-ДЭС представлена на рис. 2. Здесь [7] агрегат AV1 моделирует веерный процесс (1), его параметры задаются в специальном окне (рис. 3); агрегат AC1 — сравнивает текущее значение СП (1) с максимально допустимым значением параметра X , которое моделируется агрегатом AV2. Агрегаты AX1 и AY1 предназначены для управления моделированием.

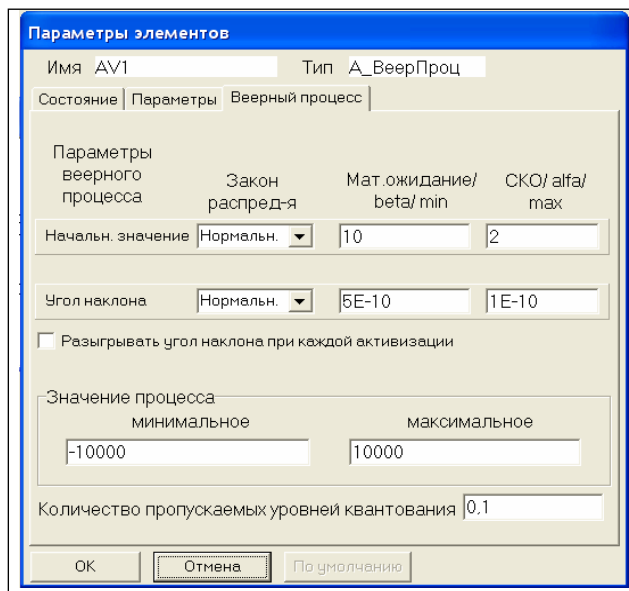


Рис. 3. Окно для доступа к характеристикам веерного СП в пакете СМ-ДЭС

Примеры реализации процесса параметрического отказа (1) в пакете СМ-ДЭС показаны на рис. 4, а на рис. 5 представлена гистограмма значений наработки объекта до отказа. По 8813 реализациям имитационной модели параметрического отказа оценка средней наработки объекта до отказа составила 23,273 часа ($\pm 0,5\%$ для доверительной вероятности 0,95), оценка стандартного отклонения — 5,571 часа.

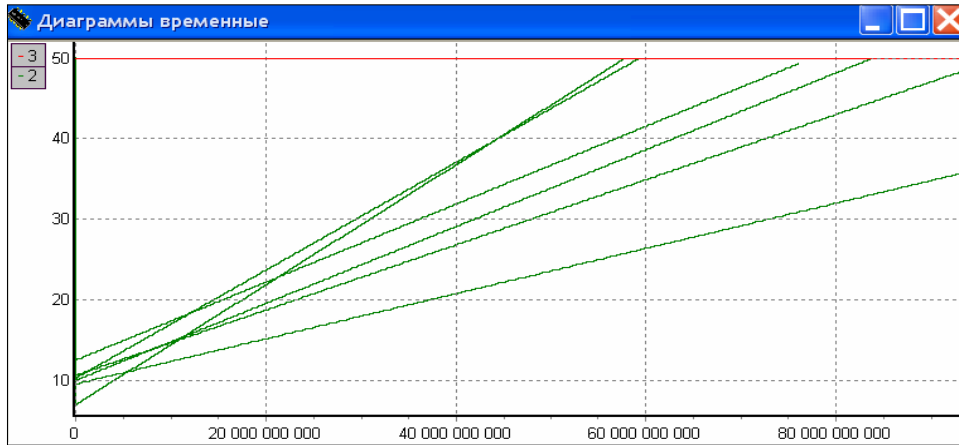


Рис. 4. Примеры реализаций веерного СП в СМ-ДЭС

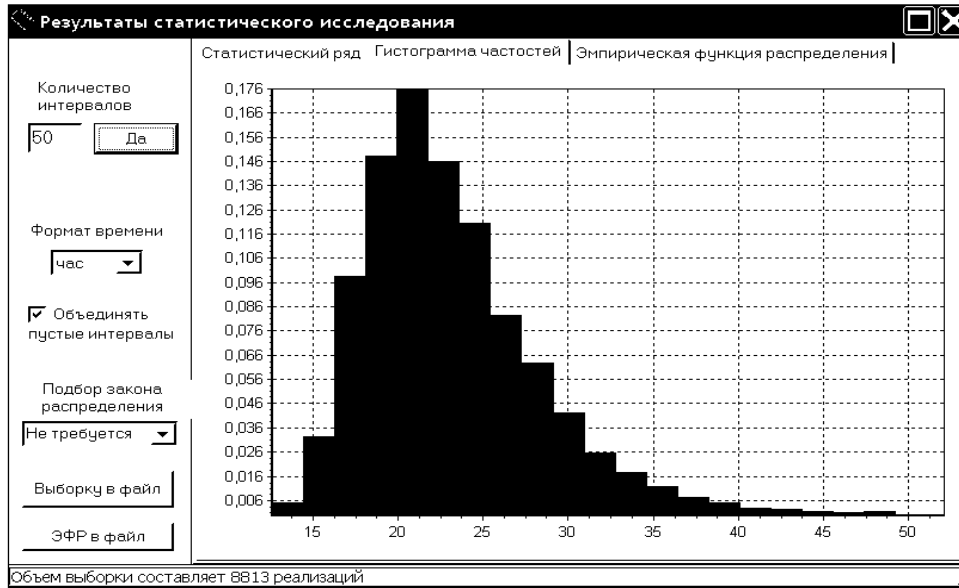


Рис. 5. Гистограмма наработки объекта до отказа в СМ-ДЭС

Сравнение вероятности безотказной работы объекта $P(t)$ по (2) и соответствующих статистических оценок $P_{\text{стат}}(t)$ в пакете СМ-ДЭС изображено на рис. 6.

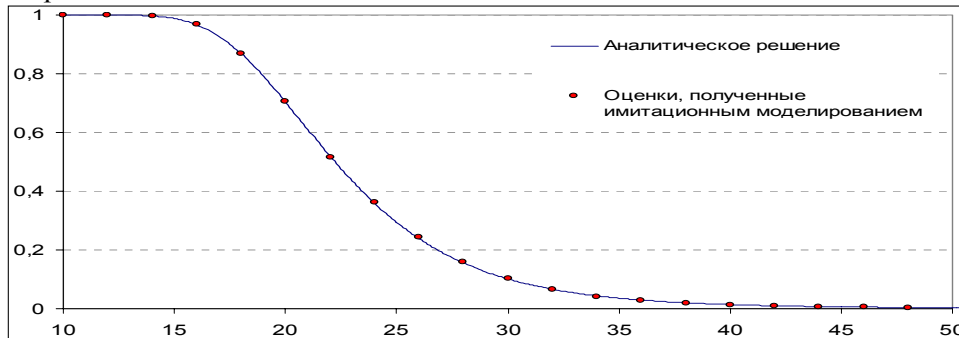


Рис. 6. Сравнение аналитического решения и результатов имитационного моделирования в пакете СМ-ДЭС

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена технология моделирования параметрических отказов технических систем, которая является развитием вероятностного физического моделирования [4], но базируется на компьютерной имитационной модели. Кроме того, предложен программно-технологический комплекс автоматизации имитационного моделирования параметрических отказов. Представлен пример решения теоретической задачи анализа параметрического отказа механической системы с сопоставлением уже известных и вновь полученных результатов.

Предлагаемая технология и средства автоматизации имитационного моделирования параметрических отказов являются достаточно универсальными и позволяют решать широкий класс задач параметрической надежности механических и других технических систем. Они не имеют принципиальных ограничений на количество и характер влияния учитываемых деградационных факторов (в том числе, взаимного влияния), что определяет практическую значимость работы. Использование имитационного моделирования особенно актуально, когда аналитическое решение затруднено или задача не имеет законченной математической постановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Машиностроение*. Энциклопедия / Под общ. ред. В.В. Клюева. — М.: Машиностроение, 2003. — 592 с.
2. *Надежность и эффективность в технике: справочник: в 10 т. Т.5: Проектный анализ надежности* / Под ред. В.И. Патрушева и А.И. Рембезы. — М.: Машиностроение, 1988. — 316 с.
3. *Проников А.С.* Параметрическая надежность машин. — М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — 560 с.
4. *Дружинин Г.В.* Надежность автоматизированных систем: — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергия, 1977. — 536 с.
5. *Кельтон В., Лоу А.* Имитационное моделирование. Классика CS. — 3-е изд. — СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. — 847 с.
6. *Максимей И.В.* Имитационное моделирование на ЭВМ. — М.: Радио и связь, 1988. — 232 с.
7. *Shevchenko D.N.* Program Technological Complex of a Research of Safety of Electronic Systems // Computer Data Analysis and Modeling: Robustness and Computer Intensive Methods: Proc. 6-th International Conference. — Minsk: BSU, 2001. — 2. — P. 208–213.
8. *Харин Ю.С., Малюгин В.И., Абрамович М.С.* Математические и компьютерные основы статистического анализа данных и моделирования: учеб. пособ. — Минск: БГУ, 2008. — 455 с.

Поступила 25.11.2009

ПІДХІД ДО ІНТЕГРАЦІЇ СИСТЕМИ КРЕДИТНОГО СКОРИНГУ ТА МОДЕЛІ КЕРУВАННЯ АКТИВАМИ ТА ПАСИВАМИ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ

Д.В. ОСПЕНКО

Розглядається підхід до побудови системи керування активами та пасивами роздрібного банку на базі динамічної моделі, а також формалізація системи кредитного скорингу та постановка задачі оптимізації прибутковості кредитного портфеля. Результатом дослідження є розробка підходу до інтеграції цих ключових систем банківського ризик-менеджменту.

ВСТУП

Ключовою метою сучасного ризик-менеджменту є побудова інтегрованої системи керування активами та пасивами (СКАП). СКАП дає можливість керування об'єктом «банк» як єдиною складною системою на відміну від керування окремими підсистемами банку, непов'язаними у єдиний комплекс об'єктами та бізнес-процесами, такими як, наприклад, кредитування клієнтів, залучення коштів, інвестування в цінні папери, розрахунково-касове обслуговування та похідними від них: формування резервів, підтримання рівня ліквідності балансу, дотримання нормативів НБУ (обмеження системи керування).

СКАП будується на двох складових елементах: сховищі даних з високим рівнем деталізації інформації по всіх транзакціях у необхідних розрізах та динамічної імітаційної моделі банку. Сховище є необхідним для побудови моделі пасивної еволюції банку — фактичного плану фінансових потоків поточних інструментів банку з корегуваннями, що розраховуються у динамічній імітаційній моделі банку. Але більш складною, важливою та цікавою для системного аналізу задачею динамічної імітаційної моделі банку є формування прогнозних потоків майбутніх фінансових інструментів.

Отже, основними задачами моделі є:

- формування прогнозного балансу;
- формування прогнозного звіту про фінансовий результат;
- прогноз грошових потоків;
- прогноз показників ризику;
- прогноз показників ефективності на основі вхідного потоку даних:
 - системи параметрів керування, як, наприклад, процентні ставки по кредитах та депозитах, витрати на маркетинг, толерантність банку до ризику;
 - впливу зовнішніх збурень: макроекономічних факторів, дій конкурентів.

Важливим елементом, особливо для роздрібного комерційного банку, є система оцінки кредитних ризиків позичальників — кредитний скоринг.

Її використання у комплексі зі СКАП, як буде показано нижче, є важливим елементом банківського менеджменту.

Банківська діяльність та, відповідно, кожний банківський бізнес-процес піддаються ризикам. Унаслідок взаємопроникнення ризиків система ефективного ризик-менеджменту має будуватися на інтегрованій платформі. Такою платформою може стати динамічна імітаційна модель банку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Об'єктом дослідження є роздрібний комерційний банк та система банківських бізнес-процесів, зокрема, процеси кредитування. Предмет дослідження — динамічні моделі комерційного банку та оптимізаційна модель керування кредитним портфелем із використанням системи кредитного скорингу.

Мета дослідження — інтеграція динамічної моделі банку та моделі керування кредитним портфелем, отримання функціоналу оптимізації та отримання рекомендацій щодо використання отриманої моделі під час оптимального керування банком.

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ БАНКУ

Особливу увагу в контексті запропонованої у роботі динамічної моделі банку варто приділити моделі керування грошовими потоками та моделі керування платіжним календарем, викладеним у роботах Ліндера та співавторів [1, 2], та потоковій моделі банку, викладеній у роботі Царькова [3], оскільки основні ідеї та принципи моделювання загалом схожі, але здійснювались незалежно, без посилання один на одного.

Функціонування комерційного банку розглядається у вигляді чотирьох контурів на базі потокової схеми: депозитного, кредитного, міжбанківського та внутрішніх потреб, де потік являє собою обсяг грошових коштів. Динамічна модель комерційного банку являє собою систему диференціальних рівнянь із запізненнями (якщо розкривати рівняння стану по елементах) та систему обмежень, стан якої визначається параметрами функцій попиту, запізненнями, величинами збурень та керуваннями.

Кредитний контур у моделі є сукупністю залишків та оборотів по активних операціях та доходів за ними. Депозитний контур у моделі являє собою сукупність залишків та оборотів по пасивних операціях щодо залучення коштів та витрат за ними. Контур внутрішнього споживання являє собою суми витрат на власні потреби, що виникають під час функціонування банку. Контури є замкненими, тобто залучені депозити повертаються у зовнішнє середовище із відповідними процентами за користування ними, а кредити повертаються назад із процентними доходами та певними втратами від дефолтів за кредитами клієнтам. Усі кредити та строкові депозити мають строк до погашення, причому в межах портфеля строки є різними для інструментів. Результатом діяльності банку є прибуток, який дорівнює різниці сукупних доходів та витрат. Стан системи «банк» визначимо через параметр «Грошові кошти в касі та на коррахунку», який розраховується як сума всіх грошових потоків з відповідними знаками (дебетові та кредитові обороти).

Вплив зовнішнього середовища на систему введемо через функції попиту на кредити та пропозиції депозитів. Функція попиту для адекватного

відображення процесів має бути багатозначним відображенням і мати стохастичний характер. Форма залежності та параметри функції попиту потребують додаткового дослідження, а тому мають гіпотетичний характер та можуть бути подані не в аналітичній формі.

Наведемо початкову спрощену модель комерційного банку, що складається з рівняння динаміки стану та обмежень моделі.

Опишемо динаміку стану системи як диференціальне рівняння із запізненнями:

$$\dot{X}(t) = \int_0^n (D(t) - D(t-\tau)(1 + u_D(t-\tau)\tau))d\tau + \int_0^m (L(t-\tau)(1 + u_L(t-\tau)\tau) - L(t))d\tau + \int_0^k (IB(t-\tau) \cdot (1 + r_{IB}(t-\tau)\tau) - IB(t))d\tau - C(L(t), D(t)), \quad (1)$$

де X — стан системи (сума грошових коштів на коррахунку та в касі); m, n, k — максимальні строки кредитних, депозитних та міжбанківських договорів; τ — часовий лаг, запізнення (кванти часу, наприклад місяць), яке характеризує строк дії кредитного/депозитного договору; t_0 — початковий час; t_1 — час розрахунку; u_L — процентна ставка по кредитах (керування); u_D — процентна ставка по депозитах (керування); r_{IB} — ставка на міжбанківському ринку; $D(t)$ — кредитовий оборот по депозитному контуру в час t ; $D(t-\tau)$ — дебетовий оборот по депозитному контуру в час t ; $L(t)$ — дебетовий оборот по кредитному контуру в час t ; $L(t-\tau)$ — кредитовий оборот по кредитному контуру в час t .

Обороти по кредитному та депозитному контурах визначимо як функції попиту:

$$L(t) = f(t; u_L, Adv, a, \dots) \text{ та } D(t) = f(t; u_D, Adv, b, \dots).$$

Введемо функцію витрат:

$$C(L, D) = TC + aL + bD + Adv,$$

де Adv — витрати на маркетинг та рекламу (керування); TC — постійні витрати; a та b — витрати на одиницю виданих кредитів та залучених депозитів відповідно (керування).

Запишемо оборот на міжбанківському ринку:

$$IB(t) = D(t) + K(t-\tau) - D(t-\tau) - K(t) + (X(t) - X_0),$$

де $IB(t)$ — регулятор залишку вільних коштів на коррахунку та в касі; X_0 — незнижуваний залишок коштів у касі та на коррахунку для підтримання необхідного рівня миттєвої ліквідності.

Сукупний прибуток у час t_1 виразимо інтегровано через різницю процентних доходів та витрат за період часу $t_0..t_1$:

$$R(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (L(t)u_L(t) - D(t)u_D(t) + IB(t)u_{IB}(t) - C(L(t), D(t)))dt. \quad (2)$$

Введемо обмеження моделі:

- вимоги щодо виконання нормативів НБУ: $H(L_{\text{total}}(t), D_{\text{total}}(t), X(t), RC(t)) \geq H_0$, де RC — обсяг регулятивного капіталу; H_0 — вектор граничних значень нормативів; $L_{\text{total}}(t)$, $D_{\text{total}}(t)$ — сума сукупних залишків на кредитних та депозитних рахунках;

- внутрішнє обмеження — сума кредитів не має перевищувати суму депозитів (поточних та строкових) та надлишкового залишку на коррахунку:

$$L(t) \leq (1 - \alpha_1)(1 - \theta_2(t))D_{\text{str}}(t) + (1 - \alpha_2)D_{\text{pot}}(t) + (X(t) - X_{\text{min}}),$$

де $\theta_2(t)$ — частка депозитів, що вилучаються клієнтами до строку; α_1 — норма резервування (частка від строкових депозитів), яку необхідно спрямовувати до резервного фонду; α_2 — частка коштів із поточних рахунків клієнтів, яку можна вкладати до активів.

Більш детально модель розглянута у роботі [4]. У подальшому розвитку модель набула ускладнення та більш високого ступеня формалізації.

Динаміка стану X об'єкта «Банк» визначається через динаміку функцій процесів:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = & D_{Cr}(U_D, F_D; t) - \int_0^t \left(D_{Dt}(U_D, F_D; t - \tau) \left(1 + \frac{i_D(t - \tau)}{rd_\tau} \right) \right) d\tau + \\ & + L_{Cr}(U_L, F_L; t) - L_{Dt}(U_L, F_L; t) + IB(t) - C(L_{Dt}(t), D_{Cr}(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

де $D_{Cr}(U_D, F_D; t)$ — кредитовий оборот по депозитному контуру в час t (приток депозитів), визначається функцією пропозиції депозитів у час t ; $D_{Dt}(U_D, F_D; t)$ — дебетовий оборот по депозитному контуру в час t ; $L_{Dt}(U_L, F_L; t)$ — дебетовий оборот по кредитному контуру в час t ; $L_{Cr}(U_L, F_L; t)$ — кредитовий оборот по кредитному контуру; $AF(U_L(t), F_L(t))$ — функція потоку заявок; U_D , U_L — вектори керування по депозитах та кредитах відповідно (процентні ставки, витрати на маркетинг, розвиток філіальної мережі тощо); F_D , F_L — вектори впливу зовнішніх факторів (індекс споживчих цін, коефіцієнт граничної схильності населення до заощаджень, індекс зростання ВВП, рівень розвитку банківських послуг конкурентів, середні ринкові ставки тощо); $i_{D(t-\tau)}$ — процентна ставка по депозитах у час $t - \tau$; $i_{L(t-\tau)}$ — процентна ставка по кредитах у час $t - \tau$; $IB(t)$ — обороти по міжбанку в час t (дебетовий або кредитовий, визначається знаком) та є регулятором вільного залишку коштів надліквідності; $C(L_{Dt}(t), D_{Cr}(t))$ — функція витрат на здійснення поточної діяльності банку.

Введемо такі функції:

$$D_{Cr}(U_D, F_D; t) = \int_0^t \left(D_{Dt}(U_D, F_D; t - \tau) \left(1 + \frac{i_D(t - \tau)}{rd_{t-\tau}} \right) \right) d\tau$$

— дебетовий оборот по депозитному контуру в час t (сума відтоку депозитів та сплачених відсотків), визначається функцією пропозиції депозитів у час $t - \tau$, де $\tau = 1..n$ та коефіцієнтом доходів;

$$L_{Dt}(U_L, F_L; t) = AF(U_L(t), F_L(t)) \quad (4)$$

— дебетовий оборот по кредитному контуру у час t (видача кредитів), визначається функцією попиту на кредити у час t ;

$$L_{Cr}(U_L, F_L; t) = \int_0^m \left(L_{Dt}(U_L, F_L; t - \tau) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{i_L(t - \tau)}{rl_{t-\tau}} \right) (1 - BR) \right) d\tau \quad (5)$$

— кредитовий оборот по кредитному контуру (сума повернення по тілу кредитів та сплачених за відрахуванням втрати від дефолтів), визначається функцією попиту на кредити у час $t - \tau$, коефіцієнтом доходів та загальнопортфельним рівнем втрат від дефолтів BR .

Функціонал прибутку банку за період $[t_0, t_1]$ має такий вигляд:

$$R(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^m \left(L_{Cr}(U_L, F_L; t - \tau) \left(\frac{i_L(t - \tau)}{rl_{t-\tau}} \right) \right) d\tau - \int_0^n \left(D_{Dt}(U_D, F_D; t - \tau) \left(\frac{i_D(t - \tau)}{rd_{t-\tau}} \right) \right) d\tau + IB(t)r_{IB}(t) - C(L(t), D(t)) \right) dt \Rightarrow \max. \quad (6)$$

Оптимальне керування прибутком комерційного банку визначається вектором оптимального керування $(U_L(t), U_D(t))$.

Наведена модель має припущення, що всі заявки на кредити, подані клієнтами, задовольняються. Але такий процес у реальному житті є неприйнятним з точки зору ризик-орієнтованого керування банківською установою, оскільки під час прийняття рішення щодо надання кредиту банк керується поняттям «ризик-дохідність» та проводить оцінку кредитоспроможності позичальників.

СИСТЕМА КРЕДИТНОГО СКОРИНГУ ТА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИБУТКУ

Одним із найбільш ризикованих процесів банківської діяльності є споживче кредитування. Для ризик-орієнтованого керування кредитним портфелем споживчих кредитів використовується добре розроблений математичний інструментарій системи кредитного скорингу (СКС).

З метою оцінки кредитоспроможності позичальників у споживчому кредитуванні використовуються системи кредитного скорингу. Ядром скорингової системи є статистична модель, побудована на історичних даних параметрів кредитних договорів клієнтів банку, що дає оцінку ймовірності несприятливої події (дефолту). Наприклад, імовірність настання в певного клієнта простроченої заборгованості за кредитом понад 60 днів (три та більше платежів). Значення оцінки є функцією від множини параметрів позичальника. Оцінки ймовірностей дефолтів трансформуються в нормовані

значення «скорингових балів», та модель найчастіше трансформується в інструмент «скорингова карта», хоча можуть використовуватися й такі інструменти як дерева рішень та нейронні мережі. Підходи до побудови систем скорингу є добре розробленими [5], але методи керування портфелем із використанням систем кредитного скорингу досі не знайшли достатнього наукового обґрунтування.

Для визначення основних показників кредитної діяльності банку за використання певної скорингової карти: Acceptance Rate (рівня прийняття заявок) та Bad Rate (рівня проблемної заборгованості) — будується розподіл кількості заявок позичальників по множині скорингових балів. Керування процесом встановлення та утримання показників на рівні граничних значень, затверджених політикою банку, здійснюється за допомогою встановлення балів відсікання, тобто таких, нижче яких по заявці клієнта проводиться відмова у видачі кредиту.

Введемо функції основних параметрів системи кредитного скорингу.

Розподіл кількості заявок за скоринговим балом для скорингової карти (системи), побудованої за допомогою методу логістичної регресії, як правило, має вигляд наближений до нормального розподілу. Таким чином, *функція щільності розподілу кількості заявок за скоринговим балом* може бути описана функцією щільності нормального розподілу:

$$ar(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2\right),$$

де σ — стандартне середньоквадратичне відхилення розподілу кількості заявок за скоринговим балом; μ — математичне сподівання розподілу кількості заявок за скоринговим балом.

Економічний зміст функції полягає у визначенні частки кількості від загального потоку заявок, що отримують скоринговий бал s .

Введемо поняття *бал відсікання* S . Бал відсікання — це таке нормативне мінімальне значення скорингового бала, нижче якого заявка клієнта на отримання кредиту відхиляється, або приймається в протилежному випадку. Значення під час встановлення балів відсікання визначаються на основі аналізу історичної вибірки потоку заявок за період, протягом якого не відбувалося значних коливань в популяції клієнтської бази. У випадку, коли зміна популяції носить тимчасовий характер, пов'язаний середньо- та короткостроковими коливаннями (наприклад, періоди перед святами, вихідні дні, період відпусток) виведення показників банку на заданий рівень досягається шляхом динамічного корегування балів відсікання, часто в режимі он-лайн, що потребує відповідної математичної бази та системи, що має риси Автоматизованої Системи Управління (АСУ).

Acceptance Rate визначається як кумулятивна функція щільності розподілу кількості заявок за скоринговим балом відсікання та визначає ту частку заявок, яка буде прийнятою на інтервалі значень скорингового бала $[S; S_{\max}]$:

$$AR(S) = \int_S^{S_{\max}} ar(s) ds. \quad (7)$$

Для функції рівня прийняття виконуються такі умови:

$$AR(S_{\min}) = 1; \quad AR(S_{\max}) = 0.$$

Для $S_{\min} < S < S_{\max}$ виконується нерівність $AR(S_{\min}) > AR(S) > AR(S_{\max})$.

Економічний зміст кумулятивної функції розподілу кількості заявок полягає у визначенні величини загального рівня прийняття заявок, або частки від кількості заявок під час встановлення скорингового бала відсікання S .

Bad Rate — функція розподілу проблемної заборгованості за скоринговим балом може бути апроксимована у вигляді експоненційної функції: $br(s) = b_1 \exp(-b_2 s)$, де b_1, b_2 — коефіцієнти рівняння, значення яких знаходяться шляхом апроксимації рівняння нелінійної регресії.

Економічний зміст функції полягає у визначенні частки кредитів, що отримали скоринговий бал s із ознакою проблемної заборгованості (дефолту) у загальній кількості угод, що отримали скоринговий бал s .

Кумулятивна функція розподілу проблемної заборгованості є похідною функцією від двох інших функцій: функції щільності розподілу кількості заявок та функції розподілу проблемної заборгованості, і має такий вигляд:

$$BR(S) = \frac{\int_s^{S_{\max}} ar(s) br(s) ds}{\int_s^{S_{\max}} ar(s) ds}. \quad (8)$$

Головною задачею комерційної банківської фірми в сучасних умовах є максимізація вартості капіталу. Основним шляхом та умовою досягнення такої мети є максимізація прибутку, оскільки нерозподілений прибуток є суттєвою складовою динаміки приросту капіталу банку.

Джерелом доходів банку в моделі є процентний дохід від наданих кредитів. Джерелом витрат є процентні витрати за залученими депозитами, витрати на здійснення діяльності та витрати на списання проблемної заборгованості.

Визначимо додаткові параметри, що використовуються в моделі максимізації прибутковості кредитного портфеля:

- AF — кількість заявок (потік) за квант часу, що використовується в розрахунках (наприклад за день);
- Exp — рівень витрат на 1 грошову одиницю (г.о.) кредитного портфеля (%), що є оцінкою собівартості однієї виданої г.о.;
- $APR, \%$ — річна ефективна ставка кредитного портфеля (Annual Percentage Rate). APR є еквівалентною внутрішній нормі дохідності y , що розраховується як процентна ставка, за якої приведена вартість потоку n платежів у сумі C_{ti} по фінансовому інструменту із терміном t років під час нарахування відсотків m на рік, співпадає із його ринковою ціною:

$$P = \sum_{t=1}^n C_{ti} \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-ti \cdot m};$$

- $AvgL$ — середньозважений розмір кредиту, г.о.;

- $AvgLBad$ — середньозважений розмір проблемного кредиту, г.о.

Критерієм максимізації прибутковості кредитного портфеля є функціонал:

$$Z(S) = AR(S)AF(APR(1 - BR(S))AvgL - BR(S)AvgLBad - Exps AvgL). \quad (9)$$

Розв'язком задачі максимізації прибутку буде таке значення бала відсікання S^{opt} , яке задовольняє умові $Z(S^{opt}) \Rightarrow \max$ у точці глобального екстремуму за обмежень $S_{min} \leq S^{opt}$ та $S^{opt} \leq S_{max}$.

Економічна інтерпретація функціонала прибутковості $Z(S)$ полягає у визначенні частки прибутку, що буде отриманий від виданого кредитного портфеля при балі відсікання S .

Для розв'язку задачі оптимізації доцільно використовувати підхід імітаційного моделювання з евристичним алгоритмом пошуку критичних точок.

Критерій динамічної максимізації прибутковості кредитного портфеля набуває такого вигляду:

$$Z(S; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} AR(t, S(t)) AF(t) \left(\begin{array}{l} APR(t)(1 - BR(S(t)))AvgL(t) - \\ - BadRate(S(t))AvgLBad(t) - \\ - Exp(t)AvgL(t) \end{array} \right) dt \Rightarrow \max, \quad (10)$$

де t_0 та t_1 — відповідно початкова та кінцева точка в часі.

Результати такого підходу викладені у роботі [6].

Розв'язок динамічної задачі знаходиться аналогічно до статичної задачі за допомогою імітаційного моделювання. Цей критерій динамічної максимізації прибутковості кредитного портфеля є оптимальною траєкторією керування кредитним портфелем банку.

Система скорингу дозволяє розв'язати задачу максимізації прибутку через оптимальне керування балом відсікання. Але розв'язок такої задачі відокремлено, без участі СКАП, може призвести до негативних наслідків (втрата ліквідності банку чи зниження маржі). Тому інтеграція системи кредитного скорингу із системою керування активами та пасивами банку є необхідною передумовою ефективного керування роздрібним комерційним банком.

ІНТЕГРАЦІЙНА МОДЕЛЬ СКАП ТА СКС

Введемо до моделі (3) елементи системи прийняття рішень на базі кредитного скорингу.

Динаміка стану X об'єкта «Банк» матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = & D_{Cr}(U_D, F_D; t) - \int_0^n \left(D_{Dt}(U_D, F_D; t - \tau) \left(1 + \frac{i_D(t - \tau)}{rd_\tau} \right) \right) d\tau + \\ & + L_{Cr}(U_L, F_L, S; t) - L_{Dt}(U_L, F_L; S; t) + IB(t) - C(L_{Dt}(t), D_{Cr}(t)). \quad (11) \end{aligned}$$

Якщо функція попиту на кредити в час t (4) є еквівалентною функції потоку заявок та залежить від керувань, що впливають на попит клієнтів (як відсоткові ставки, витрати на маркетинг тощо), то в інтеграційній моделі

дебетові обороти кредитної заборгованості визначаються також й рівнем прийняття заявок (7), що залежить від встановленого скорингового бала:

$$L_{Dt}(U_L, F_L, S; t) = AF(U_L(t), F_L(t)) \int_{S(t)}^{S^{\max}} ar(s) ds. \quad (12)$$

Функція оборотів по кредиту заборгованості (повернення кредитів) окрім рівня прийняття заявок, включеного до функції (12), також містить функцію кумулятивного рівня проблемної заборгованості (8), що визначає втрати при встановленому рівні толерантності до ризику (скоринговий бал відсікання S у час t):

$$L_{Cr}(U_L, F_L, S; t) = \int_0^m \left(L_{Dt}(U_L, F_L, S; t - \tau) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{i_L(t - \tau)}{rl_{t-\tau}} \right) \left(1 - \frac{\int_{S(t)}^{S^{\max}} ar(s) br(s) ds}{\int_{S(t)}^{S^{\max}} ar(s) ds} \right) \right) d\tau. \quad (13)$$

Функціонал прибутку банку за період $[t_0, t_1]$ буде визначатися такою залежністю:

$$R(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^m \left(L_{Cr}(U_L, S; t - \tau) \left(\frac{i_L(t - \tau)}{rl_{t-\tau}} \right) \right) d\tau - \int_0^n \left(D_{Dt}(U_D, F_D; t - \tau) \left(\frac{i_D(t - \tau)}{rd_{t-\tau}} \right) \right) d\tau + IB(t)r_{IB}(t) - C(L(t), D(t)) \right) dt \Rightarrow \max. \quad (14)$$

Критерії максимізації прибутку банку (10) та (14) хоча й мають спільні ознаки в підході, але можуть давати різні результати. Критерій максимізації прибутковості кредитного портфеля (10) фактично є задачею пошуку оптимального бала відсікання при заданих постійних інших керуваннях та, відповідно, детермінованого потоку заявок. Але такий критерій не враховує динаміку вартості депозитів, за виключенням вартості видачі однієї грошової одиниці, та зміну показника стану банку X (3), що навіть при високому рівні прибутковості може призвести до негативних значень показника, втрати ліквідності, а отже, до банкрутства банку.

ВИСНОВКИ

Наведена модель є ілюстрацією таких ланок ризик-орієнтованого керування банком із використанням системи кредитного скорингу:

- 1) параметри керування попитом/пропозицією \rightarrow потік заявок (рівень «бізнес-продажі»);
- 2) бал відсікання \rightarrow рівень прийняття на потік заявок \rightarrow обсяг видачі \rightarrow дохід (рівень «ризик-менеджмент» – «бізнес-продажі»);

3) бал відсікання → рівень проблемної заборгованості → доходи → прибуток → ліквідність (рівень «ризик-менеджмент»).

Для ефективного керування банком із використанням системи керування активами та пасивами необхідна інтеграція з системою кредитного скорингу на етапі прийняття рішення.

Побудову прогнозу та пошук оптимального розв'язку задачі максимізації прибутку з системою обмежень, враховуючі складність об'єкта дослідження та отриманих моделей, для запобігання надлишкових припущень та спрощень, можливо проводити лише з використанням систем комп'ютерної імітації.

Рекомендацією щодо пошуку оптимального керування банком є такий підхід:

1) визначення бізнес-стратегії щодо обсягів доступних ресурсів та обсягів видач кредитів;

2) встановлення керувань функціями попиту/пропозиції;

3) встановлення оптимального бала відсікання (10) у системі кредитного скорингу;

4) розрахунок прибутку банку (14) у СКАП;

5) повторення експерименту: зміна параметрів керування (перехід до п. 2) та повторення п. 3–4, оскільки зміна параметрів функцій попиту/пропозиції змінює результати розв'язку у п. 3.

Після проведення певної кількості ітерацій імітації діяльності банку буде знайдено оптимальне керування банком за критерієм «максимізація прибутку» (10) з урахуванням параметрів як розвитку бізнесу, так і ризик-менеджменту, тобто найшвидший розвиток під час збереження стійкості фінансової установи.

Методи прогнозування діяльності та керування банківською установою, що застосовуються на практиці, є недостатніми для банків з великими обсягами однорідних кредитів у портфелі. Тому саме системний аналіз окремих процесів та інтеграція їх моделей у межах однієї комплексної моделі з подальшим використанням комп'ютерної імітації є найактуальнішим підходом до побудови сучасних систем банківської аналітики та ризик-менеджменту.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Линдер Н.* Непрерывная модель управления денежными потоками банка // Финансовые риски. — 1998. — № 3. — С. 107–111.
2. *Штиг Ф., Деркач А., Смолий Я., Малюков В., Линдер Н.* Модель управления платежным календарем // Финансовые риски. — 1997. — № 2. — С. 101–106.
3. *Царьков В.А.* План-прогноз на основе модели экономической динамики банка // Банковское дело. — 2000. — № 12. — С. 25–28.
4. *Осіпенко Д.В.* Динамічна модель комерційного банку // Фінанси України. — 2005. — № 11. — С. 87–92.
5. *Thomas L.C.* Credit Scoring and its Applications. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. — 250 p.
6. *Осіпенко Д.В.* Розв'язок задачі динамічної оптимізації прибутковості комерційного банку із застосуванням системи кредитного скорингу // Науково-технічний розвиток: економіка, технології, управління: матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф. студ., аспірантів і молодих вчених. — 2008. — С. 260–261.

Надійшла 02.07.2009

МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛЮЧЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ПОКОМПОНЕНТНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ СИМВОЛОВ ТЕКСТА

А.А. КАРГИН, Е.Е. ПЯТИКОП

Рассмотрен этап формирования ключевых элементов (узлов) для решения задачи покомпонентного распознавания символов текста. Образование узлов основывается на нечетких моделях первичной зрительной коры. Введено математическое описание узла в виде нечеткой модели и степень нечеткой похожести узлов. Приведены примеры сравнения узлов с прототипами узлов.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений в области создания искусственных систем обработки и анализа зрительной информации является распознавание символов. На сегодняшний день уже имеется опыт разработки методов распознавания печатных символов с применением различного вида классификаторов, нейронных сетей [1–2]. Но объем цифровой визуальной информации увеличивается, меняются условия распознавания, поэтому от современных систем требуется более глубокий интеллектуальный анализ. Так одной из актуальных задач является борьба с «графическим спамом» [3, 4], в рамках которой необходимо выполнять анализ изображения с целью обнаружения рекламного текста. Изобретательность создателей спама требует совершенствование технологий распознавания [5]. Поэтому для обработки изображения исследуется возможность применения знаний когнитивной психологии [6].

В когнитивной психологии на основе наблюдений за человеком за длительный период предложены и апробированы экспериментально модели организации практически всех когнитивных функций человека: восприятие зрительной и звуковой информации, организация памяти разных уровней [7–8]. Так в [8] описывается, что в основе идентификации символов лежит задача распознавания паттернов, которая решается с помощью подетального анализа. Способ рассмотрения знакомых объектов как конфигурацию простых компонентов в своей работе предложил Д. Марр [9]. Также известна теория Бидермана — распознавание по компонентам (по прототипу). Основное положение теории заключается в том, что любой объект может быть разложен на ряд элементарных составляющих — геометрических модулей, или компонентов, называемых геонами, комбинируя которые можно получить объект практически любой формы [8]. Геоны (компоненты) рассматриваются как комбинации простейших деталей. Так деталями алфавита можно считать различные виды линий (вертикальные, горизонтальные, диагональные), а геонами (компонентами) — ключевые признаки букв — узлы. Итак, заглавная буква «А» может рассматриваться как состоящая из двух линий под углом 30° и горизонтальной линии, которые в результате пересечения образуют три характерных узла. Простейшие детали очень похожи на результаты работы клеток первичной зрительной коры.

При цьому схеми комбінацій деталей дозволяють визначити зв'язи між деталями, які більш важливі, і відкинути менш суттєві. Так всі букви, показані на рис. 1, є буквою «А».



Рис. 1. Приклади написання букви «А»

Таким чином, піддетальний аналіз включає в себе такі процеси:

- розпізнавання простіших деталей, які складають геон (вузол);
- розпізнавання ключевих вузлів;
- ідентифікація на основі сопоставлення отриманого набору ключевих вузлів з описом прототипа з бази даних.

