

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 2

2017

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, проф., д.т.н., Україна

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Т.Л. СААТІ, проф., США

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу**

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних та соціальних системах**

• **Проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

• **Методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 2

2017

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Prof., Ukraine

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU
A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU
E.A. FEINBERG, Prof., USA
A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,
Russia
P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine
V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU
A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine
T.L. SAATY, Prof., USA
L. SAKALAIUSKAS, Prof., Lithuania
A.M. SALEM, Prof., Egypt
I.V. SERGIENKO, Academician of NASU
H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania
G.-W. WEBER, Prof., Turkey
Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

- **Theoretical and applied problems and methods of system analysis**
- **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**
- **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**
- **Problem- and function-oriented computer systems and networks**
- **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**
- **Methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНТІ РАН, РІНЦ.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**
Редактор **Р.М. Шульженко**
Молодший редактор **Л.О. Тарин**
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 26.06.2017. Формат 70x108/16.
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

Видавництво «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
Тел. (044) 204-81-78
Наклад 120 пр. Зам. № 16-163

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

2 • 2017

ЗМІСТ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ	
<i>Данилов В.Я., Зінченко А.Ю., Данилов В.Я.</i> Системний підхід до розв'язання прямих і обернених задач в системах з хаосом	7
<i>Писарчук О.О., Гуменюк М.О., Тимчук С.В.</i> Математична модель ситуаційного синтезу автоматизованої системи збирання і оброблення інформації від технічних засобів моніторингу	19
<i>Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.</i> Автоматизация управления импульсными процессами в когнитивных картах с подавлением ограниченных возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов	29
ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ	
<i>Гаращенко Ф.Г., Кобзар А.Ю.</i> Технологія визначення ключових точок на основі стабільних меж об'єктів	40
<i>Шубенкова І.А., Петрова С.К., Бідюк П.І.</i> Системний підхід до моделювання та прогнозування на основі регресійних моделей і фільтра Калмана	52
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Matsuki Y., Bidyuk P.I.</i> Curvature coordinates to describe the explosion of Chernobyl's reactor core in april 1986, using the tensor equations	62
<i>Козуля Т.В., Смельянова Д.І.</i> Інформаційно-алгоритмічна підтримка комплексної оцінки екологічності системних об'єктів	68
<i>Махорт А.П.</i> Про динаміку відкритої економічної системи за наявності монополістів і фінансових зобов'язань	77
ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ	
<i>Зайченко Ю.П., Гамидов Галиб И.</i> Каскадные нейро-нечеткие сети в задачах прогнозирования на рынках ценных бумаг	92
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	
<i>Ясинський В.К., Юрченко І.В.</i> Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень	103
МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	
<i>Мікулін В.В.</i> Методика вибору математичної моделі екологічного процесу	115
<i>Осауленко В.М.</i> Двовимірна модель навчання в спайкових нейронних мережах з гомеостазом та навчанням з підкріпленням	130
Реферати	141
Відомості про авторів	149

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

2 • 2017

CONTENTS

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS

- Danylov V.Ya., Zinchenko A.Yu., Danilov V.Ya.* System approach of solving direct and reverse tasks in systems with chaos 7
- Pysarchuk O.O., Humeniuk M.O., Tymchuk S.V.* Mathematical model of situational synthesis automated system for collecting and processing information from the technical means of monitoring 19
- Romanenko V.D., Milyavsky Y.L.* Control automation of impulse processes in cognitive maps with constrained disturbance suppression based on invariant ellipsoids method 29

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

- Harashchenko F.H., Kobzar A.Yu.* A technology for feature points detection based on stable edges of objects 40
- Shubenkova I.A., Petrova S.K., Bidyuk P.I.* Systemic approach to modeling and forecasting on the basis of regression models and Kalman filter 52

DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS

- Matsuki Y., Bidyuk P.I.* Curvature coordinates to describe the explosion of Chernobyl's reactor core in april 1986, using the tensor equations 62
- Kozulia T.V., Emelianova D.I.* Information-algorithmic support for complex ecological assessment of system objects 68
- Makhort A.Ph.* On dynamics of an open economy under presence of monopolies and financial obligations 77

PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS

- Zaychenko Yu.P., Hamidov Galib I.* Cascade neo-fuzzy neural network in the forecasting problem at stock exchange 92

MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

- Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V.* On existence of solution of the Cauchy problem for nonlinear diffusion stochastic partial differential-difference equations of neutral type with random external perturbations 103

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND CONTROL IN CONDITONS OF RISK AND UNCERTAINTY

- Mikulin V.V.* Method of choosing an environmental mathematical model 115
- Osaulenko V.M.* Two dimensional model of learning in spiking neural networks with homeostasis and reward 129
- References 141
- Information about the authors 149

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ У СИСТЕМАХ З ХАОСОМ

В.Я. ДАНИЛОВ, А.Ю. ЗІНЧЕНКО, В.Я. ДАНИЛОВ

Анотація. Запропоновано системний підхід до ефективного застосування засобів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних систем для вирішення проблем дослідження детермінованого хаосу в складних нелінійних системах та пов'язаних з ними обернених задачах. Розв'язано науково-технічну задачу удосконалення математичного моделювання через поліпшення наявних методологій дослідження детермінованого хаосу та розроблення нових математичних моделей на основі спеціалізації існуючих. Запропоновано схеми дослідження прямих (дослідження динамічних режимів поведінки нелінійних систем залежно від біфуркаційних параметрів) і обернених (реконструкції математичних моделей) задач детермінованого хаосу у складних нелінійних системах. Експериментальні дослідження наведено для скалярних реалізацій нелінійних систем Ю.-Ш. Чена та Ресслера. Для останньої знайдено еквівалентну модель.

Ключові слова: детермінований хаос, нелінійна система Ю.-Ш. Чена, біфуркація, реконструкція математичної моделі.

ВСТУП

Однією з основних проблем дослідження нелінійних динамічних систем під час аналізу складної динаміки є експоненціальна чутливість системи до малих збурень, яка виявляє наявний в системі детермінований хаос. При цьому мала зміна біфуркаційного параметра призводить до якісної зміни поведінки фазових траєкторій системи, тобто до нерегулярної хаотичної динаміки. Проте, на відміну від випадкового процесу, такий експеримент можна відтворити, тобто хаотична траєкторія детермінованої нелінійної системи повністю відтворюється, якщо покласти такі ж початкові умови та точність обчислення. Основним напрямом такого дослідження є проведення експериментів на основі математичного та комп'ютерного моделювання з використанням спеціальних обчислювальних методів, які мають високу точність обчислення і в яких враховуються особливості типів зв'язків нелінійної системи.

Для складання ефективних математичних описів досліджуваних об'єктів важливою задачею є розроблення нових чи еквівалентних видів ма-

тематичних моделей, а також параметричної і структурної ідентифікації нелінійних систем у хаотичному режимі за точними і неповними спостереженнями лише однієї фазової координати системи. Ця задача є складною і потребує створення ефективних програмних засобів комп'ютерної реалізації.

У вітчизняній та світовій науковій літературі є ґрунтовні праці [1, 2], присвячені розробленню підходів та обчислювальних методів дослідження детермінованого хаосу у прямих і обернених задачах. Утім проблематика ефективного застосування комп'ютерних систем моделювання, включаючи структурну та алгоритмічну організацію їх використання з урахуванням різних типів нелінійності, залишається недостатньо висвітленою.

Мета роботи — розроблення системного підходу (структурно-функціональних схем) дослідження детермінованого хаосу в нелінійних системах та пов'язаних з ними обернених задачах.

РОЗРОБЛЕННЯ СХЕМ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

що є математичною моделлю деякої динамічної системи. У фазовому просторі цієї системи правими частинами рівнянь (1) породжується векторне поле швидкостей, яке зіставляє кожній зображувальній точці X_0 вектор $X(x_i) = \{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $i = 1, \dots, n$, модуль якого чисельно дорівнює швидкості руху фазової точки по траєкторії. Сам вектор у кожній точці x_i напрямлений по дотичній до фазової траєкторії. Таким чином, динамічну систему (1) можна записати у векторній формі $\dot{X} = X(x)$, де $\dot{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ — відповідні вектори. Надалі вважатимемо, що праві частини системи рівнянь (1) є аналітичними функціями. Система задовольняє умови теореми Коші–Пікара: через кожен точку фазового простору проходить одна і тільки одна траєкторія. Тоді основною задачею дослідження нелінійних динамічних систем різної природи, які, як правило, не мають точних аналітичних розв'язків, є задача виявлення областей хаотичних, регулярних і перехідних режимів, а також закономірностей переходу від одного режиму до іншого через відповідну послідовність біфуркацій [3].

Структурно-функціональний підхід до розв'язання поставленої задачі дослідження запропоновано у вигляді рис. 1. Етапи схеми дослідження складаються зі спеціальних числових методів з локальною точністю числового розв'язання системи (1) до $O(10^{-12}) - O(10^{-16})$.

Поставимо задачу реконструкції. Нехай маємо скалярну реалізацію динамічної системи (1), отриману за точними вимірами: $x_i = [x(i\Delta t), i = 1, \dots, N]$, де x — значення реалізації в момент часу $i\Delta t$; Δt — інтервал дискретизації; N — довжина реалізації. Потрібно реконструювати аттрактори і матема-

тичну модель системи (1), а для часової послідовності — підтвердити наявність чи відсутність хаосу.