Перший етап — представлення об'єкта на рівні простіших деталей за допомогою моделей кліток первинної зрительної кори (ПЗК) розглянуто в роботі [10]. В даній роботі розглядається другий етап — формування і розпізнавання ключевих вузлів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Результатом роботи першого етапу є нечітке представлення зображення в формі $M_{\omega}^{(3)} = \langle \omega, \{C^{\alpha}, \forall \alpha \in [0^{\circ}, 10^{\circ}, 20^{\circ} \dots 170^{\circ}]\} \rangle$, де $C^{\alpha} = \{\{G_j^{\alpha, \omega, \ell_i}\}_{\ell_i}\}$ — орієнтаційна колонка, $G^{\alpha, \omega, \ell}$ — клітка первинної зрительної кори, яка реагує на лінійні сегменти шириною ω , орієнтовані певним чином і певної довжини ℓ , α — кут орієнтації. Модель цієї клітки є виразом:

$$G^{\alpha, \omega, \ell} = \langle K^{\alpha, r}, \alpha, \omega, \ell, \delta(G^{\alpha, \omega, \ell}) \rangle, \quad (1)$$

де $K^{\alpha, r} = \langle k^{\alpha, r+2Rk}, k^{\alpha, r+4Rk} \dots k^{\alpha, r+\ell^* \cdot 2Rk} \rangle$ — сукупність суміжних активних гангліозних кліток сітчатки, на основі якої формується детектор $D^{\alpha} = \langle K^{\alpha, r}, \alpha, \omega, \ell^*, \delta(D^{\alpha, \omega}) \rangle$, а $\delta(G^{\alpha, \omega, \ell})$ — функція впевненості наявності детектора. Для виразу (1) $\delta(G^{\alpha, \omega, \ell}) = \delta(D^{\alpha, \omega})$.

Таким чином, як базове множинство простіших деталей прийняті елементи, отримані на етапі обробки зображення за моделлю кліток ПЗК. На другому етапі, який розглядається в даній роботі, необхідно виконати представлення зображення символом набором геонів, т.є. його ключевих вузлів, які формуються з простіших деталей, і зв'язями між цими геонами.

Ціль роботи — розробка моделі покомпонентного представлення і розпізнавання символів на основі нечіткого представлення, отриманого в результаті обробки зображення за моделлю кліток первинної зрительної кори.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ СИМВОЛА НАБОРОМ КЛЮЧЕВЫХ УЗЛОВ

Из анализа символов латинского и русского алфавитов [11] автором было выбрано 9 типов ключевых геонов (далее узлов). Это множество базовых узлов выбрано с учетом входных данных — моделей клеток зрительной коры и является достаточным для формирования произвольных символов. Поскольку клетки зрительной коры имеют определенную ориентацию, то элементы узлов тоже ориентированы. На рис. 2 приведены предлагаемые типы узлов.

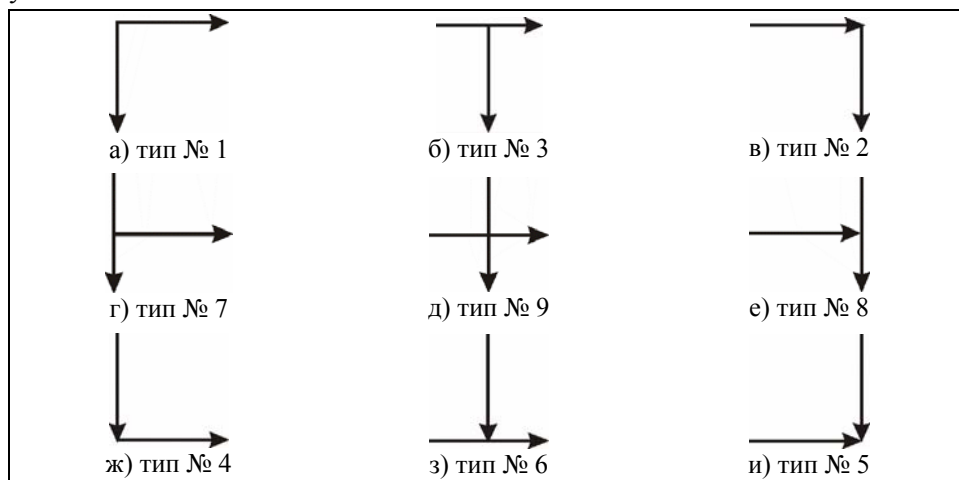


Рис. 2. Типы узлов

В базе данных хранятся прототипы символов, которые выражены через прототипы приведенных узлов. Идентификация изображения проанализированной области сводится к построению множества возможных моделей узлов и сопоставление их с прототипами узла. Прототип — это обобщенное представление, в котором воспроизведен набор общих и детализированных признаков типичного объекта (действия), и которое выступает в качестве основы для идентификации любого нового понятия. Введем модель узла-прототипа.

МОДЕЛЬ УЗЛА-ПРОТОТИПА

Узел формируется из двух гиперсложных клеток G' и G'' различной ориентации, которые определяются, как было описано ранее, на множестве $K = \{k_z\}$ активных сопряженных ганглиозных клеток. Если некоторая ганглиозная клетка k_z влияет и на формирование гиперсложной клетки G' , и на формирование гиперсложной клетки G'' , то можно предположить о некотором пересечении гиперсложных клеток. Множество таких общих клеток опишем выражением:

$$Kd = \{k_z\}_{n_{Kd}}, \quad (2)$$

где $k_z \in G'$ и $k_z \in G''$.

В моделі замість точних координат піксельної площини пересічення гіперсложних кліток задається розмитий область. Для цього гіперсложна клітка розбита на три околиці (області):

- околиця O' з центром (x', y') в началі G ;
- околиця O'' з центром (x'', y'') в середині G ;
- околиця O''' з центром (x''', y''') в кінці G ,

де началом клітки G приймається центр гангліозної клітки k_0 або k_ℓ в залежності від того, від якої з кліток менше евклідово відстань від центра до точки піксельної площини $(0,0)$. Тоді центр іншої клітки приймається як кінець клітки G . Середина визначається по формулі середини відрізка.

Радіус кожної околиці визначається:

$$R^o = \frac{\ell}{4}, \quad (3)$$

де ℓ — довжина гіперсложної клітки G , рівна кількості активізованих її гангліозних кліток k_z .

Для кожного елемента k_z множини Kd необхідно визначити функцію приналежності до кожної з околиць O', O'', O''' відносно кожної клітки G' і G'' . Для цього введемо функцію $\eta(K_z, O_G)$, вираховувану по формулі:

$$\eta(k_z, O_G) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } d(k_z, O_G) > R^o, \\ \frac{R^o - d(k_z, O_G)}{R^o}, & \text{якщо } d(k_z, O_G) \leq R^o, \end{cases} \quad (4)$$

де $d(k_z, O_G)$ — евклідова відстань між центром k_z клітки і деякою околицею $O_G \in \{O', O'', O'''\}_{G \in \{G', G''\}}$.

Характеристика пересічення гіперсложних кліток в моделі узла-прототипа є пара:

$$Kd = \langle \{k_z\}, \{\eta(K_z, O_G)\} \rangle, \quad (5)$$

де $k_z \in G'$ і $k_z \in G''$, $\eta(k_z, O_G)$ визначається по формулі (4), а

$$\begin{aligned} \{\eta(K_z, O_G)\} &= \{\eta(k_z, O_{G'}), \eta(k_z, O_{G''}), \eta(k_z, O_{G'''}), \\ &\eta(k_z, O_{G'''}), \eta(k_z, O_{G''''}), \eta(k_z, O_{G'''''})\}. \end{aligned}$$

Модель узла-прототипа є вираження:

$$UP = \langle \{G', G''\}, Kd, \beta \rangle, \quad (6)$$

де $G', G'' \in \{G^{\alpha, \ell}\}$ і клітка G' та, у якій кут α ближче до 90° ; Kd — множина гангліозних кліток, які є загальними для гіперсложних кліток G' і G'' ; $\beta = |\alpha_{G'} - \alpha_{G''}|$ — кут пересічення між гіперсложними клітками, формуючими вузол.

Угол β при описании прототипа не является конкретным значением, т.к. согласно теории Бидермана, узлы не подвержены искажениям. Поэтому к типу № 1 также будут относиться и узлы, показанные на рис. 3.



Рис. 3. Множество узлов типа № 1

Аналогично, к типу № 7 будут относиться такие варианты, как показано на рис. 4.



Рис. 4. Множество узлов типа № 7

Поскольку типов узлов всего 9 будем иметь множество прототипов-узлов $\{UP_j\} \quad j \in 1, \dots, 9$. Описание узлов-прототипов приведено в таблице.

Т а б л и ц а . Описание прототипов узлов

№	Тип	$\eta(K_z, O_G)$					
		область O' (начало)		область O'' (середина)		область O''' (конец)	
		G'	G''	G'	G''	G'	G''
1		1	1	0	0	0	0
2		1	0	0	0	1	0
3		1	0	0	1	0	0
4		0	1	0	0	1	0
5		0	0	0	0	1	1
6		0	0	0	1	1	0
7		0	1	1	0	0	0
8		0	0	1	0	0	1
9		0	0	1	1	0	0

МОДЕЛЬ УЗЛА

Модель произвольного узла U по аналогии с моделью узла-прототипа описывается выражением:

$$U = \langle \{G', G''\}, Kd, \beta \rangle . \quad (7)$$

Кроме явного пересечения гиперсложных клеток при воздействии помех возможны варианты условного пересечения, показанные на рис. 5, когда общей для G' и G'' клетки k_z нет, но есть некоторое множество клеток k_z , которые попадают в окрестности O', G'', G''' клеток G' и G'' .

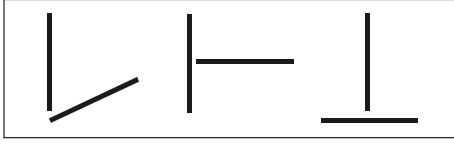


Рис. 5. Пример условного пересечения

Для учета ситуаций, показанных

в примерах на рис. 5, введено множество Kd' :

$$Kd' = \langle \{k_z\}, \{\eta(k_z, O_G)\} \rangle, \quad (8)$$

где $k_z \notin G'$ и $k_z \in G''$, но $k_z \in O_{G'}$; $\eta(k_z, O_G)$ вычисляется по формуле (4).

Тогда внесем изменения в выражение (7) и модель узла будет формально иметь описание:

$$U = \langle \{G', G''\}, Kd, Kd', \beta \rangle. \quad (9)$$

На рис. 6 приведен пример узла U_i , разбиение на окрестности гиперсложных клеток G' и G'' и функции принадлежности $\eta(K_z, O_G)$ общей ганглиозной клетки k_z к каждой из окрестностей.

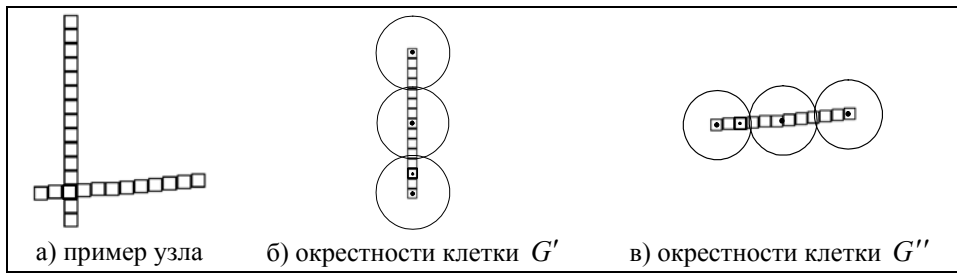


Рис. 6. Пример узла с разбиением на окрестности и значениями функции принадлежности к каждой из окрестностей O', O'', O''' относительно каждой клетки G' и G'' , полученными по формулам (4)

МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ КЛЮЧЕВЫХ УЗЛОВ

Пусть для данного фрагмента изображения на множестве выделенных простейших деталей (клеток зрительной коры $\{\{G_j^{\alpha, \omega, \ell_i}\}_{\ell_i}\}_{\alpha}$) сформировано множество узлов $U = \{U_i\}$, $i \in 1, \dots, n_u$, по формуле (9).

Для сравнения узла-прототипа UP_j с узлами U_i , найденным на изображении, введена степень нечеткой похожести $\xi(UP_j, U_i)$, которая вычисляется по формуле:

$$\xi(UP_j, U_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } Kd_{U_i} = \emptyset \text{ и } Kd'_{U_i} = \emptyset, \\ \min \left\{ \frac{1}{2} (1 + \eta_{Kd_{U_i}}(k_z, O)), \eta_{Kd_{UP_j}}(k_z, O) \right\}, & \text{если } Kd_{U_i} \neq \emptyset, \\ \min \{ \eta_{Kd'_{U_i}}(k_z, O), \eta_{Kd_{UP_j}}(k_z, O) \}, & \text{если } Kd_{U_i} = \emptyset \text{ и } Kd'_{U_i} \neq \emptyset. \end{cases} \quad (10)$$

Для каждого U_i узла вычисляется множество функций $\{\xi(UP_j, U_i)\}_j$, $j \in 1, \dots, 9$ т.е. для каждого узла-прототипа. Например, на рис. 7, а показано изображение буквы «М», а на рис. 7, б — полученные для нее детекторы.

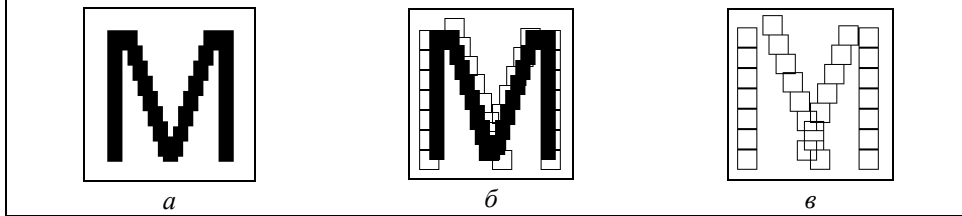


Рис. 7. Изображение буквы «М»

Тогда эти детекторы образуют узлы, показанные на рис. 8.

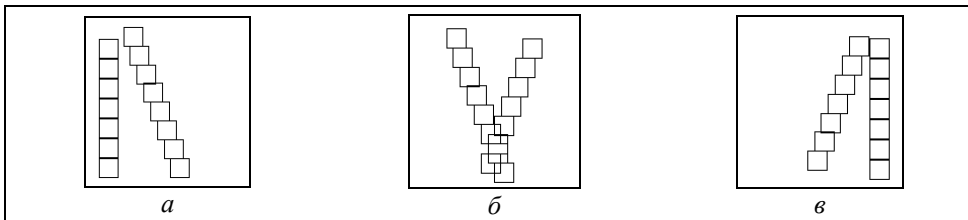


Рис. 8. Узлы для буквы «М»

Для узла показанного на рис. 8, а модель узла имеет вид:

$$U_1 = \langle \{G' = G^{90^\circ}, G'' = G^{70^\circ}\}, Kd \neq \emptyset, Kd' = \emptyset, 20^\circ \rangle,$$

где $Kd = \langle k_z, \{\eta(k_z, O_G)\} = \{1, 0, 0, 1, 0, 0\} \rangle$.

Модель узла показанного на рис. 8, б имеет вид:

$$U_2 = \langle \{G' = G^{110^\circ}, G'' = G^{70^\circ}\}, Kd \neq \emptyset, Kd' = \emptyset, 40^\circ \rangle,$$

где $Kd = \langle k_z, \{\eta(k_z, O_G)\} = \{0, 0, 0, 0, 81, 0, 0, 0, 81\} \rangle$.

Модель узла показанного на рис. 8, в имеет вид:

$$U_3 = \langle \{G' = G^{90^\circ}, G'' = G^{110^\circ}\}, Kd = \emptyset, Kd' \neq \emptyset, 20^\circ \rangle,$$

где $Kd' = \langle k_z, \{\eta(k_z, O_G)\} = \{0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5\} \rangle$.

Тогда в результате сравнения с множеством прототипов $\{UP_j\}$ $j \in 1, \dots, 9$ получено множество $\{\xi(UP_j, U_i)\}_j$, $j \in 1, \dots, 9$:

- $\{\xi(UP_j, U_1)\}_j = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$,
- $\{\xi(UP_j, U_2)\}_j = \{0, 0, 0, 0, 0, 81, 0, 0, 0, 0\}$,
- $\{\xi(UP_j, U_3)\}_j = \{0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Таким образом, для буквы «М», показанной на рис. 7, а, на основе значений множества $\{\xi(UP_j, U_i)\}_j$, приведенных выше, получаем, что первый узел близок к типу № 1 со степенью схожести равной 1, второй узел со степенью схожести равной 0,81 сходен на узел типа № 5, а третий узел со степенью схожести равной 0,5 — на тип № 2. Из этого следует

$$\begin{aligned} & \{\{\xi(UP_j, U_i)\}_j\}_{U_i} = \\ & = \{\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 81, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}\}. \end{aligned}$$

Поскольку представление изображения символа выполнено в виде множества ключевых узлов, то можно перейти к процессу их объединения.

ВЫВОДЫ

Формализована идея представления символа множеством узлов и отношениями между узлами. Представлены девять типов узлов, введена модель узла-прототипа с основными параметрами, модель узла и степень нечеткой похожести, разработан метод распознавания ключевых узлов. Показано, что множество узлов-прототипов достаточно для представления произвольного символа из русского и латинского алфавитов. Эксперименты показали, что на этом наборе символы устойчиво различимы.

На основе описанных моделей и метода авторами представлен символ двухуровневой моделью: множеством узлов и отношениями между узлами на верхнем уровне; множеством гиперсложных клеток и отношениями между ними на нижнем уровне. Эксперименты подтвердили возможность интерпретации символа с помощью множества ключевых компонентов (узлов). В отличие от других методов предлагаемый подход имеет преимущества, поскольку не требует предварительного обучения и позволяет выполнять дальнейшее распознавание по ключевым узлам символов. Это позволяет исключить процесс предварительного масштабирования символов и выполнять шрифтонезависимое распознавание. Таким образом, показано использование результатов формализации когнитивных функций по обработке визуальной информации на разных уровнях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арлазаров В.Л. Адаптивное распознавание символов. — <http://www.cuneiform.ru/tech/adaptive.html>.
2. Васюра А.С. Моделирование нейросети для решения задачи идентификации символов // Наук. пр. ВНТУ. — 2007. — № 1. — www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2007-1/ru/07vasosi_ru.pdf.
3. Рецидив графического спама. Спамтест. — <http://www.spamtest.ru/news?id=207509462>.
4. Яфизов Р. Проактивные антиспам-технологии // Information Security «Информационная безопасность». — 2008. — № 4. — http://www.itsec.ru/articles2/Oborandteh/proaktivn_antispam_tehnologii.
5. Академики обсудили новые методы борьбы со спамом // Бизнес. — <http://www.cnews.ru/news/line/index.shtml?2007/04/05/244199>.
6. Ярмошевич Е.И. Функциональная спектральная пространственно-временная модель формирования изображений объектов зрительной системой человека // Вестн. ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2008. — № 1. — С. 74–78. — www.vestnik.vsu.ru/pdf/analiz/2008/01/yarmoshevich.pdf.
7. Шиффман Х.Р. Ощущение и восприятие / Пер. с англ. З. Замчук. — 5-е изд. — СПб.: Питер, 2003. — 928с. — (Мастера психологии).
8. Андерсон Дж. Когнитивная психология / Пер. с англ. С. Комаров. — 5-е изд. — СПб.: Питер, 2002. — 496 с. — (Мастера психологии).
9. Марр Д. Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов / Пер. с англ. Н.Г. Гуревич. — М.: Радио и связь, 1987. — 440 с.
10. Каргин А.А., Пятикоп Е.Е. Применение нечетких моделей когнитивных знаний восприятия изображения в задаче локализации строк текста // Искусственный интеллект. — 2009. — № 2. — Р. 161–167.
11. Гордон Ю. Книга про буквы от Аа до Яя. — М.: Студия «Артемия Лебедева», 2006. — 384 с.

Поступила 01.06.2009

УДК 004.8

НЕЧІТКІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ПІДБОРУ ПЕРСОНАЛУ ПРИ ФОРМУВАННІ СОЦІАЛЬНИХ ГРУП

Н.Р. КОНДРАТЕНКО, С.В. ЛУЖЕЦЬКИЙ, О.В. ЧЕБОРАКА

Розглянуто нечіткі моделі в задачах підбору персоналу при формуванні соціальних груп. Запропоновано нечітку модель, яку використовує інформаційна система-порадник, що виконує функції помічника експерта з питань підбору та оцінювання персоналу.

ВСТУП

В умовах інтенсивної інформатизації суспільства, інформаційні технології широко впроваджуються у сферу управління персоналом. Для успішного підбору кандидатів на існуючі вакансії, менеджери з підбору персоналу активно використовують новітні досягнення мережі Інтернет з метою встановлення ділових контактів: влаштовують корпоративні відео (для ознайомлення кандидатів з умовами праці та перевагами роботи в тій чи іншій компанії); розміщують необхідну інформацію на сайтах компаній, які займаються пошуком робітників; використовують соціальні мережі; відео-вакансії тощо.

Перед фахівцями, які займаються підбором персоналу, постійно виникають задачі пов'язані з відбором та оцінюванням кандидатів, які потрапили в базу даних [1, 2]. Особливо важливими серед них є задачі підбору кандидатів на відповідальні та керівні посади. Під час вирішення виникає проблема вибору альтернатив. З метою прийняття раціонального рішення множини альтернатив у залежності від наявної інформації описують із певним ступенем чіткості. Відомим методом для досліджень таких задач є прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги на множині альтернатив [3, 4]. Завдяки цьому методу експерти мають можливість описати ступінь своєї впевненості в перевагах між альтернативами за допомогою чисел з інтервалом $[0,1]$. Таким чином, за допомогою експертів знаходиться нечітке відношення переваги на множині альтернатив, в якому кожній парі альтернатив відповідає число, яке описує ступінь виконання відношення переваги між ними. Безумовно, такий метод опису відношення в більш повній мірі дозволяє ввести в математичну модель знання та уявлення експертів про реальну ситуацію. Але одночасно посилює залежність адекватності відображення реальності від думки експертів. Для того, щоб уникнути цього недоліку

пропонуємо побудову нечіткої логічної системи, яка виконуватиме роль поради експертів і будується на експериментальних даних. Під час побудови такої системи процес отримання інформації буде незалежним, оскільки відбуватиметься на основі проведення кваліфікаційного та психологічного тестування.

Таким чином, у задачах з підбору персоналу важливу роль відіграє інформація, яку отримано за результатами опитування чи тестування. Під час проведення різних видів тестування та опитування, процес надання відповідей на питання супроводжується появою невизначеностей (таких як неясність, нечіткість та інші), які виникають унаслідок суб'єктивності чи індивідуальності людини в процесах мислення та висловлювання. Для опису цих невизначеностей використовуватимемо апарат теорії нечітких множин вищих порядків [5]. Врахування цих невизначеностей у задачах підбору та оцінюванні персоналу дозволяє підвищити якість прийняття рішень. Тому, доцільно розробити нечітку модель, на основі якої можливо будувати інформаційні системи, що будуть виконувати роль поради з питань підбору та оцінювання персоналу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Поставимо задачу розробити математичну модель, яка може бути основою для нечіткого логічного поради, завдяки якому можна буде розв'язувати задачі підбору та оцінювання персоналу.

Нечіткий логічний поради є інформаційною системою з ознаками інтелектуальності, які передбачають: самостійність системи в оцінюванні вхідного вектора; можливість інтерпретації вхідного вектора у відповідності з власною базою знань; обчислення відповіді (реакції системи на вхідний вектор).

Під час побудови нечіткої моделі пропонуємо використовувати інтервальні нечіткі множини типу-2, які дозволяють ефективніше обробляти невизначеності, ніж нечіткі множини типу-1, і потребують менше обчислювальних затрат, ніж нечіткі моделі на основі загальних нечітких множин типу-2 [5]. Інтервальні нечіткі множини типу-2 є нечіткими множинами (типу-1), в яких значеннями степенів належності є інтервальні числа.

Мета роботи — розробка нечіткої моделі на основі інтервальних нечітких множин типу-2, що може слугувати основою нечіткого логічного поради.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

Подамо математичну модель для розв'язання поставленої задачі у вигляді нечіткої моделі класифікації. Ця модель є кортежем-двійкою (X, L) , в якому $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$ — множина вхідних лінгвістичних змінних, які виділяються шляхом експертного опитування; $L = \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_m\}$ — розбивка X на нечіткі еталонні класи l_j [6, 7].

За даними експерта вхідні змінні визначаються результатами тестування. Вихідною змінною є професійна придатність.

Тестування проводиться за трьома тестами: характерологічний опитувальник Леонгарда; тест Голанда для визначення типу особистості; анкета «Орієнтація» (І.Л. Соломін).

Тест Леонгарда призначено для виявлення типу акцентуації характеру. Відповідно до цього тесту є 10 акцентуацій, які виступають вхідними змінними моделі: x_1 — гіпертимний тип; x_2 — збудливий тип; x_3 — емотивний тип; x_4 — педантичний тип; x_5 — тривожний тип; x_6 — циклотимічний тип; x_7 — демонстративний тип; x_8 — застряглий тип; x_9 — дистимічний тип; x_{10} — екзальтований тип.

Тест Голанда призначено для визначення соціальної направленості особистості (соціального характерологічного типу). Цей тест передбачає 6 типів, які теж відносимо до вхідних змінних: x_{11} — реалістичний тип; x_{12} — інтелектуальний тип; x_{13} — артистичний тип; x_{14} — соціальний тип; x_{15} — підприємницький тип; x_{16} — конвенціальний тип.

Анкета «Орієнтація» використовується для самооцінки професійних інтересів і здібностей. Вона визначає 5 типів професій, що розділяються за ознакою «предмет праці»: x_{17} — людина–людина; x_{18} — людина–техніка; x_{19} — людина–знакова система; x_{20} — людина–художній образ; x_{21} — людина–природа; та 2 класи професій, які розділяються за ознакою «характер праці»: x_{22} — виконавчі; x_{23} — творчі.

Для оцінювання значень лінгвістичних змінних $x_i, i = \overline{1,23}$ та у використовуватимемо систему якісних термів: $A_i = \{a_i^1, a_i^2, a_i^3, \dots, a_i^{z_i}\}$ — множина термів змінної $x_i, i = \overline{1,23}$, де a_i^p — p -й лінгвістичний терм змінної $x_i, p = \overline{1, z_i}, i = \overline{1,23}$; $L = \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_m\}$ — множина термів змінної y , де l_j — j -й лінгвістичний терм (клас) змінної y ; m — число класів.

Для опису нечітких термів лінгвістичних змінних використовуватимемо інтервальні нечіткі множини типу-2. Тоді модель класифікації являє собою інтервальну нечітку модель типу-2, що включає базу правил (нечітку базу знань), процедуру приведення до нечіткості, процедуру нечіткого логічного виведення, процедуру пониження типу та процедуру приведення до чіткості. Ця модель відображає чіткі входи $x = (x_1, \dots, x_{23})$ в інтервальні та чіткі виходи: $Y = [y_l, y_r]$ та y . Структуру моделі наведено на рис. 1.

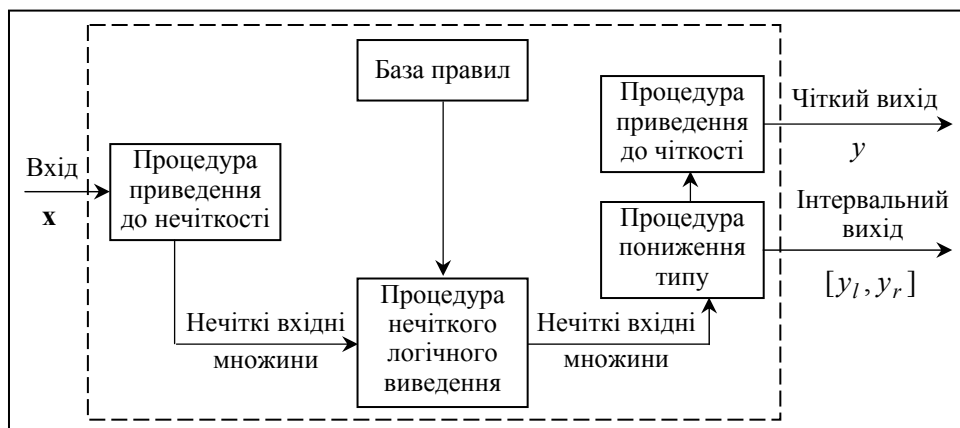


Рис. 1. Структура інтервальної нечіткої моделі типу-2

На основі системи якісних термів та знань експерта формується база правил, що являє собою систему логічних висловлювань типу «ЯКЩО-ТО», які зв'язують значення вхідних змінних x_1, \dots, x_{23} з одним із можливих класів $l_j, j = \overline{1, m}$ [3]:

$$\begin{aligned} \text{ЯКЩО } & x_1 = a_1^{11} \text{ I } x_2 = a_2^{11} \text{ I } \dots \text{ I } x_n = a_n^{11} \text{ АБО} \\ & x_1 = a_1^{12} \text{ I } x_2 = a_2^{12} \text{ I } \dots \text{ I } x_n = a_n^{12} \text{ АБО } \dots \\ & x_1 = a_1^{1k_1} \text{ I } x_2 = a_2^{1k_1} \text{ I } \dots \text{ I } x_n = a_n^{1k_1} \end{aligned}$$

$$\text{ТО } y = l_1.$$

...

$$\begin{aligned} \text{ЯКЩО } & x_1 = a_1^{m1} \text{ I } x_2 = a_2^{m1} \text{ I } \dots \text{ I } x_n = a_n^{m1} \text{ АБО} \\ & x_1 = a_1^{m2} \text{ I } x_2 = a_2^{m2} \text{ I } \dots \text{ I } x_n = a_n^{m2} \text{ АБО } \dots \\ & x_1 = a_1^{mk_m} \text{ I } x_2 = a_2^{mk_m} \text{ I } \dots \text{ I } x_n = a_n^{mk_m} \end{aligned}$$

$$\text{ТО } y = l_m.$$

Для опису інтервальних нечітких множин типу-2 термів лінгвістичних змінних використовуватимемо гаусові первинні функції належності з невизначеним центром і сталим відхиленням, або зі сталим центром та невизначеним відхиленням.

Гаусова первинна функція належності з невизначеним центром $m \in [m_l, m_r]$ і сталим відхиленням σ визначається такою формулою [5]:

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - [m_l, m_r]}{\sigma} \right)^2}. \quad (1)$$

Гаусова первинна функція належності зі сталим центром m та невизначеним відхиленням $\sigma \in [\sigma_l, \sigma_u]$ задається таким чином [5]:

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{[\sigma_l, \sigma_u]} \right)^2}. \quad (2)$$

Графіки гаусових первинних функцій належності з невизначеним центром і сталим відхиленням (1) та зі сталим центром і невизначеним відхиленням (2) наведено на рис. 2 та 3 відповідно.

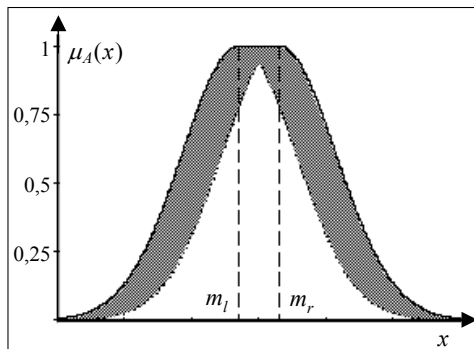


Рис. 2. Гаусова первинна функція належності з невизначеним центром і сталим відхиленням

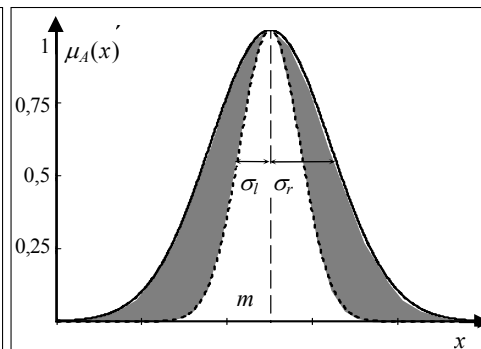


Рис. 3. Гаусова первинна функція належності зі сталим центром і невизначеним відхиленням

Під час обчислення вихідних нечітких множин правил використовуватимемо t -норму мінімуму або алгебраїчного добутку. Тоді вихідна множина правила R^{jp} , $p = \overline{1, k_j}$ визначається за формулою:

$$\mu_{B^{jp}}(y) = \int_{b^{jp} \in [\underline{f}^{jp} * \mu_{l_j}(y), \bar{f}^{jp} * \mu_{l_j}(y)]} 1/b^{jp}, \quad (3)$$

де $*$ — оператор t -норми; \underline{f}^{jp} та \bar{f}^{jp} — нижня та верхня границі інтервалу активізації $[\underline{f}^{jp}, \bar{f}^{jp}]$, які визначаються такими формулами:

$$\underline{f}^{jp} = \prod_{i=1}^{23} \mu_{a_i^{jp}}(x_i), \quad (4)$$

$$\bar{f}^{jp} = \prod_{i=1}^{23} \bar{\mu}_{a_i^{jp}}(x_i), \quad (5)$$

де $\mu_{a_i^{jp}}(x_i)$ і $\bar{\mu}_{a_i^{jp}}(x_i)$ — нижня та верхня степені належності $\mu_{a_i^{jp}}(x_i)$.

Вихідні нечіткі множини правил B^{jp} не будемо об'єднувати в єдину множину, а одразу подаватимемо на блок пониження типу нечіткої моделі.

Пониження типу вихідних інтервальних нечітких множин типу-2 до інтервальних типу-1 здійснюється методом центру множин, що виражається такою формулою:

$$Y(\mathbf{x}) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \dots \int_{y^m \in [y_l^m, y_r^m]} \int_{f^{11} \in [\underline{f}^{11}, \bar{f}^{11}]} \dots \int_{f^{mk_m} \in [\underline{f}^{mk_m}, \bar{f}^{mk_m}]} 1 / \frac{\sum_{j=1, p=1}^{m, k_j} f^{jp} y^j}{\sum_{j=1, p=1}^{m, k_j} f^{jp}}, \quad (6)$$

де $Y(\mathbf{x})$ — інтервальна множина, що визначається крайніми точками y_l та y_r ; $[y_l^j, y_r^j]$ — центроїд інтервальної нечіткої множини типу-2 терму l_j , що обчислюється за формулою:

$$C_{l_j} = \int_{\theta_1 \in \mu_{l_j}(y_1)} \dots \int_{\theta_N \in \mu_{l_j}(y_N)} 1 / \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} = [y_l^j, y_r^j], \quad (7)$$

де N — число точок дискретизації.

Для обчислення крайніх точок y_l та y_r використаємо алгоритм Карніка-Менделя [5].

Приведення до чіткості виконується за формулою:

$$y(\mathbf{x}) = \frac{y_l + y_r}{2}. \quad (8)$$

Описана вище модель є основою для побудови нечіткого логічного порадника, який виконуватиме функції помічника експерта в задачах підбору та оцінювання персоналу.

КОМП'ЮТЕРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

За допомогою експерта з підбору персоналу було сформовано базу правил нечіткої моделі для визначення професійної придатності людини. Для оцінювання значень вхідних лінгвістичних змінних x_1, \dots, x_{23} та вихідної змінної y використовувалась система якісних термів: Н — низький, нС — нижчий за середній, С — середній, вС — вищий за середній та В — високий. Під час побудови моделі було використано первинні функції належності зі сталим центром та невизначеним відхиленням, які наведено на рис. 4.

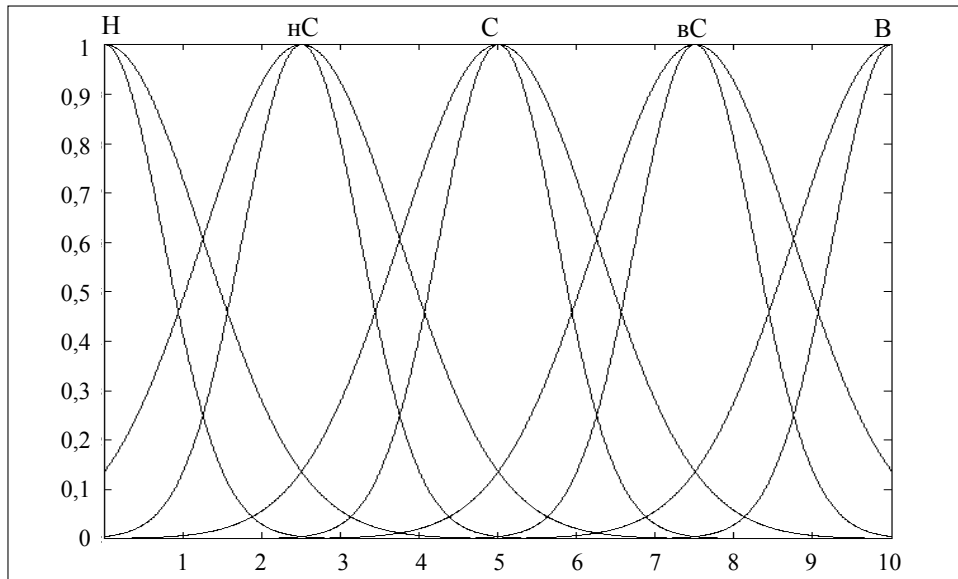


Рис. 4. Функції належності нечітких термів лінгвістичних змінних

На вхід нечіткої моделі було подано множину вхідних векторів, що являли собою результати тестування людей, для яких визначалась професійна придатність. Модель давала на виході інтервальне та чітке значення в діапазоні $[0;10]$ та якісне значення придатності (низька, нижча за середню, середня, вища за середню та висока).

Результати визначення професійної придатності окремих людей за допомогою нечіткої моделі наведено в таблиці.

Таблиця. Результати роботи інтервальної нечіткої моделі типу-2

№	x_1	x_2	x_3	...	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_l	y_r	y	\tilde{y}
1	24	0	0	...	10	0	0	30	0	0	15	30	9,01	9,44	9,22	В
2	9	3	21	...	12	11	9	20	8	23	18	11	0,89	2,90	1,90	нС
3	18	9	21	...	3	25	6	9	24	10	19	19	0,56	2,90	1,73	Н,нС
4	3	12	12	...	4	6	10	19	14	2	16	15	2,17	7,33	4,75	нС÷вС

З таблиці видно, що для 1-го вектора професійна придатність є високою, тому що крайні точки вихідного інтервального значення належать терму «Високий», а ширина інтервалу, що відображає невизначеність, є незнач-

ною. 2-й вектор вказує на професійну придатність нижчу за середню та має більшу невизначеність, ніж попередній. 3-й вектор має більшу невизначеність, ніж два попередні. Він показує професійну придатність, що може бути як низькою, так і нижчою за середню. 4-й вектор, на відміну від попередніх, має найбільшу невизначеність — його професійна придатність може бути в діапазоні від нижчої за середню до вищої за середню.

Отримані результати показують, що ця модель може виконувати функції помічника експерта з питань визначення найкращих претендентів на працевлаштування. Для підвищення якості прийняття рішень експерту необхідно враховувати оцінку невизначеності професійної придатності, яку дає інтервальна нечітка модель типу-2. При цьому варто скористатися такими практичними рекомендаціями:

- за умови рівності крайніх правих точок інтервальних значень професійної придатності двох кандидатів перевагу необхідно надати кандидату з меншим рівнем невизначеності професійної придатності;
- якщо отриманий у результаті роботи моделі рівень невизначеності професійної придатності не дозволяє чітко встановити єдине якісне значення з вихідної системи якісних термів, то необхідно провести додаткове тестування з метою зменшення цієї невизначеності.

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано математичну модель, яка може слугувати основою для нечіткого логічного порадики, що дозволить підвищити якість підбору та оцінювання персоналу. Цей результат було досягнуто шляхом використання інтервальних нечітких множин типу-2, що дозволило обчислити нижню та верхню границі професійної придатності людини, яка проходить тестування, і таким чином надати додаткову інформацію для експерта, який приймає кінцеве рішення. У роботі подано практичні рекомендації щодо використання результатів роботи запропонованої моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Рабочая книга практического психолога: пособие для специалистов, работающих с персоналом* / Под ред. А.А. Бодалева, А.А. Деркача, Л.Г. Лаптева. — М.: Изд. Ин-та Психотерапии, 2002. — 640 с.
2. *Злепко С.М., Коваль Л.Г., Бондарчук М.Т.* та ін. Інформаційна технологія психофізіологічного тестування і вибору персоналу для органів внутрішніх справ України: монографія. — Вінниця: Універсум, 2008. — 154 с.
3. *Беллман Р., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений: пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 230 с.
4. *Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П.* Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. — М.: Мир, 1976. — 167 с.
5. *Mendel J.M.* Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions. — NJ: Prentice Hall, 2001. — 576 p.
6. *Кондратенко Н.Р., Зелінська Н.Б., Куземко С.М.* Діагностика гіпотиреозу на основі нечіткої логіки з використанням інтервальних функцій належності // *Наук. вісті НТУУ «КПІ»*. — 2003. — № 4. — С. 52–58.
7. *Кондратенко Н.Р., Куземко С.М., Чеборака О.В.* Використання інтервальних функцій належності в задачах класифікації ендокринних захворювань // *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*. — 2005. — № 3. — С. 85–90.

Надійшла 07.06.2010

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Ю.П. ЗАЙЧЕНКО, ОВИ НАФАС АГАИ АГ ГАМИШ

Рассмотрена и исследована двойственная задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях неопределенности. Получены достаточные условия выпуклости математической модели этой задачи. Приведены результаты экспериментальных исследований получаемых решений прямой и двойственной задач нечеткой портфельной оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы проблема оптимизации инвестиционных портфелей представляет значительный интерес в связи с развитием финансовых рынков в Украине и мире. Нахождение оптимального портфеля позволяет инвесторам и финансовым фондам распределять финансовые средства в портфели ценных бумаг с целью получения максимально возможной прибыли, а также сокращения риска принятых решений.

Особенностью данной проблемы является существенная неопределенность исходной информации относительно доходности ценных бумаг (ЦБ) в будущий момент времени. Новый подход к задаче оптимизации портфеля, который позволяет учесть неопределенность исходных данных и является альтернативой классической модели Марковица, базируется на применении аппарата нечетких множеств. Проблема нечеткой портфельной оптимизации была рассмотрена и исследована в работах [1, 2, 3]. В этих работах рассматривалась следующая постановка задачи: необходимо оптимизировать ожидаемую доходность портфеля при ограничениях на возможный риск. Алгоритм для решения этой задачи предложен и исследован в [2]. В работе [3] было предложено использовать прогнозирование доходностей акций, что позволило повысить эффективность получаемых решений.

Цель работы — рассмотрение двойственной задачи нечеткой портфельной оптимизации, ее исследование и определение достаточных условий ее выпуклости.

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА НЕЧЕТКОЙ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Исходная задача оптимизации нечеткого портфеля, которую естественно называть прямой, имеет следующий вид [1, 2].

Найти ожидаемую доходность нечеткого портфеля

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^N \tilde{r}_i x_i \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях на риск

$$0 < \beta < 1, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \tag{3}$$

$$x_i \geq 0. \tag{4}$$

При этом доходность i -й ценной бумаги (ЦБ) рассматривается как нечеткое число с треугольной функцией принадлежности:

$$r_i = \{r_{i1}, \tilde{r}_i, r_{i2}\},$$

где \tilde{r}_i — ожидаемая доходность i -той ценной бумаги; r_{i1} — нижняя граница доходности i -той ценной бумаги; r_{i2} — верхняя граница доходности i -й ценной бумаги. Тогда доходность по портфелю:

$$r = \left(r_{\min} = \sum_{i=1}^N r_{i1} x_i; \quad \tilde{r} = \sum_{i=1}^N \tilde{r}_i x_i; \quad r_{\max} = \sum_{i=1}^N r_{i2} x_i \right),$$

также является треугольным нечетким числом (как линейная комбинация треугольных нечетких чисел), где x_i — вес i -го актива в портфеле.

Рассмотрим случай, когда критериальное значение доходности r^* удовлетворяет условиям:

$$r_{\min} = \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* \leq \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i = \tilde{r}. \tag{5}$$

Тогда величина риска равна [1, 2]:

$$\beta(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \times \left[\left(r^* - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \right) \right]. \tag{6}$$

Рассмотрим двойственную задачу оптимизации нечеткого портфеля относительно задачи (1)–(4):

минимизировать $\beta(x)$, (7)

при условиях $\tilde{r} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \geq r_{\text{зад}} = r^*$, (8)

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \tag{9}$$

Требуется доказать, что функция риска $\beta(x)$ является выпуклой, где

$$\beta(x) = \left(A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right) D(x).$$

Для этого необходимо доказать, что функция

$$D(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \text{ — выпуклая,}$$

и функция

$$A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \text{ также выпуклая,}$$

где $A(x) = r^* - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}$, $B(x) = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*$, $C(x) = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}$.

Кроме того, обе функции являются убывающими по x_i и неотрицательными.

Действительно $A(x)$ — линейна, и поэтому не строго выпуклая, а функции $B(x)$ и $C(x)$ также линейны.

Кроме того, $r_{i2} \geq r_{i1}$, $1 \leq i \leq N$, $\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* > 0$ по предположению (условие (8)).

Рассмотрим функцию $D(x)$ и найдем ее первые производные:

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_i} = D'(x) = -\frac{r_{i2} - r_{i1}}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (r_{i2} - r_{i1}) \right)^2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2} = \frac{2(r_{i2} - r_{i1})^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (r_{i2} - r_{i1}) \right)^3} > 0.$$

Так как $r_{i2} > r_{i1}$, то $\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2} > 0$, для всех $1 \leq i \leq N$. Следовательно, функция $D(x)$ выпуклая.

Вычислим:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] = B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + B(x) - \frac{C'(x)B(x)}{C(x)}. \quad (10)$$

Поскольку

$$C'(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} C(x) = \tilde{r}_i - r_{i1}, \quad B'(x) = \frac{\partial B(x)}{\partial x_i} = \tilde{r}_i,$$

то подставляя в (10), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] = \tilde{r}_i \ln \frac{B(x)}{C(x)} + \tilde{r}_i - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B(x)}{C(x)}. \quad (11)$$

Найдем вторую частную производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] &= \tilde{r}_i \frac{C(x)}{B(x)} \frac{B'(x)C(x) - C'(x)B(x)}{C^2(x)} - \\ &\quad - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B'(x)C(x) - C'(x)B(x)}{C^2(x)} = \\ &= \tilde{r}_i \left(\frac{B'(x)}{B(x)} - \frac{C'(x)}{C(x)} \right) - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left[\frac{B'(x)}{C(x)} - \frac{C'(x)B(x)}{C^2(x)} \right] = \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{r}_i \left[\frac{\tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*} - \frac{\tilde{r}_i - r_{i1}}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \right] - \\ &\quad - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left[\frac{\tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) (\tilde{r}_i - r_{i1})}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)^2} \right] = \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \frac{\tilde{r}_i^2}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*} - \frac{2\tilde{r}_i(\tilde{r}_i - r_{i1})}{\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})} + \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)^2}. \quad (14)$$

После приведения к общему знаменателю выражения (14) получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] = \\ &= \frac{\tilde{r}_i^2 \left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)^2 - 2\tilde{r}_i(\tilde{r}_i - r_{i1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)^2} + \\ &\quad + \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)} = \\ &= \frac{\left[\tilde{r}_i \left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right) - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \right]^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\tilde{r}_i > (\tilde{r}_i - r_{i1})$ и $\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) > \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*$, то выражение (15)

строго больше нуля. Таким образом, все частные производные второго порядка больше нуля:

$$\Delta_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] > 0,$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] > 0.$$

Теперь необходимо показать, что все диагональные миноры вида:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ii} & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ji} & \Delta_{jj} \end{bmatrix} = \Delta_{ii}\Delta_{jj} - \Delta_{ij}\Delta_{ji} = \Delta_{ii}\Delta_{jj} - \Delta_{ji}^2 \geq 0. \quad (16)$$

Эти условия будут достаточными для выпуклости функции $B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}$, а следовательно, и исходной функции $A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}$.

Вычислим смешанные частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + B'(x) - \frac{C'(x)B(x)}{C(x)} \right) = \\ &= \tilde{r}_i \frac{C(x) B'_j(x) C(x) - C'_j(x) B(x)}{C^2(x)} - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B'_j(x) C(x) - C'_j(x) B(x)}{C^2(x)} = \\ &= \tilde{r}_i \left(\frac{B'_j(x)}{B(x)} - \frac{C'_j(x)}{C(x)} \right) - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left[\frac{B'_j(x)}{C(x)} - \frac{C'_j(x) B(x)}{C^2(x)} \right], \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$B'_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} B(x) = \tilde{r}_j, \quad C'_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} C(x) = \tilde{r}_j - r_{j1}.$$

Подставляя эти значения в (17), получим:

$$\begin{aligned} &\tilde{r}_i \left(\frac{\tilde{r}_j}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*} - \frac{\tilde{r}_j - r_{j1}}{\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})} \right) - \\ & - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left[\frac{\tilde{r}_j}{\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})} - \frac{(\tilde{r}_j - r_{j1}) \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2} \right] = \\ &= \frac{\tilde{r}_i \tilde{r}_j \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 - \tilde{r}_i (\tilde{r}_j - r_{j1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)} - \\ & - \frac{\tilde{r}_j (\tilde{r}_i - r_{i1}) \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) + (\tilde{r}_i - r_{i1}) (\tilde{r}_j - r_{j1}) \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)} = (18) \end{aligned}$$

$$= \frac{\tilde{r}_i \tilde{r}_j \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 - (2\tilde{r}_i \tilde{r}_j - \tilde{r}_i \tilde{r}_{j1} - \tilde{r}_{i1} \tilde{r}_j) \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) (\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)} + \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1}) (\tilde{r}_j - r_{j1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)}. \quad (19)$$

Для удобства и сокращения выкладок обозначим знаменатель

$$\left(\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) = E(x). \quad (20)$$

Подставим выражение для Δ_{ii} и Δ_{jj} из (15) и (19) в (16) и получим:

$$\Delta_{ii} \Delta_{jj} - \Delta_{ji}^2 = \frac{\left[\tilde{r}_i \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \right]^2}{E(x)} \times \frac{\tilde{r}_j \sum_{j=1}^N x_j (\tilde{r}_j - r_{j1}) - (\tilde{r}_j - r_{j1}) \left(\sum_{i=1}^N x_j \tilde{r}_j - r^* \right)^2}{E(x)} - \frac{\left[\tilde{r}_i \tilde{r}_j \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1})^2 - (2\tilde{r}_i \tilde{r}_j - \tilde{r}_i \tilde{r}_{j1} - \tilde{r}_{i1} \tilde{r}_j) \sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \right]}{E^2(x)} + \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1}) (\tilde{r}_j - r_{j1}) \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right)^2}{E^2(x)}. \quad (21)$$

Для дальнейшего упрощения введем обозначения:

$$\sum_{i=1}^N x_i (\tilde{r}_i - r_{i1}) = \tilde{r} - r_{\min}; \quad \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* = \tilde{r} - r^*.$$

Подставляя их в (21), получим:

$$\Delta_{ii} \Delta_{jj} - \Delta_{ji}^2 = \frac{\left[\tilde{r}_i (\tilde{r} - r_{\min}) - (\tilde{r}_i - r_{i1}) (\tilde{r} - r^*) \right]^2}{E^2(x)} * \frac{\left[\tilde{r}_j (\tilde{r} - r_{\min}) - (\tilde{r}_j - r_{j1}) (\tilde{r} - r^*) \right]^2}{E^2(x)} - \frac{\left\{ \tilde{r}_i \tilde{r}_j (\tilde{r} - r_{\min})^2 - (2\tilde{r}_i \tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1}) (\tilde{r} - r_{\min}) (\tilde{r} - r^*) \right\}}{E^2(x)} +$$

$$+ \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)^2}{E^2(x)}. \quad (22)$$

Далее обозначим $\tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{\min}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r} - r^*) = F$; $\Delta_{ji} = \frac{H}{E}$, $\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{\min}) - (\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*) = G$ и подставляя в (22), получим:

$$\Delta_{ii}\Delta_{jj} - \Delta_{ji}^2 = \frac{F^2G^2 - H^2}{E^2} = \frac{(FG - H)(FG + H)}{E^2} > 0. \quad (23)$$

Условие неотрицательности для (23) таково: $FG - H > 0$. Откуда

$$\begin{aligned} FG - H &= [\tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{\min}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r} - r^*)][\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{\min}) - \tilde{r}_j(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)] - \\ &\quad - \tilde{r}_i\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{\min})^2 + (2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1})(\tilde{r} - r_{\min})(\tilde{r} - r^*) - \\ &\quad - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*) = \tilde{r}_i\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{\min})^2 - \\ &\quad - \tilde{r}_j(\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r} - r^*)(\tilde{r} - r_{\min}) - \tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{\min})(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*) + \\ &\quad + (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)^2 - \tilde{r}_i\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{\min})^2 + \\ &\quad + (2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1})(\tilde{r} - r_{\min})(\tilde{r} - r^*) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)^2 = \\ &= (\tilde{r} - r_{\min})(\tilde{r} - r^*)[-\tilde{r}_j(\tilde{r}_i - r_{i1}) - \tilde{r}_i(\tilde{r}_j - r_{j1}) + 2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1}] = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующие условия

$$\Delta_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right] > 0$$

для всех i , $1 \leq i \leq N$, и, кроме того, диагональные миноры неотрицательны:

$$\mu_{i1} = \begin{bmatrix} \Delta_{ii} & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ji} & \Delta_{jj} \end{bmatrix} = 0. \quad (25)$$

Это является достаточными условиями выпуклости функции $B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}$ и, следовательно, функции $A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}$.

Теперь остается показать, что произведение выпуклых функций $A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}$ и $D(x)$ будет так же выпуклым на интервале $x_i \in [0, 1]$, $i = \overline{1, N}$ с учетом того, что

$$D(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}},$$

где

$$r_{i2} > r_{i1}, x_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Заметим, что $A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}$ и $D(x)$, как показано выше, положительны и $D(x)$ монотонно убывающая функция, поскольку $D'(x) = -\frac{r_{i2} - r_{i1}}{\left(\sum_{i=1}^N x_i (r_{i2} - r_{i1})\right)^2} < 0$. Для удобства обозначим $A(x) + B(x) \times \ln \frac{B(x)}{C(x)} = \varphi(x)$. Докажем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi'(x) < 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right) = \\ &= A'(x) + B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + B(x) \frac{C(x) B'(x) C(x) - C'(x) B(x)}{C^2(x)} = \\ &= A'(x) + B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + B'(x) - C'(x) \frac{B(x)}{C(x)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставив значения $A'(x)$ и $B'(x)$ в (26), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= -r_{i1} + \tilde{r}_i \ln \frac{B(x)}{C(x)} + \tilde{r}_i - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B(x)}{C(x)} = \\ &= \tilde{r}_i \left(1 + \ln \frac{B(x)}{C(x)} \right) - r_{i1} - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B(x)}{C(x)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку $\frac{B(x)}{C(x)} < 1$, то $-r_{i1} + r_{i1} \frac{B(x)}{C(x)} < 0$. Отсюда после упрощения (27), получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} < \tilde{r}_i \left(1 + \ln \frac{B(x)}{C(x)} - \frac{B(x)}{C(x)} \right). \quad (28)$$

Рассмотрим

$$1 + \ln \left(\frac{B(x)}{C(x)} \right) - \frac{B(x)}{C(x)} = 1 + \ln \left(\frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{\min}} \right) - \frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{\min}}. \quad (29)$$

Заметим, что $r^* > r_{\min} = \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}$ и $\tilde{r} > r^*$. Покажем, что выражение (29) меньше 0. Обозначим $\tilde{r} - r^* = a$, тогда $\tilde{r} - r_{\min} = \tilde{r} - r^* + (r^* - r_{\min}) = a + y$, где $y = r^* - r_{\min} > 0$.

Подставляя в (29), получим:

$$1 + \ln\left(\frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{\min}}\right) - \frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{\min}} = 1 + \ln\left(\frac{a}{a + y}\right) - \frac{a}{a + y}. \quad (30)$$

Покажем, что $\Delta(y) = 1 + \ln\left(\frac{a}{a + y}\right) - \frac{a}{a + y} < 0$ для всех $y > 0$. Очевидно, $\Delta(0) = 0$ и, кроме того, функция $\Delta(y)$ монотонно убывающая, т.к.

$$\Delta'(y) = -\frac{1}{a + y} + \frac{a}{(a + y)^2} = -\frac{y}{(a + y)^2} < 0, \quad (31)$$

для всех $y > 0$.

Таким образом $\Delta(y) < 0$, для всех $y > 0$, и окончательно имеем $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} < 0$.

Вычислим первые производные:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi(x)D(x)) = \varphi'(x)D(x) + D'(x)\varphi(x) < 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\varphi(x)D(x)) = \varphi''(x)D(x) + 2\varphi'(x)D'(x) + \varphi(x)D''(x). \quad (33)$$

Но поскольку $D''(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$, $D'(x) < 0$, $\varphi'(x) < 0$, то выражение (33) будет больше нуля:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\varphi(x)D(x)) > 0, \quad (34)$$

а условия (34) являются достаточными условиями для выпуклости функции

$$\beta(x) = \varphi(x)D(x).$$

Итак, мы доказали, что если $\sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* \leq \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i = \tilde{r}$, то функция риска $\beta(x)$ является выпуклой. Кроме того, как было доказано раньше, функция риска $\beta(x)$ — монотонно убывающая.

Таким образом, для данного случая задача нечеткой портфельной оптимизации (7)–(9) является задачей выпуклого программирования.

Учитывая, что ограничения (8) линейны, составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda, \mu) = \beta(x) + \lambda \left(r^* - \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^N x_i - 1 \right). \quad (35)$$

Условия оптимальности по Куну–Таккеру будут таковы:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial \beta(x)}{\partial x_i} - \lambda \tilde{r}_i + \mu \geq 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = - \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i + r^* \leq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N x_i - 1 = 0. \quad (37)$$

И условия дополняющей нежесткости:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = \lambda \left(- \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i + r^* \right) = 0, \quad x_i \geq 0, \lambda \geq 0,$$

где $\lambda \geq 0$ и μ — неопределенные множители Лагранжа. Эту задачу можно решать стационарными методами выпуклого программирования, например, методом Зойтендейка или штрафных функций.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Входными данными для экспериментов являются рыночные цены акций ведущих российских компаний — ОАО РАО «ЕЭС России», ОАО ГМК «Норильский никель», ОАО «ЛУКОЙЛ» и ОАО «Газпром» за февраль 2008 года. Наиболее доходными за этот период являются акции ОАО ГМК «Норильский никель», наименее доходными — акции ОАО «Газпром».

Исследуем зависимость уровня риска (risk) от заданного порогового значения доходности r^* для различных комбинаций бумаг в портфеле.

На рис. 1 приведены результаты по портфелю из акций ОАО «Газпром» и ОАО РАО «ЕЭС России».

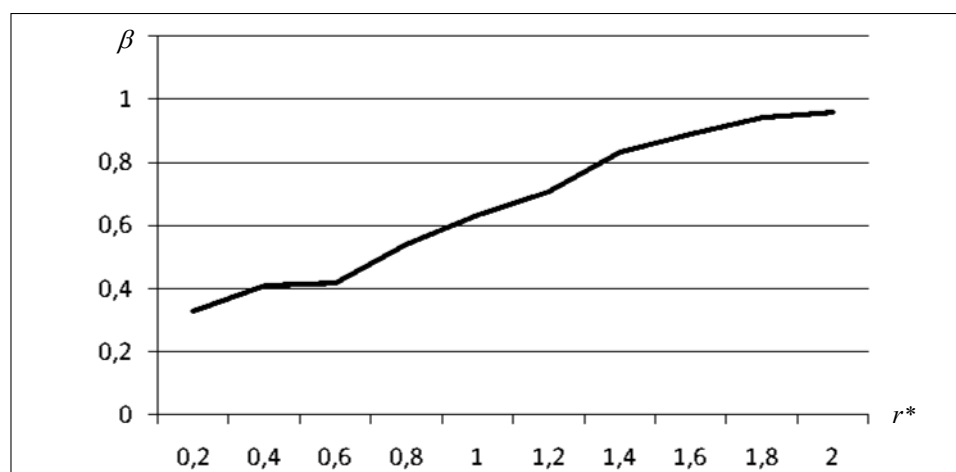


Рис. 1. Зависимость величины риска от критериального значения r^* для портфеля из акций ОАО «Газпром» и ОАО РАО «ЕЭС России»

На рис. 2 приведены результаты по портфелю из акций ОАО «ЛУКОЙЛ» и ОАО РАО «ЕЭС России».

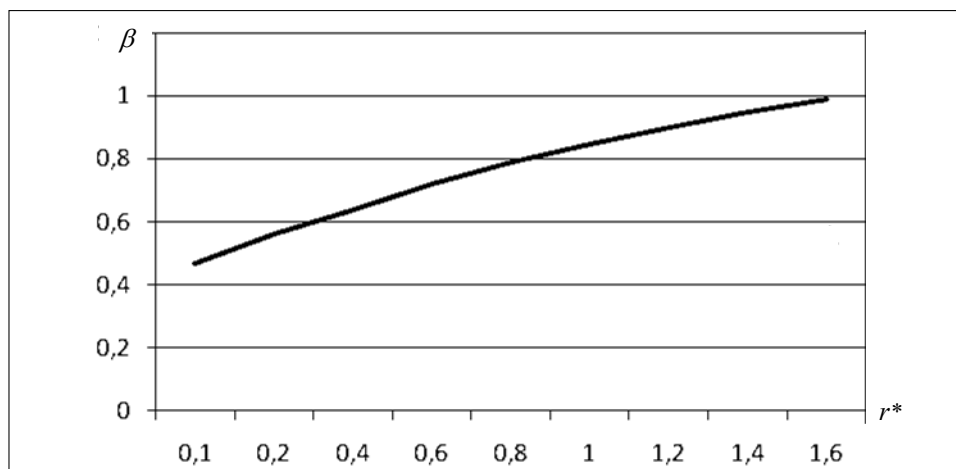


Рис. 2. Зависимость величины риска от критериального значения r^* для портфеля из акций ОАО «ЛУКОЙЛ» и ОАО РАО «ЕЭС России»

В табл. 1 приведены результаты по портфелю из акций ОАО «Газпром» и ОАО «ЛУКОЙЛ»

Таблица 1. Зависимость величины риска от критериального значения r^* для портфеля из акций ОАО «Газпром» и ОАО «ЛУКОЙЛ»

r^*	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,5
risk	0,458	0,561	0,638	0,718	0,787	0,844	0,897	0,948	0,99

В табл. 2 приведены результаты по портфелю акций ОАО «Газпром», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ».

Таблица 2. Зависимость величины риска от критериального значения r^* для портфеля из акций ОАО «Газпром», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ»

r^*	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
risk	0,457	0,477	0,625	0,745	0,82	0,871	0,918	0,962	0,999

Таким образом, судя по полученным графикам, можно сделать вывод, что при увеличении заданного порогового значения доходности, уровень риска увеличивается.

Исследуем зависимость уровня доходности портфеля $R = (R_1; R_2; R_3)$ от уровня риска (risk).

В табл. 3 приведены результаты по портфелю акций ОАО «Газпром» и ОАО РАО «ЕЭС России».

В табл. 4 приведены результаты по портфелю акций ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «Газпром».

Таблица 3. Зависимость «доходность-риск» для оптимального портфеля из акций ОАО «Газпром» и ОАО РАО «ЕЭС России»

R1	R_	R2	risk
-3,27524	0,32628	4,88492	0,374
-3,27693	0,325257	4,878173	0,398
-3,6526	0,228595	4,396182	0,4887
-3,77124	0,197885	4,242538	0,5921
-3,88174	0,16928	4,09942	0,71
-3,89545	0,165732	4,081668	0,8097
-3,88902	0,167396	4,089994	0,892
-3,90088	0,163151	4,065503	0,954
-3,88659	0,168024	4,093136	0,995

Таблица 4. Зависимость «доходность-риск» для оптимального портфеля из акций ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «Газпром»

R1	R_	R2	risk
-4,12801	0,42681	5,738035	0,391
-3,72911	0,4227	5,39345	0,4391
-3,73777	0,40998	5,32853	0,462
-3,77676	0,35274	5,03639	0,55
-3,84824	0,2478	4,5008	0,6837
-3,89062	0,185578	4,183233	0,79737
-3,90398	0,165963	4,083121	0,8836
-3,906	0,163	4,068	0,954
-3,906	0,163	4,068	0,999

На рис. 3 приведены результаты по портфелю акций ОАО «ЛУКОЙЛ» и ОАО ГМК «Норильский никель».

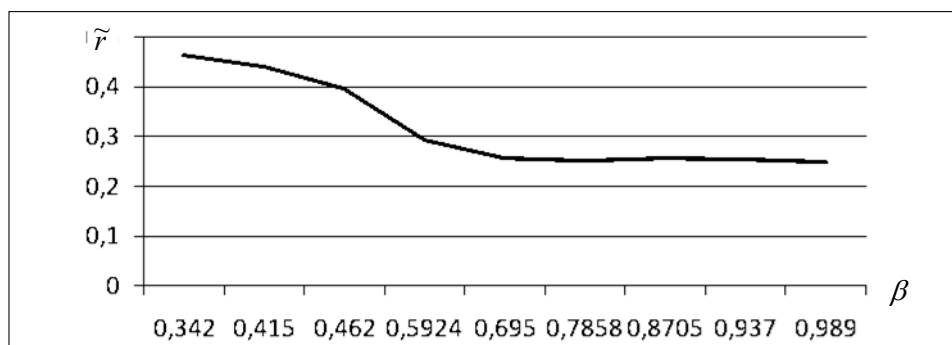


Рис. 3. Зависимость «доходность-риск» для оптимального портфеля из акций ОАО «ЛУКОЙЛ» и ОАО ГМК «Норильский никель»

На рис. 4 приведены результаты по портфелю акций ОАО «Газпром», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ».

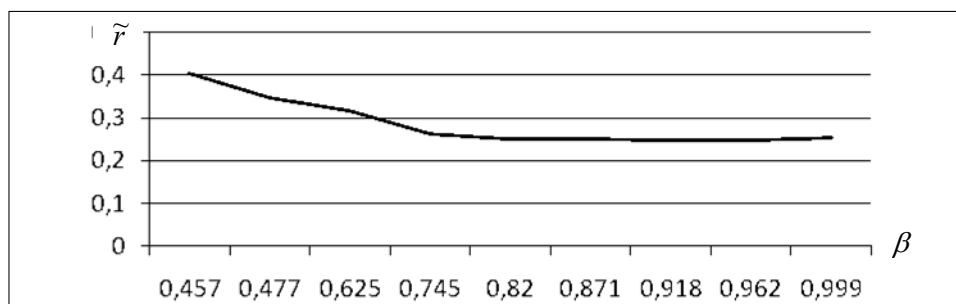


Рис. 4. Зависимость «доходность-риск» для оптимального портфеля из акций ОАО «Газпром», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ»

В табл. 5 приведены результаты по портфелю из акций ОАО РАО «ЕЭС России», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ».

Таблица 5. Зависимость «доходность-риск» для оптимального портфеля из акций ОАО РАО «ЕЭС России», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ»

R1	R ₋	R2	risk
-3,61028	0,445731	5,522534	0,341
-3,5609	0,434741	5,46456	0,42
-4,11287	0,377739	5,19912	0,528
-4,41087	0,290823	4,773968	0,701
-4,41639	0,291458	4,77744	0,786
-4,57568	0,272961	4,690976	0,853
-4,66402	0,264004	4,64962	0,907
-4,71599	0,258063	4,621886	0,955
-4,72066	0,258482	4,624224	0,995

В табл. 6 приведены результаты по портфелю из акций ОАО РАО «ЕЭС России», ОАО «Газпром», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ».

Таблица 6. Зависимость «доходность-риск» для оптимального портфеля из акций ОАО РАО «ЕЭС России», ОАО «Газпром», ОАО ГМК «Норильский никель» и ОАО «ЛУКОЙЛ»

R1	R ₋	R2	risk
-4,09352	0,452824	5,577784	0,34
-3,89222	0,461952	5,610476	0,404
-3,88378	0,439452	5,49371	0,5235
-3,985	0,294998	4,751116	0,688
-4,32256	0,292872	4,768776	0,799
-4,42812	0,286567	4,744776	0,857
-4,38233	0,214641	4,368052	0,954

Таким образом, судя по полученным графикам, можно сделать вывод, что при увеличении ожидаемой доходности инвестиционного портфеля уровень риска падает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена и исследована двойственная задача нечеткой портфельной оптимизации. Определены достаточные условия, при которых данная задача является задачей выпуклого программирования. В этом случае данную задачу можно решать стандартными методами выпуклого программирования.

Проведены экспериментальные исследования, в ходе которых построены зависимости риска портфеля от критериального значения доходности, а также ожидаемой доходности портфеля от величины риска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Анализ и сравнение результатов оптимизации инвестиционного портфеля при применении модели Марковитца и нечетко-множественного метода // Proceedings of X111-th International Conference KDS-2007 «Knowledge, Dialogue Solution». — 1. — P. 278–286.
2. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Оптимизация инвестиционного портфеля в условиях неопределенности // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 2. — С. 59–76.
3. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісн. НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — 2007. — № 47. — С. 168–179.

Поступила 03.11.2010

К ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИТУАЦИИ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

В.М. МИХАЛЕВИЧ

Даны определения так называемой параметрической и непараметрической модели для ситуаций с причинно-следственным механизмом, который описывается статистической закономерностью. Показано, что эти модели эквивалентны (равносильны), т.е. охватывают весь класс ситуаций с решениями, неопределенность последствий которых описывается статистическими закономерностями.

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении системы принятия решения, представляющей собой пару (того, кто принимает решение и ситуации принятия решения [1]), возникает вопрос о взаимосвязи двух форм схем ситуации — параметрической (матричной) и непараметрической (лотерейной) [2], а также двух соответствующих им форм моделей этой ситуации. В данной работе показано, что для моделирования любых ситуаций можно всегда использовать параметрическую форму. Полученные результаты являются уточнением и обобщением результатов статьи [3].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Дадим несколько предварительных определений.

Определение 1. Статистической закономерностью на Θ , где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножества Σ (если Σ не задается, то считается, по умолчанию, что $\Sigma = 2^\Theta$) называется всякое непустое замкнутое множество P в топологии $\tau(\Theta)$ пространства

$$PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^\Sigma : p(\Theta) = 1,$$

$$p(C \cup D) = p(C) + p(C \setminus D), \forall C, D \in \Sigma\}$$

всех аддитивных вероятностных мер на Θ , являющейся следом * — слабой топологии в сопряженном к банаховому пространству $B_\Sigma(\Theta)$ (всех Σ измеримых ограниченных функций на Θ) с нормой $\|f\| := \sup_{\theta \in \Theta} |f(\theta)|$ [3]. Иными словами, для топологии $\tau(\Theta)$ определяющей системой окрестностей точки p в пространстве $PF(\Theta)$ являются множества вида $U_{\varepsilon, f_1, f_2, \dots, f_n}(p) = \{p' \in PF(\Theta) : |\int_{\Theta} f_i p(d\theta) - \int_{\Theta} f_i p'(d\theta)| < \varepsilon \forall i \in \overline{1, n}\}$, для любых $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $f_1, f_2, \dots, f_n \in B_\Sigma(\Theta)$.

Замечание. Данное определение обобщает определение статистической закономерности на Θ приведенное в [1, 4], когда $\Sigma = 2^\Theta$, т.е. $f \in M(\Theta)$.

Семейство всех статистических закономерностей на Θ будем обозначать $P(\Theta)$. Отметим также, что в топологии $\tau(\Theta)$ пространство $PF(\Theta)$ компактно.

Определение 2. Упорядоченную тройку (Θ, Σ, P) , где Θ — произвольное непустое множество с заданной алгеброй подмножеств Σ , а P — статистическая закономерность на Θ будем называть пространством с распределением.

Определение 3. Лотерейной формой схемы ситуаций задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная тройка вида (X, U, R) , где R — график соответствия из произвольного непустого множества U в произвольное непустое множество X , для которого $\text{dom } R = U$ и $\text{im } R = X$. При этом X называется *множеством последствий*, U — *множеством решений*, R — *соответствием ССЗР* (X, U, R) .

Класс всех упорядоченных троек вида $\hat{Z} := (X, U, R)$ обозначим $\hat{\mathbb{Z}}$.

Определение 4. Матричной формой ССЗР называется упорядоченная четверка вида (X, Θ, U, g) , где g — отображение из $\Theta \times U$ на X для произвольных непустых множеств X, Θ, U .

При этом множество X называется *множеством последствий*, Θ — *множеством значений ненаблюдаемого параметра*, U — *множеством решений*, а g — *отображением последствий ССЗР* (X, Θ, U, g) .

Пусть \mathbb{Z} — класс всех упорядоченных четверок вида $Z := (X, \Theta, U, g)$. Тогда $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 5. Проекцией ССЗР класса \mathbb{Z} называется такое отображение $\hat{P}p: \mathbb{Z} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$, что для любой ССЗР $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ $\hat{P}p((X, \Theta, U, g)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, где для любых $u \in U$ $R(u) = X_u = g(\Theta, u)$.

Пусть для любого $u \in U$ (X_u, Ξ_u) — измеримое пространство, т.е. Ξ_u — некоторая алгебра подмножеств множества X_u .

Предположим, что на алгебре $\bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$ (алгебра, порожденная полукольцом $\prod_{i=1}^n \Xi_{u_i}$ [5] для каждого $n \in N$ и для любой выборки u_1, \dots, u_n , где u_i ($i = \overline{1, n}$) — произвольные точки множества U , определено множество вероятностных мер

$$P_{u_1, \dots, u_n} \subseteq \left\{ P_{u_1, \dots, u_n} \in PF \left(\prod_{i=1}^n X_{u_i} \right) \right\}, \quad (1)$$

причем семейство множеств (1) удовлетворяет следующим условиям согласованности для любых $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$:

- для любой $P_{u_1, \dots, u_{n+m}} \in P_{u_1, \dots, u_{n+m}}, P_{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} (A^{(n)} \times \prod_{i=1}^m X_{n+i}) = P_{u_1, \dots, u_n} (A^{(n)})$, где $P_{u_1, \dots, u_n} \in P_{u_1, \dots, u_n}$;
- для любой $P_{u_1, \dots, u_n} \in P_{u_1, \dots, u_n}, P_{u_1, \dots, u_n} (A^{(n)}) = P_{s(u_1, \dots, u_n)} (\{s(a) : a \in A^{(n)}\})$, где $s(u_1, \dots, u_n)$ — любая перестановка элементов u_1, \dots, u_n .

Рассмотрим теперь класс ССЗР $\hat{\mathbb{Z}}$ с заданными статистическими закономерностями, описывающими «механизм случайности» исходов каждого действия соответствующих множеств решений этой ССЗР. Тогда каждой ССЗР этого класса $(X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u))$, где для любого $u \in U$ X_u — непустое подмножество множества X , а $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$ соответствует упорядоченная четверка вида $(X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_u : u \in U\})$, где (X_u, Ξ_u, P_u) — любое пространство с распределением, алгебра Ξ_u которого является следом алгебры Ξ в X_u (т.е. $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$). Через $\hat{\mathbb{Z}}P$ обозначим класс всех четверок указанного вида.

Рассмотрим также ССЗР класса \mathbb{Z} с заданной статистической закономерностью, описывающей «механизм случайности» состояний природы. Этой ССЗР будет соответствовать упорядоченная пятерка вида (X, Θ, U, g, P) , где $\{\Theta, \Sigma, P\}$ — пространство с распределением.

Тогда через $\mathbb{Z}P (\hat{\mathbb{Z}}P)$ обозначим класс всех пятерок (четверок) указанного вида. Элементы класса $\mathbb{Z}P (\hat{\mathbb{Z}}P)$ будем называть ССЗР с распределением (распределениями) в матричной (лотерейной) форме.

Определение 6. Моделью СЗР (МСЗР) со статистической закономерностью будем называть ее параметрическую схему, дополненную статистической закономерностью на Θ и обозначать через M , т.е. $M := (X, \Theta, U, g, P)$, где $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}, P \in P(\Theta)$.

МСЗР со статистическими закономерностями будем называть ее непараметрическую схему, дополненную семейством согласованных статистических закономерностей на множествах $\prod_{i=1}^n X_{u_i}, u_i \in U, u_{i_1} \neq u_{i_2}$ при

$i_1 \neq i_2, n \in N$ и обозначать коротко $\hat{M} := (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_{u_1, \dots, u_n}\})$, где

$$\hat{Z} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u)) \in \hat{\mathbb{Z}}, (u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}, P_{u_1, \dots, u_n} \in P(\prod_{i=1}^n X_{u_i}).$$

Замечание. Если элемент класса $\mathbb{Z}P$ определяет соответствующую МСЗР со статической закономерностью (X, Θ, U, g, P) , то элемент класса $\hat{\mathbb{Z}}P$, вообще говоря, МСЗР со статистическими закономерностями не определяет. Ясно, что не достаёт информации о совместных распределениях исходов конечных последовательностей действий ТПР-а.

На уровне схем ситуации очевидно, что параметрическая ситуация не менее информативна, чем соответствующая ей (т.е. моделирующая ту же СЗР) непараметрическая ситуация. При этом ясно, что каждой параметрической ССЗР соответствует единственная непараметрическая ССЗР той же СЗР, являющаяся ее проекцией. А именно, для любой ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ соответствующая ей ССЗР из $\hat{\mathbb{Z}}$ имеет вид $\hat{Z} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u))$, где $X_u := g(\Theta, u) := \{g(\theta, u) : \theta \in \Theta\}$, $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$, $\forall u \in U$.