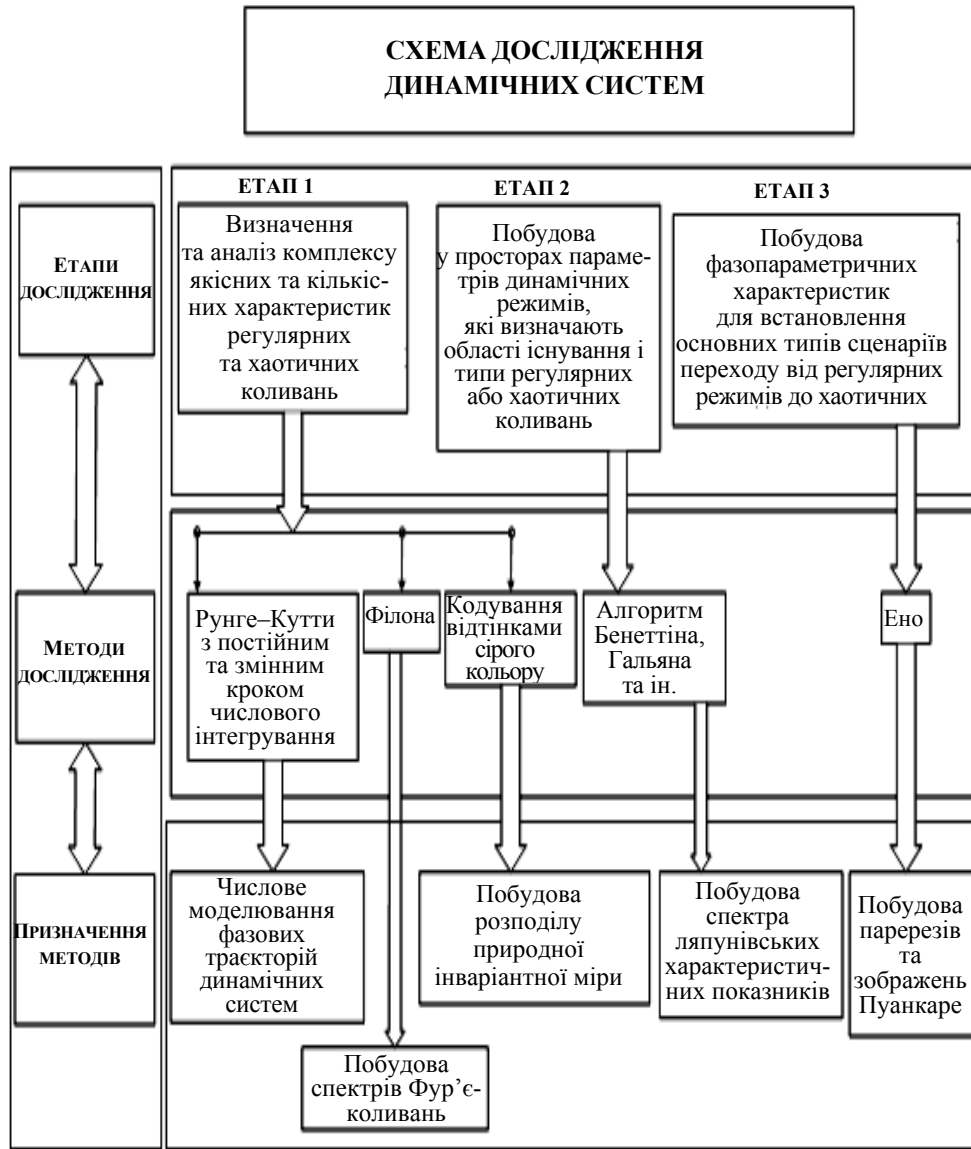


Рис. 1. Структурно-функціональна схема дослідження динамічних систем

Для розв'язання поставленої задачі на рис. 2 показано структурно-функціональну схему з етапами дослідження. Задача реконструкції оператора еволюції системи (1) ускладнюється, якщо інформація про об'єкт дослідження обмежена однією скалярною реалізацією або одновимірною реалізацією функції від фазових координат системи. Для коректного підбору моделі динамічної системи на рис. 3 зображено функціональну схему процесу реконструкції. При цьому вибір структури моделі і виду модельного оператора еволюції ґрунтуються на апріорній інформації про систему та на аналізі динаміки вихідного ряду системи.

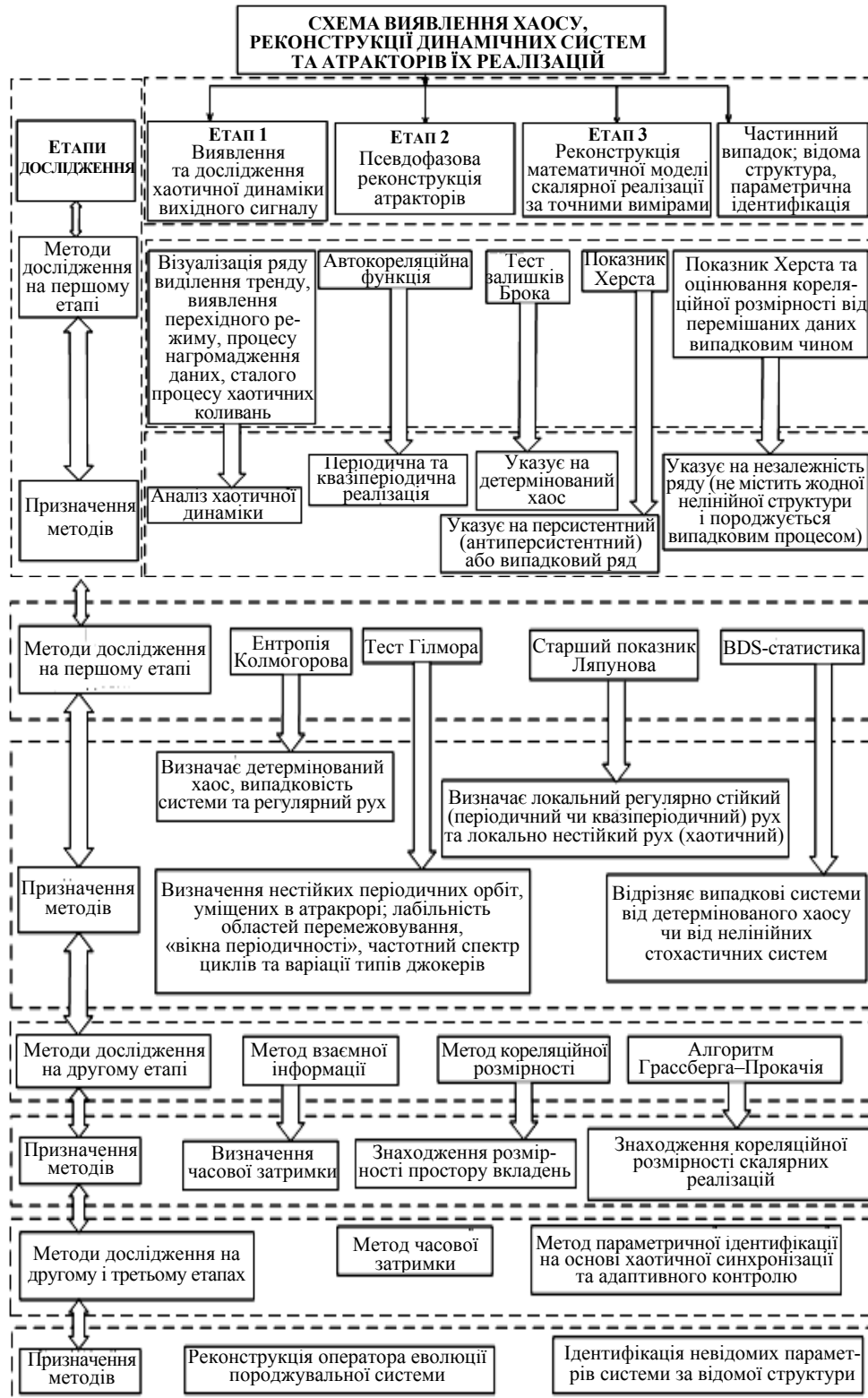


Рис. 2. Структурно-функціональна схема реконструкції атракторів та динамічних систем за їх скалярними реалізаціями

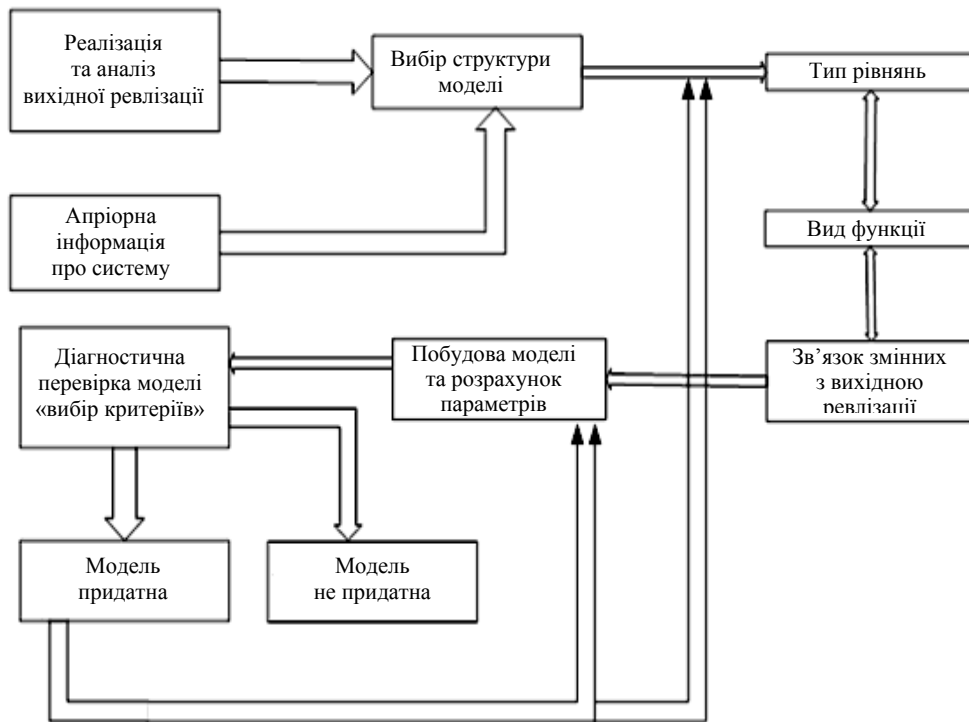


Рис. 3. Функціональна схема реконструкції систем за скалярною реалізацією

Для оцінювання невідомих параметрів реконструйованої системи скористаємося методом глобальної реконструкції [4]. Задамо структуру динамічної системи звичайними диференціальними рівняннями першого порядку $\dot{x} = F_j(x_j)$, $j = 1, \dots, n$ із заздалегідь обчисленою за методом кореляційної розмірності розмірністю системи (розмірністю простору вкладення атракторів). Тоді для отримання конкретного виду еволюційного оператора функцію F_j подамо у вигляді розкладання за деяким базисом, обмежуючись скінченною кількістю членів розкладання. У простішому випадку задавати

$$F_j \text{ можна поліномом деякого степеня } v: F_j(x_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^v C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{s=1}^n x_{s,i}^{l_s},$$

де $j = 1, \dots, n$, $\sum_{s=1}^n l_s \leq v$, де $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$ — невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. Для знаходження цих коефіцієнтів необхідно розв'язати систему N

$$\text{лінійних алгебричних рівнянь } x_{j, i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^v C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{s=1}^n x_{s,i}^{l_s}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$j = 1, \dots, n$ з невідомими $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$, у якій N — кількість точок псевдофазової реконструкції скалярного часового ряду $x_i(t)$, що використовуються для апроксимації правих частин; v — степінь полінома. Для апроксимації можна застосовувати поліноми Лежандра, Фур'є або інший базис розкладання функцій F_j . Тоді невідомі коефіцієнти при поліномах обчислюються за рекурентним методом найменших квадратів (РМНК). При цьому діагностична

перевірка моделі являє собою повне дослідження отриманої математичної моделі згідно зі структурно-функціональною схемою (1). Установлення областей регулярної і хаотичної динаміки сконструйованої математичної моделі, а також побудова відповідних атракторів відповідно до вже дослідженої динаміки скалярної реалізації і є основними критеріями адекватності вибору математичної моделі.