Ниже мы покажем, что для любой ССЗР $\hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}$ найдется параметрическая ССЗР Z (не единственная), проекция которой совпадает с \hat{Z} , т.е. $\hat{Pr}(Z) = \hat{Z}$. В этом случае мы будем говорить, что ССЗР Z является *представлением* ССЗР \hat{Z} .

Менее очевидно, что так же обстоит дело с параметрическими и непараметрическими МСЗР со статистическими закономерностями. Для точной формулировки этого результата введем необходимые определения.

Определение 7. Параметрическая МСЗР $M = (X, \Theta, U, g, P)$ называется *представлением* МСЗР $\hat{M} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_{u_1, \dots, u_n}\})$, если существуют пространство со статистической закономерностью (Θ, Σ, P) , семейство измеримых пространств $\{(X_u, \Xi_u) : u \in U\}$, и отображение $g : \Theta \times U \rightarrow X$ такое, что $X_u = g(\Theta, u)$, $\Xi_u := \{g^{-1}(B, u) : B \in \Sigma\}$, а конечномерные статистические закономерности $\{P_{u_1, \dots, u_n}\}$ случайного отображения $g(\theta, u)$ совпадают с заданным семейством (1).

Ясно, что при этом g — (Σ, Ξ_u) — измеримое при каждом $u \in U$ (т.е. $\forall A \in \Xi_u$ и $\forall u \in U$ множество $\{\theta : g(\theta, u) \in A\}$ принадлежит алгебре Σ), где $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$.

Определение 8. Если $\{(X_u, \Xi_u) : u \in U\}$ некоторая совокупность измеримых подпространств пространства X , Θ — пространство всех таких отображений θ , заданных на множестве U со значениями в пространстве X , что $\theta(u) \in X_u \forall u \in U$ и $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$, где $u_i \in U$ ($i = \overline{1, n}$), то множество отображений $\theta \in \Theta$, для которых точка $(\theta(u_1), \dots, \theta(u_n))$ из $\prod_{i=1}^n X_{u_i}$ принадлежит $A^{(n)}$. Т.е. множество $C_{u_1, \dots, u_n}(A^{(n)}) = \{\theta(u) : (\theta(u_1), \dots, \theta(u_n)) \in A^{(n)}\}$ называется *цилиндрическим множеством* в Θ с основанием $A^{(n)}$ над координатами u_1, \dots, u_n .

Ясно, что если точки u_1, \dots, u_n фиксированы, то между цилиндрическими множествами над координатами u_1, \dots, u_n (их совокупность

обозначим $\mathbb{C}_{u_1, \dots, u_n}$) и элементами алгебры $\bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$ существует изоморфизм: каждое множество $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$ определяет цилиндрическое множество $C_{u_1, \dots, u_n}(A^{(n)})$, для которого оно служит основанием; разным основаниям соответствуют разные цилиндрические множества; объединению, разности или пересечению оснований соответствует объединение, разность или пересечение цилиндрических множеств, что непосредственно вытекает из определения цилиндрического множества. Кроме того, легко заметить, что любые два цилиндрических множества можно всегда рассматривать как цилиндрические множества над одной и той же последовательностью координат. Отсюда следует, что, рассматривая алгебраические действия над конечным числом цилиндрических множеств, можно считать, что они заданы над фиксированной последовательностью координат. Поэтому класс \mathbb{C} всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств.

Определение 9. МСЗР со статистическими закономерностями $\hat{M} \in \hat{\mathbb{M}}$ называется проекцией МСЗР $M = \{X, \Theta, U, g, P\} \in \mathbb{M}$, где отображение g — (Σ, Ξ_u) — измеримое при каждом $u \in U$, если $\hat{M} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_{u_1, \dots, u_n}\})$, где для любого $u \in U$, $X_u := g(\Theta, u)$, $\Xi = \bigotimes_{u \in U} \Xi_u$, u_1, \dots, u_n —

любая выборка из U и каждая вероятностная мера p_{u_1, \dots, u_n} на $\prod_{i=1}^n X_{u_i}$,

определяющая множество P_{u_1, \dots, u_n} , такая, что для каждого $A^{(n)} \in \prod_{i=1}^n \Xi_{u_i}$ и

некоторой $p \in P \in P(\Theta)$ имеет место

$$p_{u_1, \dots, u_n}(A^{(n)}) := p(\{\theta : (g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), \dots, g(\theta, u_n)) \in A^{(n)}\}). \quad (2)$$

Из определения видно, что операция проектирования параметрических моделей со статистическими закономерностями однозначная, т.е. у каждой параметрической МСЗР со статистической закономерностью имеется единственная проекция.

Теорема 1. Любая параметрическая МСЗР со статистической закономерностью (X, Θ, U, g, P) , где отображение последствий g — (Σ, Ξ_u) — измерима для каждого $u \in U$, является представлением своей проекции.

Доказательство. Пусть $M = (X, \Theta, U, g, P) \in \mathbb{M}$, а $\hat{M} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_{u_1, \dots, u_n}\})$ является ее проекцией. Очевидно, что семейство множеств $\{P_{u_1, \dots, u_n}\}$ удовлетворяет условиям согласованности. В обосновании нуждается лишь то, что семейство $\{P_{u_1, \dots, u_n}\}$ является семейством статистических закономерностей. Это равносильно тому, что когда

вероятностная мера p пробегает замкнутое в топологии $\tau(\Theta)$ множество P , то для любого $n \in N$ и любой выборки u_1, \dots, u_n из множества U вероятностные меры P_{u_1, \dots, u_n} будут образовывать замкнутое в топологии

$\tau(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$ множество P_{u_1, \dots, u_n} . Действительно, если предположить противное, т.е., что для некоторой выборки u_1, u_2, \dots, u_n из множества U

множество $PF(\prod_{i=1}^n X_{u_i}) \setminus P_{u_1, \dots, u_n}$ не будет открытым в топологии $\tau(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$,

то существует такая вероятностная мера p_{u_1, \dots, u_n} из множества

$PF(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$, не входящая в множество P_{u_1, \dots, u_n} , что для любых $k, m \in N$

найдется вероятностная мера p_{k, u_1, \dots, u_n} из множества P_{u_1, \dots, u_n} , для которой

$$\begin{aligned} & \text{при любых } f_1, f_2, \dots, f_m \in B_{\otimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^n X_{u_i}) \\ & \left| \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i}} f_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) p_{k, u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) - \right. \\ & \left. - \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i}} f_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) p_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $Y := \{(g(\theta, u_1), \dots, g(\theta, u_n)) : \theta \in \Theta\}$. В силу (Σ, Ξ_u) —

измеримости отображения $g(\theta, u)$ при любых $u \in U$, множество Y является $\otimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$ -измеримым. Тогда для любой вероятностной меры q_{u_1, \dots, u_n} ,

заданной на измеримом пространстве $(\prod_{i=1}^n X_{u_i}, \otimes_{i=1}^n \Xi_{u_i})$, сосредоточенной на

множестве Y и любой функции $f \in B_{\otimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i}} f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) = \\ & = \int_Y f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) + \\ & + \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i} \setminus Y} f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})). \end{aligned} \quad (4)$$

Но, в силу ограниченности f , найдется такое число μ , что $|f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})| \leq \mu$ для любых $(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) \in \prod_{i=1}^n X_{u_i}$. А значит

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i} \setminus Y} f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) \right| \leq \\ & \leq \mu \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i} \setminus Y} q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) = \mu q(\prod_{i=1}^n X_{u_i} \setminus Y) = 0. \end{aligned}$$

Тогда имеем из (4), что

$$\begin{aligned} & \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i}} f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) = \\ & = \int_Y f(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) q_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) = \int_{\Theta} f(g(\theta, u_1), \dots, g(\theta, u_n)) q(d\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

где для любого $B \in \Sigma$

$$q(B) := q_{u_1, \dots, u_n}(\{(g(\theta, u_1), \dots, g(\theta, u_n)) : \theta \in B\}). \quad (6)$$

Следовательно, воспользовавшись равенством (5), для любых мер p_k и p на Θ , удовлетворяющих соотношению (2) относительно соответствующих мер p_{k, u_1, \dots, u_n} и p_{u_1, \dots, u_n} на $\prod_{i=1}^n X_{u_i}$, неравенство (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Theta} f_j(g(\theta, u_1), \dots, g(\theta, u_n)) p_k(d\theta) - \right. \\ & \left. - \int_{\Theta} f_j(g(\theta, u_1), \dots, g(\theta, u_n)) p(d\theta) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь определим на множестве Θ отношение эквивалентности таким образом, что для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ имеет место

$$\theta_1 \sim \theta_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \theta_1(u_i) = \theta_2(u_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Транзитивность, симметричность, рефлексивность определенного соотношением (8) соответствия очевидна. Обозначим класс эквивалентности элемента θ из фактор-множества Θ / \sim через $\tilde{\theta}$ (проекция элемента θ относительно эквивалентности (\sim)), т.е. $\Theta / \sim = \{\tilde{\theta} : \theta \in \Theta\} := \tilde{\Theta}$. Соответственно алгебру, порожденную алгеброй Σ при этом проектировании, обозначим $\tilde{\Sigma}$, а ее элемент, являющийся проекцией элемента $B \in \Sigma$ — через \tilde{B} . Ясно, что алгебра $\tilde{\Sigma}$ изоморфна алгебре $\bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$.

Тогда для всякой меры $p \in PF(\Theta)$ можно определить меру $\tilde{p} \in PF(\tilde{\Theta})$ так, что для любых $B \in \Sigma$

$$\tilde{p}(\tilde{B}) := p(B). \tag{9}$$

При этом произвольное множество мер $P \subseteq PF(\Theta)$ замкнуто в топологии $\tau(\Theta)$ тогда и только тогда, когда соответствующее ему множество мер $\tilde{P} = \{\tilde{p} : p \in P\}$, где p и \tilde{p} связаны соотношением (9), замкнуто в фактор-топологии относительно соответствия (\sim) [6], совпадающей с $\tau(\tilde{\Theta})$.

Далее определим функции F_j , $j = \overline{1, m}$ на $\tilde{\Theta}$ так, что для любых $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$

$$F_j(\tilde{\theta}) := f_j(g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), \dots, g(\theta, u_n)). \tag{10}$$

Корректность данного определения следует из соотношения (8). При этом для каждого $j = \overline{1, m}$ функция F_j пробегает все множество $B_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\Theta})$,

когда функция f_j пробегает множество $B_{\otimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$, в силу (Σ, Ξ_u) — измеримости отображения $g(\theta, u)$, $\forall u \in U$ и того, что $g(\theta, u_i) = X_{u_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Теперь соотношение (7) можно переписать в следующем виде

$$\left| \int_{\tilde{\Theta}} F_j(\tilde{\theta}) \tilde{p}_k(d\tilde{\theta}) - \int_{\tilde{\Theta}} F_j(\tilde{\theta}) \tilde{p}(d\tilde{\theta}) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{11}$$

Таким образом, последовательность мер $\{\tilde{p}_k, k \in N\}$ на $\tilde{\Theta}$ сходится в топологии $\tau(\tilde{\Theta})$ к мере \tilde{p} , а значит соответствующая ей последовательность мер $\{p_k, k \in N\}$ на Θ сходится в топологии $\tau(\Theta)$ к мере p .

Так как меры $p_{k, u_1, \dots, u_n} \in P_{u_1, \dots, u_n}$, $\forall k \in N$, то определяющие их, согласно соотношению (2), меры p_k , по условию, принадлежат статистической закономерности P . Тогда, в силу замкнутости в топологии $\tau(\Theta)$ множества P и сходимости в топологии $\tau(\Theta)$ последовательности $\{p_k, k \in N\}$ к мере p , то и мера p принадлежит статистической закономерности P . А, значит, мера p_{u_1, \dots, u_n} определяется, согласно соотношению (2), мерой p из P , т.е. $p_{u_1, \dots, u_n} \in P_{u_1, \dots, u_n}$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Теорема 2. Любая непараметрическая МСЗР со статистическими закономерностями допускает некоторое представление.

Доказательство. Предположим, что задана некоторая непараметрическая МСЗР со статистическими закономерностями $\hat{M} = (X, U)$,

$\bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_{u_1, \dots, u_n}\}$, где $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$. Покажем, что для \hat{M} существует представление $M = (X', \Theta, U', g, P)$. Очевидно, что $X = X'$ и $U = U'$. В качестве пространства Θ возьмем пространство всех таких отображений θ , заданных на U со значениями в X , что $\theta(u) \in X_u$. Отображение g определим как такое, что $g(\theta, u) = \theta(u)$. Тем самым четверкой (X, Θ, U, g) мы задали представление ССЗР $\hat{Z} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u))$, где $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$.

Далее мы можем определить на алгебре цилиндрических множеств \mathbb{C} пространства Θ для любой вероятностной меры $p_{u_1, \dots, u_n} \in P_{u_1, \dots, u_n}$ функцию множеств $p(C), C \in \mathbb{C}$, положив

$$p(C) := p_{u_1, \dots, u_n}(A^{(n)}), \quad (12)$$

если C является цилиндрическим множеством с основанием $A^{(n)}$ над координатами u_1, \dots, u_n . Условия согласованности обеспечивают корректность определения функции $p(C), C \in \mathbb{C}$. Пусть $C_k, k = \overline{1, m}$ — последовательность цилиндрических множеств. Не уменьшая общности, можно считать, что они заданы основаниями $A_k^{(n)}$ над одной и той же последовательностью координат u_1, \dots, u_n . Алгебраическим операциям над множествами C_k соответствуют в точности те же самые действия над основаниями $A_k^{(n)}$. Так как вероятностная мера p_{u_1, \dots, u_n} аддитивна на

$\bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$, то отсюда следует, что функция множеств $p(C), C \in \mathbb{C}$ аддитивна на \mathbb{C} . Когда вероятностные меры p_{u_1, \dots, u_n} пробегают замкнутое в

топологии $\tau(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$ множество P_{u_1, \dots, u_n} , то семейство вероятностных мер

p будет образовывать некоторое замкнутое в топологии $\tau(\Theta)$ множество P . Действительно, предположив противное, т.е., что множество $PF(\Theta) \setminus P$ не будет открытым в топологии $\tau(\Theta)$, получим существование такой вероятностной меры p из множества $PF(\Theta)$, не входящей в множество P , что $\forall k \in N$ найдется вероятностная мера p_k из множества P , которая для любых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in B_{\mathbb{C}}(\Theta), m \in N$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_{\Theta} f_j(\theta) p_k(d\theta) - \int_{\Theta} f_j(\theta) p(d\theta) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (13)$$

Зафиксировав выборку u_1, u_2, \dots, u_n из множества U , рассмотрим произвольную совокупность таких m функций f'_1, f'_2, \dots, f'_m , что, если

$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_2$, то $f'_j(\theta_1) = f'_j(\theta_2)$ для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ и $j = \overline{1, m}$, где эквивалентность (\sim) определяется согласно (8).

Если для каждой такой функции $f'_j, j = \overline{1, m}$ определить функцию F'_j на Θ полагая $F'_j(\tilde{\theta}) := f'_j(\theta)$ для любых $\theta \in \Theta$, что корректно, в силу определения функции f'_j , то $F'_j \in B_{\tilde{\mathcal{C}}_{u_1, \dots, u_n}}(\tilde{\Theta})$, где $\tilde{\mathcal{C}}_{u_1, \dots, u_n}$ — проекция алгебры $\mathcal{C}_{u_1, \dots, u_n}$ относительно эквивалентности (\sim). При этом ясно, что функция F'_j пробегает все множество $B_{\tilde{\mathcal{C}}_{u_1, \dots, u_n}}(\tilde{\Theta})$, когда функция f_j пробегает множество $B_{\mathcal{C}}(\Theta)$.

Тогда для любой функции $F'_j \in B_{\tilde{\mathcal{C}}_{u_1, \dots, u_n}}(\tilde{\Theta}), j = \overline{1, m}$, в силу соотношения (13), получим, что

$$\left| \int_{\tilde{\Theta}} F'_j(\tilde{\theta}) \tilde{p}_k(d\tilde{\theta}) - \int_{\tilde{\Theta}} F'_j(\tilde{\theta}) \tilde{p}(d\tilde{\theta}) \right| < \frac{1}{k}, \quad (14)$$

где меры \tilde{p}_k, \tilde{p} соответствуют мерам p_k, p , согласно соотношению (9).

Или, учитывая изоморфизм множеств $\tilde{\Theta}$ и $\prod_{i=1}^n X_{u_i}$, в силу определения множества Θ , а также определений алгебры $\tilde{\mathcal{C}}_{u_1, \dots, u_n}$ и алгебры $\bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}$, имеем, что для любых функций $F''_1, F''_2, \dots, F''_m \in B_{\bigotimes_{i=1}^n \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^n X_{u_i}), m \in N$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i}} F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) p_{k, u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) - \right. \\ & \left. - \int_{\prod_{i=1}^n X_{u_i}} F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) p_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (15) \end{aligned}$$

Это вытекает из неравенства (14) при $F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) := F'_j(\tilde{\theta}), j = \overline{1, m}$, где $\tilde{\theta}$ такое, что $\theta(u_i) = x_{u_i}, i = \overline{1, n}$, для любых $(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) \in \prod_{i=1}^n X_{u_i}$, меры $p_{k, u_1, \dots, u_n}, p_{u_1, \dots, u_n}$ определяются соответственно по мерам p_k, p согласно (9).

Таким образом последовательность мер $\{p_{k, u_1, \dots, u_n}, k \in N\}$ сходится в топологии $\tau(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$ к мере p_{u_1, \dots, u_n} .

Так как меры $p_k, \forall k \in N$ принадлежат множеству P , то определяющие их, согласно соотношению (3), меры p_{k,u_1,\dots,u_n} , по условию, принадлежат статистической закономерности P_{u_1,\dots,u_n} . Тогда, в силу замкнутости множества P_{u_1,\dots,u_n} в топологии $\tau(\prod_{i=1}^n X_{u_i})$ и сходимости в этой топологии последовательности $\{p_{k,u_1,\dots,u_n}, k \in N\}$ к мере p_{u_1,\dots,u_n} , также и мера p_{u_1,\dots,u_n} принадлежит статистической закономерности P_{u_1,\dots,u_n} . А значит, мера p определяется, согласно соотношению (3), мерой p_{u_1,\dots,u_n} из P_{u_1,\dots,u_n} , т.е. $p \in P$, что противоречит предположению.

Таким образом представление для произвольной непараметрической МСЗР указано.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов следует, что оба класса моделей как параметрических, так и непараметрических охватывают все ситуации задач принятия решений, неопределенность последствий в которых описывается статистическими закономерностями.

В частности, этот результат позволяет, анализируя систему принятия решения, не уменьшая общности, считать ее ситуацией параметрической.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanenko V.I.* Decision systems and non-stochastic randomness. — Berlin: Springer, 2010. — 272 p.
2. *Михалевич В.М.* О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 140–154.
3. *Иваненко В.И., Михалевич В.М.* К моделированию стохастических ситуаций принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 1. — С. 7–80.
4. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Об одном виде неопределенности. ДАН СССР. — 1979. — **248**. — № 3. — С. 539–542.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 530 с.
6. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 383 с.

Поступила 22.03.2011



УДК 681.335:004.891

**НЕЙРОМЕРЕЖЕВА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ
ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
В АВТОМАТИЗОВАНОМУ УПРАВЛІННІ НАВЧАННЯМ**

Т.Л. МАЗУРОК, Ю.К. ТОДОРЦЕВ

Створено формальну логіко-математична модель управління навчанням в умовах компетентнісного підходу. Запропоновано нейронечіткий підхід прийняття рішень, що базується на послідовному визначенні ступеня інтеграції та визначення найсуттєвішого впливу міжпредметних зв'язків на досягнення компетенцій. Наведено результати практичної реалізації.

ВСТУП

Підвищення ефективності використання інформаційно-комунікативних технологій (ІКТ) у навчанні пов'язано з неухильністю тенденції зміни акценту з пасивної ролі інструментарію на активну роль управління навчанням як цільним процесом. Розгляд процесу навчання з точки зору управління є плідною працею, що має багатоаспектний характер. Основу розробки методів автоматизованого управління навчанням складають дослідження в галузі психологічних теорій навчання, дидактики, системного аналізу, кібернетики, теорії управління, теорії адаптації та теорії створення інтелектуальних систем.

Аналіз останніх публікацій щодо автоматизованого управління навчанням та практичний досвід використання систем управління навчанням LMS (Learning Management System — система управління навчанням) та LCMS (Learning Content Management System — система управління навчальним контентом) свідчать про те, що до основних функцій таких систем мають належати такі:

- формування репозиторія освітніх ресурсів;
- облік осіб, що навчаються;
- формування індивідуальних навчальних планів і розкладів;
- управління доступом до комп'ютерних систем навчання та контроль виконання навчальних планів;
- забезпечення взаємодії осіб, що навчаються, з викладачами;
- аналіз роботи осіб, що навчаються, з комп'ютерними системами навчання;
- адміністрування.

Однак процес формування індивідуальних навчальних планів викладачем зазвичай неавтоматизований, тому є трудомістким, вимагає інтелектуальної напруги і, як наслідок, призводить до відсутності індивідуалізованих послідовностей навчальних елементів.

Тому загальна проблема вдосконалення автоматизованих систем управління навчанням є актуальною, а відсутність засобів інтелектуальної підтримки формування індивідуальних траєкторій навчання з урахуванням багатогранних дидактичних вимог дозволяє стверджувати, що ця проблема є невирішеною.

Мета роботи — дослідження процесу формування індивідуальних траєкторій навчання, як багатокрокового процесу прийняття рішень в умовах слабкої формалізованості та невизначеності щодо оптимального вибору наступного навчального елементу з урахуванням сучасних дидактичних вимог.

ДИДАКТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Аналіз сучасних дидактичних вимог до індивідуалізованого навчання висвітлює деякі основні напрямки, за якими можливо підвищити ефективність навчання. Це стосується використання засобів ІКТ для формування діагностично заданої індивідуальної мети навчання, ідентифікації початкового стану особи, що навчається, формування множини альтернативних послідовностей управляючих впливів, а це гарантовано призводить до досягнення мети та вибір оптимальної з них за критерієм використання ресурсів (часу, коштів тощо) [1, 2]. Такий підхід є інваріантним по відношенню до форми навчання — від традиційної в умовах школи, вищого навчального закладу і т.д. до різних форм електронного навчання. Це дає змогу здійснювати навчання протягом усього життя для всіх осіб, які потребують навчання [3], що узгоджується з основними принципами Болонської декларації [4].

З точки зору дидактики під час формування послідовностей управляючих впливів необхідно врахувати такі елементи: групи показників домінуючих здібностей, психофізичного стану, цілей навчання; показників щодо обмежень використання ресурсів; початковий та поточний стан навчальних досягнень. Під час формування змісту навчання важливим є врахування логічних взаємозв'язків між навчальними елементами як внутріпредметного, так і міжпредметного характеру.

Для автоматизації управління навчанням велике значення має коректно або діагностично задана ціль навчання. У сучасних умовах упровадження компетентнісного підходу доцільним є формування моделі цілі навчання як системи компетенцій. Компетенції є міждисциплінарними характеристиками, їх досягнення можливо на основі інтегрування навчальних дисциплін. Здійснення процесу навчання має проводитись у межах єдиної дидактичної системи, принаймні впродовж певних відрізків часу.

Таким чином, сучасні дидактичні вимоги до індивідуалізованого навчання призводять до такого формулювання педагогічної задачі: для гомогенної групи осіб, що навчаються, досягти діагностично задану ціль у вигляді системи компетенцій, як наслідок, оволодіння достатнім та безнадлишковим обсягом міжпредметного змісту засобами оптимально створеного процесу навчання. Аналіз дидактичних вимог дає змогу перейти до формального опису навчання як цілеспрямованого процесу, що управляється.

ФОРМАЛЬНА МОДЕЛЬ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ НАВЧАННЯМ

Відомо, що основу будь-якої діяльності створюють відношення між елементами (об'єктами) цієї діяльності. Для процесу навчання це відношення між елементами множин навчальних дисциплін, осіб, що навчаються, компетенцій, що формуються, а також відношення, що утворюються між елементами серед кожної з цих множин. Тому, в якості мови опису процесу навчання доцільно обрати мову алгебри відношень. Наведемо стисло характеристику множин, що розглядаються, та задамо відношення між їх елементами. Розглянемо навчальний процес у вигляді складної системи, що управляється. З метою спрощення та зменшення розмірності задачі, а також притримуючись узагальненої схеми управління процесом навчання [5], припустимо, що складна система складається з множини осіб, що навчаються, $\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \in L$ множини монопредметних структурованих навчальних дисциплін $\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in D$, кожна з яких складається з множини навчальних елементів (НЕ); множини компетенцій, що формуються $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \in K$. Взаємозв'язки між вказаними елементами, що складають систему управління навчанням на макрорівні, зображено на рис. 1.

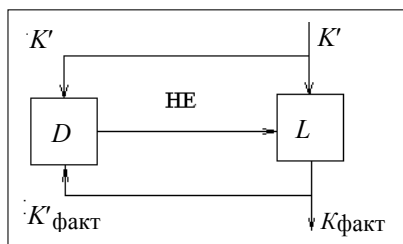


Рис. 1. Загальна структурна схема управління навчанням

враховуючи визначаючу роль викладача, як одного з суб'єктів УУ у формуванні структури навчальної дисципліни, управляючу систему подано у спрощеному вигляді на схемі множиною D , а командна інформація — у вигляді НЕ. Інформація щодо стану зовнішнього середовища у вигляді вимог до компетенцій позначена на схемі K , а K' — інформація, що формуються про систему компетенцій, яка знаходиться в системі управління. Для реалізації зворотного зв'язку використовується інформація про стан ОУ у вигляді фактично досягнутого рівня кожного з елементів компетенції — K факт та відповідна їй інформація, що наявна в системі управління — K' факт.

Схему інтелектуального управління навчанням, побудовано відповідно до теорії функціональної системи [6], зображено на рис. 2. На підставі даних про навколишнє середовище та власний стан системи за наявності потреби і мотивації синтезується мета, яка разом із іншими даними сприймається системою, що здійснює нечіткий логічний висновок. Отримання висновку здійснюється на основі використання баз знань (БЗ) науки, що формує БЗ навчальної дисципліни, а також БЗ, що містить дидактичні рекомендації та БЗ у вигляді нечітких правил продукції щодо доцільності встановлення системи міжпредметних зв'язків. На основі спрацювання логічного висновку

ухвалюється рішення про дію, тобто вибір наступного НЕ і прогноуються результати дії у вигляді досяжності необхідної компетенції (акцептор дії). Відповідно до ухваленого рішення здійснюється управління, тобто навчальна дія за допомогою дидактичних засобів. У цьому виявляється дія на ОУ. Результати контролю засвоєння рекомендованої послідовності НЕ порівнюються з прогнозованими (механізм зворотного зв'язку, акцептор дії). У випадку невідповідності результатів на базі нової експертної оцінки ухвалюється рішення, виробляється та реалізується управління, що знімає цю невідповідність, тобто виконується етап корекції. При відповідності результатів підкріплюється попереднє управління. Якщо відповідність недосяжна, то уточнюється мета. Наведена схема є конкретизацією інваріантної структури функціональної системи аферентного синтезу, який є результатним для побудови будь-якої цілеспрямованої діяльності.

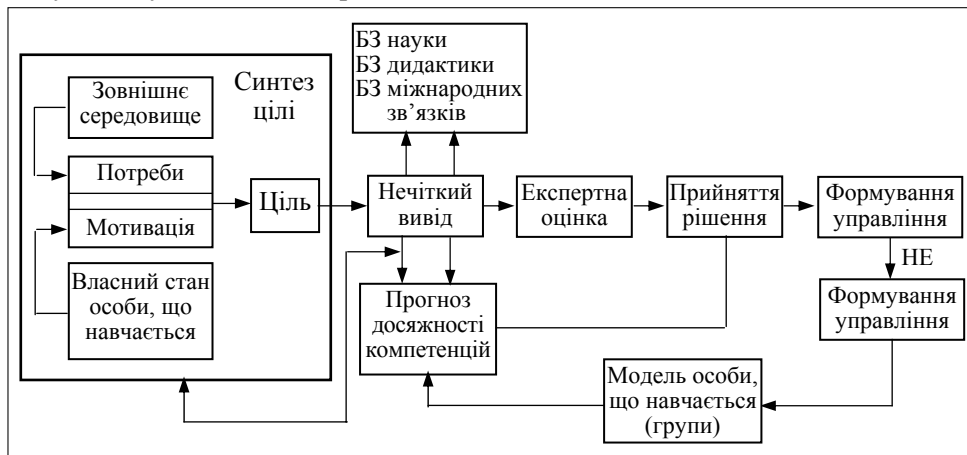


Рис. 2. Структурна схема інтелектуального управління навчанням

Розглянемо стисло характеристику кожного елементу з даної множини L, D, K . Існує безліч підходів до завдання відносин між особами, що навчаються. Проте, з точки зору управління, на наш погляд, найбільш ефективним є розбиття множини L на гомогенні (однорідні) групи відповідно до індивідуальних характеристик осіб, що навчаються. Дидактичне обґрунтування необхідності такого розбиття наведено в [2]. Різні форми автоматизованого навчання, зокрема, дистанційне навчання, дозволяє формувати віртуальні колективи осіб, що навчаються, за критеріями пізнавальних здібностей. При даному розбитті можливо зменшити розмірність множини управляючих впливів із збереженням врахування індивідуальних характеристик осіб, що навчаються. Таким чином, множина осіб, що навчаються, L складається з підмножин L_1, L_2, \dots, L_{nl} , причому:

$$L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{nl} = L.$$

Кожна з груп L_i характеризується набором атрибутів $\langle P3, CA \rangle$, де $P3$ — рівень засвоєння, CA — ступінь абстракції. Згідно із одним відомим методом матричного зіставлення особових властивостей і видів суспільно-виробничої діяльності, визначено вісім основних компонентів у структурі інтелекту, формування яких сприяє якнайкращій реалізації генетичних завдатків індивіда. Таким чином,

$$L_i = \{\langle YV, CA \rangle_j\}, \quad j = \overline{1, 8},$$

де j — основні компоненти в структурі інтелекту (наприклад, логіко-математичний, просторовий тощо).

Відповідно до ієрархічної структури монопредметної навчальної дисципліни визначимо множину d_i як сукупність підмножин розділів d_i^{rk} , тем d_i^{tm} , навчальних елементів d_i^{eb} , де індекси k, m та b визначають потужність відповідних підмножин, тобто кількість розділів, тем і НЕ відповідно. Тоді, використовуючи відношення включення, можна записати:

$$\left((d_i^{eb} \subset d_i^{tm}) \subset d_i^{rk} \right) \subset d_i \subset D.$$

Аналогічно опишемо підмножини формованих компетенцій. Відповідно до [7] виділяються загальнонаукові компетенції — $k_j^{\text{on}f}$, соціально-особові — $k_j^{\text{sl}g}$, спеціалізовано-професійні — $k_j^{\text{sp}h}$, загально-професійні — $k_j^{\text{op}t}$, інструментальні — $k_j^{\text{in}p}$, де індекси f, g, h, t, p визначають потужність відповідних підмножин, тобто кількість відповідних компетенцій у вказаних групах.

Слід зазначити, що процес формування компетенцій відображає властивість емерджентності, яке виявляється в тому, що досягнення системи компетенцій не дорівнює сумі знань, вмінь і навичок із кожної навчальної дисципліни. Таким чином,

$$k_j \neq d_1 + d_2 + \dots + d_m.$$

У загальному випадку в досягненні компетенцій беруть участь окрім навчальних дисциплін множина міжпредметних зв'язків $\{mp_{1-2}, mp_{2-3}, \dots, mp_{x-y}\} \in MP$, де mp_{x-y} — множина міжпредметних зв'язків між навчальними дисциплінами x та y .

Отже, формування компетенцій, наприклад, в умовах традиційної вищої освіти можна представити за допомогою відношення включення:

$$D \cup MP \subset K.$$

Задамо відносини між розглянутою множиною осіб, що навчаються — L ; навчальними дисциплінами — D ; системою компетенцій, що формуються — K . Відношення між елементами множин L та D відповідають множині відносин «опанувати навчальним матеріалом». Позначимо його O^* (знак $*$ використовується для того, щоб відрізнити множину елементів системи від множини відносин). Тоді можна записати як LO^*D . Такий запис означає, що множина осіб, що навчається, опановує множиною навчальних дисциплін. Множина відносин між елементами множин D та K , L та K позначимо F^* та W^* відповідно. Вони означають: F^* — «формує компетенцію» і W^* — «досягти компетенції» відповідно.

У зв'язку з тим, що для формування послідовності навчання НЕ необхідно врахувати внутрішньопредметні та міжпредметні зв'язки, введемо

відношення між НЕ, що відображають вказані взаємозв'язки. Схема можливих взаємозв'язків між НЕ показана на рис. 3. На схемі позначено такі види відношень:

- 1 — відношення «НЕ, що вивчається» входить до «вивчення теми» — відношення підлеглості;
- 2 — відношення «НЕ, що вивчається» є наступним за «НЕ, що є вивченим» — відношення слідування;
- 3 — відношення «НЕ, що вивчається» передує «НЕ» — відношення передування;
- 4 — відношення «міжпредметний зв'язок» між НЕ і темою (відповідає відношенню, що використовується в дидактиці, «частина–ціле» [8]);
- 5 — відношення «міжпредметний зв'язок» між НЕ навчальних дисциплін d_1 та d_2 («частина–частина»);
- 6 — відношення «міжпредметний зв'язок» між темами навчальних дисциплін d_1 та d_2 («ціле–ціле»).

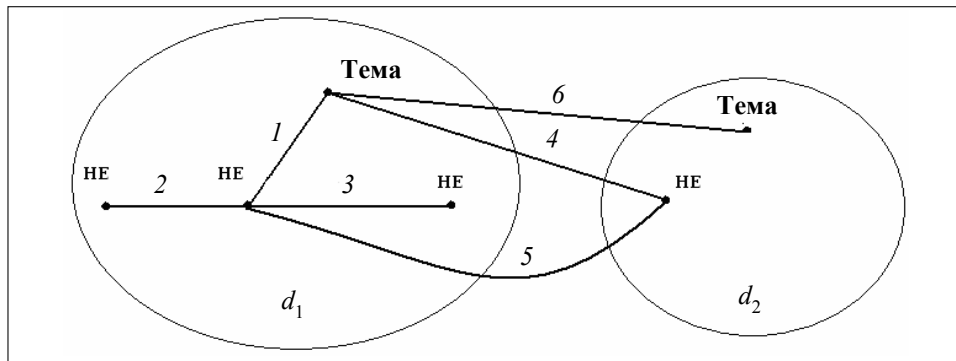


Рис. 3. Схема взаємозв'язків між НЕ

Усі інші можливі відношення між структурними елементами навчальних дисциплін зводяться до шести видів відношень, що розглянуто. Наприклад, відношення, що виражає міжпредметний зв'язок між темами і розділами, розділами та навчальними дисциплінами відносяться до 4-го виду відношень — «частина–ціле». Аналогічно вводяться відношення підлеглості, слідування та передування тем, розділів, навчальних дисциплін. Для відображення взаємозв'язків між навчальними дисциплінами використовується відношення «ступінь інтеграції». Між елементами множин MP та K вводиться відношення вміщення.

На основі детального розгляду множин та відношень між ними, що виникають під час вибору послідовності НЕ, а також враховуючи визначення моделі M , що наведено в [9], де моделлю називається кортеж, що складається із деякої множини та відношень на цій множині, можна записати:

$$M^L = \langle L, \subset \rangle, \quad M^D = \langle D, \subset \rangle,$$

$$M^K = \langle K, \subset \rangle, \quad M^{MP} = \langle MP, \rho, \tau \rangle,$$

де ρ — відношення підлеглості що виражає міжпредметний зв'язок «частина–ціле»; τ — відношення толерантності, що виражає наявність міжпредметного зв'язку між елементами одного рівня («частина–частина», «ціле–ціле»).

Модель взаємозв'язків між системою міжпредметних зв'язків та системою компетенцій має вигляд:

$$M^{MP,K} = \langle MPF * K \rangle.$$

Відношення між розглянутими множинами мають графічну інтерпретацію у вигляді 16 неорієнтованих графів, кожен з яких має власне змістовне наповнення.

Таким чином, отримано моделі i -х станів системи M_i^c , сукупність яких складає сигнатуру формальної базової теорії T . Стани системи для кожного з графів можна формально описати так:

$$\begin{aligned} M_1^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_2^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_3^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_4^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_5^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_6^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_7^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_8^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_9^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{10}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{11}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{12}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{13}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{14}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{15}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle, \\ M_{16}^c &= \langle \overline{LO^*D}, \overline{LW^*K}, \overline{MPF^*K}, \overline{DP^*MP}, \overline{DF^*K}, \overline{LV^*MP} \rangle. \end{aligned}$$

Кортеж символів $\Sigma = \langle M_1^c, M_2^c, \dots, M_{16}^c \rangle$ згідно з [9] є сигнатурою. Над цією сигнатурою можливо у подальшому визначити аксіоматику. На основі

схеми управління визначається система нелогічних аксіом за допомогою кореспонденції відношень. Наприклад, однією з аксіом є така:

$$f^{-1}(M_2^c, M_3^c) \xrightarrow{\text{Kor}} M_6,$$

де $\xrightarrow{\text{Kor}}$ позначає кореспонденцію відношень. Наприклад, кореспонденцію відношень з M_2^c та M_3^c в M_6 показано на рис. 4.

Над сигнатурою, яку наведено, побудовано систему з 22 аксіом, кожна з яких має вигляд кореспонденції відношень:

$$f^{-1}(M_i^c) \xrightarrow{\text{Kor}} M_i.$$

З урахуванням системи станів M_i^c , системи аксіом сформовано правила нечіткого виводу, які є скінченною послідовністю формул, остання з яких є наслідком попередньої. Таким чином, узагальнене правило виводу має вигляд:

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_{15}}{T},$$

де Φ_1, \dots, Φ_{15} — передумови правил, а T — висновок.

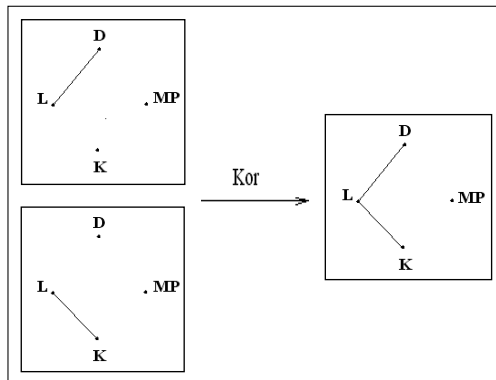


Рис. 4. Ілюстрація операції кореспонденції відношень

Логіко-математична модель склала основу для розробки основних модулів, що реалізують інтелектуальну підтримку процесу прийняття рішень тьютором під час розробки індивідуальних траєкторій навчання. Основу прийняття рішень складає система взаємозв'язків між системою міжпредметних зв'язків та системою компетенцій, що формується.

СТРУКТУРНА МОДЕЛЬ КОМПЕТЕНЦІЙ

Важливим етапом системного аналізу процесу навчання є створення структурної моделі компетенцій. У загальному вигляді модель компетенцій має вигляд:

$$\{S\} = S_1 \otimes S_2 \otimes S_3 \otimes \dots \otimes S_n,$$

де S_i — підсистема компетенції; n — кількість видів компетенцій; \otimes — знак узагальненого добутку (теоретико-множинної або логічної відповідності).

З іншого боку, модель компетенцій можна подати у вигляді ієрархічної функціональної структури (рис. 5), що складається з підсистем, компонентів та вимірюваних елементів.

За основу створення моделі прийнято предметно-діяльнісний (спеціальний) аспект розгляду компетенцій, що відображає необхідні професійні знання, вміння та навички. Джерелом професійних вимог до випускників ВНЗ, наприклад, є стандарти освіти у вигляді освітньо-кваліфікаційних характеристик (ОКХ) та освітньо-професійних програм (ОПП).

Вимоги до компонентів предметно-діялісної компетенції:

$$S_i = \{S_v \mid v = \overline{1, k_i}\}.$$

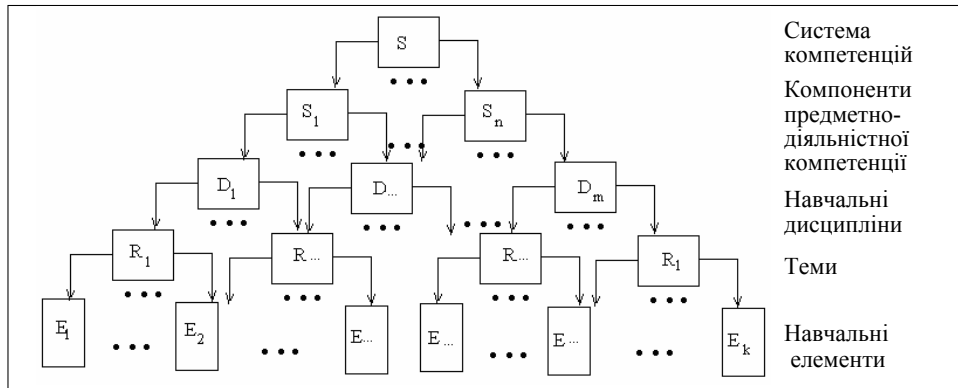


Рис. 5. Модель компетенцій у вигляді ієрархічної структури

На основі множини, що задано S_i , необхідно побудувати послідовність перетворень:

$$F_{sd}: S_i \rightarrow \bigcup_{d=1}^m D_d; F_{dr}: D_d \rightarrow \bigcup_{r=1}^l R_r; F_{re}: R_r \rightarrow \bigcup_{e=1}^k E_e.$$

Особливістю ієрархічної системи, що розглядається, є те, що в умовах традиційно обумовленого монопредметного навчання під час формування конкретних компонентів S_i беруть участь підмножини множин D, R, E . Так, для D :

$$D_d = \left(\bigcup_{j=1}^{m_1} R_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m_2} R_j \right) \cup \dots \left(\bigcup_{j=1}^{m_d} R_j \right),$$

причому $m_1 \cup m_2 \cup \dots \cup m_d = m$.

Аналогічно для R :

$$R_r = \left(\bigcup_{j=1}^{l_1} E_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l_2} E_j \right) \cup \dots \left(\bigcup_{j=1}^{l_r} E_j \right),$$

де $l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_r = l$.

Однак формування компетенцій являє собою процес, який базується на поглибленні інтегрованих форм навчання. Однією з найбільш поширених форм інтеграції є система міжпредметних зв'язків.

МОДЕЛЬ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ

Формування моделі системи міжпредметних зв'язків базується на структурно-параметричному описі монопредметних навчальних дисциплін, які інтегруються та експертній інформації щодо взаємозв'язків між окремими елементами вказаних структур.

Управління ступенем взаємозв'язків між навчальними дисциплінами здійснюється на основі результатів кластеризації, за допомогою якої визначається ступень взаємозв'язку до одного з трьох класів: взаємозв'язок, міжпредметний зв'язок та інтеграція. У зв'язку з тим, що формальний опис відношення «взаємозв'язок» має суб'єктивний характер, то доцільно ввести в модель міжпредметних зв'язків набір нечітких правил, за допомогою яких

робота експерта-викладача буде максимально наближеною до природної мови. До того ж, використовуючи переваги нейронної мережі, можливо підвищити об'єктивність управляючого впливу. Для сумісного використання нейронних мереж та нечіткого логічного виводу використовується апарат нечіткої нейронної мережі (Fuzzy Neural Networks) [10].

У даному випадку шари нейронної мережі виконують функції елементів системи нечіткого виводу (рис. 6). Вхідна та відповідна їй вихідна інформація обробляються за допомогою двох інтерфейсів, що побудовані на основі теорії нечітких множин і нечіткої логіки. Основна функція цих інтерфейсів полягає в перетворенні інформації до такого вигляду, який дозволяє провести обробку за допомогою класичної нейронної мережі.

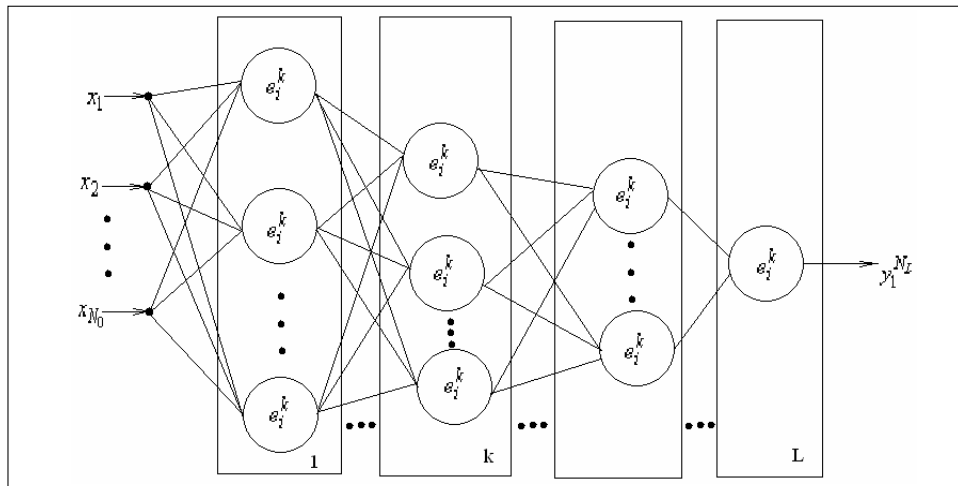


Рис. 6. Структура нейронної мережі

В якості вхідної інформації для ієрархічної моделі міжпредметних зв'язків використовується експертна інформація, що була отримана за допомогою спеціально розробленого редактора міжпредметних зв'язків щодо погляду педагогів-предметників щодо доцільності взаємопов'язаного вивчення окремих навчальних елементів монопредметних курсів. Лінгвістична змінна w описана за допомогою терму «ступінь взаємозв'язку», що складається з таких значень $T_\varepsilon = \{\text{«відсутня»}, \text{«скоріш за все доцільна»}, \text{«напевно доцільна»}\}$.

У структурі нейронної мережі виділяються чотири спеціальних шари: шар 1 (L1) — блок введення нечіткості (визначення функції належності); шар 2 (L2) — база правил з методом нечіткого виводу; шар 3 (L3) та шар 4 (L4) — складають блок приведення до чіткості. Вихідна змінна y призначена для визначення ступеня інтеграції між монопредметними навчальними дисциплінами, що призводить до досягнень відповідних компетенцій.

Вихідний сигнал мережі визначається за формулою:

$$y = \frac{\sum_{r=1}^m w_r \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^n x_j - c_{rj} \right)^2 / (2\lambda_r^2) \right]}{\sum_{r=1}^m \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^n (x_j - c_{rj})^2 \right) / (2\lambda_r^2) \right]}$$

де r — номер продукційного правила; w_r — вагові коефіцієнти шару, що обчислює результуючу функцію належності передумов нечітких правил; c_r та λ_r — постійні параметри ($c_r = 0$, $\lambda_r = 1$); m — кількість нейронів першого шару, що визначається в залежності від кількості навчальних елементів (НЕ) у дисциплінах, що інтегруються: $m = n_1 * n_2$, де n_1 — кількість НЕ, умовно кажучи, «першої» навчальної дисципліни, n_2 — кількість НЕ «другої» навчальної дисципліни. У зв'язку з тим, що в загальному випадку можливі двобічні взаємозв'язки, то з урахуванням напрямку взаємозв'язків зменшити кількість нейронів першого шару не вдається.

Нечіткі правила мають вигляд:

$$\text{ЯКЩО } "e1 \in \alpha" \text{ I } "e2 \in \beta" \text{ ТО } "w \in \varepsilon",$$

де $e1$ та $e2$ — змінні, що характеризують монопредметну область, що інтегрується (наприклад, $e1 =$ «інформатика», $e2 =$ «економіка»); α та β — відповідні значення вказаних змінних; ε — значення лінгвістичної змінної w , яка описується за допомогою терму «ступінь взаємозв'язку».

Нейронечітка модель міжпредметних зв'язків дозволяє визначити ступінь інтеграції монопредметних навчальних дисциплін у вигляді значень лінгвістичної змінної. Однак досягнення ступеня інтеграції можливо, в загальному випадку, k^2 засобами, де k — загальна кількість НЕ, що підлягає обов'язковому вивченню для формування певної компетенції. Так, у реальних системах $k \approx 100 \dots 1000$, які обумовлюють доцільність використання еволюційного підходу [11] для досягнення відповідних компетенцій.

НЕЙРОНЕЧІТКА КЛАСТЕРИЗАЦІЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ КОМПЕТЕНЦІЙ

Під кластеризацією розуміють процес об'єднання об'єктів у групи (кластери) на основі схожості ознак для об'єктів однієї групи і відмінностей між іншими групами. Кластеризація може використовуватись в умовах майже повної відсутності інформації щодо законів розподілу даних, що відповідає специфіці використання цього підходу у задачі аналізу компетенцій.

Вхідною інформацією для етапу аналізу компетенцій у загальній схемі управління змістовною стороною навчання є матриця:

$$SI = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1ns} \\ s_{22} & s_{21} & \dots & s_{2ns} \\ \dots & & & \\ s_{N1} & s_{N2} & \dots & s_{Nns} \end{bmatrix}.$$

У зв'язку з тим, що визначення точної кількості компетенцій, що формуються, S є ускладненим, то найбільш доцільним методом кластеризації є метод гірської кластеризації, яку запропоновано Р. Ягером і Д. Филевим [12].

На першому кроці алгоритму необхідно сформувати потенційні центри кластерів. Для цього проводиться дискретизація простору вхідних ознак $[0,1]$ на 10 інтервалів проводячи через точки розбиття прямі, що паралельні координатним осям. Отримуємо «решітковий» гіперкуб. Вузли такої решіт-

ки відповідають центрам потенційних кластерів. Нехай q_r — це кількість значень, які можуть приймати центри класів за координатою r . Тоді кількість можливих кластерів визначається на основі формули:

$$Q = \prod_{r=1, N} t_r .$$

На другому кроці алгоритму обчислюється потенціал центрів кластерів за такою формулою:

$$P(Z_h) = \sum_{k=1, N} \exp(-\alpha D(Z_h, SI_i)),$$

де Z_h — потенційний центр кластеру h , $h = \overline{1, Q}$; α — додатна константа; $D(Z_h, SI_i)$ — відстань між потенційним центром кластеру й об'єктом класифікації в евклідовому просторі, що обчислюється за формулою:

$$D(Z_h, SI_i) = \sqrt{\|Z_h - SI_i\|} .$$

На третьому кроці алгоритму виконується ітераційна процедура перерахунку потенціалів і виділення центрів класів доти, поки значення потенціалів перевищує поріг, встановлений на основі евристичних міркувань. Щодо задачі, що розглядається, завершення ітераційної процедури пов'язано з досягненням орієнтовної кількості компетенцій n .

Синтез нечітких правил для управління системою компетенцій здійснюється на основі центрів кластерів $V_i = (s_i, y_i)$, $i = \overline{1, c}$, де s_i — ступінь інтеграції, y_i — компетенція, що формується даним взаємозв'язком. Правила зв'язують вхід із виходом. Центру кластеру V_i задається у відповідність нечітке правило такого вигляду:

Якщо s_i = "близько" s_i , то y_i = "близько" y_i .

Функції належності цих нечітких термів задаються гаусовими кривими (рис. 7). Значення лінгвістичної змінної відповідає її термам є результатом обробки даних, що отримані від експертів — викладачів-предметників навчальних дисциплін, що інтегруються.

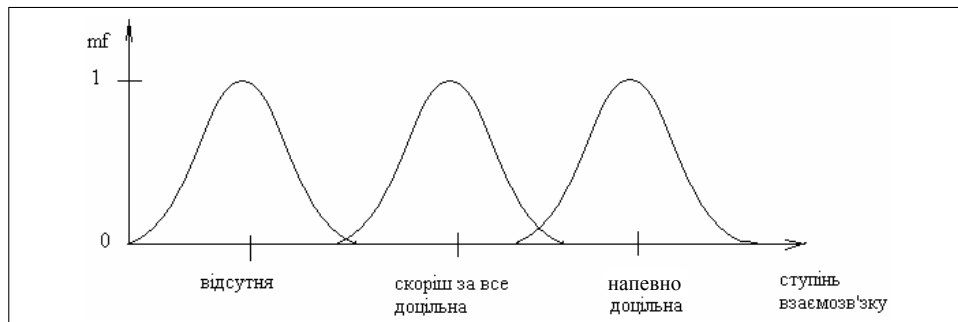


Рис. 7. Значення нечітких множин та їх функції належності

Аналогічного вигляду мають функції належності лінгвістичної змінної «ступінь впливу міжпредметного зв'язку на формування компетенції y_i », яка приймає такі значення: «низький», «нижчий за середній», «середній»,

«вища за середній», «високий». Кількість нечітких правил визначається кількістю всіх комбінацій множин передумов та висновків.

Отримана нечітка база знань складає основу для інтелектуальної підтримки прийняття рішень щодо управляючих впливів у автоматизованому навчанні з урахуванням взаємозв'язків між ступенем інтеграції навчальних дисциплін та компетенціями, що формуються.

ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Логіко-математична модель, що запропонована, склала основу для розробки інтелектуальної підтримки прийняття рішень під час формування індивідуальних траєкторій навчання студентів Одеського національного політехнічного університету. На основі структурування моделей навчальних дисциплін та міжпредметних зв'язків між ними визначено методами нечіткої кластеризації вектори ступенів інтеграції між дисциплінами, що найбільш суттєво впливають на формування компетенцій бакалаврів за фахом 0925 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» [13]. В якості інструменту дослідження було використано нейропакети NeuroPro і Excel Neural Package. Перевірка можливостей вказаних пакетів показала, що урахування значущості ступеня інтеграції не можливо на моделях кількісного характеру. Найбільш доцільною виявилась модель у вигляді сукупності кластерів. Визначення кластерів проводилось за допомогою пакету Excel Neural Package із використанням карти Кохонена, що самоорганізується. Так, наприклад, для формування компетенції «розробка автоматичної системи регулювання технологічними процесами» найбільш значущим виявилось інтегроване вивчення вищої математики та теорії автоматичного управління (оцінка значущості склала 0,798433), електротехніки та технічних засобів автоматизації (оцінка значущості склала 0,695227). У процесі кластеризації для розглянутої компетенції було виокремлено три кластери, інтерпретація яких дозволяє віднести до формуючих факторів ступені взаємозв'язків між такими дисциплінами, як вища математика, фізика та прикладна механіка. Отримані результати відповідають висновкам експертів — розробників стандарту на освітньо-кваліфікаційну характеристику.

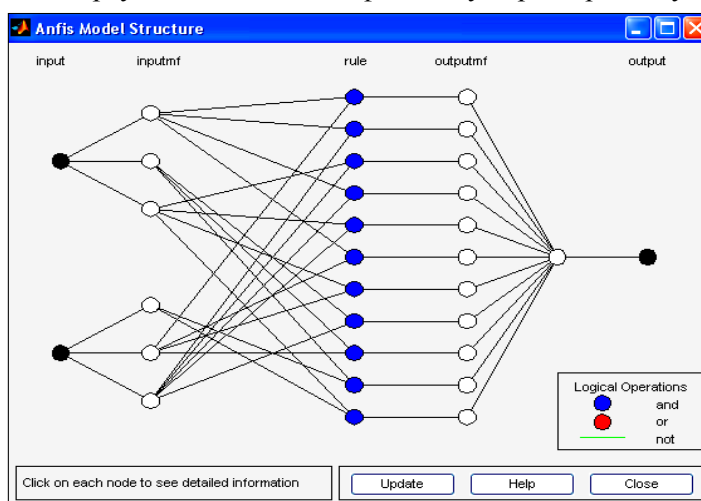


Рис. 8. Структура «навченої» нейромережі

Для підготовки вхідних даних до кластеризації використовується «навчання» нейронечіткої мережі за допомогою якої визначається коефіцієнт інтеграції між навчальними елементами двох дисциплін. На рис. 8 наведено приклад структури мережі, навчання якої відбулося на

основі нечітких правил за допомогою пакету Fuzzy Logic Toolbox, що входить до складу системи Matlab. За допомогою редактора нечітких нейронних систем ANFIS Editor здійснюється створення структури нечіткої нейронної мережі, налагодження її параметрів, перевірка функціонування мережі.

ВИСНОВКИ

Розгляд процесу навчання з позицій управління, розробка формальної основи для побудови правил продукцій склало основу для реалізації нейро-нечіткого управління ступенем міжпредметного зв'язку між навчальними дисциплінами. Подальша нейронечітка кластеризація дозволяє визначати під час формування індивідуальних траєкторій навчання найбільш значущі міжпредметні зв'язки з точки зору їх впливу на досягнення компетенцій. Отриманий підхід дозволяє врахувати основні дидактичні вимоги до систем управління індивідуалізованим навчанням в умовах компетентнісного підходу. До перспективних напрямків цього дослідження належить реалізація інтелектуальної підтримки у вигляді сценаріїв багатоагентної взаємодії учасників навчання і поширення взаємозв'язків та інтеграції між монопредметними навчальними дисциплінами від двох до загальної кількості дисциплін, що вивчаються водночас протягом певного періоду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Gritsenko V., Synytsya K., Manako A. ICT competencies training in information society // Proceedings of the Third International Conference «New Information Technologies in Education for All: e-education». — Kiev: IRTC, 2008. — P. 9–16.
2. Беспалько В.П. Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия). — М.: МПСИ, 2002. — 352 с.
3. 34 сессия Генеральной конференции ЮНЕСКО. — <http://unesdoc.unesco.org/>.
4. Болонський процес у фактах і документах (Сорбонна-Болонья-Саламанка-Прага-Берлін) / Упоряд.: М.Ф. Степко, Я.Я. Болюбаш, В.Д. Шинкарук, В.В. Грубіянко, І.І. Бабін. — Тернопіль: Вид-во ТДПУ ім. В. Гнатюка, 2003. — 52 с.
5. Растринин Л.А., Эренштейн М.Х. Адаптивное обучение с моделью обучаемого. — Рига: Зинатне, 1988. — 160 с.
6. Пупков К.А., Коньков В.Г. Интеллектуальные системы. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 348 с.
7. Берстнева О.Г., Марухина О.В. Системный подход к оценке качества образования // Открытое образование. — 2002. — № 3. — С. 38–42.
8. Еремкин А.И. Система межпредметных связей в высшей школе. — Х.: ХГУ, 1984. — 151 с.
9. Белова Л.А., Метешкин К.А., Уваров О.В. Логико-математические основы управления учебными процессами высших учебных заведений. — Х.: ВРЦ ГОИ, 2001. — 272 с.
10. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде Matlab и fuzzyTEACH. — СПб.: БХВ–Петербург, 2003. — 736 с.
11. Мазурок Т.Л. Эволюционный подход к определению системы компетенций // Вестн. ХНТУ. — 2008. — № 2 (31). — С. 295–299.
12. Yager R., Filev D. Essentials of Fuzzy Modeling and Control. — USA: John Willey & Sons. — 1984. — 387 p.
13. Освітньо-кваліфікаційна характеристика бакалавра напряму підготовки 0925 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». — Київ: МОН України, 2004. — 19 с.

Надійшла 16.06.2009

**О ТОПОЛОГИИ ПУТЕЙ НОРМАЛИЗАЦИИ В
РЕЛЯЦИОННОМ КАРКАСЕ****Б.Е. ПАНЧЕНКО, И.Н. ПИСАНКО**

Исследованы пути нормализации в универсальном каркасе реляционных баз данных (БД) и топологии этих путей. Доказана теорема замкнутости путей нормализации в реляционном каркасе. Теорема позволяет применять реляционный каркас как уникальный носитель схем БД, нормализованных до высоких форм, а также анализировать существующие и внедренные БД на предмет их аномалий и влияния на приложения в процессе эксплуатации.

ВВЕДЕНИЕ

Получение безаномальных логических схем является одной из ключевых задач проектирования логической структуры реляционных баз данных (БД). Известно, что аномалии вставки, модификации и удаления кортежей связаны с наличием зависимостей (функциональных, многозначных, а также зависимостей соединения) между подмножествами столбцов таблиц БД [1, 2, 3]. Такие зависимости выражают ограничения, накладываемые на значения, хранимые в кортежах таблиц. В свою очередь, эти ограничения являются формальным отображением семантики, присущей конкретным предметным областям. Для предметных областей с нетривиальной семантикой, характеризующихся многообразными и сложными ограничениями на хранимые данные, избыточность представления данных в таблицах является типичным недостатком, обуславливающим аномалии логических схем БД.

Традиционная методика устранения таких аномалий состоит в декомпозиции проблемных таблиц БД. Согласно Дейту, всякая БД есть хранилище истинностных высказываний (фактов) о так называемых «сущностях» заданной предметной области и их взаимосвязях [2]. Поэтому декомпозиция является не чем иным как представлением некоторого хранимого высказывания в виде эквивалентной совокупности других (более простых) высказываний. При этом эквивалентность между исходным высказыванием с семантическим ограничением, с одной стороны, и совокупностью высказываний без семантического ограничения, с другой стороны, обеспечивается целым рядом определений и теорем о декомпозиции без потерь [3, 4]. Таким образом, посредством декомпозиции происходит нормализация представления семантически сложного факта в БД за счет его разбиения на более простые факты, рассматриваемые в их совокупности. При этом для сложных фактов

с семантическими ограничениями, как правило, имеется более чем один вариант такого разбиения. Можно заметить некоторую аналогию между указанным процессом разбиения фактов БД и функциональной декомпозицией.

Традиционно схемой реляционной БД является некая фиксированная совокупность реляционных схем R_j , т.е. именованных множеств атрибутов и ключей [3]. Для построения такой схемы вводится совокупность атрибутов x_i и однозначно соотносимых с ними множеств значений — доменов $D(x_i)$ [4]. При этом совокупности самих атрибутов ассоциируются с «объектами» или «сущностями», а совокупности значений атрибутов — с экземплярами объектов или сущностей. Это является первым шагом к отображению семантики предметной области в схеме БД. Заметим, что и множество x_i и совокупность множеств $D(x_i)$ являются общими для схем R_j в том смысле, что отдельный атрибут может принадлежать нескольким схемам. Наконец, экземпляр каждой реляционной схемы R_j представляется в виде совокупности кортежей K_p — упорядоченных последовательностей значений атрибутов x_i схемы R_j , т.е. $K_p \subset D(x_1) \times \dots \times D(x_i) \times \dots \times D(x_K)$, $x_i \in R_j$.

В работах [5, 6] показано, что на операторе роста L может быть построена универсальная логическая модель данных (УЛМД), отображающая специфику произвольной предметной области (ПО) из N сущностей на множество реляционных отношений, полное количество которых $S(N)$ определяется формулой:

$$S(N) = \sum_{m=1}^N S_m = \sum_{m=1}^N \frac{N!}{m!(N-m)!} = 2^N - 1. \quad (1)$$

На рисунке изображена общая схема *ключевого каркаса* реляционной УЛМД. Очевидно, что большинство отношений не будут актуальными в контексте конкретных постановок. Но их актуализация в любой момент яв-

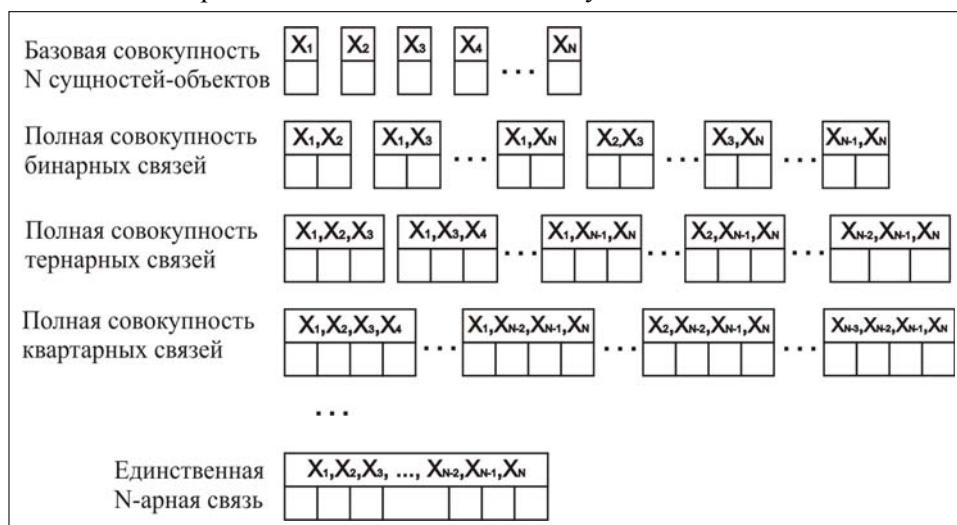


Рисунок. Ключевой каркас реляционной УЛМД для N сущностей-объектов

ляется модификацией структуры конкретного хранилища.

Из этого следует, что модификация схемы хранилища сводится к двум типам операций актуализации: аннулирование отношения (реляционной таблицы) и аннулирование произвольного множества неключевых атрибутов в произвольной группе отношений. При этом целостность хранилища сводится, прежде всего, к целостности ключевых атрибутов и их строгого соответствия в различных, но логически связанных отношениях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель работы — исследовать схемы БД, получаемые на универсальном реляционном каркасе (в дальнейшем, просто *каркасе*), на принадлежность той или иной нормальной форме (НФ). Для этого рассмотрим пути нормализации каркаса.

Рассмотрим некоторое отношение $\{C_k\}$ и его экземпляр $[C_k]$ с зависимостями Φ_k . Пусть $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, \dots\}$ — упорядоченная совокупность традиционных НФ универсального реляционного каркаса. Пусть дана индексированная совокупность реляционных схем $\{C_k\}$, $k=1, 2, \dots, S(N)$, образующих каркас отношений [6] для множества из N сущностей в смысле [5] в некоторой произвольной предметной области. Внесение реального контента в каркас отношений (т.е. заполнение реляционных схем сведениями о значениях реальных экземпляров) приводит к формированию совокупности экземпляров отношений. Обозначим текущий экземпляр отношения $\{C_k\}$ символом $[C_k]$. Для каждого из экземпляров $[C_k]$ имеет смысл говорить о множестве Φ_k функциональных либо многозначных зависимостей между атрибутами (или множествами атрибутов) соответствующего отношения $\{C_k\}$. Как правило, множество зависимостей Φ_k считается независимым от экземпляра $[C_k]$, т.е. любая модификация $[C_k]$ не меняет Φ_k . Это характерное условие, подразумевающее статичность схемы реляционной БД и соответствующих путей нормализации отношений, в дальнейшем будет снято при рассмотрении динамических схем.

Пример 1. Пусть для источника $A = \{a, b, c, d\}$ ($N=4$) сформирован каркас [6], состоящий из $2^4 - 1 = 15$ отношений $\{C_k\}$, а также образованы соответствующие экземпляры $[C_k]$ этих отношений. Множество зависимостей Φ_k может состоять, например, из: функциональных зависимостей между атрибутами отношений 1-го уровня (для действия L_A^1), т.е. из $a \rightarrow a$, $c \rightarrow c$, которые всегда будут тривиальными; из зависимостей вида $a \rightarrow b$, $c \rightarrow d$ между атрибутами отношений 2-го уровня (для действия L_A^2); из зависимостей вида $ab \rightarrow c$, $a \rightarrow bd$ между атрибутами отношений 3-го уровня (для действия L_A^3) и т.д. Важно, что все элементы множества зависимостей Φ_k между атрибутами (и множествами атрибутов) отношения можно перечислить комбинаторными методами, вводя тем самым полное множество зависимостей Φ_k и его подмножество $\tilde{\Phi}_k \subseteq \Phi_k$, актуальное для конкретного экземпляра $[C_k]$ отношения $\{C_k\}$.

Рассмотрим некоторое отношение $\{C_k\}$ и его экземпляр $[C_k]$ с зависимостями Φ_k . Пусть $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, \dots\}$ — упорядоченная совокупность традиционных НФ, а также всех возможных их модификаций. Предположим, что ψ — множество классических критериев, относящих C_n к НФ из совокупности K :

$$\psi_n = \psi(C_n), \psi_n \in K. \quad (2)$$

Учитывая взаимосвязь $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ между НФ из совокупности K , обозначим через $\Psi_k = \max \psi_k$ наибольшую НФ, в которой находится экземпляр $[C_n]$ отношения $\{C_n\}$.

Рассмотрим некоторое «начальное» подмножество $D^{(0)}$ каркаса отношений. Следует отметить, что $D^{(0)}$ является элементом каркаса схем БД. Состоянием схемы $D^{(0)}$ назовем совокупность $\{\Psi_k\}$ НФ экземпляров $[C_k]$ всех отношений $C_k \in D^{(0)}$. Ясно, что НФ, в которой будет находиться схема $D^{(0)}$ (и, в общем случае, весь каркас отношений), определяется величиной $\max \{\Psi_k\}$. Именно поэтому, все отношения схемы БД приводятся (как правило, путем декомпозиции) к одной, наибольшей НФ. Хотя целесообразность достижения схем отдельных отношений критериям высоких НФ остается вопросом дискуссионным.

В результате такой нормализации мы получаем последовательность элементов каркаса схем БД, которую можно интерпретировать как путь нормализации [6]. Формально путь нормализации $Q(j_0, j_1, \dots, j_k)$ представляет собой последовательность индексов схем БД, которая описывает переход от начального элемента $D^{(0)}$ к конечному элементу $D^{(k)}$ каркаса схем БД, причем этот переход осуществляется только декомпозицией отношений, принадлежащих элементам пути нормализации. Конечный элемент $D^{(k)}$ пути нормализации мы будем называть решением. Далее, топологией путей нормализации для заданной начальной схемы $D^{(0)}$ будем называть совокупность решений $D^{(k)}$, которые можно получить путем декомпозиции при заданных зависимостях $\{\Phi_k\}$ между атрибутами отношений. Ясно, что топология будет определяться как $D^{(0)}$, так и $\{\Phi_k\}$.

ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОСТИ ПУТЕЙ НОРМАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим теорему замкнутости: для заданных источника A и совокупности $\{\Phi_k\}$ зависимостей между атрибутами в экземплярах $[C_k]$ каркаса отношений существует путь нормализации $D^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow D^{(k)}$, решение которого находится в требуемой НФ $\max \{\Psi_k\}$ из совокупности K . Это непосредственно следует из полноты каркасов отношений и схем БД [6].

Пример 2. Вновь рассмотрим источник $A = \{a, b, c, d\}$ ($K = 4$), для которого сформирован каркас из пятнадцати отношений $\{C_k\}$. Пусть $D^{(0)}$ — начальная схема реляционной БД, содержащая среди прочих единственное

отношение $C = \{abcd\}$ 4-го уровня (т.е. синтезированное действием L_A^4), $C \in D^{(0)}$. Пусть семантика ПО такова, что для экземпляра $[C]$ выполняется следующее множество функциональных и многозначных зависимостей Φ : $abc \rightarrow d$, $a \rightarrow \rightarrow b$, $a \rightarrow \rightarrow c$. Следует выяснить, каким может быть решение $D^{(1)}$ для простейшего, одношагового пути нормализации.

Поскольку все атрибуты из A являются атомарными, то $\psi(C) = K_1$, т.е. C находится в 1НФ. Далее, для функциональной зависимости $abc \rightarrow d$ множество атрибутов abc является суперключом, поэтому $\psi(C) = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, т.е. C находится также в 2НФ, 3НФ и НФБК. Поскольку для каждой из многозначных зависимостей $a \rightarrow \rightarrow b$ и $a \rightarrow \rightarrow c$ в отношении C ни a ни b не являются суперключами, $\psi(C) \neq K_5$, т.е. C не находится в 4НФ. Поэтому $\Psi = K_4$. Для дальнейшего увеличения Ψ на единицу, т.е. для получения 4НФ, можно было бы потребовать, чтобы в отношениях искомого решения $D^{(1)}$ отсутствовали нетривиальные многозначные зависимости, такие как $a \rightarrow \rightarrow b$ и $a \rightarrow \rightarrow c$.

Заметим, что многозначная зависимость может существовать для отношений не ниже 3-го уровня (т.е. синтезированных действиями $L_A^{m \geq 3}$), т.е. когда отношение имеет минимум три атрибута. В силу насыщения оператора роста наибольшим уровнем является 4-й, где и находится отношение C . Ясно, что решение $D^{(1)}$, для которого $\Psi = K_5$ (4НФ), не должно содержать отношения C . Можно попробовать редуцировать схему $D^{(1)}$ до совокупностей отношений, порождаемых действиями $L_A^{m < 3}$, а именно применить так называемое ограничение каркаса отношений сверху. Выполняя декомпозицию отношения C , получаем

$$\{abcd\} \mapsto \{ab\} \cup (\{acd\} \mapsto \{ac\} \cup \{ad\}) = \{ab\} \cup \{ac\} \cup \{ad\},$$

т.е. производится замена отношения 4-го уровня на совокупность отношений 2-го уровня, которые и будут присутствовать в решении $D^{(1)}$. При этом для отношений $\{ab\}$ и $\{ac\}$ многозначные зависимости $a \rightarrow \rightarrow b$ и $a \rightarrow \rightarrow c$ будут уже тривиальными, т.е. критерий 4НФ будет выполняться. ■

ВЫВОДЫ

Из примера 2 видно, что исходное отношение C 4-го уровня $\{abcd\}$ после декомпозиции на совокупность отношений 2-го уровня уже не содержит функциональной зависимости $abc \rightarrow d$, т.е. информация об этой зависимости для $\{ab\} \cup \{ac\} \cup \{ad\}$ теряется. Если под сохранностью информации понимать обеспечение соединения без потерь [3, 4] и, одновременно, обеспечение сохранения зависимостей, то такую декомпозицию можно считать декомпозицией с потерей информации. Имеем тройку критериев, которые в случае корректной декомпозиции должны быть выполнены одновременно: возможность восстановления кортежей (обеспечение соединения без потерь), сохранение имеющихся зависимостей, а также соответствие крите-

риям «целевой» нормальной формы (в примере 2 это 4НФ) [7]. Если между критериями из этой совокупности возникает противоречие, т.е. если невозможно одновременно выполнить хотя бы два критерия из трех, декомпозиция будет некорректной. При получении желаемой нормальной формы такая некорректность может быть выражена либо искажениями при соединении дочерних отношений, либо искажениями в зависимостях между атрибутами. Известно, что для «высоких» нормальных форм — НФБК, 4НФ, как в примере 2, а также 5НФ указанная тройка критериев может быть выполнена не во всех случаях: такая ситуация изложена в [3] для НФБК, в [7] для 4НФ, а также в [8] — для 4НФ и 5НФ. Искажения при соединении считаются недопустимыми, поэтому искажения в зависимостях рассматриваются в качестве приемлемого, хотя и нежелательного «артефакта» при нормализации реляционных схем.

Отметим, однако, что ключевой каркас, приведенный на рисунке, получен в [5] с использованием теоремы о шунтировании многозначной зависимости. Ключевой каркас является частным случаем реляционного каркаса, описанного в [6]. Частный случай обеспечивается уникальным множеством суррогатных ключевых атрибутов набора сущностей. Как отмечалось в [5], ключевой каркас строго соответствует критериям 4НФ. Продолав над множеством ключевых атрибутов процедуры, аналогичные изложенным выше, несложно из реляционного каркаса получить ключевой. На множестве суррогатных ключевых атрибутов он по-прежнему будет полным и единственным.

В заключение можно предположить, что дальнейший анализ топологии путей нормализации, использующий особенности структуры универсального каркаса схем реляционных БД, позволит выработать единый универсальный метод определения решений для задач синтеза и/или модификации логических структур реляционных БД.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Codd E.F.* The Relational Model For Database Management, Version 2, Reading Mass. — NY: Addison-Wesley Publishing Co, 1990. — 538 p.
2. *Дейт К.Дж.* Введение в системы баз данных. — 7-е изд. — М.: Вильямс, 2001. — 1072 с.
3. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. — М.: 1987. — 608с.
4. *Ульман Дж.* Основы систем баз данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 334 с.
5. *Панченко Б.Е.* О синтезе универсальной логической модели данных // Вестн. СумГУ. Сер. Технические науки. — 2009. — № 2. — С. 60–66.
6. *Панченко Б.Е., Писанко И.Н.* О полноте и единственности универсального каркаса в реляционной модели данных // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 3. — С. 25–35.
7. *Carver A., Halpin T.* Atomicity and normalization // Proceedings of the 13-th International Workshop on Exploring Modelling Methods for Systems Analysis and Design, June, 29, from CEUR-WS archive. — Montpellier, France. — 2008. — 337. — P. 40–54.
8. *Silberschatz A., Korth H.F., Sudarshan S.* Database system concepts // PRC edition, McGraw-Hill Higher Education Press, 2006. — 1129 p.

Поступила 01.06.2009

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РЕЖИМАМИ МЕДИКАМЕНТОЗНОЇ ТЕРАПІЇ ТА ФІЗІОТЕРАПІЇ В ЗАДАЧІ РЕКОНСТРУКЦІЇ КІСТКОВОЇ ТКАНИНИ

В.П. МАРЦЕНЮК, Д.В. ВАКУЛЕНКО, І.Є. АНДРУЩАК

Представлено задачу побудови режимів медикаментозної терапії та фізіотерапії як задачу оптимального керування із фазовими обмеженнями для моделі реконструкції кісткової тканини. У моделі враховуються такі фактори: популяції остеоцитів, остеобластів, остеокластів та щільність матриксу. Цей підхід був чисельно реалізований за допомогою програмного середовища VisSim.