ПРИКЛАДИ ПСЕВДОФАЗОВОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ АТРАКТОРІВ

Як приклад розглянемо малодосліджену нелінійну систему Ю.-Ш. Чена [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz, \end{aligned} \quad (2)$$

де параметри $a \geq 0$ — збереження суми відсоткової ставки; $b \geq 0$ — вартість інвестицій; $c \geq 0$ — еластичність попиту на комерційних ринках. Перше рівняння цієї системи описує зміну в часі відсоткової ставки, друге — зміну інвестиційного попиту, а третє — зміну індексу цін. Детальний опис моделі подано у праці [5].

Результати дослідження отримано для скалярних реалізацій за першою та другою координатами для системи (2), отриманої числовим розв'язком системи з використанням алгоритму Дорманда–Принса [6]. Було проведено два комп'ютерні експерименти дослідження детермінованого хаосу: за хаотичним та регулярним режимами динаміки системи. Вибірки рядів як для хаотичних, так і для регулярних режимів вибрано по 100000 значень даних. Початковими умовами для експериментів обрано $x(t_0) = 2$, $y(t_0) = 3$, $z(t_0) = 2$, а параметри — $a = 3$; $b = 0,1$; $c = 1$ — для хаотичного режиму і $a = 3$, $b = 0,24$; $c = 1$ та $a = 2,475$; $b = 0,1$; $c = 1,8$ — для регулярного. При цьому крок дискретизації методу Рунге–Кутти становив 10^{-3} .

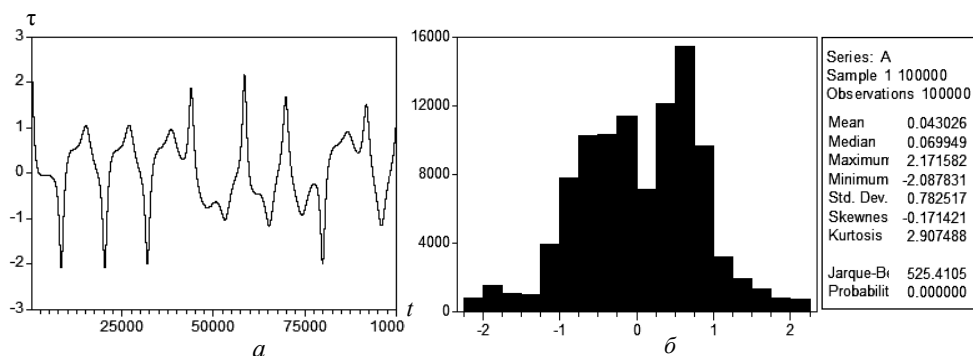


Рис. 4. Динаміка скалярної реалізації хаотичного режиму (а) та її статистичні дані (б)

Для уникнення помилок під час дослідження детермінованого хаосу, зокрема обчислення розмірності вкладення, кореляційної розмірності D_2 , тесту Брока, ентропії Колмогорова, BDS-тесту, пов'язаних зі скінченністю ряду, було застосовано критерій А. Цоніса, що визначає мінімально необ-

хідну довжину ряду вигляду $N > 10^{2+0,4D_2}$. А оскільки оцінка кореляційної розмірності реконструйованого атратора системи (2) становила 2,21 (табл. 1), то мінімально необхідна довжина ряду повинна перевищувати $10^{2+0,4 \cdot 2,21} = 766$ значень.

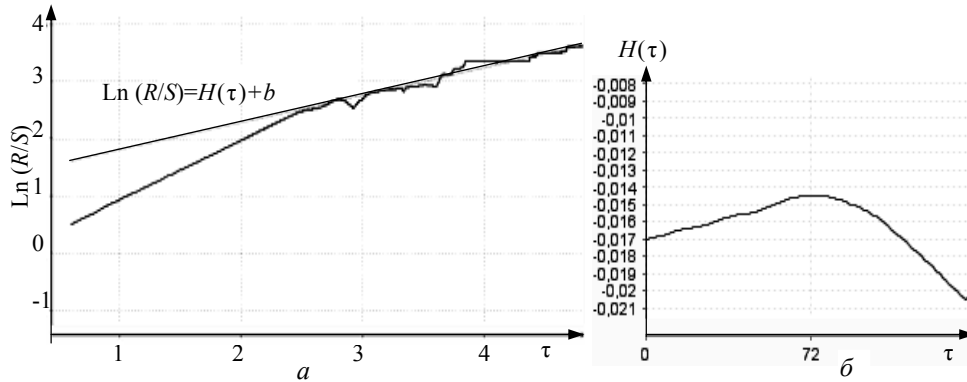


Рис. 5. Лінійна регресія оцінки показника Херста (а) та графік функції взаємної кореляції (б) першої скалярної реалізації хаотичного режиму

Результати дослідження для часових реалізацій регулярного і хаотичного режимів нелінійної системи (2) проілюстровано на рис. 5–10. Характеристики кількісних та якісних ознак зведено у табл. 1.

Із кількісних та якісних характеристик, наведених у табл. 1, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд є антиперсистентним (ергодичним, що складаються із частих реверсів зростання–спадання), має нелінійну структуру (підтверджену тестом Брока і випадковим перемішуванням даних) і характеризується ефектом турбулентності. Автокореляційна функція на великих проміжках часу прямує до нуля, що свідчить про відсутність кореляції між сусідніми значеннями (під впливом нестійкості за Ляпуновим), а додатні показники Ляпунова і Колмогорова вказують на наявність у ряду хаосу (локально нестійкого руху двох точок псевдореконструйованого атратора).

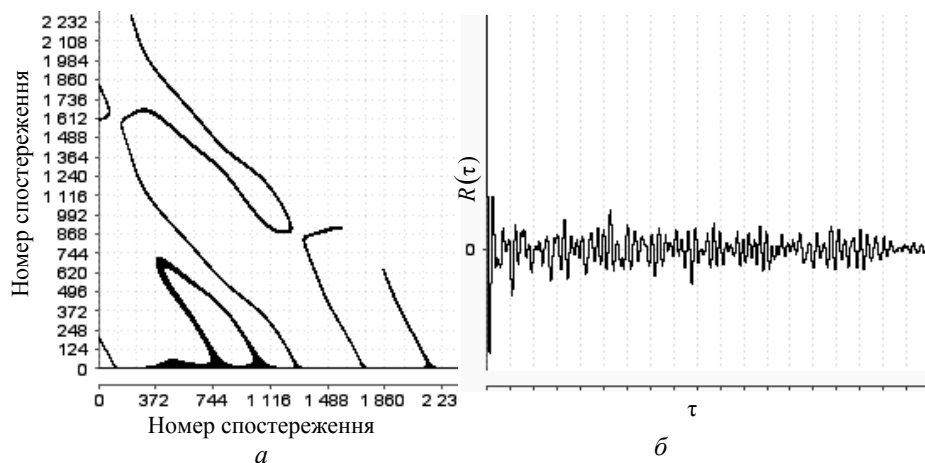


Рис. 6. Тест Гілмора: інтервальний джокер і русла (а) та автокореляційна функція (б) першої скалярної реалізації хаотичного режиму системи (2)

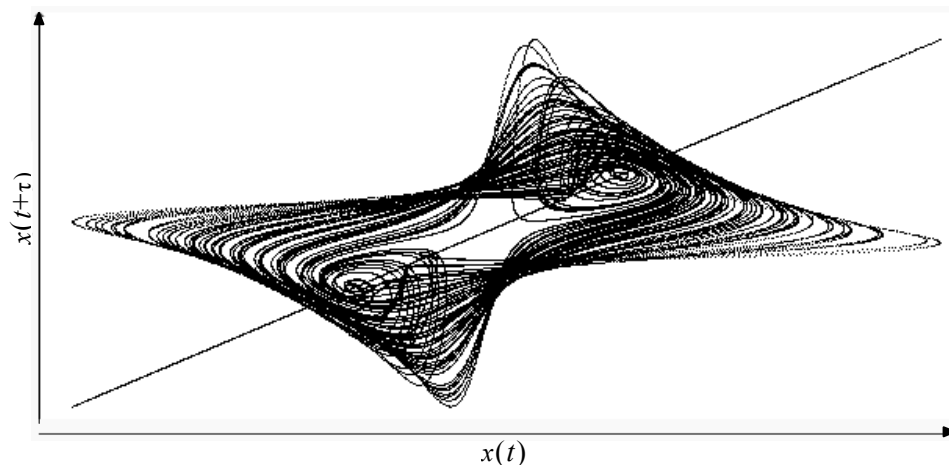


Рис. 7. Псевдофазова реконструкція першої реалізації хаотичного режиму системи (2). Часова затримка — 139 с, розмірність укладення — 3

Таблиця 1. Кількісні та якісні характеристики ідентифікації хаосу та реконструкції його математичної моделі для скалярної реалізації хаотичного режиму

Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)	Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)
Показник Херста	0,4791552279363	Автокореляція	Прямує до нуля
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0,4957591621218764	Старший показник Ляпунова	0,243
Тест Брока	D_2 : 2,211 і 2,213 λ_1 : 0,243 і 0,241	Розмірність Мінковського	2,52
Ентропія Колмогорова	0,243	Візуалізація ряду	Хаотичний режим
Кореляційна розмірність і BDS-статистика	2,211 87,91	Розмірність укладення	3
Тест Гілмора та ϵ	Інтервальний джокер, $\epsilon = 0,0247$	Часова затримка	139 с

Оскільки BDS-статистика значно більша від 3, то гіпотезу про випадковий ряд можна відхилити з імовірністю 99% [7]. Графік «тісного повернення» хаотичного режиму — графічний тест Гілмора — показано на рис. 6. Тут бачимо «порожні» області, що не містять точок, і області із суцільними лініями. Наявність «порожніх» областей вказує на розриви у відображенні, а суцільних ліній — на «шумові» цикли, тобто ця картина свідчить про наявність у скалярній реалізації інтервальних джокерів (областей випадкових фазових стрибків) з наявними руслами складного частотного спектра (області детермінованої поведінки). Візуалізація ряду також свідчить про наявність хаосу та відсутність тренду. Реконструйований атрактор на рис. 7 підтверджує припущення про наявність хаосу.

Із кількісних та якісних характеристик, наведених у табл. 2 для регулярного режиму, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд є антиперсистентним, не породжується випадковими процесами (підтверджується тестом Брока і випадковим перемішуванням даних) і характеризується ефектом турбулентності. Автокореляційна функція квазіперіодична (періодична), що свідчить про квазіперіодичність (періодичність) відповідної скалярної реалізації, а нульові показники Ляпунова і Колмогорова вказують на відсутність у ряді хаосу (локально нестійкого руху двох точок псевдореконструйованого атратора). Оскільки BDS-статистика значно перевищує 3, то гіпотезу про випадковий ряд можна відхилити з імовірністю 99% [7].

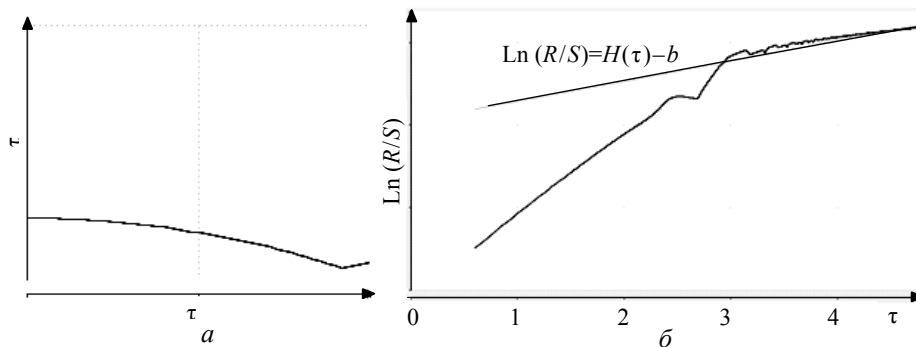


Рис. 8. Функція взаємної кореляції (а) та оцінка показника Херста (б) скалярної реалізації регулярного режиму системи (2)

Графіки «тісного повернення» — графічний тест регулярного режиму Гілмора — показано на рис. 9. Тут зображено суцільні чорні лінії, які проходять горизонтально та вертикально вздовж усього графіка через однакові інтервали, визначені квазіперіодичністю (періодичністю) вимірювань в одиницях часу спостережень.

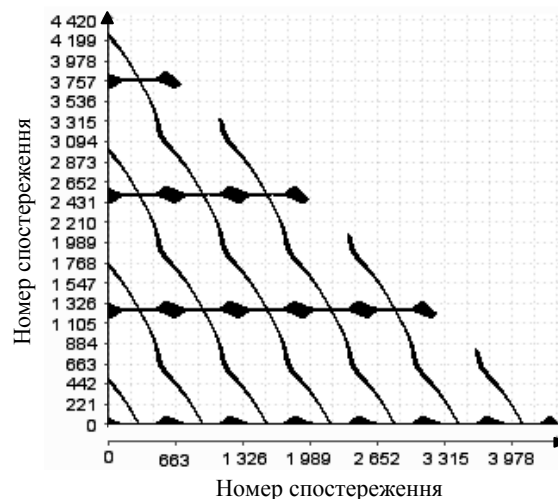


Рис. 9. Тест Гілмора: періодичні орбіти скалярної реалізації регулярного режиму

Наявність квазіперіодичних (періодичних) орбіт на графіку свідчить про квазіперіодичність (періодичність) скалярної реалізації та про наявність русел складного частотного спектра (областей детермінованої поведінки).

Візуалізація відповідного ряду також свідчить про відсутність хаосу та про періодичність (квазіперіодичність). Реконструйований атрактор на рис. 10 підтверджує припущення про наявність періодичної (квазіперіодичної) поведінки одновимірної реалізації.

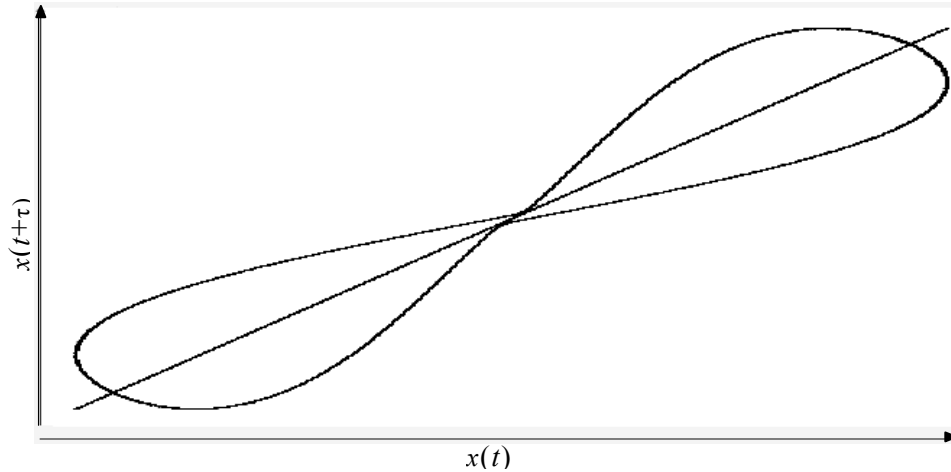


Рис. 10. Псевдофазова реконструкція скалярної реалізації регулярного режиму системи (2). Часова затримка — 44 с, розмірність вкладення — 3

Таблиця 2. Кількісні та якісні характеристики ідентифікації хаосу та реконструкції його математичної моделі скалярної реалізації регулярного режиму

Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)	Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)
Показник Херста	0,24449230462814917	Автокореляція	Періодична
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0,5236470025920382	Старший показник Ляпунова	0
Тест Брока	$D_2 : 2,417$ і $2,332$ $\lambda_1 : 0,0$ і $0,27$	Розмірність Мінковського	2,755
Ентропія Колмогорова	0	Візуалізація ряду	Періодичний рух
Кореляційна розмірність і BDS-статистика	2,417 17,19	Розмірність укладення	3
Тест Гілмора та ε	Періодичні орбіти, $\varepsilon = 0,04097$	Часова затримка	44 с

ПРИКЛАД РЕКОНСТРУКЦІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Розглянемо класичну нелінійну систему-осцилятор Ресслера, математична модель якої має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y - z, \\ \dot{y} &= \omega x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned} \quad (3)$$

де γ — параметр зворотного зв'язку; δ — параметр адаптації; ω — параметр, що визначає основну власну частоту коливань (було вибрано значення $\omega = 0,93$); інші стандартні параметри вибрано такими: $a = 0,15$; $b = 0,2$; $c = 10$.

Вибірка скалярної реалізації по першій фазовій координаті хаотичного режиму на атракторі системи становила 100000 значень. Під час дослідження точність оцінювання з використанням методу Рунге–Кутти п'ятого порядку з коригувальною процедурою Дорманда–Прінса для змінного кроку числового інтегрування становила 10^{-7} . Початкові умови обрано такими: $x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0,001$. Згідно з методом послідовного диференціювання [7] за РМНК оцінено невідомі коефіцієнти системи (3). Отримано реконструйовану математичну модель системи Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -0,2 - 10x + 0,5y - 9,85z + 1,0225xy + yz - \\ - 0,15xz - 0,15y^2 - 0,15x^2 + 0z^2. \end{cases} \quad (4)$$

Атрактор системи (4) зображено на рис. 11. Усі основні топологічні властивості і динаміка реконструйованого атрактора цілком відповідають оригінальному атрактору Ресслера (3).

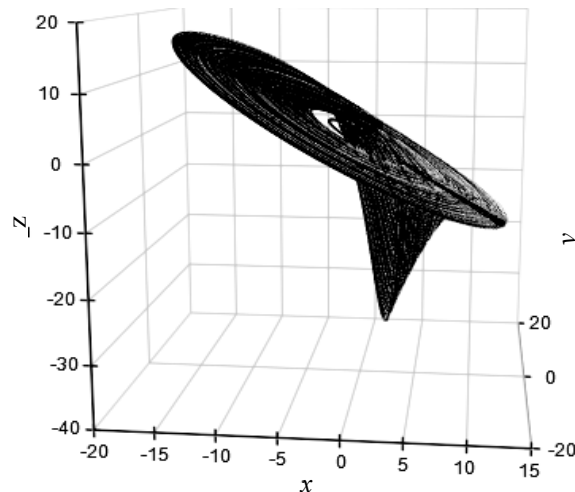


Рис. 11. Атрактор реконструйованої системи Ресслера

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено детермінований хаос для нелінійних динамічних систем, заданих диференціальними рівняннями, та розглянуто задачу реконст-

рукції виявлених атракторів та математичної моделі самої системи за точними і неповними спостереженнями. Для розв'язання поставлених прямих і обернених задач запропоновано системний підхід, описаний структурно-функціональними схемами досліджень. На прикладі нелінійної системи Ю.-Ш. Чена продемонстровано псевдофазову реконструкцію атракторів за спостереженнями скалярних реалізацій фазових координат хаотичного і регулярного режимів. При цьому експериментальні дослідження реалізації цієї системи за хаотичного режиму підтвердили неможливість прогнозування експериментальних даних за виявленого хаосу на проміжках часу, що перевищують деякий часовий масштаб, логарифмічно залежний від неточності задання початкових умов. Це зумовлюється експоненціальною чутливістю вихідної системи до малих збурень. На прикладі системи Ресслера продемонстровано реконструкцію математичної моделі за спостереженнями першої скалярної реалізації фазової координати за хаотичного режиму.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Krasnopol'skaya T.S.* Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank / T.S. Krasnopol'skaya, A.Yu. Shvets // *Soviet Applied Mechanics*, 1990. — Vol. 26. — № 8. — P. 787–794.
2. *Shvets A.Yu.* Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems / A.Yu. Shvets, A.M. Makaseyev // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, 2012. — N 1. — P. 195–204.
3. *Зінченко А.Ю.* Исследование регулярной и хаотической динамики одной финансовой системы / А.Ю. Зінченко // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2013. — Т. 21, № 2. — С. 173–187.
4. *Crutchfield J.P.* Equations of motion from a data series / J.P. Crutchfield, B.S. McNamara // *Complex Systems*. — 1987. — N 1. — P. 417–452.
5. *Ma J.H.* Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I / J. H. Ma, Y.S. Chen // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 2001. — Vol. 22, N 11. — P. 1240–1251.
6. *Dormand J.R.* A family of embedded Runge-Kutta formulae / J.R. Dormand, P.J. Prince // *J. Comp. Appl. Math.* — 1980. — Vol. 6. — P. 19–26.
7. *Данилов В.Я.* Синергетичні методи аналізу: навч. посіб. / В.Я. Данилов, А.Ю. Зінченко. — К.: НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2011. — 340 с.