ВСТУП

Протягом попереднього десятиріччя робилися значні спроби для аналізу режимів медикаментозної терапії під час лікування різних захворювань шляхом використання детермінованих математичних моделей. Однією з причин такої великої уваги є значне поширення серед населення різних країн остеопоротичних переломів, раку кісткової тканини, що визначає велику соціальну роль цих патологій.

Застосування оптимального керування медикаментозною терапією та фізіотерапією для реконструкції кісткової тканини ми не зустрічали. Завданням буде перевірити оптимальність існуючих методів приписування ліків та фізіотерапевтичних процедур і там, де відповідь негативна, запропонувати альтернативні методики.

Мета роботи — досягти компромісу між оптимальним рівнем щільності матриксу та токсичною дією на кісткову тканину в цілому. У роботі використовується модель хіміотерапії, яка запропонована в [14].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Модель, що вивчатиметься, складається із системи диференціальних рівнянь. Одне з рівнянь описуватиме динаміку щільності матриксу, тоді як інші характеризуватимуть динаміку кількох популяцій клітинних елементів кісткової тканини. При цьому щільність матриксу не може виходити за межі певних заданих рівнів. Такі вимоги до методик лікування відповідають обмеженням на токсичність медикаментозної терапії. Метою лікування є досягнення нормальної щільності матриксу.

Введемо такі позначення: $C(t)$ — концентрація остеоцитів $\left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3}\right)$ — це популяція клітин, які розміщені в кісткових лакунах (порожнинах) у складі зв'язаного міжклітинного матриксу кісткової тканини; $B(t)$ —

концентрація остеобластів $\left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3}\right)$ (остеобласти — популяція клітин, які продукують практично всі інгредієнти кісткового матриксу); $K(t)$ — концентрація остеокластів $\left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3}\right)$ (остеокласти — популяція клітин, які розсмоктовують кісткову тканину); $M(t)$ — щільність матриксу $\left(\frac{\rho}{\text{см}^3}\right)$; $u_{Ch}(t)$ — концентрація медикаментозного препарату, який взаємодіє з остеоцитами та матриксом; $u_M(t)$ — процедура масажу, яка призводить до змін у кістковій тканині шляхом покращення кровопостачання та інервації кісткової тканини.

Припускається, що популяція клітин кісткової тканини і матрикс — однорідні. Тобто, динаміка їх росту однакова для всіх ділянок кісткової тканини.

Враховуючи результати робіт [15–18], приходимо до такої задачі оптимального керування. Нехай M^-, M^+ — мінімальне та максимальне значення щільності матриксу; C^-, B^-, K^- — мінімальні та C^+, B^+, K^+ — максимальні значення концентрацій популяцій клітинних елементів здорової кісткової тканини. Критерій якості:

$$J(u) = \int_0^T \left(\left(M(t) - \frac{M^- + M^+}{2} \right)^2 + u_{Ch}^2 + u_M^2 \right) dt \rightarrow \min_u, \quad (1)$$

який вказує на бажану щільність матриксу, що відповідає значенням здорової кістки.

Для системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \beta_{CB}B - d_C C, \\ \frac{dB(t)}{dt} = \beta_B B - d_B B + \gamma_{BM} MB, \\ \frac{dK(t)}{dt} = \beta_K K - d_K K + \alpha_{KM} MK, \\ \frac{dM(t)}{dt} = k_C (u_{Ch} + u_M) C + k_B (u_{Ch} + u_M) BM - k_{KM} MK - k_M M, \end{cases} \quad (2)$$

задамо початкові умови:

$$C(t) = C^0, \quad B(t) = B^0, \quad K(t) = K^0, \quad M(t) = M^0. \quad (3)$$

Тут $\beta_{CB}, d_C, \beta_B, d_B, \gamma_{BM}, \beta_K, d_K, \alpha_{KM}, k_C, k_B, k_{KM}, k_M, i=1,2$ — невід’ємні задані параметри задачі [1].

Обмеження «комфортності лікування»:

$$0 \leq u_{Ch}(t) + \delta u_M(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Якщо $u_{\max} = 0$, то це означає, що відповідне керування відсутнє.

Обмеження токсичності:

$$M^- \leq M(t) \leq M^+, \quad B^- \leq B(t) \leq B^+, \quad C^- \leq C(t) \leq C^+, \quad K^- \leq K(t) \leq K^+,$$

$$h_1(t) = C(t) - C^- \geq 0, \quad h_2(t) = C^+ - C(t) \geq 0, \quad h_3(t) = B(t) - B^- \geq 0,$$

$$h_4(t) = B^+ - B(t) \geq 0, \quad h_5(t) = K(t) - K^- \geq 0, \quad h_6(t) = K^+ - K(t) \geq 0,$$

$$h_7(t) = M(t) - M^- \geq 0, \quad h_8(t) = M^+ - M(t) \geq 0. \quad (5)$$

Обмеження (4) має такий зміст: одночасно пацієнт може отримати не більше $u_{\max} = u_{Ch} + \delta u_M$ одиниць медикаментозного препарату та масажу, а також може бути застосований лише один фактор керування. При цьому константа δ вказує на той факт, що процедуру масажу в δ разів комфортніше (або навпаки — менш комфортно) отримати в порівнянні з медикаментозним препаратом. Процедура масажу проводиться перед медикаментозною терапією, що підвищує її ефективність.

Для знаходження підозрілого на оптимальне керування задачі (1)–(5) скористаємося принципом максимуму Л.С. Понтрягіна для задачі з фазовими обмеженнями [15]. На жаль, зробити це в аналітичному вигляді не вдається.

Змішані обмеження відсутні, тобто $g_i \equiv 0, \quad i = 1, 2$.

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ РЕКОНСТРУКЦІЇ КІСТКОВОЇ ТКАНИНИ

Для розв'язку цієї задачі використовуємо результат [3]. Введемо функцію Понтрягіна задачі (1)–(5).

$$\begin{aligned} H(t, M, B, K, C, u, p, \lambda_0) = & -\lambda_0 \left(\left(M - \frac{M^- + M^+}{2} \right)^2 + u_{Ch}^2 + u_M^2 \right) + \\ & + p_1(\beta_{CB}B - d_C C) + p_2(\beta_B B - d_B B + \gamma_{BM} MB) + \\ & + p_3(\beta_K K - d_K K + \alpha_{KM} MK) + p_4(k_C(u_{Ch} + u_M)C + \\ & + k_B(u_{Ch} + u_M)BM - k_{KM} MK - k_M M), \end{aligned} \quad (6)$$

де $U = \{(u_{Ch}, u_M) \in R^2; 0 \leq u_{Ch}(t) + \delta u_M(t) \leq B\}$.

Розглянемо нерегулярний випадок $\lambda_0 = 0$. Функція Понтрягіна прийме вигляд:

$$\begin{aligned} H(t, M, B, K, C, u, p) = & p_1(\beta_{CB}B - d_C C) + p_2(\beta_B B - d_B B + \gamma_{BM} MB) + \\ & + p_3(\beta_K K - d_K K + \alpha_{KM} MK) + p_4(k_C(u_{Ch} + u_M)C + \end{aligned}$$

$$+ k_B(u_{Ch} + u_M)BM - k_{KM}MK - k_M M), \quad (7)$$

а функція Лагранжа запишеться так:

$$\begin{aligned} L(t, M, B, K, C, u, p) = & p_1(\beta_{CB}B - d_C C) + p_2(\beta_B B - d_B B + \gamma_{BM}MB) + \\ & + p_3(\beta_K K - d_K K + \alpha_{KM}MK) + p_4(k_C(u_{Ch} + u_M)C + k_B(u_{Ch} + u_M)BM - \\ & - k_{KM}MK - k_M M) + \mu_1(t)(M(t) - M^-) + \mu_2(t)(M^+ - M(t)) + \\ & + \mu_3(t)(C(t) - C^-) + \mu_4(t)(C^+ - C(t)) + \mu_5(t)(B(t) - B^-) + \\ & + \mu_6(t)(B^+ - B(t)) + \mu_7(t)(K(t) - K^-) + \mu_8(t)(K^+ - K(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Майже по всій $[0, T]$ виконується принцип максимуму

$$\begin{aligned} u^*(t) = \\ = \arg \max_{u \in \Omega(t, C^*(t), B^*(t), K^*(t), M^*(t))} H(t, C^*(t), B^*(t), K^*(t), M^*(t), u_{Ch}, u_M, \lambda_0, \lambda(t)), \\ t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (9)$$

Умова стаціонарності по u функції Лагранжа:

$$L_u^*[t] = H_u^*[t] = 0, \quad (10)$$

де $L_u^* = \frac{\partial L}{\partial u}(t, C^*(t), B^*(t), K^*(t), M^*(t), u_{Ch}(t), u_M(t), \lambda_0, \lambda, \mu, g)$ — часткова похідна L по u , обчислена протягом оптимального процесу. Спряжена вектор-функція $p(t)$ майже всюди задовольнятиме системі диференціальних рівнянь:

$$\dot{p}_1(t) = -L_C^*(t), \quad \dot{p}_2(t) = -L_B^*(t), \quad \dot{p}_3(t) = -L_K^*(t), \quad \dot{p}_4(t) = -L_M^*(t). \quad (11)$$

Повні похідні по t функції H та L співпадають протягом оптимального процесу та рівні частковій похідній по t функції L :

$$\frac{dH^*[t]}{dt} = \frac{dL^*[t]}{dt} = \frac{\partial L^*[t]}{\partial t}.$$

Множники Лагранжа (вектор-функції $\mu(t)$) задовольняють умові:

$$\mu_i(t)h_i^*[t] = 0, \quad \mu_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, \dots, 8}. \quad (12)$$

Введемо функцію перемикування $\Phi_M(t)$ та $\Phi_{Ch}(t)$:

$$\Phi_M(t) = p_4(k_C C + k_B BM), \quad \Phi_{Ch}(t) = p_4(k_C C + k_B BM).$$

Для знаходження оптимального керування за допомогою масажу та хіміотерапії розв'яжемо задачу:

$$\Phi_M(t) \rightarrow \sup_{u \in U}, \quad \text{або} \quad -\Phi_M(t) \rightarrow \inf_{u \in U},$$

$$\Phi_{Ch}(t) \rightarrow \sup_{u \in U}, \text{ або } -\Phi_{Ch}(t) \rightarrow \inf_{u \in U}.$$

Знайдемо оптимальне керування, використовуючи принцип максимуму Понтрягіна:

$$u_{Ch}^*(t) = \begin{cases} 0, & \Phi_{Ch}(t) > 0, \\ u_{\max}, & \Phi_{Ch}(t) < 0, \end{cases} \quad u_M^*(t) = \begin{cases} 0, & \Phi_M(t) > 0, \\ \frac{u_{\max}}{\delta}, & \Phi_M(t) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Кількість перемикань функцій u_M та u_{Ch} на відрізку $[0, T]$ пов'язана з числом зміни знака функції $\Phi_M(t)$, $\Phi_{Ch}(t)$ та $p_i(t)$, $i=1,2,3,4$. Спряжені функції задовольняють системі інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= -\int_t^T (p_4 k_C (u_{Ch}^* + u_M^*) - p_1 d_C) d\tau + \int_t^T d\mu_2 - \int_t^T d\mu_1, \\ p_2(t) &= -\int_t^T (p_1 \beta_{CB} + p_2 (\beta_B - d_B + \gamma_{BM} M^*) + p_4 k_B (u_{Ch}^* + u_M^*) M^*) d\tau + \\ &\quad + \int_t^T d\mu_4 - \int_t^T d\mu_3, \\ p_3(t) &= -\int_t^T (p_3 (\beta_K - d_K + \alpha_{KM} M^*) - p_4 k_{KM} M^*) d\tau + \int_t^T d\mu_6 - \int_t^T d\mu_5, \\ p_4(t) &= -\int_t^T (p_2 \gamma_{BM} B^* + K^* (p_3 \alpha_{KM} - p_4 k_{KM}) + p_4 k_B B^* (u_{Ch}^* + u_M^*)) d\tau + \\ &\quad + \int_t^T d\mu_8 - \int_t^T d\mu_7. \end{aligned} \quad (14)$$

Припустимо, що міри μ_i мають густину:

$$d\mu_i = \rho_i dt, \quad \rho_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (15)$$

де ρ_i — густина міри. Продиференціюємо рівняння (14) по t , враховуючи припущення (15). Спряжена вектор-функція $p(t)$ майже скрізь задовольняє системі диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial L}{\partial C} = p_1 d_C - p_4 k_C (u_{Ch}^* + u_M^*) + \rho_2 - \rho_1, \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial L}{\partial B} = -p_1 \beta_{CB} - p_2 (\beta_B - d_B + \gamma_{BM} M^*) - \\ &\quad - p_4 k_B (u_{Ch}^* + u_M^*) M^* + \rho_4 - \rho_3, \\ \dot{p}_3(t) &= -\frac{\partial L}{\partial K} = p_4 k_{KM} M^* - p_3 (\beta_K - d_K + \alpha_{KM} M^*) + \rho_6 - \rho_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4(t) = -\frac{\partial L}{\partial M} = & -p_2\gamma_{BM}B^* - K^*(p_3\alpha_{KM} - p_4k_{KM}) - \\ & - p_4k_B B^*(u_{Ch}^* + u_M^*) + \rho_8 - \rho_7. \end{aligned} \quad (16)$$

Невід'ємні міри $d\mu_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,8$, які визначено на множинах T_i , $i=1,2,\dots,8$, задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} (C^* - C^-)d\mu_1 = 0, (C^+ - C^*)d\mu_2 = 0, (B^* - B^-)d\mu_3 = 0, (B^+ - B^*)d\mu_4 = 0, \\ (K^* - K^-)d\mu_5 = 0, (K^+ - K^*)d\mu_6 = 0, \\ (M^* - M^-)d\mu_7 = 0, (M^+ - M^*)d\mu_8 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Використовуючи (15), та враховуючи те, що $dt > 0$, отримаємо:

$$\begin{aligned} (C^* - C^-)\rho_1 = 0, (C^+ - C^*)\rho_2 = 0, (B^* - B^-)\rho_3 = 0, (B^+ - B^*)\rho_4 = 0, \\ (K^* - K^-)\rho_5 = 0, (K^+ - K^*)\rho_6 = 0, (M^* - M^-)\rho_7 = 0, (M^+ - M^*)\rho_8 = 0. \end{aligned}$$

Умови трансверсальності мають вигляд [4]:

$$\begin{aligned} p_1(T) = \mu_2[T] - \mu_1[T], p_2(T) = \mu_4[T] - \mu_3[T], \\ p_3(T) = \mu_6[T] - \mu_5[T], p_4(T) = \mu_8[T] - \mu_7[T]. \end{aligned} \quad (18)$$

Множник Лагранжа λ_0 визначає чутливість оптимального розв'язку задачі до виду інтегральної частини функціонала. У виродженому випадку $\lambda_0 = 0$ функція H є лінійною по u_{Ch} та u_M , тому її максимум досягається на кінцевих u_{Ch} та u_M тільки за $\mu(t) \equiv 0$ (в силу (16)), що суперечить умовам теореми [18]. Тому далі можна покласти $\lambda_0 = 1$.

Розглянемо регулярний випадок $\lambda_0 = 1$.

Функція Понтрягіна прийме вигляд:

$$\begin{aligned} H(t, M, B, K, C, u, p) = & -\left(M - \frac{M^- + M^+}{2}\right)^2 - u_{Ch}^2 - u_M^2 + \\ & + p_1(\beta_{CB}B - d_C C) + p_2(\beta_B B - d_B B + \gamma_{BM}MB) + \\ & + p_3(\beta_K K - d_K K + \alpha_{KM}MK) + p_4(k_C(u_{Ch} + u_M)C + \\ & + k_B(u_{Ch} + u_M)BM - k_{KM}MK - k_M M), \end{aligned} \quad (19)$$

а функція Лагранжа матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} L(t, M, B, K, C, u, p) = & -\left(M - \frac{M^- + M^+}{2}\right)^2 - u_{Ch}^2 - u_M^2 + p_1(\beta_{CB}B - d_C C) + \\ & + p_2(\beta_B B - d_B B + \gamma_{BM}MB) + p_3(\beta_K K - d_K K + \alpha_{KM}MK) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p_4(k_C(u_{Ch} + u_M)C + k_B(u_{Ch} + u_M)BM - k_{KM}MK - k_M M) + \\
 &+ \mu_1(t)(M(t) - M^-) + \mu_2(t)(M^+ - M(t)) + \mu_3(t)(C(t) - C^-) + \\
 &+ \mu_4(t)(C^+ - C(t)) + \mu_5(t)(B(t) - B^-) + \mu_6(t)(B^+ - B(t)) + \\
 &+ \mu_7(t)(K(t) - K^-) + \mu_8(t)(K^+ - K(t)). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Запишемо принцип максимуму Понтрягіна:

$$\begin{aligned}
 &u^*(t) = \\
 = \arg \max_{u \in \Omega(t, C^*(t), B^*(t), K^*(t), M^*(t))} &H(t, C^*(t), B^*(t), K^*(t), M^*(t), u_{Ch}^*, u_M^*, \lambda_0, \lambda(t)), \\
 &t \in [0, T]. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Для знаходження оптимального керування розв'яжемо задачу:

$$\begin{aligned}
 &\left[-u_{Ch}^2 + p_4 u_{Ch} (k_C C + k_B BM) \right] \rightarrow \min_{0 \leq u_{Ch}(t) \leq u_{\max}}, \\
 &\left[-u_M^2 + p_4 u_M^* (k_C C + k_B BM) \right] \rightarrow \min_{0 \leq u_{Ch}(t) \leq u_{\max}}.
 \end{aligned}$$

Введемо функцію перемикування $\Phi_M(t)$ та $\Phi_{Ch}(t)$:

$$\Phi_M(t) = p_4(k_C C + k_B BM), \quad \Phi_{Ch}(t) = p_4(k_C C + k_B BM).$$

Оптимальне керування має вигляд:

$$\begin{aligned}
 &\Phi_M(t) \rightarrow \sup_{u \in U}, \quad -\Phi_M(t) \rightarrow \inf_{u \in U}, \\
 &\Phi_{Ch}(t) \rightarrow \sup_{u \in U}, \quad -\Phi_{Ch}(t) \rightarrow \inf_{u \in U}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо оптимальне керування, використовуючи принцип максимуму Понтрягіна:

$$u_{Ch}^*(t) = \begin{cases} 0, & \Phi_{Ch}(t) > 0, \\ u_{\max}, & \Phi_{Ch}(t) < 0, \end{cases} \quad u_M^*(t) = \begin{cases} 0, & \Phi_M(t) > 0, \\ \frac{u_{\max}}{\delta}, & \Phi_M(t) < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Кількість перемикувань функцій u_M та u_{Ch} на відрізку $[0, T]$ пов'язана з числом зміни знака функції $\Phi_M(t)$, $\Phi_{Ch}(t)$ та $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Спряжені функції для оптимального керування за допомогою хіміотерапії та масажу мають однаковий вигляд та задовольняють системі інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 p_1(t) &= -\int_t^T \left(\frac{p_4 k_C (u_{Ch} + u_M)}{2} - p_1 d_C \right) d\tau + \int_t^T d\mu_2 - \int_t^T d\mu_1, \\
 p_2(t) &= -\int_t^T (p_1 \beta_{CB} + p_2 (\beta_B - d_B + \gamma_{BM} M) + p_4 k_B M^* (u_{Ch}^* + u_M^*)) d\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_t^T d\mu_4 - \int_t^T d\mu_3, \\
 p_3(t) = & - \int_t^T (p_3(\beta_K - d_K + \alpha_{KM}M) - p_4k_{KM}M) d\tau + \int_t^T d\mu_6 - \int_t^T d\mu_5, \\
 p_4(t) = & - \int_t^T \left(\frac{p_2\gamma_{BM}B + K(p_3\alpha_{KM} - p_4k_{KM}) + p_4k_B B^*(u_{Ch}^* + u_M^*)}{2} \right) d\tau + \\
 & + \int_t^T d\mu_8 - \int_t^T d\mu_7. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Продиференціюємо рівняння (14) по t , враховуючи припущення (15):

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1(t) = & - \frac{\partial L}{\partial C} = p_1 d_C - p_4 k_C (u_{Ch}^* + u_M^*) + \rho_2 - \rho_1, \\
 \dot{p}_2(t) = & - \frac{\partial L}{\partial B} = -p_1 \beta_{CB} - p_2 (\beta_B - d_B + \gamma_{BM} M^*) - \\
 & - p_4 k_B M^* (u_{Ch}^* + u_M^*) + \rho_4 - \rho_3, \\
 \dot{p}_3(t) = & - \frac{\partial L}{\partial K} = p_4 k_{KM} M^* - p_3 (\beta_K - d_K + \alpha_{KM} M^*) + \rho_6 - \rho_5, \\
 \dot{p}_4(t) = & - \frac{\partial L}{\partial M} = \frac{p_2 \gamma_{BM} B^* + K^* (p_3 \alpha_{KM} - p_4 k_{KM}) + p_4 k_B B^* (u_{Ch}^* + u_M^*)}{2} + \\
 & + \rho_8 - \rho_7. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Дослідимо рух по фазовій границі:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 = & \begin{cases} 0, & C < C^-, \\ C, & C = C^-, \end{cases} \quad \mu_2 = \begin{cases} 0, & C < C^+, \\ C, & C = C^+, \end{cases} \quad \mu_3 = \begin{cases} 0, & B < B^-, \\ B, & B = B^-, \end{cases} \\
 \mu_4 = & \begin{cases} 0, & B < B^+, \\ B, & B = B^+, \end{cases} \quad \mu_5 = \begin{cases} 0, & K < K^-, \\ K, & K = K^-, \end{cases} \quad \mu_6 = \begin{cases} 0, & K < K^+, \\ K, & K = K^+, \end{cases} \\
 \mu_7 = & \begin{cases} 0, & M < M^-, \\ M, & M = M^-, \end{cases} \quad \mu_8 = \begin{cases} 0, & M < M^+, \\ M, & M = M^+. \end{cases} \tag{25}
 \end{aligned}$$

З принципу максимуму випливає, що оптимальне керування задовольняє умовам:

$$\begin{aligned}
 u^*(t) = & p_i(t), \quad i=1, \dots, 4, \quad \dot{C}^*(t) = p_1(t), \\
 \dot{B}^*(t) = & p_2(t), \quad \dot{K}^*(t) = p_3(t), \quad \dot{M}^*(t) = p_4(t).
 \end{aligned}$$

Використовуючи (2–5) та (16–17), отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{C} &= p_1 d_C - p_4 k_C (u_{Ch}^* + u_M^*) + \rho_2 - \rho_1, \\ \ddot{B} &= -p_1 \beta_{CB} - p_2 (\beta_B - d_B + \gamma_{BM} M^*) - p_4 k_B (k_C C + k_B B^* M^*) M^* + \rho_4 - \rho_3, \\ \ddot{K} &= p_4 k_{KM} M^* - p_3 (\beta_K - d_K + \alpha_{KM} M^*) + \rho_6 - \rho_5, \\ \ddot{M} &= \frac{p_2 \gamma_{BM} B^* + K^* (p_3 \alpha_{KM} - p_4 k_{KM}) + p_4 k_B B^* (u_{Ch}^* + u_M^*)}{2} + \rho_8 - \rho_7. \end{aligned} \quad (26)$$

З умови доповнюючої не жорсткості при $M^- < M(t) < M^+$, $B^- < B(t) < B^+$, $C^- < C(t) < C^+$, $K^- < K(t) < K^+$ $\mu_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, 8$. Якщо $C > 0$, $B > 0$, $K > 0$, $M > 0$, то функції C, B, K, M задовольнюють рівнянням $\ddot{C} = C$, $\ddot{B} = B$, $\ddot{K} = K$, $\ddot{M} = M$. Виходячи з (1):

$$M = Ae^\tau + Be^{-\tau}. \quad (27)$$

Оскільки \dot{M} є неперервною функцією, то в першій точці τ контакту M із фазовими обмеженнями виконується умова $M(\tau) = M^*$. Похідні функції справа та зліва співпадають і $\dot{M}(\tau) = 0$. Ми маємо систему рівнянь для визначення параметрів руху A, B, τ . Початковими значеннями для щільності матриксу приймемо M^0 , значення M^* вздовж оптимального процесу M .

$$\begin{cases} M(\tau) = Ae^\tau - Be^{-\tau} = M^*, \\ M(0) = A - B = M^0, \\ M(\tau) = Ae^\tau + Be^{-\tau} = M^*. \end{cases} \quad (28)$$

Розв'язуючи систему (27), знаходимо значення сталих A, B, τ :

$$B = 0, \quad A = M^0, \quad \tau = \ln\left(\frac{M^*}{M^0}\right).$$

Обчислимо функцію Понтрягіна протягом оптимального розв'язку:

$$\begin{aligned} H(t, M, B, K, C, u_{Ch}, u_M, p) &= \\ &= -\left(M^* - \frac{M^- + M^+}{2}\right)^2 - u_{Ch}^2 - u_M^2 + p_1 (\beta_{CB} B - d_C C) + \\ &+ p_2 (\beta_B B - d_B B + \gamma_{BM} M^* B) + p_3 (\beta_K K - d_K K + \alpha_{KM} M^* K) + \\ &+ p_4 (k_C (u_{Ch} + u_M) C + k_B (u_{Ch} + u_M) B M^* - k_{KM} M K - k_M M^*). \end{aligned} \quad (29)$$

Приведене обчислення показує, що функція Понтрягіна є сталою по всій оптимальній траєкторії по M . Цього і слід було очікувати через автономність вказаної задачі.

Побудова аналітичного розв'язку цієї задачі має певні складності. Тут ми сформулювали тільки крайову задачу принципу максимуму, яка може бути розв'язана чисельними методами.

ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

За допомогою VisSim (візуальний стимулятор — програма моделювання технічних та фізичних об'єктів та систем) здійснено кількісне дослідження оптимального керування медикаментозної терапії для моделі реконструкції кісткової тканини на основі звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли:

$$\begin{aligned} \beta_{CB} &= 0,78 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \quad d_C = 0,8 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \quad \beta_B = 21 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \\ d_B &= 22 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \quad \gamma_{BM} = 0,47 \left(\frac{z^2 \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^6} \right), \quad \beta_K = 10000 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \\ d_K &= 1 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \quad \alpha_{KM} = 10 \left(\frac{z^2 \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^6} \right), \quad k_B = 0,12 \left(\frac{z^2 \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^6} \right), \\ k_M &= 0,12 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \quad k_C = 0,12 \left(\frac{z \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^3} \right), \quad k_{KM} = 0,12 \left(\frac{z^2 \cdot \text{клітин}}{\text{діб} \cdot \text{см}^6} \right). \end{aligned}$$

Початкові умови:

$$\begin{aligned} C^0 &= 0,7 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad B^0 = 2,42 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \\ K^0 &= 0,2 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad M^0 = 0,6 \left(\frac{z}{\text{см}^3} \right). \end{aligned}$$

Обмеження «комфортності лікування»: $u_{\max} = 5 \left(\frac{z}{\text{см}^3} \right)$.

Обмеження токсичності:

$$\begin{aligned} C^- &= 0,7 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad C^+ = 2,2 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad B^- = 0,6 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \\ B^+ &= 5 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad K^- = 0 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad K^+ = 1,5 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \\ M^- &= 0,9 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad M^+ = 1,1 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right). \end{aligned}$$

Прийmemo значення по всьому оптимальному процесу для

$$C^* = 1 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad B^* = 1 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad K^* = 1 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right), \quad M^* = 1 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right).$$

Було розв'язано систему з восьми звичайних диференціальних рівнянь та блок-схеми, що зображено на рис. 1, рис. 2. На рис. 3 зображено блок-схему оптимального керування (19). У блок-схемах рис. 1–3 вказано назви

змінних у програмі на VisSim, які відповідають змінним й параметрам моделі, яка розглядається (1)–(5). У результаті розв'язку системи з восьми звичайних диференціальних рівнянь було отримано оптимальне керування процесу ремоделювання кісткової тканини (рис. 4). З біологічної точки зору, для приведення щільності кісткової тканини до норми необхідно з першого по четвертий, з шостого по восьмий, з дванадцятого по тринадцятий (вісімнадцятий) день ввести пацієнту медикаментозний препарат, який би збільшив концентрацію остеобластів на $u_{\max} = 5 \left(\frac{\text{клітин}}{\text{см}^3} \right)$. Результати роз-

рахунку зміни щільності матриксу під впливом керуючого фактора u (дії медикаментозного препарату та масажу) показано на рис. 5. На рис. 6, 7, 8 зображено результати розрахунку зміни концентрацій остеобластів, остеоцитів, остеобластів під впливом керуючого фактора u .

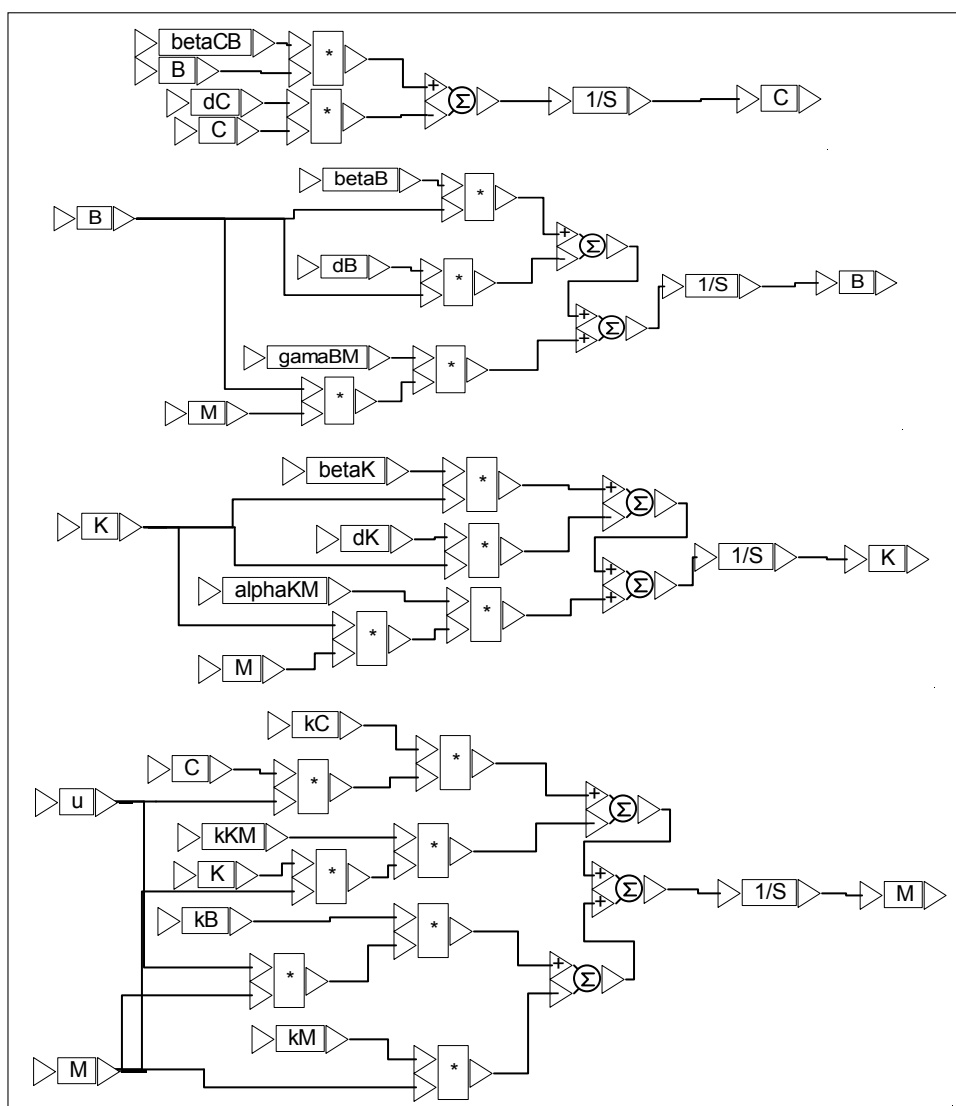


Рис. 1. Блок-схема системи рівнянь (2)

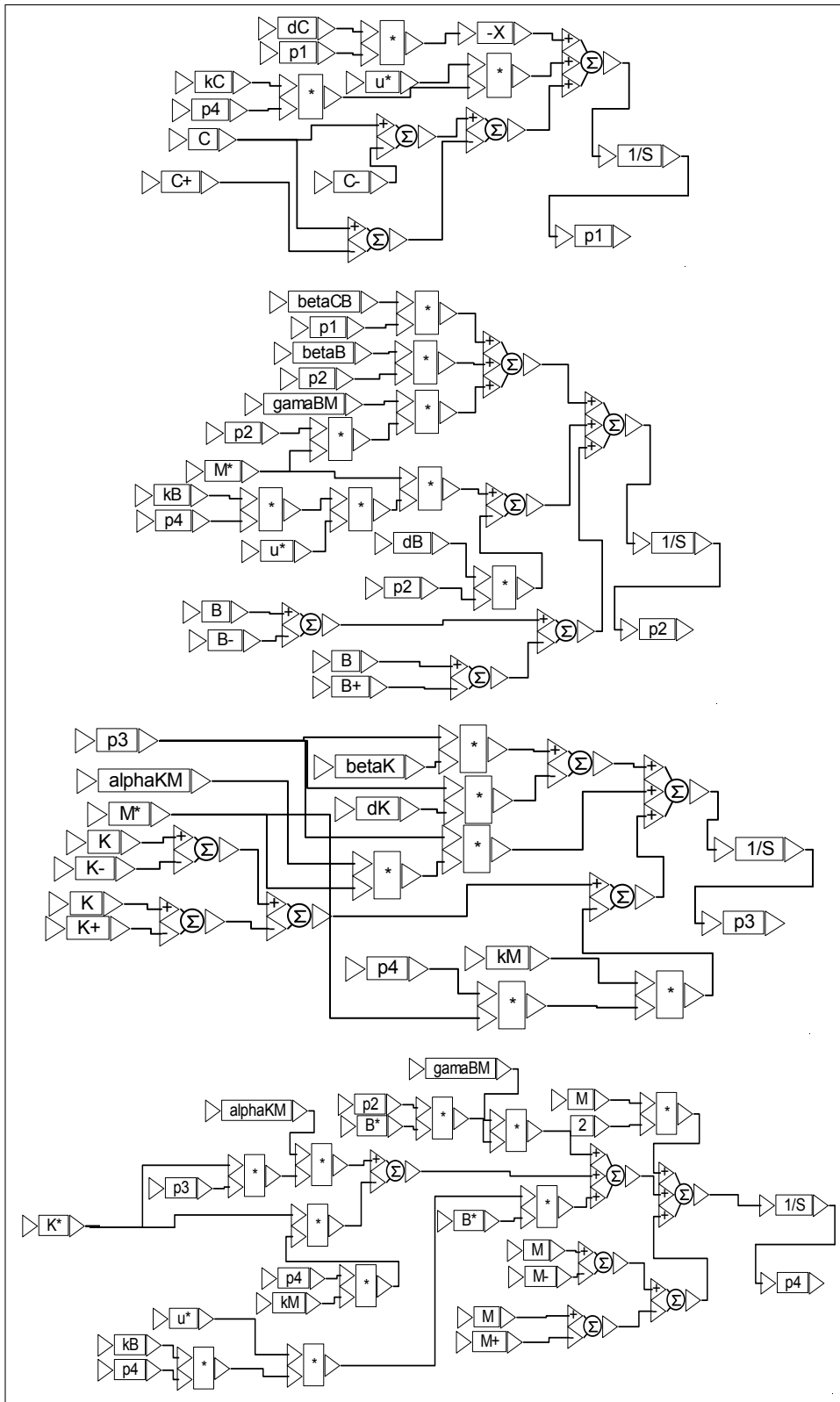


Рис. 2. Блок-схема спряженої системи рівнянь (24)

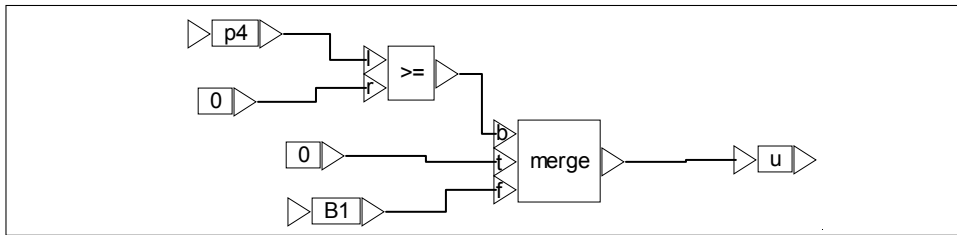


Рис. 3. Блок-схема оптимального керування (22)

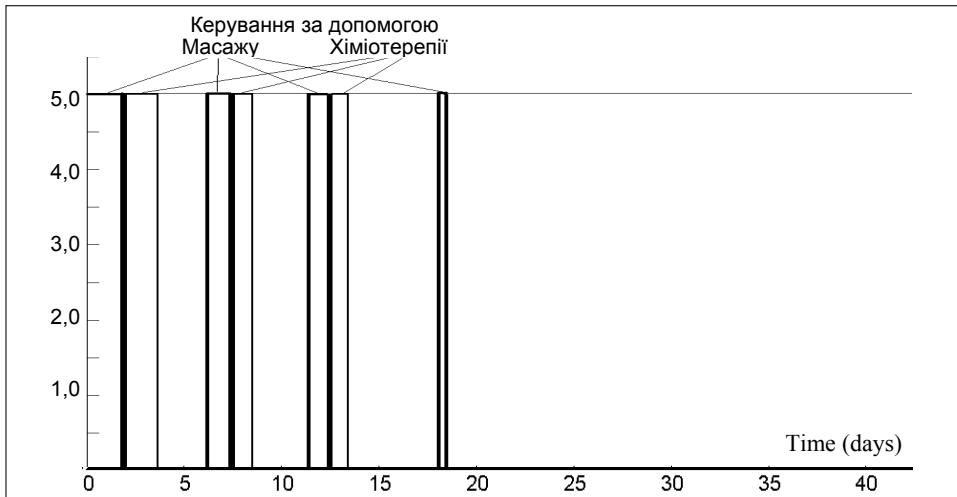


Рис. 4. Результати розрахунку оптимального керування процесом ремоделювання кісткової тканини

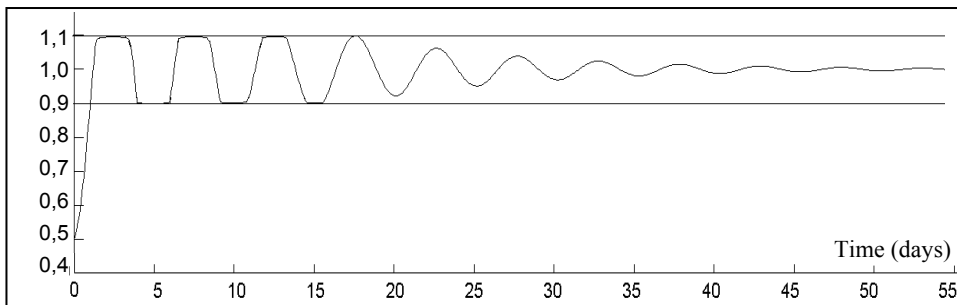


Рис. 5. Результати розрахунку зміни щільності матриксу під впливом керуючого фактора u

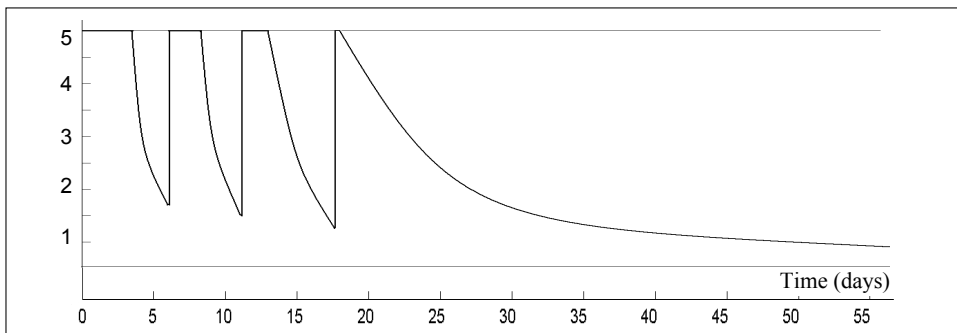


Рис. 6. Результати розрахунку зміни концентрації остеобластів під впливом керуючого фактора u

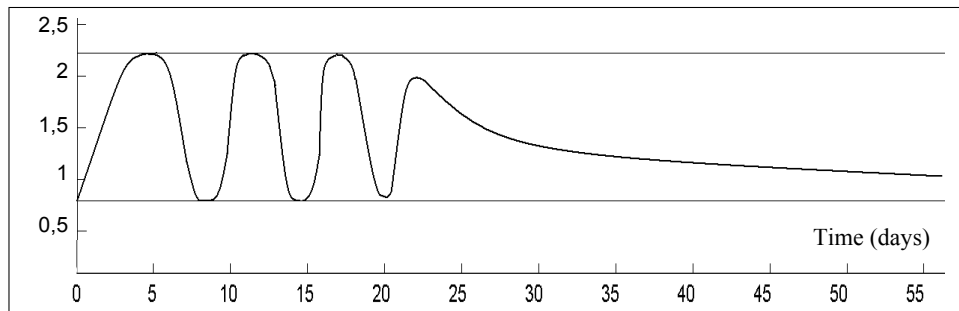


Рис. 7. Результати розрахунку зміни концентрації остеоцитів під впливом керуючого фактора u

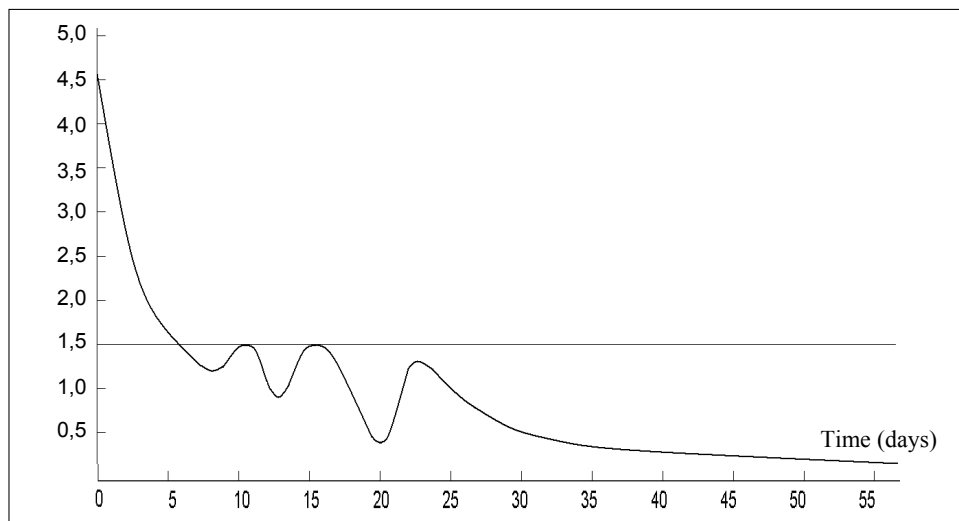


Рис. 8. Результати розрахунку зміни концентрації остеокластів під впливом керуючого фактора u

ВИСНОВКИ

Таким чином, розглянуто задачу побудови режимів медикаментозної терапії та масажу як задачу оптимального керування з фазовими обмеженнями.