Надійшла 19.04.2017

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИТУАЦІЙНОГО СИНТЕЗУ АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ ЗБИРАННЯ І ОБРОБЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ВІД ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ МОНІТОРИНГУ

О.О. ПИСАРЧУК, М.О. ГУМЕНЮК, С.В. ТИМЧУК

Анотація. Розглянуто проблему підвищення ефективності функціонування автоматизованої системи збирання та оброблення інформації від технічних засобів моніторингу. Як можливий варіант вирішення проблеми запропоновано застосування ситуаційного синтезу системи. Сформовано часткові критерії оптимальності структури автоматизованої системи збирання та оброблення інформації. На основі дискретної згортки часткових критеріїв розроблено математичну модель ситуаційного синтезу системи. Для визначення необхідної кількості технічних засобів моніторингу застосовано ентропійний підхід. Проведено поділ технічних засобів моніторингу на класи й оцінено інформативність кожного класу. Застосування розробленої комплексної математичної моделі ситуаційного синтезу дозволяє оптимально за заданими показниками вибирати технічні засоби моніторингу, що будуть залучені до виконання поточного завдання системи.

Ключові слова: математична модель, автоматизована система збирання та оброблення інформації, технічні засоби моніторингу, ситуаційний синтез, дискретна згортка часткових критеріїв, ентропійний підхід.

ВСТУП

Розвиток науково-технічного прогресу у сфері інформаційних технологій останніх років спонукав до посилення ролі складних автоматизованих систем керування (АСК), застосовуваних у багатьох галузях діяльності людини. Одним з основних компонентів багатьох АСК є автоматизована система збирання та оброблення інформації (АСЗОІ) від технічних засобів моніторингу (ТЗМ). Автоматизована система збирання та оброблення інформації забезпечує пункти керування різного рівня попередньо обробленою інформацією про поточну ситуацію (обстановку) та стан системи, отриманою від ТЗМ, тим самим надаючи основу для прийняття рішення та подання відповідних команд на об'єкти керування.

Апріорна невизначеність та велике різноманіття умов функціонування АСЗОІ від ТЗМ значно знижує ефективність застосування таких систем у випадку незмінності їх структури та алгоритму функціонування. Для забезпечення належного рівня оперативності функціонування таких систем та виконання вимог до якості інформації, яку вони надають користувачам, необхідно забезпечити можливість оперативного конфігурування системи та її перенацілювання залежно від ситуації, що склалася. Вирішити цю проблему можна застосуванням до систем збирання та оброблення інформації принципів ситуаційного керування [1, 2]. Суть цього процесу для АСЗОІ полягає

у ситуативному синтезі системи якнайоптимальнішого варіанта побудови (структури) підсистеми реагування на конкретну ситуацію.

Завдання конфігурування АСЗОІ належить до класу завдань аналізу і синтезу складних систем [3–8], що передбачає визначення її структури і параметрів. Структурний синтез складних систем, як правило, включає етапи: формування вимог до системи; вибір її складових та опис порядку їх взаємодії; формування варіантів побудови системи з подальшим визначенням оптимального з них. Прикладом традиційного вирішення завдань параметричного синтезу складних систем є праці [3, 5, 6]. У класичній постановці розв'язання задачі параметричного синтезу полягає у визначенні параметрів елементів системи заданої структури. Основними недоліками класичних підходів структурного і параметричного синтезу є складність їх практичного застосування в разі розгляду різнорідних розподілених систем, а також використання здебільшого однокритерійних цільових функцій ефективності. Водночас показано, що ефективність вирішення такого класу завдань підвищується із застосуванням методів багатокритерійного аналізу [5, 7].

Мета роботи — розроблення математичної моделі ситуаційного синтезу АСЗОІ з використанням методів багатокритерійного аналізу.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Ініціатором ситуаційного синтезу АСЗОІ є конфліктна ситуація (КС). Під **конфліктною ситуацією** у контексті реалізації процесу моніторингу розуміють завдання на моніторинг, або інформаційний запит користувача інформації, які не відповідають поточним завданням і виконання яких потребує переконфігурування системи [9].

Опис конфліктної ситуації реалізується таким чином. Нехай i -та ($i = 1 \dots I$) КС — KS_i характеризується множиною (формуляром), що складається з трійки: P_{ks} — ознака КС, що являє собою унікальну для кожного її типу буквено-цифрову комбінацію; T_{ks} — множина (перелік) інформаційних потреб системи з усунення КС (узгоджених з можливостями ТЗМ); $K_{r,i}$ — координати центра району ведення моніторингу. Тоді формуляр КС задається множиною $KS_i = \{P_{ks\,i}, T_{ks\,i}, K_{r\,i}\}$, $i = 1 \dots I$. У свою чергу множини (перелік) інформаційних потреб системи з усунення i -ї КС можна подати у вигляді підмножин $T_{ks\,i} = \{T_{ks\,i1}, T_{ks\,i2}, \dots, T_{ks\,iN}\}$, де N — кількість інформаційних потреб системи.

Координати центра району ведення моніторингу задаються парою $K_{r,i} = \{\varphi_{r,i}, \lambda_{r,i}\}$, де $\varphi_{r,i}$ — широта центра району; $\lambda_{r,i}$ — довгота центра району.

Технічні засоби моніторингу характеризуються трійкою: T_{ks}^I — перелік (множина) інформаційних можливостей ТЗМ; TX — перелік (множина) технічних характеристик (ТХ) засобу, що забезпечують його можливості; K_z — координати ТЗМ (широта, довгота): $I_{ks\,f} = \{T_{ks\,f}^I, TX_f, K_{z\,f}\}$.

Частинні показники і критерії оптимальності структури та параметри для виконання поточного завдання частини системи формуються шляхом розв’язання декомпозиційної задачі встановлення показників для кожного типу ТЗМ зі складу АСЗОІ з урахуванням вимог ефективності розв’язання цільових задач системою [10]. Реалізація цього процесу дозволяє виокремити такі частинні показники.

1. Множина технічних характеристик ТЗМ

$$TX_i = \{TX_{i1}, TX_{i2}, \dots, TX_{iN}\}, \quad (1)$$

де N — кількість технічних характеристик типу ТЗМ. Для кожного типу ТЗМ притаманні власні технічні характеристики.

2. Відображення множини інформаційних потреб системи з усунення КС на множину інформаційних можливостей ТЗМ:

$$T_{Vj} = T_{ksi} T_{ksj}^I. \quad (2)$$

Інформаційні потреби відповідно до КС та інформаційні можливості ТЗМ формуються таким чином:

- формується вичерпний перелік усіх можливих інформаційних потреб АСЗОІ (приклад наведено в табл. 1);
- для кожної КС задається двійкова послідовність, у якій «1» відповідає інформаційній потребі із загального переліку, яка стосується цієї КС, а «0» — іншим потребам з переліку;
- для кожного ТЗМ аналогічно задається двійкова послідовність інформаційних можливостей, яка також визначається із загального переліку.

Таблиця 1. Приклад сформованого переліку інформаційних потреб системи

Позначення	Опис
T_{ks1}	Спостереження та виявлення об’єктів
T_{ks2}	Вимірювання відстані до об’єктів
T_{ks3}	Ведення фотозйомки об’єктів
T_{ks4}	Ведення відеозйомки об’єктів
T_{ks5}	Розпізнавання об’єктів
T_{ks6}	Визначення координат об’єктів
T_{ks7}	Перехоплення змістовної інформації
T_{ks8}	Реєстрація та аналіз радіовипромінювань

Відображення знаходиться як результат застосування побітного логічного “Г” між двома двійковими послідовностями. Для числової характеристики відображення застосовується скалярне число N_{T_V} , яке дорівнює кількості одиниць у результуючій двійковій послідовності.

3. Відстань від ТЗМ до центра району ведення моніторингу D визначається так:

$$D_i = \Delta\sigma_i R,$$

$$\Delta\sigma_i = \arctan \frac{\sqrt{(\cos \varphi_2 \sin \Delta\lambda)^2 + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda)^2}}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda}, \quad (3)$$

де $\Delta\sigma$ — кутова різниця; $R = 6372795$ м — радіус Землі; φ_1, φ_2 — широта центра району ведення моніторингу та ТЗМ відповідно; $\Delta\lambda$ — різниця координат по довготі.

Таким чином, маємо перелік частинних показників оптимальності, застосованих для ситуаційного синтезу АСЗОІ відповідно до конкретної КС (1)–(3). При цьому оптимальною буде структура системи, що забезпечує задоволення найбільшої кількості інформаційних потреб, заданих формуляром КС $N_{T_V} \rightarrow \max$; найменшої відстані від центра району ведення моніторингу до ТЗМ $D \rightarrow \min$ з найкращими технічними характеристиками $TX \rightarrow \max$.

Таким чином, маємо систему критеріальних вимог для реалізації структурно-параметричного синтезу:

$$\begin{cases} N_{T_V} \rightarrow \max, \\ D \rightarrow \min, \\ TX \rightarrow \max. \end{cases} \quad (4)$$

Аналіз системи частинних критеріїв (4) дозволяє виявити їх суперечність, що є ознакою багатокритерійності. Тому для розв'язання багатокритерійної задачі структурно-параметричного синтезу використаємо нелінійну схему компромісів у формі дискретної згортки [11, 12]

$$Y(y_0) = \sum_{k=1}^s [1 - y_{0k}(x)]^{-1}, \quad (5)$$

де y_{0k} — нормований частинний критерій оптимальності; s — кількість частинних критеріїв оптимальності.

Для випадку мінімізованих критеріїв агрегації частинні критерії оптимальності нормуються окремо для мінімізованих y_{0l}^{\min} і максимізованих y_{0l}^{\max} [12]:

$$y_{0l}^{\min} = y_l^{\min} \left[\sum_{i=1}^N y_{li}^{\min} \right]^{-1}; \quad y_{0l}^{\max} = \left(y_l^{\max} \sum_{i=1}^N \frac{1}{y_{li}^{\max}} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Реалізувавши нормування частинних критеріїв (6) відповідно до виразу (5) отримуємо *оптимізаційну математичну модель структурно-параметричного синтезу АСЗОІ*:

$$\Psi_j = (1 - N_{T_V j_0})^{-1} + (1 - D_{j_0})^{-1} + (1 - TX_{\Sigma j_0})^{-1} \rightarrow \min. \quad (7)$$

У виразі (7) через $TX_{\Sigma j_0}$ позначено нормоване значення інтегрального показника технічної досконалості ТЗМ, яке формується для кожного

$$TЗМ \text{ як нелінійна згортка (5) його технічних характеристик: } TX_{\Sigma j 0} = \sum_{l=1}^m [1 - TX_{0l}]^{-1} \rightarrow \min.$$

Нормування значень технічних характеристик виконується для кожної характеристики за всіма ТЗМ, для яких вона властива за виразами (6).

Обмеження на кількість використовуваних ТЗМ накладається значенням N_{ARM}^{opt} [13, 14]. Для кожної конкретної ситуації зазначена кількість не є сталою і заздалегідь відомою величиною. Оскільки АСЗОІ містить у своєму складі значну кількість різномірних ТЗМ, кожному виду яких властиві специфічні характеристики ефективності виконання завдань, виникають труднощі у виведенні функціональної залежності показника ефективності від кількості задіяних ТЗМ. Для вирішення цього завдання досить часто використовується ентропійний підхід [15, 16], що дає змогу оцінити ефективність застосування множини ТЗМ за умови їх різномірності. Тому пропонується застосовувати цей підхід для визначення видів ТЗМ, які необхідно залучити для виконання поточного завдання.

Для реалізації ентропійного підходу необхідно знати ентропію системи (АСЗОІ) за кожною поточною ситуацією та інформативність видів ТЗМ. Для виконання розрахунків у межах зазначеного підходу подамо АСЗОІ як об'єднання двох залежних систем — множини класів ТЗМ A та сукупності можливих станів АСЗОІ X .

Ентропія множини ТЗМ за умови перебування системи у стані x_k визначається за виразом [17]

$$H(A | x_k) = - \sum_{i=1}^n p(A_i | x_k) \log p(A_i | x_k), \quad (8)$$

де $p(A_i | x_k)$ — ймовірність використання i -го класу ТЗМ за умови перебування АСЗОІ у k -му стані; n — кількість класів ТЗМ.

Припустімо, що ймовірності застосування кожного з класів ТЗМ є однаковими. Тоді умовні ймовірності $p(A_i | x_k)$ визначатимемо за виразом

$$p(A_i | x_k) = \frac{1}{N_k}, \quad (9)$$

де N_k — кількість ненульових двійкових послідовностей, що є результатами застосування логічної побітної операції «І» між формулярами ТЗМ та послідовністю, що визначає поточний стан системи.

Поточний стан АСЗОІ задається як восьмипозиційна двійкова послідовність, у якій кожен біт відповідає інформаційній потребі системи (табл. 1). Усього існує $2^8 = 256$ можливих станів системи, кожному з яких відповідає цифровий код, що являє собою десятковий вигляд двійкової послідовності (табл. 2).

Таблиця 2. Приклад формування кодів поточних ситуацій

Код поточного стану	Інформаційна потреба							
	T_{ks1}	T_{ks2}	T_{ks3}	T_{ks4}	T_{ks5}	T_{ks6}	T_{ks7}	T_{ks8}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1
...
255	1	1	1	1	1	1	1	1

Інформаційні потреби, які можуть бути задоволені використанням того чи іншого ТЗМ, задаються формуляром засобу. Для прикладу наведено поділ ТЗМ за значеннями формулярів на 6 класів (табл. 3)

Таблиця 3. Поділ ТЗМ на класи за змістом формулярів

Клас ТЗМ	Формуляр							
	I_{ks1}	I_{ks2}	I_{ks3}	I_{ks4}	I_{ks5}	I_{ks6}	I_{ks7}	I_{ks8}
I	1	1	0	0	1	0	0	0
II	0	0	1	1	1	1	0	0
III	0	0	0	0	1	1	0	0
IV	0	0	0	0	0	0	1	1
V	0	0	0	0	1	1	0	1
VI	0	0	0	0	0	1	0	0

Припустімо, що апіорні ймовірності перебування АСЗОІ у k -му стані $p(x_k)$ і використання i -го класу ТЗМ $p(A_i)$ є відомими і становлять:

$$p(x_k) = \frac{1}{256} \approx 0,00391; \quad p(A_i) = \frac{1}{6} \approx 0,16667.$$

Знайдемо інформативності класів ТЗМ, які в загальному випадку можна оцінити як різницю початкової ентропії множини можливих станів АСЗОІ $H(X)$ та умовної ентропії сукупності можливих станів АСЗОІ за умови, що застосовується клас ТЗМ A_i $H(X | A_i)$ [18]:

$$I(A_i) = H(X) - H(X | A_i). \tag{10}$$

Початкова ентропія множини можливих станів АСЗОІ визначається за виразом

$$H(X) = - \sum_{k=1}^m p(x_k) \log p(x_k), \tag{11}$$

де $p(x_k)$ — апіорна ймовірність перебування АСЗОІ у стані x_k ; m — кількість можливих станів АСЗОІ.

Для обчислення умовної ентропії сукупності можливих станів АСЗОІ, якщо застосовується клас ТЗМ A_i , необхідно мати умовні ймовірності перебування АСЗОІ у стані x_k за умови використання класу ТЗМ A_i $p(x_k | A_i)$:

$$H(X | A_i) = - \sum_{k=1}^m p(x_k | A_i) \log p(x_k | A_i). \quad (12)$$

Умовні ймовірності перебування АСЗОІ у стані x_k за умови використання класу ТЗМ A_i знаходять за виразом (формулою Байєса):

$$p(x_k | A_i) = \frac{p(x_k)p(A_i | x_k)}{p(A_i)}, \quad (13)$$

де $p(A_i)$ — апіорна ймовірність застосування класу ТЗМ A_i .

На підставі виразів (8)–(13) отримано такі результати:

1) інформативність класів ТЗМ: $I(A_1) = 0,313$; $I(A_2) = 0,206$; $I(A_3) = 0,414$; $I(A_4) = 0,502$; $I(A_5) = 0,216$; $I(A_6) = 0,994$;

2) значення ентропії за кожною поточною ситуацією $H(A | x_k)$.

У випадку, коли відомо, які класи ТЗМ застосовуються для виконання поточного завдання системи, умовна ентропія множини ТЗМ за умови перебування системи у стані x_k дорівнює 0 ($H^*(A | x_k) = 0$). Тому для прийняття рішення про те, які класи ТЗМ слід застосувати, потрібно отримати кількість інформації $I(x_k) = H(A | x_k) - H^*(A | x_k) = H(A | x_k) - 0 = H(A | x_k)$, що дорівнює значенню умовної ентропії множини ТЗМ за умови перебування системи у стані x_k .

Які саме класи ТЗМ необхідно застосувати, визначимо шляхом перевірки умови:

$$I(x_k) \leq \sum_{i=1}^N I(A_i), \quad (14)$$

де N — кількість залучених класів ТЗМ.

Крім того, перевіряється, чи задовольняє клас ТЗМ хоча б одну з інформаційних потреб, заданих формуляром поточної ситуації:

$$T_{KS} \wedge I_k^{TZR} \neq 0, \quad (15)$$

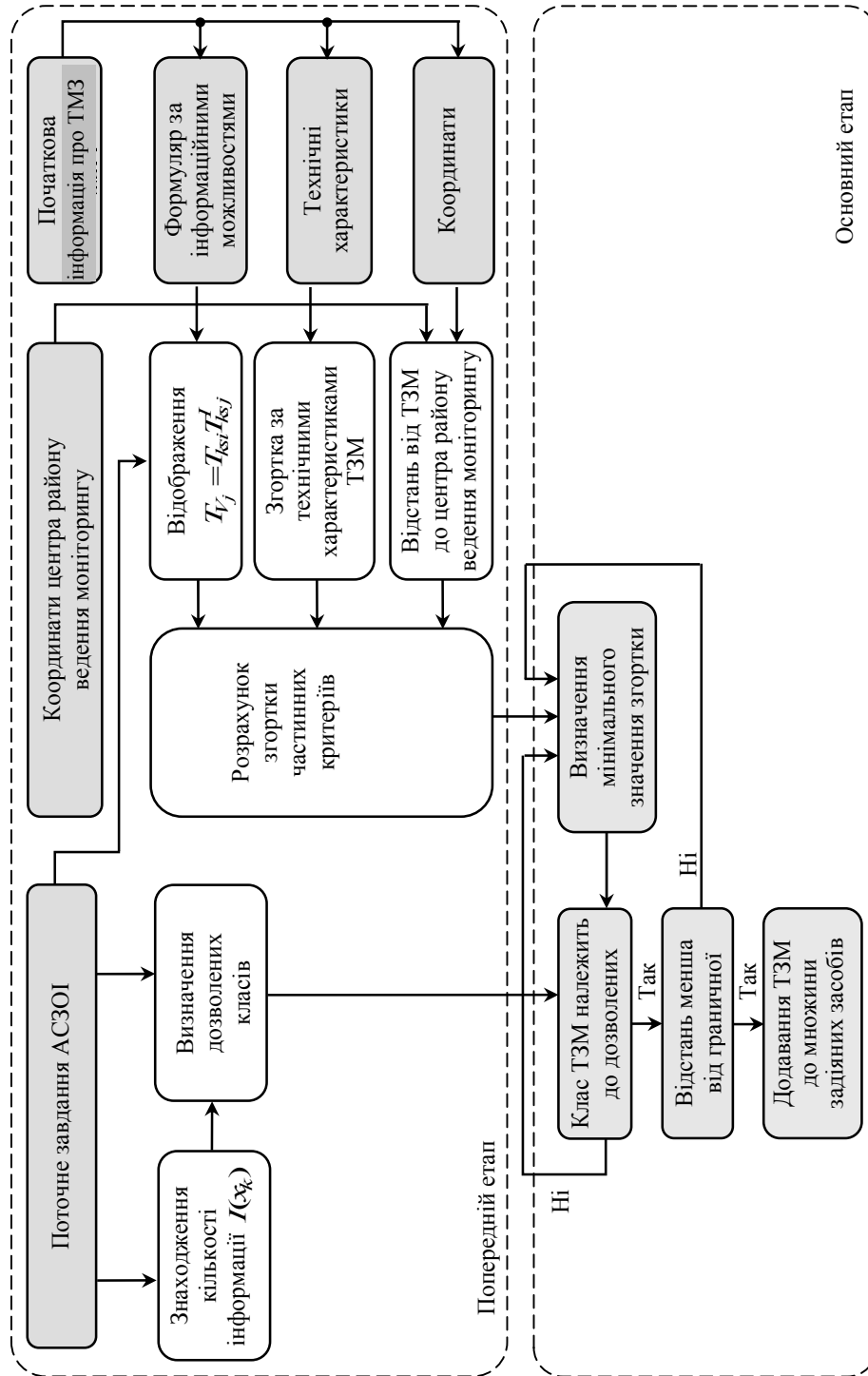
де T_{KS} — формуляр поточного стану системи; I_k^{TZR} — формуляр за інформаційними можливостями k -го класу ТЗМ.