Запропоновану методику можна використовувати як для перевірки оптимальності вже існуючих режимів медикаментозної терапії та масажу, так і для побудови нових. Відзначимо, що розглянута система може бути використана також для моделювання терапевтичного лікування під час допомоги n терапевтичних методик з впливом на інші ланки процесу реконструкції кісткової тканини шляхом введення додаткових змінних. Цей підхід було чисельно реалізовано за допомогою програми VisSim, що дозволило знайти оптимальне керування з фазовими обмеженнями для реконструкції кісткової тканини.

В подальших дослідженнях необхідно врахувати неоднорідність кісткової тканини, а також блокуючу дію медикаментозної препаратів на клітинні цикли.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Зайцев Ю.А.* Структура модели метаболизма щелочноземельных элементов // Радиобиология, 1988. — Т. 28, Вып. 6. — С. 852–856.
2. *Guillaume T. Charras, Mike A. Horton.* Determination of cellular strains by combined atomic force microscopy and finite element modeling // *Biophys Journal.* — 2002. — **83**. — № 2. — P. 858–879.
3. *Winsor C.P.* The gompertz curve as a growth curve // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* — 1932. — **18**. — № 1. — P. 1–8.
4. *Weiss C.M., Weiss A.* Principles and Practice of Implant Dentistry. — St. Louis: Mosby Inc., 2001. — 447 p.
5. *MacArthur B.D.* et al. Bone cell remodelling // *Biochemical and Biophysical Research Communications.* — 2003. — **313**. — P. 825–833.
6. *Deen W.M.* Hindered transport of large molecules in liquid-filled pores // *American Institute of Chemical Engineers Journal.* — 1987. — **33**. — № 9. — P. 1409–1425.
7. *Chen C.Y., Byrne H.M., King J.R.* The influence of growth-induced stress from the surrounding medium on the development of multicell spheroids // *Journal of Mathematical Biology.* — 2001. — **43**. — № 3. — P. 191–220.
8. *Please C.P., Pettet G., McElwain D.L.S.* A new approach to modelling the formation of necrotic regions in tumours // *Applied Mathematics Letters.* — 1997. — **11**. — № 3. — P. 89–94.
9. *Kozusko F., Bajzer Z.Z.* Combining gompertzian growth and cell population dynamics // *Mathematical Biosciences.* — 2003. — **185**. — № 2. — P. 153–167.
10. *Pettet G.J., Please C.P., Tindall M.J., McElwain D.L.S.* The migration of cells in multicell tumour spheroids // *Bulletin Mathematical Biology.* — 2001. — **63**. — № 2. — P. 231–257.
11. *Tindall M.* Modelling cell movement and the cell cycle in multicellular tumour spheroids // Ph.D. Thesis, Faculty of mathematical studies, Southampton University. — 2002. — **2**. — P. 57–63.
12. *Zhang X.-W., Audet J., Piret J.M., Li Y.-X.* Cell cycle distribution of primitive haematopoietic cells stimulated in vitro and in vivo // *Cell Proliferation.* — 2001. — **34**. — P. 321–330.
13. *Savill N.J.* Mathematical models of hierarchically structured cell populations under equilibrium with applications to the epidermis // *Cell Proliferation.* — 2003. — № 36. — P. 1–26.
14. *Марценюк В.П., Вакуленко Д.В.* Оптимальное управление режимами химиотерапии в задаче реконструкции костной ткани // *Кибернетика и вычислительная техника.* — 2007. — Вып. 154. — С. 92–106.
15. *Андреева Е.А., Бенке Х.* Оптимизация управления систем. — Тверь: ТверГУ, 1996. — 164 с.
16. *Андреев В.М., Тихомиров И.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука. Глав. редакция физ.-мат. лит.-ры, 1979. — 224 с.
17. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления: учеб. пособ. для вузов. — М.: Высш. шк. — 447 с.
18. *Сотсков А.И., Колесник Г.В.* Оптимальное управление в примерах и задачах. — М.: Российская экономическая шк. — 2002. — 58 с.

Надійшла 14.10.2009

ЗГАСАННЯ ЗВУКУ В МІЖТРУБНОМУ ПРОСТОРІ СВЕРДЛОВИН

В.Я. ДАНИЛОВ, І.Я. НАУМЕНКО, В.І. КИЗИМА, С.М. КЛИМЕНКО

Розглянуто найважливіший вид згасання звуку в міжтрубному просторі свердловин, обумовлений пограничним тертям середовища об стінки хвильовода типу «труба в трубі». Отримано аналітичний вираз для його розрахунку та експериментальні дані, необхідні для розробки електронного обладнання в галузі вимірювання рівня рідини у свердловинах акустичним дистанційним методом.

ВСТУП

Акустичний метод ехолокації здавна використовується для дослідження

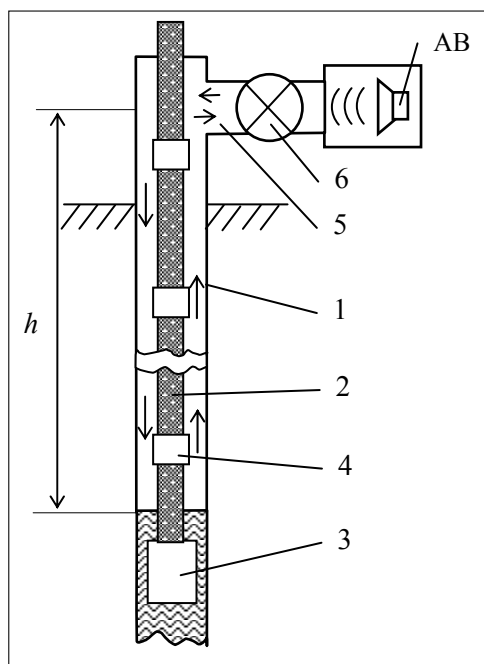


Рис. 1. Структура нафтової свердловини: 1 — обсадна труба; 2 — нафтопідіймна колона; 3 — глибинний насос; 4 — муфта; 5 — вхідний патрубок; 6 — вентель; АВ — джерело звуку

статичного та динамічного рівнів рідини в нафтових свердловинах і в цій галузі будь-якої серйозної альтернативи йому наразі не існує [1, 2]. Одним із чинників, що суттєво впливає на якісні характеристики ехолокації, є згасання звуку в міжтрубному просторі свердловин. Згідно з [2] це згасання розділяють на три основні складові: обумовлене поглинанням звуку в газовому середовищі; викликане відбиттями від з'єднувальних муфт або реперів, що знаходяться у міжтрубному просторі; обумовлене пограничним тертям середовища поширення звуку в міжтрубному просторі та нафтопідіймної колони. Наразі для моделі міжтрубного простору типу «труба в трубі» найбільш невивченим є третій вид згасання, який зазвичай у десятки разів перевищує інші за своєю величиною і часто є головною причиною обмеженої дальності дії свердловинних ехолокаторів. Саме цей вид згасання розглянуто в цій роботі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Структуру нафтової свердловини і шлях поширення акустичного сигналу під час зондування наведено на рис. 1. Зазвичай нафтова свердловина складається з обсадної труби 1, нафтопідйомної колони (внутрішньої труби) 2 та відповідного насосно-компресорного обладнання. Останнє складається з глибинного насоса 3 та електричних або механічних його приводів, а нафтопідйомна колона складається з нафтокомпресорних труб (НКТ), з'єднаних між собою муфтами 4. У міжтрубному просторі на глибині h знаходиться рідина (нафта або її суміш з водою), відстань до якої необхідно вимірювати в статичному й у динамічному режимах роботи свердловини. Введення звуку під час ехолокації свердловини здійснюється через короткий вхідний патрубок 5 та вентиль 6. В акустичному сенсі в більшості випадків нафтова свердловина є «вузькою трубою» або довгою акустичною лінією, в якій розповсюджується лише нульова мода акустичного сигналу (плоска хвиля) [1, 3]. Далі ми розглядатимемо хвилевід, в якому існують лише поздовжні коливання частинок середовища.

Мета роботи — вивчення згасання звуку в свердловині завдяки тертю рідини на границях міжтрубного простору.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Для отримання числових даних необхідно створити математичну модель

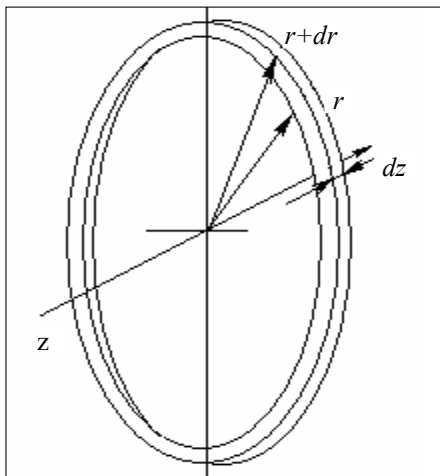


Рис. 2. Елементарний об'єм середовища в міжтрубному просторі: z — вертикальна координата; dz — приріст вертикальної координати; $r + dr$ — зміна товщини рідини; r — товщина рідини

згасання звуку в міжтрубному просторі. З цією метою будемо користуватися методикою роботи [4], де подібне завдання вирішене для одинокої труби. Під час поширення звукових хвиль у міжтрубному просторі (рис. 1) внаслідок гальмівної дії нерухомих поверхонь обсадної та нафтопідйомної труб виникають в'язкі сили. Під час наближення до поверхні швидкість коливань частинок середовища зменшується і стає практично нульовою в зоні безпосереднього контакту. Таким чином наявність в'язких сил призводить до згасання плоскої звукової хвилі під час поширення вздовж звуководу. Сила в'язкості f діє в перпендикулярному до стінок звуководу напрямку [4] і характеризується коефіцієнтом в'язкості μ :

$$f = -\mu \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r}, \quad (1)$$

де $\dot{\xi}$ — коливальна швидкість частинок середовища, ξ — зміщення частинок вздовж осі z (крапка над ξ тут і далі означає похідну від зміщення за часом), r — радіальна координата.

Рівняння руху газового середовища в міжтрубному просторі з урахуванням сил в'язкості для хвилеводу циліндричної форми отримаємо з умови рівноваги елемента, обмеженого площинами r та $r + dr$, а також z та $z + dz$ у циліндричній системі координат (рис. 2). Об'єм елемента $dV = 2\pi r dr dz$, площа бокових граней — $2\pi r dr$, площа внутрішньої поверхні — $2\pi r dz$, площа зовнішньої поверхні — $2\pi(r + dr)dz$. Сила, що збуджує коливання елемента dV , визначається різницею тисків при z та $z + dz$:

$$p 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) 2\pi r dr = - \frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dr dz. \quad (2)$$

Їй протидіє інерційна реакція $\rho_0 dV \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = \rho_0 2\pi r dr dz \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t}$. Окрім того, елемент знаходиться під дією двох в'язких сил: зсередини — прискорюючої, яку згідно з (1) можна записати у вигляді $2\pi r f_r dz$, а ззовні — гальмівної $2\pi(r + dr)f_{r+dr} dz$. Враховуючи це, умову рівноваги елемента dV запишемо таким чином:

$$- \frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dr dz + 2\pi r f_r dz = \rho_0 2\pi r dr dz \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} + 2\pi(r + dr) f_{r+dr} dz.$$

Оскільки $(r + dr)f_{r+dr} - rf_r = -\mu d \left(r \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right) = -\mu r \left(\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right) dr$, то

скоротивши всі члени на $2\pi r dz dr$, отримаємо рівняння

$$- \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right).$$

Для гармонічного збудження воно набуває вигляду [4]:

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} - \dot{\gamma}_r^2 \dot{\xi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3)$$

Тут $\dot{\gamma}_r = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \rho_0}{\mu}} = \gamma_r \sqrt{j} = \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{2\mu}} (1 + j)$ — стала розповсюдження;

ω — кругова частота; ρ_0 — густина середовища; j — уявна одиниця. Крапка над γ тут і далі означає комплексне число. Для моделі типу «труба в трубі» нульова швидкість частинок середовища безпосередньо на стінках міжтрубного простору дає такі граничні умови:

$$\dot{\xi}(r) \Big|_{r=a} = \dot{\xi}(r) \Big|_{r=b} = 0, \quad (4)$$

де a — радіус внутрішньої труби, b — радіус обсадної труби. Таким чином отримуємо крайову задачу для функцій Бесселя 0-го порядку:

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} - \dot{\gamma}_r^2 \dot{\xi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \dot{\xi}(r) \Big|_{r=a} = \dot{\xi}(r) \Big|_{r=b} = 0. \quad (5)$$

Розв'язок отриманого рівняння шукатимемо так: $\dot{\xi}(r) = C_1 I_0(\dot{\gamma}_r r) + C_2 K_0(\dot{\gamma}_r r) + C_3$, де $I_0(\dot{\gamma}_r r)$ та $K_0(\dot{\gamma}_r r)$ — модифіковані функції Бесселя

1-го та 2-го роду [5]; C_1 та C_2 — константи; C_3 — частковий розв’язок не-

однорідного рівняння $C_3 = \frac{j \frac{\partial p}{\partial z}}{\omega \rho_0}$; $\dot{\gamma}_r^2 = \frac{j \omega \rho_0}{\mu}$ — стала розповсюдження

в’язких хвиль у радіальному напрямку. Константи C_1 та C_2 знайдемо розв’язавши систему рівнянь, яку отримаємо з граничних умов (4):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(\dot{\gamma}_r, a) = 0, \\ \dot{\xi}(\dot{\gamma}_r, b) = 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} C_1 I_0(\dot{\gamma}_r, a) + C_2 K_0(\dot{\gamma}_r, a) + C_3 = 0, \\ C_1 I_0(\dot{\gamma}_r, b) + C_2 K_0(\dot{\gamma}_r, b) + C_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язок її має такий вигляд:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_3 (K_0(\dot{\gamma}_r, a) - K_0(\dot{\gamma}_r, b))}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)}; \\ C_2 &= \frac{C_3 (I_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, a))}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далі зробимо такі позначення:

$$\begin{aligned} C &= C_3, \quad C_1 = AC_3 = AC, \quad \text{де } A = \frac{K_0(\dot{\gamma}_r, a) - K_0(\dot{\gamma}_r, b)}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)}; \\ C_2 &= BC_3 = BC, \quad \text{де } B = \frac{I_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, a)}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)}. \end{aligned}$$

Отже, радіальний розподіл швидкості коливань частинок середовища в міжтрубному просторі буде:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(r) &= AC I_0(\dot{\gamma}_r, r) + BC K_0(\dot{\gamma}_r, r) + C = C(A I_0(\dot{\gamma}_r, r) + B K_0(\dot{\gamma}_r, r) + 1) = \\ &= C \left(\frac{K_0(\dot{\gamma}_r, a) - K_0(\dot{\gamma}_r, b)}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)} I_0(\dot{\gamma}_r, r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, a)}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)} K_0(\dot{\gamma}_r, r) + 1 \right) = \\ &= \frac{j \frac{\partial p}{\partial z}}{\omega \rho_0} \left(\frac{K_0(\dot{\gamma}_r, a) - K_0(\dot{\gamma}_r, b)}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)} I_0(\dot{\gamma}_r, r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, a)}{I_0(\dot{\gamma}_r, a) K_0(\dot{\gamma}_r, b) - I_0(\dot{\gamma}_r, b) K_0(\dot{\gamma}_r, a)} K_0(\dot{\gamma}_r, r) + 1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Тепер визначимо питомий акустичний опір міжтрубного простору $\dot{z}_{\text{пит}}$ (крапка над $z_{\text{пит}}$ тут і далі означатиме комплексне число). Згідно з [4] введемо його таким чином:

$$\dot{z}_{\text{пит}} = - \frac{\partial p}{\partial z} / \langle \dot{\xi} \rangle, \quad (8)$$

де $\langle \dot{\xi} \rangle$ — середня по перерізу швидкість коливань частинок середовища. Знайдемо її:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\xi} \rangle &= \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \dot{\xi}(r) 2\pi r dr = \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b C(AI_0(\dot{\gamma}_r r) + BK_0(\dot{\gamma}_r r) + 1) 2\pi r dr = \\ &= \frac{2\pi C}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b (AI_0(\dot{\gamma}_r r) + BK_0(\dot{\gamma}_r r) + 1) r dr = \\ &= \frac{2C}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b (AI_0(\dot{\gamma}_r r) + BK_0(\dot{\gamma}_r r) + 1) (\dot{\gamma}_r r) d(\dot{\gamma}_r r). \end{aligned}$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для модифікованих функцій Бесселя [5] $\left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^k \{y^\nu \Psi_\nu(y)\} = y^{\nu-k} \Psi_{\nu-k}(y)$, де через $\Psi_\nu(y)$ позначено $I_\nu(y)$, або $e^{\nu \cdot \pi \cdot j} K_\nu(y)$, при $k=1$, $\nu=1$ співвідношення запишуться як: $d(y \cdot I_1(y)) = (y \cdot I_0(y)) dy$, $d(y \cdot e^{\pi \cdot j} K_1(y)) = (y K_0(y)) dy$. Отже, для середньої швидкості отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\xi} \rangle &= \frac{2C}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b (A \cdot I_0(\dot{\gamma}_r r) + B \cdot K_0(\dot{\gamma}_r r) + 1) (\dot{\gamma}_r r) d(\dot{\gamma}_r r) = \\ &= \frac{2C}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} \left(A(\dot{\gamma}_r r) I_1(\dot{\gamma}_r r) + B \cdot (\dot{\gamma}_r r) \cdot e^{\pi \cdot j} K_1(\dot{\gamma}_r r) + \frac{(\dot{\gamma}_r r)^2}{2} \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{j \frac{\partial p}{\partial z}}{\omega \rho_0} \left(\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} (A((\dot{\gamma}_r b) I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) I_1(\dot{\gamma}_r a)) + B e^{\pi \cdot j} ((\dot{\gamma}_r b) K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) K_1(\dot{\gamma}_r a))) + 1 \right) = \\ &= \frac{j \frac{\partial p}{\partial z}}{\omega \rho_0} \left(\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} (A((\dot{\gamma}_r b) I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) I_1(\dot{\gamma}_r a)) - B((\dot{\gamma}_r b) K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) K_1(\dot{\gamma}_r a))) + 1 \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Тоді питомий акустичний опір хвилеводу типу «труба в трубі» буде

$$\begin{aligned} z_{\text{пит}} &= \frac{-\frac{\partial p}{\partial z}}{\langle \dot{\xi} \rangle} = \frac{-\frac{\partial p}{\partial z}}{\frac{j \frac{\partial p}{\partial z}}{\omega \rho_0} \left(\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} (A((\dot{\gamma}_r b) I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) I_1(\dot{\gamma}_r a)) - B((\dot{\gamma}_r b) K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) K_1(\dot{\gamma}_r a))) + 1 \right)} = \\ &= \frac{\omega \rho_0}{\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2 (b^2 - a^2)} (A((\dot{\gamma}_r b) I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) I_1(\dot{\gamma}_r a)) - B((\dot{\gamma}_r b) K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a) K_1(\dot{\gamma}_r a))) + 1} = \end{aligned}$$

$$= r_{\text{num}} + j\omega\rho_{\text{эф}}, \quad (10)$$

де: r_{num} — активний питомий опір; $\rho_{\text{эф}}$ — ефективна густина. Оскільки аргументи функцій Бесселя комплексні, то і самі значення цих функцій будуть комплексними, а отже, активний питомий опір та ефективну густину для нашого звукопроводу отримаємо у вигляді:

$$r_{\text{num}} = \text{Re } \dot{z}_{\text{num}} =$$

$$= \text{Re} \left[\frac{j\omega\rho_0}{\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2(b^2 - a^2)} (A((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)) - B((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a))) + 1} \right],$$

$$\rho_{\text{эф}} = \frac{1}{\omega} \text{Im } \dot{z}_{\text{num}} = \frac{1}{\omega} \text{Im} \left[\frac{j\omega\rho_0}{\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2(b^2 - a^2)} (A((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)) - B((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)))} \right].$$

В області значень $\gamma_r a > 10$, тобто для *широких* труб [4], якими є нафтові свердловини, використовуємо асимптотичні наближення для модифікованих функцій Бесселя [5]: $I_\nu(y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}$, $K_\nu(y) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}$. Враховуючи їх, після перетворень у знаменнику (10) отримаємо:

$$A((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)) + B((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b) - (\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)) =$$

$$= -\dot{\gamma}_r(b+a) \text{cth}(\dot{\gamma}_r(b-a)) + \frac{2 \cdot \dot{\gamma}_r \sqrt{a \cdot b}}{\text{sh}(\dot{\gamma}_r(b-a))}.$$

Якщо $\gamma_r(b-a) > 10$, то $-\dot{\gamma}_r(b+a) \text{cth}(\dot{\gamma}_r(b-a)) + \frac{2\dot{\gamma}_r \sqrt{ab}}{\text{sh}(\dot{\gamma}_r(b-a))} \approx -\dot{\gamma}_r(b+a)$,

тоді формула (8) набуде вигляду

$$\dot{z}_{\text{пит}} = \frac{j\omega\rho_0}{\left(\frac{2}{\dot{\gamma}_r^2(b^2 - a^2)} \cdot (-\dot{\gamma}_r(b+a)) + 1 \right)} = \frac{j\omega\rho_0}{\left(-\frac{2}{\dot{\gamma}_r(b-a)} + 1 \right)} \approx$$

$$\approx j\omega\rho_0\left(1 + \frac{2}{\dot{\gamma}_r(b-a)}\right). \quad (11)$$

Далі, враховуючи, що $\dot{\gamma}_r = \sqrt{\frac{j\omega\rho_0}{\mu}}$, отримуємо

$$\dot{z}_{\text{num}} = j\omega\rho_0\left(1 + \frac{2}{(b-a)\sqrt{\frac{j\omega\rho_0}{\mu}}}\right) = \frac{\sqrt{2\omega\mu\rho_0}}{(b-a)} + j\omega\left(\rho_0 + \frac{\sqrt{2\omega\mu\rho_0}}{\omega(b-a)}\right), \quad (12)$$

тобто

$$r_{\text{num}} = \frac{\sqrt{2\omega\mu\rho_0}}{(b-a)}, \text{ а } \rho_{\text{еф}} = \rho_0 + \frac{\sqrt{2\omega\mu\rho_0}}{\omega(b-a)}. \quad (13)$$

Знайдемо згасання, обумовлене пограничним тертям. У відповідності з (3) рівняння руху для звуководу матиме вигляд:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \dot{z}_{\text{num}}\dot{\xi} = r_{\text{num}}\dot{\xi} + j\omega\rho_{\text{еф}}\dot{\xi}, \quad (14)$$

де $\dot{\xi}$ — усереднена по перерізу хвилеводу швидкість коливань середовища.

Для випадку синусоїдальних коливань, замінивши $j\omega$ на $\frac{\partial}{\partial t}$, отримаємо

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = r_{\text{num}}\dot{\xi} + \rho_{\text{еф}}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t}. \quad (15)$$

Для плоскої хвилі рівняння неперервності має вигляд [4]:

$$-\frac{\partial p}{\partial e} = E\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z}. \quad (16)$$

Диференціюючи (15) по t , а (16) по z та прирівнявши праві частини отриманих співвідношень, маємо:

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = r_{\text{num}}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} + \rho_{\text{еф}}\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial t^2}; \quad -\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = E\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2}; \quad \rho_{\text{еф}}\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial t^2} + r_{\text{num}}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = E\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2},$$

або після ділення всіх членів на ρ_0 :

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial t^2} + \frac{r_{\text{num}}}{\rho_{\text{еф}}}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = c_0'^2\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2}, \text{ де } c_0' = \sqrt{E/\rho_{\text{еф}}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_{\text{еф}}}} = c_0\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\text{еф}}}}. \quad (17)$$

Отримане рівняння описує поширення хвилі у звукопроводі з урахуванням пограничного тертя. Для гармонічного випадку маємо: $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ та

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (j\omega)^2, \text{ тоді}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0'^2}\left(-\omega^2 \dot{\xi} + \frac{r_{\text{num}}}{\rho_{\text{еф}}}j\omega \dot{\xi}\right) = \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2} - \left(-\frac{\omega^2}{c_0'^2}\left(1 - j\frac{r_{\text{num}}}{\omega\rho_{\text{еф}}}\right)\right)\dot{\xi} = 0$$

або

$$\frac{d^2 \dot{\xi}}{dz^2} - \dot{\gamma}^2 \dot{\xi} = 0. \quad (18)$$

Тут $\dot{\gamma}$ — стала розповсюдження, що має вигляд:

$$\dot{\gamma} = j \frac{\omega}{c_0'} \sqrt{1 - j \frac{r_{\text{num}}}{\omega \rho_{\text{еф}}}} = j \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\rho_{\text{еф}}}{\rho_0}} \sqrt{1 - j \frac{r_{\text{num}}}{\omega \rho_{\text{еф}}}} = \alpha_m + jk, \quad (19)$$

де α_m та k — дійсна та уявна частини сталої розповсюдження $\dot{\gamma}$, які називаються відповідно коефіцієнтом згасання та хвильовим числом. Обмежимося хвилями прямого напрямку та запишемо розв'язок рівняння (18) у вигляді:

$$\dot{\xi} = \text{const } e^{-\dot{\gamma}z} = \text{const } e^{-\alpha_m z} e^{-jkz}. \quad (20)$$

Співвідношення (20) описує згасаючу звукову хвилю, ослаблення якої по осі z визначається членом $e^{-\alpha_m z}$.

При $\gamma_r(b-a) = \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{\mu}}(b-a) \geq 10$ опір r_{num} виражається формулою (13), так що $r_{\text{num}} \ll \omega \rho_{\text{еф}}$, $\rho_{\text{еф}} \approx \rho_0$, $c_0' \approx c_0$ із (19) отримуємо:

$$\dot{\gamma} = \frac{r_{\text{num}}}{2\rho_0 c_0} + j \frac{\omega}{c_0}; \quad \alpha_m = \frac{r_{\text{num}}}{2\rho_0 c_0}; \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \quad (21)$$

З (19) та (21) отримуємо вираз для згасання, обумовленого пограничним тертям:

$$\alpha_m = \frac{1}{2\rho_0 c_0} \frac{\sqrt{2\omega \rho_0 \mu}}{b-a} = \frac{1}{c_0(b-a)} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho_0}}. \quad (22)$$

Значимо, що коефіцієнт згасання звуку в одинокій трубі згідно з [4] для $\gamma_r b > 10$ розраховується за формулою:

$$\alpha_m = \frac{r_{\text{num}}}{2\rho_0 c_0} = \frac{\sqrt{2\omega \rho_0 \mu}/b}{2\rho_0 c_0} = \frac{1}{bc_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho_0}}, \quad (23)$$

де b — внутрішній радіус труби. Умова $\gamma_r b > 10$ відповідає «широкій трубі», коли радіус дії в'язких сил біля її поверхні значно менший за радіус самої труби.

На рис. 3 наведено графіки згасання звуку в розглянутій двотрубній моделі хвилевода і в одинокій трубі, як було отримано теоретичним та експериментальними шляхами. Теоретичні залежності 1 і 3 обчислювались згідно з формулами (22) і (23), а експериментальні 2 і 4 — отримувались на фізичній моделі свердловини, за яку використовувались дві металеві труби діаметром 70 та 40 мм. Вимірювання відбувалося в режимі ехолокації на імпульсних сигналах у діапазоні частот 200–2000 Гц, а згасання оцінювалося за амплітудними значеннями серії отримуваних ехо-сигналів від протилежного кінця труби, закритого жорсткою кришкою. Як видно з рис. 3 фактичне згасання звуку в одинокій трубі майже в три рази перевищує його

теоретичне значення, визначене в [4]. Для хвилеводу типу «труба в трубі» розбіжності між теоретичними та експериментальними даними ще більші (до 3,5 рази). Це, на нашу думку, обумовлено наявною шорсткістю стінок реального хвилеводу, яка не врахована у наведених вище співвідношеннях та неідеальністю властивостей хвилеводу, як жорсткої конструкції, а також похибками експерименту.

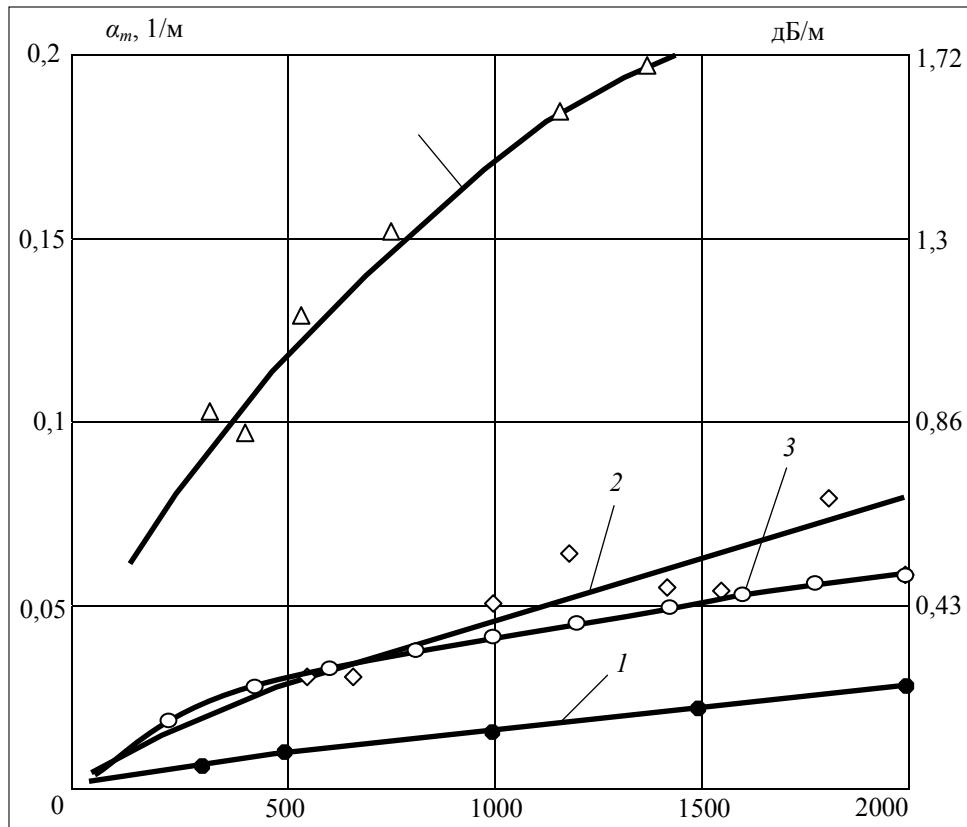


Рис. 3. Згасання звуку в трубному хвилеводі, обумовлене пограничним тертям: 1 — одинока труба $2b=70$ мм — теоретична крива; 2 — одинока труба $2b=70$ мм — крива отримана експериментальним шляхом; 3–4 — хвилевід типу «труба в трубі», $2b=70$ мм, $2a=40$ мм; 3 — теоретична крива; 4 — крива отримана експериментальним шляхом

ВИСНОВКИ

Як бачимо фактичне згасання звуку у хвилеводі типу «труба в трубі» в 3–3,5 рази більше, ніж в одинокій трубі. Зазначимо, що цей вид згасання для свердловинної ехолокації є головним і, зокрема, на частоті 250 Гц для вибраних в експерименті діаметрів труб складає значну величину — приблизно 0,7 дБ/м або 70 дБ на кожні 100 м. Для порівняння, згасання, яке зумовлене поглинанням, на тій же частоті згідно з [6] не перевищує 0,11 дБ на 100 м. Тому в нафтових свердловинах, глибини яких сягають кількох кілометрів, ехолокація рівня рідини ведеться в інфранизькочастотному діапазоні

(5–10 Гц), де згасання значно менше [1]. Отримані результати є важливим вихідним матеріалом для розрахунку фактичних можливостей акустичного методу ехолокації рівня рідини як у нафтових свердловинах, так і у свердловинах інших типів — газових, артезіанських, спостережних.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Данилов В.Я., Науменко І.Я., Кизима В.І.* Проблеми акустичного зондування свердловин та апаратний комплекс для їхнього вирішення // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 1. — С. 50–62.
2. *Науменко І.Я., Кизима В.І., Бульбас В.Н., Бершадська В.В.* Потенційна точність вимірювання рівня рідини в свердловинах акустичним методом із використанням з'єднувальних муфт // Нафтова і газова промисловість. — 2008. — № 4. — С. 37–39.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика. — М.: Наука, 1973. — 496 с.
4. *Вахитов Я.Ш.* Теоретические основы электроакустики и электроакустическая аппаратура. — М.: Искусство, 1982. — 415 с.
5. *Справочник по специальным функциям* / Под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
6. *Горбатов А.А., Рудашевский Г.Е.* Акустические методы измерения расстояний и управления. — М.: Энергоиздат, 1981. — 208 с.

Надійшла 08.12.2009

УДК 517.94

**ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНОГО
ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

Ю.Є. БОХОНОВ

Запропоновано підхід до знаходження періодичних розв'язків квазілінійного диференціального рівняння другого порядку, який базується на побудові функції Гріна для диференціального оператора, що визначений на функціях, які задовольняють періодичним крайовим умовам. Наведено необхідні та достатні умови існування періодичних розв'язків рівняння.

ВСТУП

Для знаходження періодичних розв'язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку і взагалі систем диференціальних рівнянь широко застосовують чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка, який викладено в роботах [1]–[4]. При цьому рівняння другого порядку зводилось до системи рівнянь першого порядку. Автором цієї статті було розроблено власний підхід, який не потребує зведення нелінійного рівняння другого порядку до системи першого порядку [5]. У цій роботі зазначений метод застосовується до квазілінійних рівнянь. Будується функція Гріна періодичної крайової задачі, яка в цьому випадку має більш зручний вигляд, ніж у [5]. Наводяться оцінки для констант Ліпшиця та необхідні і достатні умови для початкового наближення в методі послідовних наближень, що забезпечують існування періодичного розв'язку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай функція $f(t, x, y)$ неперервна на $D = (-\infty, \infty) \times [-a, a] \times [-b, b]$, періодична по t з періодом T . Позначимо

$$M = \max_D |f(t, x, y)|. \quad (1)$$

Від функції $f(t, x, y)$ будемо вимагати, щоб вона по x, y задовольняла умові Ліпшиця

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq K_0 |x_1 - x_2| + K_1 |y_1 - y_2|. \quad (2)$$

Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t, x, \dot{x}), \quad (3)$$

де $\frac{2\pi}{\omega T} \notin Z$ еквівалентне розв'язанню крайової задачі

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \quad (4)$$

для рівняння (3).