У разі виконання умов (14), (15) приймається рішення про додавання класу ТЗМ до множини дозволених класів. Після визначення множини дозволених класів ТЗМ виконується розрахунок значення згортки частинних критеріїв (7) для кожного ТЗМ зі складу АСЗОІ.

Власне ситуаційний синтез АСЗОІ (вибір ТЗМ, що залучатимуться до виконання поточного завдання системи) здійснюється по черговим вибором засобів з найменшим значенням згортки та одночасної перевірки належності ТЗМ до дозволеного класу. Оскільки кожний ТЗМ має обмеження за дальністю дії, додатково перевіряється умова наявності засобу на відстані від центра району виконання поточного завдання АСЗОІ не більшої, ніж гранична для даного ТЗМ:

$$D_{ij} \leq D_{i \max},$$

де D_{ij} — поточна відстань від j -го ТЗМ i -го виду до центра району виконання завдання; $D_{i \max}$ — максимальна дальність дії ТЗМ i -го виду.



Загальна схема проведення ситуативного синтезу АСЗЩ

У разі виконання умов приймається рішення про додавання i -го ТЗМ до множини засобів, залучених до виконання поточного завдання. У разі зміни завдання відбувається реконфігурація системи. Загальну схему проведення ситуаційного синтезу АСЗОІ показано на рисунку.

ВИСНОВКИ

Ефективність функціонування АСЗОІ визначається рівнем оперативності функціонування системи та виконанням вимог до якості інформації, яку вона надає користувачам. Один зі способів підвищення ефективності полягає у застосуванні ситуаційного синтезу системи найбільш оптимального варіанта побудови (структури) підсистеми реагування на конкретну ситуацію.

Побудована математична модель ситуаційного синтезу АСЗОІ від ТЗМ дозволяє вибрати ТЗМ для виконання поточного завдання системи з використанням дискретної згортки частинних критеріїв оптимальності. На відміну від відомих моделей забезпечено можливість визначати кількість використовуваних різномірних ТЗМ та їх класів, що стало можливим завдяки застосуванню ентропійного підходу та введенню додаткових обмежувальних умов за дальністю дії ТЗР.

Напрямом подальших досліджень є врахування у математичній моделі ситуаційного синтезу АСЗОІ можливості зміни ТЗМ свого положення у процесі виконання поточного завдання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Косс В.А. Особливості процедур планового й кризового управління військовими формуваннями / В.А. Косс // Наука і оборона. — 2004. — № 1. — С. 25–32.
2. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика / Д.А.Поспелов. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
3. Антушев Г.С. Методы параметрического синтеза сложных технических систем / Г.С. Антушев. — М.: Наука, 1986. — 88 с.
4. Баранов Г.Л. Структурное моделирование сложных динамических систем / Г.Л. Баранов, А.В. Макаров. — К.: Наук. думка, 1986. — 272 с.
5. Брахман Т.Р. Многокритериальность и выбор альтернативы в технике / Т.Р. Брахман. — М.: Радио и связь, 1984. — 288 с.
6. Основы моделирования сложных систем: учеб. пособие для студ. вузов / Под ред. И.В. Кузьмина. — К.: Высш. шк., 1981. — 360 с.
7. Сложные технические и эргатические системы: метод использования / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, А.В. Харченко, В.В. Осташевский. — Х.: Факт, 1997. — 240 с.
8. Цвиркун А. Д. Основы синтеза структуры сложных систем / А.Д. Цвиркун. — М.: Наука, 1982. — 200 с.
9. Даник Ю.Г. Математичне забезпечення автоматизованої системи збору та обробки інформації від технічних засобів моніторингу / Ю.Г. Даник, О.О. Писарчук, С.В. Тимчук // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. — 2015. — № 2 (27). — С. 44–53.

10. Харченко В.П. Нелінійне та багатокритеріальне моделювання процесів у системах керування рухом: моногр. / В.П. Харченко, О.О. Писарчук. — К.: Ін-т обдарованої дитини, 2015. — 248 с.
11. Воронин А.Н. Многокритериальные решения: модели и методы: моногр. / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиятдинов, М.В. Куклинский. — К.: НАУ, 2011. — 348 с.
12. Даник Ю.Г. Методика структурно-параметрического синтеза сложной эргатической распределенной информационно-управляющей системы реагирования на конфликтные ситуации / Ю.Г. Даник, А.А. Писарчук // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 2. — С. 80–101.
13. Мельник А.Л. Методика оптимізації структури системи місцевизначення на основі різнотипних засобів / А.Л. Мельник, О.О. Писарчук // Вісн. ЖДТУ. Технічні науки. — 2009. — № 3 (50). — С. 153–160.
14. Писарчук О.О. Методика визначення оптимальної просторової структури багатопозиційної інформаційної системи за нелінійною схемою компромісів [Електронний ресурс] / О.О. Писарчук // Проблеми телекомунікацій. — 2010. — № 2. — С. 107–116 — Режим доступу: http://pt.journal.kh.ua/2010/2/2/102_pisarchuk_compromises.pdf.
15. Файнзильберг Л.С. Математические методы оценки полезности диагностических признаков : моногр./ Л.С. Файнзильберг — К.: «Освіта України», 2010. — 152 с.
16. Анисимов Б.В. Распознавание и цифровая обработка изображений : учеб. пособие для студ. вузов / Б.В. Анисимов, В.Д. Курганов, В.К. Злобин. — М.: Высш. шк., 1983. — 295 с.
17. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. — М.: Наука, 1969. — 576 с.
18. Горелик А.Л. Современное состояние проблемы распознавания / А.Л. Горелик, И.Б. Гуревич, В.А. Скрипник. — М.: Радио и связь, 1985. — 160 с.

Надійшла 16.11.2016

АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ С ПОДАВЛЕНИЕМ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МИЛЯВСКИЙ

Аннотация. Исследовано применение метода инвариантных эллипсоидов для подавления ограниченных возмущений при частичном управлении динамическими процессами в сложных системах разной природы, представленными математическими моделями импульсных процессов в когнитивных картах (КК). При разработке алгоритма подавления ограниченных возмущений применен инструментарий линейных матричных неравенств. Модель динамики импульсных процессов КК разделяется на две взаимосвязанные системы разностных уравнений соответственно с измеряемыми и неизменяемыми координатами вершин КК. Изменения неизменяемых координат учтены в качестве ограниченных возмущений в первой системе уравнений модели КК для импульсных процессов с измеряемыми координатами.

Ключевые слова: когнитивная карта, линейные матричные неравенства, инвариантный эллипсоид, замкнутая система управления, регулятор состояния.

ВВЕДЕНИЕ

Когнитивное моделирование применяется в тех случаях, когда объектом исследования является сложная система большой размерности с многочисленными перекрестными связями. К таким сложным системам можно отнести большинство реальных экономических, социальных, финансовых, политических, экологических, образовательных систем. В основе лежит понятие когнитивной карты (КК), которая согласно работе [1] представляет собой взвешенный ориентированный граф. Координаты вершин (узлов) этого графа отображают компоненты сложных систем, а ребра описывают связи между этими компонентами. Построение КК выполняется экспертами, что позволяет количественно и качественно описать причинно-следственные взаимосвязи между компонентами сложных систем. При воздействии на одну или несколько вершин КК внешних возмущений в виде импульсов в дискретные моменты времени модель КК переходит в динамический переходной режим, который в работе [1] получил название импульсного процесса. Правило изменения значений координат вершин КК при импульсном процессе принято формулировать в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях переменных [1]:

$$\Delta z_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \Delta z_j(k), \quad (1)$$

где $\Delta z_i(k) = z_i(k) - z_i(k-1)$, α_{ij} — весовой коэффициент дуги взвешенного ориентированного графа, которая соединяет j -ю вершину КК с i -й; n —

количество вершин КК. В векторно-матричной форме выражение (1) имеет вид

$$\Delta \bar{z}(k+1) = A \Delta \bar{z}(k), \quad (2)$$

где A — транспонированная весовая матрица смежности КК; $\Delta \bar{z}$ — вектор приращений координат z_i в вершинах КК.

Предположим, что на некоторые вершины КК z_i можно воздействовать извне путем варьирования ресурсами, связанными с координатами вершин. Тогда для разработки системы управления импульсным процессом КК необходимо дополнить модель свободного движения (2) воздействием внешних вынуждающих сил в виде вектора приращения управляющих воздействий, которые приложены непосредственно на изменение координат вершин КК. Тогда можно получить модель управляемого импульсного процесса КК в следующей форме:

$$\Delta \bar{z}(k+1) = A \Delta \bar{z}(k) + B \Delta \bar{u}(k), \quad (3)$$

где $\Delta \bar{u}(k) = \bar{u}(k) - \bar{u}(k-1)$, а матрица управления B формируется проектировщиком системы автоматизированного управления. В работах [2, 3] выполнено проектирование дискретных регуляторов для стабилизации импульсного процесса КК (3) на основе известных методов теории автоматического управления при отсутствии случайных возмущений. Однако предполагается, что координаты всех вершин КК являются измеряемыми в дискретные моменты времени согласно модели (1), (2).