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ГРІНА

Розглянемо диференціальний оператор $(Lx)(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t)$ у гільбертовому просторі $H = L_2(0, T)$, область визначення якого — це функції, що мають абсолютно неперервну першу похідну та задовольняють крайовим умовам (4). Як відомо, такий оператор є самоспряженим. Задача знаходження періодичних розв'язків зводиться до задачі обернення оператора L . Легко бачити, що цей оператор має обернений, оскільки $\lambda = 0$ не є його власним числом.

Нехай x — розв'язок задачі (3)–(4). Інтегруючи обидві частини (3), враховуючи умови (4), будемо мати

$$\omega^2 \int_0^T x(\tau) d\tau \int_0^T f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau$$

або

$$\int_0^T (f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) - \omega^2 x(\tau)) d\tau = 0. \quad (5)$$

Побудуємо оператор, обернений до L у просторі $H = L_2(0, T)$.

Для побудови вказаного оберненого оператора будемо використовувати модифікацію методики з [6].

Візьмемо фундаментальну систему $x_1(t) \equiv \cos \omega t$, $x_2(t) \equiv \frac{\sin \omega t}{\omega}$ розв'язків рівняння $\ddot{x} = 0$, які задовольняють умові $x_i^{(j-1)}(0) = \delta_{i,j}$ ($i=1,2; j=1,2$), де $\delta_{i,j}$ — функція Кронекера. Нехай $h \in H$, яка задовольняє умові (5). Розглянувши рівняння $(Lx)(t) = h(t)$, знайдемо обернений оператор L^{-1} . Тоді функція $x(t) = (L^{-1}h)(t)$ буде задовольняти цьому рівнянню та крайовим умовам (4). Покажемо, що оператор L^{-1} інтегральний і знайдемо його ядро $G(t, \tau)$ — функцію Гріна цього оператора. Застосовуючи метод варіації довільних сталих, після стандартних дій знаходимо: $x(t) = \int_0^T G(t, \tau) h(\tau) d\tau$, де функція Гріна:

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\omega} \begin{cases} \sin \omega t \cos \omega \tau, & 0 \leq \tau \leq t \leq T; \\ \cos \omega t \sin \omega \tau, & 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{cases} \quad (6)$$

Звідси знаходимо: $x'(t) = \int_0^T G'_t(t, \tau) h(\tau) d\tau$, де

$$G'_t(t, \tau) = \begin{cases} \cos \omega t \cos \omega \tau, & 0 \leq \tau \leq t \leq T; \\ -\sin \omega t \sin \omega \tau, & 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{cases} \quad (7)$$

Отже, розв'язок крайової задачі для рівняння (3) та його похідну можна подати у вигляді:

$$x(t) = \int_0^T G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \quad (8)$$

$$\dot{x}(t) = \int_0^T G'_t(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Система (8)–(9) розв'язується методом послідовних наближень. Якщо процес збігається, одержуємо розв'язок $x = \varphi(t, x_0)$, де x_0 — початкове наближення, який при підстановці в (8)–(9) перетворює його в тотожність. Для того, щоб цей розв'язок був також розв'язком (3), очевидно, що необхідно і разом із виконанням умов (4) достатньо, щоб виконувалась умова

$$\int_0^T (f(\xi, \varphi(\xi, x_0), \dot{\varphi}(\xi, x_0)) - \omega^2 \varphi(\xi, x_0)) d\xi = 0, \quad (10)$$

тобто, щоб число x_0 було коренем цього рівняння.

Перепишемо систему (8)–(9) згідно з (6)–(7) та знайдемо умову збіжності ітераційного процесу під час її розв'язання:

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \left(\int_0^t \sin \omega t \cos \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau + \int_t^T \cos \omega t \sin \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right), \quad (11)$$

$$x'(t) = \int_0^t \cos \omega t \cos \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau - \int_t^T \sin \omega t \sin \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau. \quad (12)$$

Введемо в просторі \mathbf{R}^2 «псевдонорму»: $|(x_1, x_2)| = (|x_1|, |x_2|)$, а також для вектор-функції $(x_1(t), x_2(t))$: $\|(x_1, x_2)\| = (\|x_1\|, \|x_2\|) = \left(\max_{t \in [0, T]} |x_1(t)|, \max_{t \in [0, T]} |x_2(t)| \right)$. Простір із такою «псевдонормою» буде частково впорядкованим, і для векторів (x, y) , (ξ, η) за виконання умов $x \leq \xi$, $y \leq \eta$ будемо використовувати позначення $(x, y) \leq (\xi, \eta)$.

Розглянемо оператор S , що діє в просторі вектор-функцій зі значеннями в \mathbf{R}^2 за формулою (нас цікавитиме його дія на вектори вигляду $\text{col}(x(t), \dot{x}(t))$):

$$S \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \left(\int_0^t \sin \omega \tau \cos \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau + \int_t^T \cos \omega \tau \sin \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right) \\ \int_0^t \cos \omega \tau \cos \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau - \int_t^T \sin \omega \tau \sin \omega \tau f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Враховуючи (2), (3), дослідимо, за яких умов цей оператор буде стискаючим. Тоді завдяки (3) для двох вектор-функцій $\text{col}(x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}(t))$, $\text{col}(x^{(2)}(t), \dot{x}^{(2)}(t))$ маємо:

$$\begin{aligned} & \left| \left(S(x^1(t) - x^2(t)) \right)_1 \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega} \left(\left| \sin \omega t \int_0^t \cos \omega \tau d\tau + \left| \cos \omega t \int_t^T \sin \omega \tau d\tau \right| \right) \left(K_0 \|x^1 - x^2\| + K_1 \|\dot{x}^1 - \dot{x}^2\| \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega} (t|\sin \omega t| + (T-t)|\cos \omega t|) \left(K_0 \|x^1 - x^2\| + K_1 \|\dot{x}^1 - \dot{x}^2\| \right) \leq \\ & \leq \frac{T}{\omega} \left(K_0 \|x^1 - x^2\| + K_1 \|\dot{x}^1 - \dot{x}^2\| \right). \end{aligned}$$

Аналогічно $\left| \left(S(x^1(t) - x^2(t)) \right)_2 \right| \leq T \left(K_0 \|x^1 - x^2\| + K_1 \|\dot{x}^1 - \dot{x}^2\| \right) T$.

Отже,

$$\left| S \begin{pmatrix} \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \\ \|\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(2)}\| \end{pmatrix} \right| \leq T \begin{pmatrix} K_0 & K_1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \\ \|\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(2)}\| \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Позначимо через K матрицю в правій частині нерівності (14). Її норма дорівнює квадратному кореню з найбільшого власного числа матриці $K * K$ (менше дорівнює нулю). Після нескладних перетворень отримаємо: $\|K\| = \frac{1}{\omega} \sqrt{(1 + \omega_2)(K_0^2 + K_1^2)}$. Введемо позначення: $q = T\|K\|$. Тоді S буде стискаючим оператором, якщо $q < 1$, або при умові, яким мають задовольняти константи Ліпшиця

$$K_0^2 + K_1^2 < \frac{\omega^2}{(1 + \omega^2)T^2}. \quad (15)$$

Аналогічно доводиться, що константа M з (1) має задовольняти вимозі:

$$M \leq \frac{1}{T} \min(a\omega, b). \quad (16)$$

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема 1. Нехай функція $f(t, x, y)$ неперервна на $(-\infty, \infty) \times [-a, a] \times [-b, b]$, періодична по t із періодом T , задовольняє умовам (1) і (2), причому константи Ліпшиця та стала M з (1) задовольняють умовам (15)–(16). Тоді для існування періодичного з періодом T розв'язку $x = \varphi(t, x_0)$ рівняння (3) необхідно і достатньо існування такого значення x_0 , яке задовольняє рівнянню (10). При цьому $\varphi(t, x_0)$ знаходиться методом послідовних наближень.

Використовуючи техніку доведення теореми Банаха про стискаючі відображення, одержимо оцінку похибки між розв'язком задачі (3)–(4) і її наближенням. Для цього необхідно тільки помітити, що $\|x_1(t, x_0) - x_0\| \leq MT$.

Теорема 2. Похибка між розв'язком задачі (3)–(4) і її n -м наближенням визначається з умови:

$$\|\varphi(t, x_0) - x_n(t, x_0)\| \leq \frac{MT}{1-q} q^n. \quad (17)$$

ВИСНОВКИ

Зведення задачі про періодичні розв'язки квазілінійного диференціального рівняння до крайової задачі з умовами періодичного типу є ефективним прийомом, що дає змогу прямого дослідження цієї проблеми. Методику може бути поширено на більш загальний клас нелінійних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самійленко А.М. О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. — 1967. — 3, № 11. — С. 1903–1912.
2. Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. Теория численно-аналитического метода, достижения и новые направления развития. II // Український математичний журнал. — 1998. — 50, № 2. — С. 225–243.
3. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. Чорный В.З. Исследование периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1992. — 10 с.
5. Бохонов Ю.С. Про один підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку // Нелінійні коливання. — 2000. — 3, № 3. — С. 308–314.
6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

Надійшла 25.05.2010

УДК: 378.14

**СОТРУДНИЧЕСТВО АКАДЕМИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
КОМПЕТЕНЦИИ SAP СПБГПУ И ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ СТРАН СНГ В РАМКАХ ПРОГРАММЫ
«УНИВЕРСИТЕТСКИЙ АЛЬЯНС SAP»**

Д.Г. АРСЕНЬЕВ, А.Н. АМБРАЖЕЙ, Н.М. ГОЛОВИН, В.А. ТАРАТУХИН

Рассмотрены основные задачи Академического центра компетенции SAP в СПбГПУ — главного университетского координационного центра программы «Университетский Альянс SAP» в СНГ — включая создание учебных курсов, организацию подготовки преподавателей, поддержку системы профессиональной сертификации и построение сотрудничества с высшим учебным заведениям России, Украины и Республики Беларусь.

ВВЕДЕНИЕ

Компания SAP, являясь ведущим в мире поставщиком программных решений для управления бизнесом, заинтересована в развитии на уровне высшего образования системы подготовки квалифицированных специалистов, обладающих знаниями о продуктах SAP. При этом в сфере интересов лежит получение студентами знаний как в области внедрения и разработки систем SAP, так и в области использования решений. При самостоятельной организации преподавания SAP учебные заведения сталкиваются с массой вопросов связанных со сложностью и дороговизной программного обеспечения, отсутствием квалифицированных кадров для его поддержания, недостатком русскоязычных учебных материалов и сложностью подготовки преподавателей. Поэтому со стороны компании SAP было логичным создание инструмента сотрудничества с учебными заведениями, что дало возможность выпускникам вузов начать осваивать программные продукты SAP со студенческой скамьи, а университетам существенно упростить запуск соответствующих учебных программ.

ПРОГРАММА «УНИВЕРСИТЕТСКИЙ АЛЬЯНС SAP»

Проект по сотрудничеству компании с высшими учебными заведениями «Университетский Альянс SAP» развивается с 1988 года. В программе участвуют более 700 университетов и учебных заведений из 36 стран со всего

мира. Каждый год около 150 000 студентов принимают участие в курсах по решениям SAP. С 2004 года программа развивается в России и странах СНГ. Сегодня более 40 вузов России и стран СНГ входят в «Университетский Альянс SAP».

В рамках этой программы компания SAP предоставляет университетам доступ ко всей линейке своих программных продуктов: от SAP ERP ECC до полного пакета SAP Business Suite и промышленных решений на платформе SAP. Обе стороны — вузы и компания — заинтересованы в таком сотрудничестве, понимая важность инвестиций в кадровый потенциал (человеческий ресурс). Реализация университетской программы уже сейчас дает возможность студентам получить в ходе базового обучения знания в области решений SAP для управления бизнесом, что является серьезным повышением принятого уровня подготовки кадров. Специалисты такого профиля сегодня высоко востребованный человеческий ресурс как в странах СНГ, так и во всем мире.

Чтобы повысить эффективность взаимодействия с вузами для каждого региона (ЕМЕА, Америка, APJ) были созданы Центры компетенции. Являясь университетской структурой, не зависящей от компании SAP, такие центры получили название «Университетские центры компетенций» (УЦК). Они решают координационные, технические и учебно-методические задачи и обеспечивают доступ к программным продуктам SAP (хостинг) в рамках своего региона ответственности. Сейчас существуют два Университетских центра компетенции в Германии, два в США и один в Австралии. Наряду с этим в регионе ЕМЕА существуют три Академических центра компетенции (АЦК): в Австрии, Швейцарии и России (для всего СНГ). Роль последнего играет АЦК SAP Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. В его задачи входит организационно-правовое и учебно-методическое обеспечение использования местными университетами решений SAP в своих образовательных программах [2].

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ SAP СИСТЕМ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Наиболее оптимальный с технической и экономической точек зрения вариант предоставления вузам России и стран СНГ возможности использовать программные решения SAP в учебном процессе — это удаленный доступ к ПО SAP через каналы Интернет (хостинг). Подобная практика развита за рубежом, где роль хостинг-центров решений SAP играют Университетские центры компетенции. При таком подходе все бизнес приложения находятся и обслуживаются в едином центре, а конечные потребители получают возможность использовать их в целях обучения на основе концепции разделения потока данных или как эксклюзивные системы с возможностью разработки своих приложений. Под «концепцией разделения потока данных» понимается возможность использования несколькими организациями (университетами) одной системы SAP с общим набором глобальных параметров и с разделенными индивидуальными данными (мандантами). В результате эксплуатационные расходы ВУЗа снижаются до стоимости обслуживания компьютерного класса, расходов на Интернет и оплаты услуг хостинг-центра. Количество рабочих мест для студентов ВУЗа практически не огра-

ничено. Для региона СНГ хостинг решений осуществляет университетский центр компетенции в Магдебурге, который предоставляет доступ к инновационным решениям SAP для управления бизнесом более чем 250 учебным заведениям Германии, Скандинавии, Африки и стран СНГ.

Благодаря индивидуальному подходу и широкому спектру предоставляемых хостинг-центром решений, учебные заведения могут выбрать необходимые им системы — от бюджетных вариантов учебных систем с готовыми данными до отдельных систем с правами на разработку или предустановленным отраслевым решением. На данный момент в составе доступных для ВУЗов решений имеются различные варианты стандартной системы SAP ERP, включая системы с предустановленным набором данных учебной корпорации IDES, SAP Business Information Warehouse и Strategic Enterprise Management (IDES-версия), SCM и CRM решения, три отраслевых решения (для банков, розничной торговле и здравоохранения), инфраструктура разработки SAP NetWeaver и SAP BusinessObjects.

Выбор конкретного продукта зависит от целей, которые ставит перед собой учебное заведение в процессе обучения решениям SAP и во многом определяет структуру и уровень преподавания.

Совокупность всех задач АЦК SAP СПбГПУ можно разделить на несколько основных направлений:

- Обеспечение университетов России и стран СНГ возможностью использовать современные ERP-системы в учебном процессе и НИР. АЦК является базовой структурой для решения организационно-правовых вопросов взаимодействия вузов СНГ и Университетских центров компетенции SAP (хостинг-центров).
- Координация деятельности вузов по преподаванию корпоративных информационных систем (создание модульных учебных курсов и практических пособий, организация семинаров, курсов повышения квалификации, поддержка системы профессиональной сертификации и т.д.).
- Организация и проведение для студентов, аспирантов и преподавателей сертификационного курса с получением профессиональной квалификации.
- Создание студенческих групп для выполнения НИР совместно с партнерами и клиентами компании SAP.
- Обучение студентов и преподавателей решениям SAP охватывающим все области управления современным предприятием от стратегического и финансового менеджмента до управления производственными и технологическими процессами.

Центр прилагает значительные усилия для быстрого старта учебных программ в университетах, вступающих в Альянс. Для преподавателей проводятся бесплатные тренинги, в ходе которых, наряду с практическими навыками, они получают материалы, готовые к применению в учебном процессе. Это вводный курс объемом около 36 часов, охватывающий основные бизнес процессы, реализуемые в SAP ERP. Также организованы курсы повышения квалификации для более глубокого освоения предметных областей.

Успешно реализуется программа по созданию набора модульных курсов с использованием SAP ERP на основе программы Университетского

Альянса SAP «Global Curriculum». При разработке курсов теоретической части уделяется значительное внимание, не меньшее чем практическому освоению системы, которое может быть в значительной мере отдано на самостоятельное изучение. Разрабатываемые АЦК курсы всегда увязываются с поставляемыми хостинг-центром системами, таким образом, преподаватели избавлены от сложностей связанных с настройкой системы и могут сосредоточиться непосредственно на решаемых задачах.

ОРГАНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ СЕРТИФИКАЦИИ

Отдельной задачей стоит подтверждение полученных студентами знаний. Традиционно данный вопрос решается с помощью системы профессиональной сертификации, когда знания слушателя подтверждены независимым образом. Наилучшим вариантом является схема, при которой сертификацию осуществляет непосредственно компания-производитель IT-решения, поскольку в этом случае достигается максимальная заинтересованность в поддержании высокого уровня знаний.

В рамках своей академической инициативы — программы «Университетский Альянс SAP» — компания SAP предоставила студентам ВУЗов, являющихся членами Альянса возможность пройти обучение по курсу SAP TERP10 «Интеграция бизнес-процессов» [1] и получить сертификат компании SAP. Выбор данного курса как базового не явился случайным, т.к. он является интеграционным и позволяет охватить практически все основные функциональные возможности ERP-системы SAP. Курс может стать как первой ступенью для дальнейшего более углубленного изучения модулей и решений SAP, так и подытоживающим процесс обучения. Для студентов это является возможностью существенно повысить свою первоначальную стоимость на рынке труда [4] и сразу приступить к работе в проектных группах по внедрению SAP-систем.

В отличие от специализированных курсов, которые рассчитаны на работу с конкретным решением или модулем, курс TERP10 дает понимание функционирования системы в целом и взаимодействия отдельных ее компонент. Обладая таким, более универсальным знанием, становится возможным гораздо лучше понимать и эффективнее использовать столь сложный инструмент как SAP.

Продолжительность обучения — 2 недели аудиторной работы с преподавателем по 6–7 часов. Дополнительно студентам рекомендуется не менее 30 часов самостоятельной работы. Занятия включают в себя теоретическую часть и серию практических упражнений на системе после каждого раздела для закрепления материала.

Слушателям, успешно сдавшим сертификационные экзамены, выдается сертификат компании с квалификацией SAP Solution Architect, что позволяет им сразу принимать участие в консалтинговых проектах по внедрению решений SAP.

Экзамен проводится в виде компьютерного теста, состоящего из 80 вопросов, большинство из которых подразумевают несколько вариантов ответов. Время проведения теста — 3 часа. Варианты тестов и учет результатов обеспечивает компания SAP, что исключает влияние на них со стороны пре-

подавателей. При проведении теста обязательно присутствует представитель компании, имеющий сертификат на проведение подобных экзаменов.

СПбГПУ из ВУЗов стран СНГ провел обучение группы студентов по данному курсу. Так как график учебного процесса не позволяет отвлекать студентов в течение учебного семестра, то курсы проводятся во время каникул.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно констатировать, что за последние два года с созданием Академического центра компетенции SAP в СПбГПУ, в развитии программы «Университетский Альянс SAP» произошел качественный скачок. Разработанные АЦК SAP учебно-методические материалы используются в стандартном учебном процессе в 18 ВУЗах. Схема взаимодействия ВУЗов с компанией SAP через Академические центры компетенции с предоставлением удаленного доступа к продуктам SAP зарекомендовала себя как эффективная и по ней работает уже 26 университетов. При этом есть устойчивая тенденция переноса деятельности в международную плоскость в связи с началом работы с университетами Украины и Республики Беларусь. За два года обучение в центре прошли более 40 преподавателей. По итогам трех проведенных в СПбГПУ сертификационных курсов, в которых приняло участие 47 студентов и преподавателей из 15 Вузов, было подготовлено 23 сертифицированных специалиста.

ЛИТЕРАТУРА

1. *mySAP ERP Integration of Business Processes*. — Вальдорф, SAP AG, 2006.
2. Амбражей А.Н. и др. Развитие Академических центров компетенции SAP как ресурсной и методической базы для международных научно-образовательных программ (на примере СПбГПУ) // Научн.-техн. ведомости СПбГПУ. — СПб: Изд. СПбГПУ. — № 6. — С. 188–195.
3. Беккер Й., Вилков Л., Таратухин В., Кугелер М., Роземанн М. Менеджмент процессов. — М.: Эксмо, 2007. — 384 с.
4. Рид Д., Доан М. Настольная книга SAP-консультанта. — СПб: Эксперт РП, 2008. — 272 с.

Поступила 02.07.2010

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І
МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND
METHODS OF SYSTEM ANALYSIS

УДК 681.3.06

Відкрито-замкнені засади середовищ інтеграції. Частина II / Редько І.В., Татаріков О.О., Семенченко М.П. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 7–17.

У межах концепції ОС-System розглянуто поняття середовища інтеграції та інтеграційної системи. Розглянуто рішення репрезентативних прикладів задач у середовищах макро- та мікроінтеграції. Описано застосування методу еволюційного збагачення до сутностей типу бізнес-процесу в предметній області. Рис.: 2. Бібліогр.: 15 назв.

UDC 681.3.06

Open-close principles of the integration environments. Chapter II / Redko I.V., Tatarikov O.O., Semenchenko M.P. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 7–17.

Within the concept of OS-System the concepts of the integration environment and integration system are considered. The solutions of representative examples of problems in macro- and microintegration environments are considered. The application of the method of the evolution enrichment to essences of business process type are described. Figs: 2. Refs: 15 titles.

УДК 519.876

Методологическое и математическое обеспечение решения задач предвидения на основе модифицированного метода морфологического анализа / Савченко И.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 18–28.

Предложен системный подход к исследованию задач, возникающих в процессе технологического предвидения, при помощи модифицированного метода морфологического анализа (ММА). Приведен формализованный математический аппарат использования метода для их решения. Рассмотрены одноэтапная и двухэтапная вариации ММА на основе экспертного оценивания, а также процедура метода при наличии фиксированных параметров морфологической таблицы. Рис.: 1. Табл.: 7. Библиогр.: 14 назв.

UDC 519.876

Methodological and mathematical support for solving foresight problems using the modified method of the morphological analysis / Savchenko I.O. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 18–28.

A system approach to the research problems, which are appeared during the technology foresight process, using the modified method of the morphological analysis (MMA) is proposed. A formalized mathematical apparatus of usage for its solution is given. One- and two-stage variations of the MMA based on expert estimations, and also on the procedure of the method within fixed parameters of the morphological table are considered. Figs: 1. Tabl.: 7. Refs: 14 titles.

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 519.85:62–192:004

Технологія імітаційного моделювання параметричних відмов технічних систем / Максимей І.В., Шевченко Д.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 29–37.

Запропоновано підхід і засоби автоматизації дискретно-подієвого імітаційного моделювання параметричних відмов технічних систем. Подано приклад створення моделі та рішення відомої теоретичної задачі аналізу параметричної відмови механічної системи. Показано можливості імітаційного моделювання складніших практичних завдань. Рис.: 6. Табл.: 2. Бібліогр.: 8 назв.

UDC 519.85:62–192:004

The technology of the simulation modeling of the parametric failures of the technical systems / Maksimey I.V., Shevchenko D.N. // *System Research and Information Technologies*. — 2011. — № 3. — P. 29–37.

The approach and automation for the discrete-event simulation modeling of parametric failures of technical systems are offered. It is given the example of the model creation and decisions of the known theoretical problem of the analysis of the parametric failure of technical system. The possibilities of simulation modeling of the complex practical problems are shown. Figs: 6. Tabl.: 2. Refs: 8 titles.

УДК 330.46

Подход к интеграции системы кредитного скоринга и модели управления активами и пассивами коммерческого банка / Осипенко Д.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 38–47.

Рассматривается подход к построению системы управления активами и пассивами розничного банка на базе динамической модели, а также формализация системы кредитного скоринга и постановка задачи оптимизации прибыльности кредитного портфеля. Результатом исследования является разработка подхода к интеграции этих ключевых систем банковского риск-менеджмента. Библиогр.: 6 назв.

UDC 330.46

Approach to the integration of credit scoring system and to the model of assets and liabilities management / Osipenko D.V. // *System Research and Information Technologies*. — 2011. — № 3. — P. 38–47.

The approach to the creation of Retail Bank is Assets and Liabilities Management System based on a dynamic model, and also a formalization of credit scoring system and the problem of optimization of credit portfolio profitability are investigated in the article. The result of this research is the development of the approach to the integration of the core systems of the bank is risk-management. Refs: 6 titles.

УДК 004.93

Моделі представлення ключових елементів в задачі покомпонентного розпізнавання символів тексту / Каргін А.О., П'ятикоп О.Є. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 48–55.

Розглянуто етап формування ключових елементів (вузлів) для вирішення задачі покомпонентного розпізнавання символів тексту. Утворення вузлів ґрунтується на нечітких моделях клітин первинної зорової кори. Введено математичний опис вузла у вигляді нечіткої моделі і ступінь нечіткої схожості вузлів. Наведено приклади порівняння вузлів з прототипами вузлів. Рис.: 8. Табл.: 1. Бібліогр.: 11 назв.

UDC 004.93

Models of key elements representation in the problem of component recognition of the character of text / Kargin A.A., Pyatikop E.E. // *System Research and Information Technologies*. — 2011. — № 3. — P. 48–55.

The stage of formation of key elements (nodes) for solving the problem of component recognition of the character is considered. The formation of the nodes is based on fuzzy models of primary visual cortex cells. The mathematical description of the node as

fuzzy model and the degree of fuzzy similarity of nodes are described. Examples of comparison the nodes with nodes prototypes are shown. Figs: 8. Tabl.: 1. Refs: 11 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND
SOCIAL SYSTEMS

УДК 004.8

Нечеткие модели в задачах подбора персонала при формировании социальных групп / Кондратенко Н.Р., Лужецкий С.В., Чеборака А.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 56–62.

Рассмотрены нечеткие модели в задачах подбора персонала при формировании социальных групп. Предложена нечеткая модель, которую использует информационная система-советчик, выполняющая функции помощника эксперта по вопросам подбора и оценивания персонала. Рис.: 4. Табл.: 1. Библиогр.: 7 назв.

UDC 004.8

Fuzzy models in staff recruitment problems during the social groups forming / Kondratenko N.R., Luzhetskyi S.V., Cheboraka O.V. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 56–62.

Fuzzy models in staff recruitment problems during the social groups forming are considered. The fuzzy model which is used by information system — adviser that helps expert to recruit and evaluate staff, is proposed. Figs: 4. Tabl.: 1. Refs: 7 titles.

УДК 519.8

Дослідження двоїстої задачі оптимізації інвестиційного портфеля в нечітких умовах / Зайченко Ю.П., Ові Нафас Агаі Аг Гаміш // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 63–76.

Розглянуто та досліджено двоїсту задачу оптимізації інвестиційного портфеля в умовах невизначеності. Отримано достатні умови випуклості математичної моделі цієї задачі. Наведено результати експериментальних досліджень отриманих рішень прямої та двоїстої задачі нечіткої портфельної оптимізації. Рис.: 4. Табл.: 6. Бібліогр.: 3 назви.

UDC 519.8

Investigation of the dual problem of the investment portfolio optimization in terms of fuzzy / Zaychenko Yu., Ovi Nafas Agai Ag Gamish // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 63–76.

The dual problem of the investment portfolio optimization in fuzzy conditions is considered and investigated. The sufficient conditions of the mathematical model convexity of this problem are obtained and discussed. The results of experimental investigations of the solutions of the direct and dual problem of fuzzy portfolio optimization are presented. Figs: 4. Tabl.: 6. Refs: 3 titles.

УДК 519.81

До параметричної форми моделювання ситуації в загальній задачі ухвалення рішення / Михалевич В.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 77–87.

Подано означення так званої параметричної та непараметричної моделі для ситуацій з причинно-наслідковим механізмом, який описується статистичною закономірністю. Показано, що ці моделі еквівалентні (рівносильні), тобто охоплюють увесь клас ситуацій з рішеннями, невизначеність наслідків яких описується статистичними закономірностями. Бібліогр.: 6 назв.

UDC 519.81

To parametric form of modeling the situation in the general problem of decision-making / Mykhalevich V.M. // *System Research and Information Technologies*. — 2011. — № 3. — P. 77–87.

The definition of so-called parametric and nonparametric models for the situations of casual hereolitary mechonisms that describes statistical regularity, is given. It is shown that these models are equivalent, that cover the whole class situations which decisions, which consequences of uncertainty is described by statistical laws. Refs: 6 titles.

ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНІ
КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ

PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED
COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS

УДК 681.335:004.891

Нейросетевая реализация интеллектуальной поддержки принятия решений в автоматизированном управлении обучением / Мазурок Т.Л., Тодорцев Ю.К. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2011. — № 3. — С. 88–101.

Создана формальная логико-математическая модель управления обучением в условиях компетентностного подхода. Предложен нейронечеткий подход принятия решений, основанный на последовательном определении степени интеграции и выявлении наиболее существенного влияния межпредметных связей на достижение компетенций. Приведены результаты практической реализации. Рис.: 8. Библиогр.: 13 назв.

UDC 681.335:004.891

Neural network implementation of intellectual support of decision-making in the automatically controlled training / Mazurok T.L., Todorcev Y.K. // *System Research and Information Technologies*. — 2011. — № 3. — P. 88–101.

A formal logical-mathematical model of training control is built in the conditions of competency approach. A neuro fuzzy approach of decision-making, based on sequential determination of the degree of integration and detection of the most significant impact of intersubject on the achieving of competencies, is offered. The results of practical realization are shown. Figs: 8. Refs: 13 titles.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ
УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM
CONTROL AND THEORY OF GAMES

УДК 004.652

Про топологію шляхів нормалізації в реляційному каркасі / Панченко Б.Є., Писанко І.М. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2011. — № 3. — С. 102–107.

Досліджено шляхи нормалізації в універсальному каркасі реляційних баз даних (БД) і топологію цих шляхів. Доведено теорему замкненості шляхів нормалізації в реляційному каркасі. Теорема дозволяє використовувати реляційний каркас в якості універсального носія схем БД, нормалізованих до високих форм, а також аналізувати існуючі та впроваджені БД на предмет їх аномалій та впливу на програмне застосування в процесі експлуатації. Рис.: 1. Библиогр.: 8 назв.

UDC 004.652

About topology of normalization ways in the relation frame / Panchenko B.E., Pysanko I.N. // *System Research and Information Technologies*. — 2011. — № 3. — P. 102–107.

In the normalization ways in the universal frame of the relational databases and the topology of these ways are investigated. Theorem about closure of normalization ways in

a relational frame has been proved. The theorem allows using a relational frame as a unique database schemes carrier, normalized to the higher forms. It also allows analyzing the existing and embedded databases for their anomalies and the impact on the software usage during the operation. Figs: 1. Refs: 8 titles.

УДК 519.876.2:611.018.4

Оптимальное управление режимами медикаментозной терапии и физиотерапии в задаче реконструкции костной ткани / Марценюк В.П., Вакуленко Д.В., Андрущак И.Е. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 108–122.

Представлена задача построения режимов медикаментозной терапии и физиотерапии как задача оптимального управления с фазовыми ограничениями для модели реконструкции костной ткани. В модели учтены следующие факторы: популяции остеоцитов, остеобластов, остеокластов и плотность матрикса. Данный подход был численно реализован при помощи программной среды VisSim. Рис.: 8. Библиогр.: 18 назв.

UDC 519.876.2:611.018.4

Optimal control of drug therapy and physiotherapy models for the problem of reconstruction of bone tissue / Martsenyuk V.P., Vakulenko D.V., Andrushchak I.Ye. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 108–122.

The problem of building the drug therapy and physiotherapy models is presented as a problem of an optimal control with state limits for the model of reconstruction of bone tissue. The model includes the following factors: population of osteocytes, osteoblasts and the density of the matrix. This approach has been numerically implemented using VisSim software. Figs: 8. Refs: 18 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 622.248

Затухание звука в межтрубном пространстве скважин / Данилов В.Я., Науменко И.Я., Кизима В.И., Клименко С.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 123–132.

Рассмотрен важнейший вид затухания звука в межтрубном пространстве скважин, обусловленный пограничным трением среды о стенки волновода типа «труба в трубе». Получено аналитическое выражение для его расчета и экспериментальные данные, необходимые для разработки электронного оборудования в области измерения уровня жидкости в скважинах акустическим дистанционным методом. Рис.: 3. Библиогр.: 6 назв.

UDC 622.248

Sound attenuation in wells annulus / Danylov V.Ia., Naumenko I.Ia., Kyzyma V.I., Klymenko S.M. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 123–132.

Major kind of sound attenuation in wells annulus resulted from boundary of friction the environment at the wells of the waveguide of the «pipe in pipe» type is considered. An analytic expression for its calculation and the experimental data required for the development of electronic equipment in the domain of liquid level measurement in wells by remote acoustical way are obtained. Figs: 3. Refs: 6 titles.

УДК 517.94

О периодических решениях квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка / Бохонов Ю.Е. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 133–137.

Предложен подход к нахождению периодических решений квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка, который основывается на нахождении функции Грина для дифференциального оператора, определенного на функциях, удовлетворяющих периодическим краевым условиям. Приводятся необходимые и достаточные условия существования периодических решений уравнения. Библиогр.: 6 назв.

UDC 517.94

On the periodic solutions of the quasilinear ordinary differential equations of second order / Bokhonov Ju.E. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 133–137.

The approach to the determination of the periodic solutions of the quasilinear differential equation of second order is proposed. The approach is based on the determination of the influence for function for the differential operator, defined on the functions, which satisfy the periodic boundary conditions. The necessary and sufficient conditions of the existence of the periodic equation solutions are given. Refs: 6 titles.

УДК 378.14

Співробітництво Академічного центру компетенції SAP СпбДПУ та вищих навчальних закладів країн СНД у межах програми «Університетський Альянс SAP» / Арсенєв Д.Г., Амбражей А.М., Головін М.М., Таратухін В.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 138–142.

Розглянуто основні задачі Академічного центру компетенції SAP у СпбДПУ — головного університетського координаційного центру програми «Університетський Альянс SAP» у СНД, включаючи створення навчальних курсів, організацію підготовки викладачів, підтримку системи професійної сертифікації та побудову співробітництва з вищими навчальними закладами Росії, України та Республіки Білорусь. Бібліогр.: 4 назв.

UDC 378.14

Cooperation of SAP Academic Competence Center in SPBSPU and higher educational institutions in CIS countries within the framework of SAP University Alliances Program / Arseniev D.G., Ambrajei A.N., Golovin N.M., Taratoukhine V.V. // System Research and Information Technologies. — 2011. — № 3. — P. 138–142.

The main tasks of SAP Academic Competence Centre in SPBSPU — the main university focal point of the «SAP University Alliances Program» is CIS region, are considered. The article describes the main activities of the Centre such as building cooperation with universities in Russia, Ukraine and Belarus, establishing of training courses, organizing the teacher training and supporting of the professional certification system. Refs: 4 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Амбражей Антон Миколайович,

кандидат фізико-математичних наук, заступник начальника відділу міжнародних наукових проектів керування міжнародною співпрацею, заступник керівника Академічного центру компетенції SAP Федерального державного бюджетного освітнього закладу вищої професійної освіти «Санкт-Петербурзький державний політехнічний університет», Росія, Санкт-Петербург

Андрущак Ігор Євгенович,

кандидат технічних наук, старший викладач Луцького національного технічного університету, Україна, Луцьк

Арсеньєв Дмитро Германович,

професор, доктор технічних наук, проректор з міжнародної діяльності Федерального державного бюджетного освітнього закладу вищої професійної освіти «Санкт-Петербурзький державний політехнічний університет», Росія, Санкт-Петербург

Бохонов Юрій Євгенович,

кандидат фізико-математичних наук, доцент Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Вакуленко Дмитро Вікторович,

кандидат технічних наук, доцент Тернопільського державного медичного університету ім. І.Я. Горбачевського, Україна, Тернопіль

Головін Микита Михайлович,

кандидат технічних наук, начальник відділу міжнародних наукових проектів керування міжнародною співпрацею, керівник Академічного центру компетенції SAP Федерального державного бюджетного освітнього закладу вищої професійної освіти «Санкт-Петербурзький державний політехнічний університет», Росія, Санкт-Петербург

Данилов Валерій Якович,

професор, доктор технічних наук, професор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Зайченко Юрій Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Каргін Анатолій Олексійович

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри комп'ютерних технологій Донецького національного університету, Україна, Донецьк

Кизима Володимир Іванович,

старший науковий співробітник ОКБ «Шторм» Національного технічного університету «КПІ», Україна, Київ

Клименко Сергій Миколайович,

інженер-електронік ВАТ «Укртелеком», Україна, Київ

Кондратенко Наталія Романівна,

доцент, кандидат технічних наук, професор кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Лужецький Сергій Володимирович,

аспірант кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Мазурок Тетяна Леонідівна,

кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів Одеського національного політехнічного університету, Україна, Одеса

Максімей Іван Васильович,

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри математичних проблем управління Гомельського державного університету ім. Ф. Скорини, Білорусь, Гомель

Марценюк Василь Петрович,

доктор технічних наук, професор Тернопільського державного медичного університету ім. І.Я. Горбачевського, Україна, Тернопіль

Михалевич Вадим Михайлович,

доцент кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Україна, Київ

Науменко Ігор Якович,

завідувач відділу ОКБ «Шторм» Національного технічного університету «КПІ», Україна, Київ

Ові Нафас Агаі Аг Гаміш,

аспірант Національного технічного університету «КПІ», Україна, Київ

Осіпенко Денис В'ячеславович,

ризик-менеджер банку «Райффайзен банк Аваль», Україна, Київ

Панченко Борис Євгенович,

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики НАН України, Київ

Писанко Іван Миколайович,

науковий співробітник Науково-технічного центру панорамних акустичних систем НАН України, Запоріжжя

П'ятикоп Олена Євгенівна,

кандидат технічних наук, доцент кафедри інформатики Приазовського державного технічного університету, Україна, Маріуполь

Редько Ігор Володимирович,

доктор фізико-математичних наук, професор Національного технічного університету України «КПІ», Україна, Київ

Савченко Ілля Олександрович,

аспірант Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ» МОН та НАН України, Київ

Семенченко Михайло Петрович,

аспірант Національного технічного університету України «КПІ», Україна, Київ

Таратухін Віктор Володимирович,

кандидат технічних наук, керівник програм партнерства з вищими навчальними закладами та науково-дослідними організаціями, SAP AG, Росія, Санкт-Петербург

Татаріков Олександр Олегович,

аспірант Національного технічного університету України «КПІ», Україна, Київ

Тодорцев Юрій Костянтинович,

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів Одеського національного політехнічного університету, Україна, Одеса

Чеборака Олександр Валерійович,

асистент кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Шевченко Дмитро Миколайович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри математичних проблем управління Гомельського державного університету ім. Ф. Скорини, Білорусь, Гомель