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Координаты вершин КК для различных сложных систем не все измеряются. Например, невозможно точно измерить уровень здоровья населения, уровень демократизации общества, уровень коррупции и теневой экономики, уровень политической или экономической активности и т.д. В теории автоматического управления в дискретном времени [4, 5] неизменяемые переменные состояния многомерного объекта рекомендуется оценивать при помощи наблюдателя Льюэнбергера или фильтра Калмана соответственно при функционировании модели объекта в детерминированной или стохастической среде. Использование этого подхода для реализации систем управления импульсными процессами в КК сложных систем на практике не приемлемо, так как при оценке переменных состояния по фильтру Калмана необходимо иметь информацию о дисперсиях возмущений. Для сложных систем разной природы, модели которых представлены в виде КК, эту информацию получить невозможно. В то же время применение наблюдателя Льюэнбергера для оценки неизменяемых переменных состояния основано на предположении, что система функционирует в детерминированной среде, т.е. при отсутствии случайных возмущений. Однако на координаты сложных систем всегда воздействуют возмущения, которые нельзя не учитывать при оценке неизменяемых координат z_i в модели импульсного процесса КК (1).

Для решения этой проблемы в данной работе выполнена декомпозиция исходной КК (1) сложной системы на две взаимосвязанные КК. При этом n координат вершин z_i исходной КК разделены на p измеряемых вершин

x_i ($i = 1, \dots, p$) и $n - p$ неизмеряемых вершин y_l ($l = p + 1, \dots, n$). Тогда модель импульсного процесса (1) можно представить в виде двух взаимосвязанных импульсных процессов [6]:

$$\Delta x_i(k+1) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta x_j(k) + \sum_{j=p+1}^n d_{ij} \Delta y_j(k), \quad i = 1, \dots, p, \quad (4)$$

$$\Delta y_l(k+1) = \sum_{j=p+1}^n c_{lj} \Delta y_j(k) + \sum_{j=1}^p \psi_{lj} \Delta x_j(k), \quad l = p + 1, \dots, n. \quad (5)$$

Выражения (4) и (5) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k) + D \Delta \bar{Y}(k), \quad (6)$$

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = C \Delta \bar{Y}(k) + \Psi \Delta \bar{X}(k), \quad (7)$$

где \bar{X} — вектор измеряемых координат вершин КК; \bar{Y} — вектор неизмеряемых координат. Матрицы A_1 и C состояются соответственно из коэффициентов a_{ij} и c_{lj} , а матрицы D и Ψ — из коэффициентов d_{ij} и ψ_{lj} . При этом матрицы D и Ψ отображают взаимосвязи между первой (6) и второй (7) частями исходной КК (2).

Для первой части КК (6) влияние вершин $\Delta \bar{Y}(k)$ можно считать неизмеряемыми возмущениями с неизвестными вероятностными характеристиками. В дальнейшем предполагается, что возмущения $\Delta \bar{Y}(k)$ не являются ни случайными, ни гармоническими. Можно только ввести ограничения на величину этих возмущений.

В литературе [7, 8] разработаны методы теории робастного управления, в которых множество возможных состояний $\Delta \bar{Y}(k)$ как возмущений в модели (6) предлагается ограничить по норме L_∞ :

$$\|\Delta \bar{Y}(k)\|_\infty = \sup_{k \geq 0} [\Delta \bar{Y}^T(k) \Delta \bar{Y}(k)]^{1/2} \leq 1. \quad (8)$$

При этом для описания характеристики влияния возмущений типа (8) на траекторию движения динамической дискретной системы (6) в этих работах предложены инвариантные эллипсоиды по переменным состояния $\Delta \bar{X}(k)$ в следующем виде:

$$\varepsilon_{\Delta \bar{X}} = \{\Delta \bar{X}(k) \in \mathbb{R}^n : \Delta \bar{X}^T(k) P^{-1} \Delta \bar{X}(k) \leq 1\}, \quad P > 0, \quad (9)$$

если из условия $\Delta \bar{X}(0) \in \varepsilon_{\Delta \bar{X}}$ следует выполнение условия $\Delta \bar{X}(k) \in \varepsilon_{\Delta \bar{X}}$ для всех дискретных моментов времени $k = 1, 2, 3, \dots$. Матрица P называется матрицей эллипсоида $\varepsilon_{\Delta \bar{X}}$. В работе [8] доказано, что эллипсоид $\varepsilon_{\Delta \bar{X}}$ (9) будет инвариантным для динамической системы (6) с L_∞ -ограниченными возмущениями (8) тогда и только тогда, когда матрица удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$\frac{1}{\alpha} A_1 P A_1^T - P + \frac{D D^T}{1 - \alpha} \leq 0, \quad P \geq P_0, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (10)$$

В работе [8] рассмотрен синтез статической обратной связи по состоянию, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы. При этом задача синтеза сведена к эквивалентным условиям в виде линейных матричных неравенств, которые решаются численными методами.

Для подавления ограниченных возмущений $\Delta\bar{Y}(k)$ в уравнении (6) с измеряемыми координатами состояния $\Delta\bar{X}(k)$ введем вектор управления $\Delta\bar{u}(k)$:

$$\Delta\bar{X}(k+1) = A_1\Delta\bar{X}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + D\Delta\bar{Y}(k), \quad (11)$$

где $\dim \Delta\bar{u}(k) \leq p$. Тогда уравнение регулятора состояния, который реализует статическую обратную связь по состоянию, будет иметь вид

$$\Delta\bar{u}(k) = -K_p\Delta\bar{X}(k). \quad (12)$$

Необходимо отметить, что в модели импульсного процесса (6), как в уравнении состояния, составляющие вектора $\Delta\bar{X}(k)$ полностью измеряются. Поэтому для классической модели в пространстве состояний в данном случае нет необходимости применять уравнение измерения.

Регулятор состояния (12) должен реализовывать оптимальную зависимость скорости изменения вектора управления $\Delta\bar{u}(k)$ от скорости изменения измеряемых координат вершин КК $\Delta\bar{X}(k)$. Поэтому, если координаты $\bar{X}(k)$ не изменяются, то приращение $\Delta\bar{u}(k)$ будет равно нулю. Таким образом, управление $\Delta\bar{u}(k)$ предназначено для стабилизации переходного процесса в динамике сложной системы, представленной моделью импульсного процесса КК (11) при воздействии неизмеряемых возмущений $\Delta\bar{Y}(k)$ в ограниченном диапазоне (8).

Цель работы — разработка алгоритма реализации закона управления (12) импульсным процессом КК для измеряемых координат $\Delta\bar{X}(k)$ (11), обеспечивающего минимальный размер инвариантного эллипсоида (9) по критерию следа матрицы

$$\text{tr } P(\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha^* \leq \alpha < 1, \quad (13)$$

с максимальным подавлением возмущений $\Delta\bar{Y}(k)$ (различной природы), которые можем ограничить только максимальным диапазоном (8). Естественно, минимизация размера инвариантного эллипсоида эквивалентна задаче минимизации матрицы (13) при ограничении типа линейного матричного неравенства (10) согласно работам [7, 8].

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА СОСТОЯНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ПРОЦЕССА В КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ

На основе модели (11) и закона управления (12) уравнение замкнутой системы управления импульсным процессом КК будет иметь вид

$$\Delta\bar{X}(k+1) = (A_1 - BK_p)\Delta\bar{X}(k) + D\Delta\bar{Y}(k). \quad (14)$$

Предполагается, что пара (A_1, B) в модели (11) является управляемой. Тогда линейное матричное неравенство (10) для замкнутой системы (14) приобретает форму

$$\frac{1}{\alpha}(A_1 - BK_p)P(A_1 - BK_p)^T - P + \frac{DD^T}{1-\alpha} \leq 0, \quad (15)$$

и после перемножения членов:

$$\frac{1}{\alpha}(A_1PA_1^T - BK_pPA_1^T - A_1PK_p^TB^T + BK_pPK_p^TB^T) - P + \frac{DD^T}{1-\alpha} \leq 0. \quad (16)$$

Неравенство (16) является нелинейным относительно P и K_p . В работе [8] предложена замена $L = K_pP$, а также введение матрицы $R = R^T$, для которой выполняется дополнительное ограничение

$$\begin{bmatrix} R & L \\ L^T & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (17)$$

Поскольку по формуле Шура при $P > 0$ неравенство (17) эквивалентно $R \geq LP^{-1}L^T = K_pPK_p^T$, то для выполнения неравенства (16) достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\alpha}(A_1PA_1^T - BLA_1^T - A_1L^TB^T + BRB^T) - P + \frac{DD^T}{1-\alpha} \leq 0. \quad (18)$$

Минимизация критерия (13) при ограничениях (17) и (18) выполняется по переменным P, L, R методом полуопределенного программирования, например, путем использования SeDuMi Toolbox на базе MatLab. Пусть $\hat{\alpha}, \hat{P}, \hat{L}, \hat{R}$ обеспечивают минимум (13) при ограничениях (17), (18). Тогда матрица \hat{K}_p оптимального регулятора (12) находится как

$$\hat{K}_p = \hat{L}\hat{P}^{-1}. \quad (19)$$

В этом алгоритме для синтеза матрицы \hat{K}_p не введено ограничения на величину синтезируемого вектора управления $\Delta\bar{u}(k)$. В этом случае можно достичь минимальных значений критерия (13), при которых согласно формулам (12), (19) будут формироваться очень большие, физически нереализуемые составляющие вектора управления $\Delta\bar{u}(k)$. Поэтому необходимо при синтезе регулятора (12) ввести ограничение на управление

$$\|\Delta\bar{u}(k)\| \leq \gamma, \quad \gamma > 0, \quad (20)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Согласно методике [8] обеспечение этого ограничения можно свести к выполнению для матриц P, L линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & L^T \\ L & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0. \quad (21)$$

Таким образом, в этом случае для синтеза оптимальной матрицы регулятора (19) минимизация критерия (13) по переменным P, L, R проводится при совместных ограничениях (17), (18) и (21).

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫМ ПРОЦЕССОМ В КОГНИТИВНОЙ КАРТЕ IT - КОМПАНИИ

В работе [9] построена КК (рис. 1) для исследования сценариев развития IT-компании, на основе которой рассмотрены различные сценарии разработки информационных технологий с точки зрения взаимодействия интеллектуальных активов и финансовых средств для обеспечения высокого качества и конкурентоспособности проекта, минимизации продолжительности его выполнения и получения максимальной прибыли.

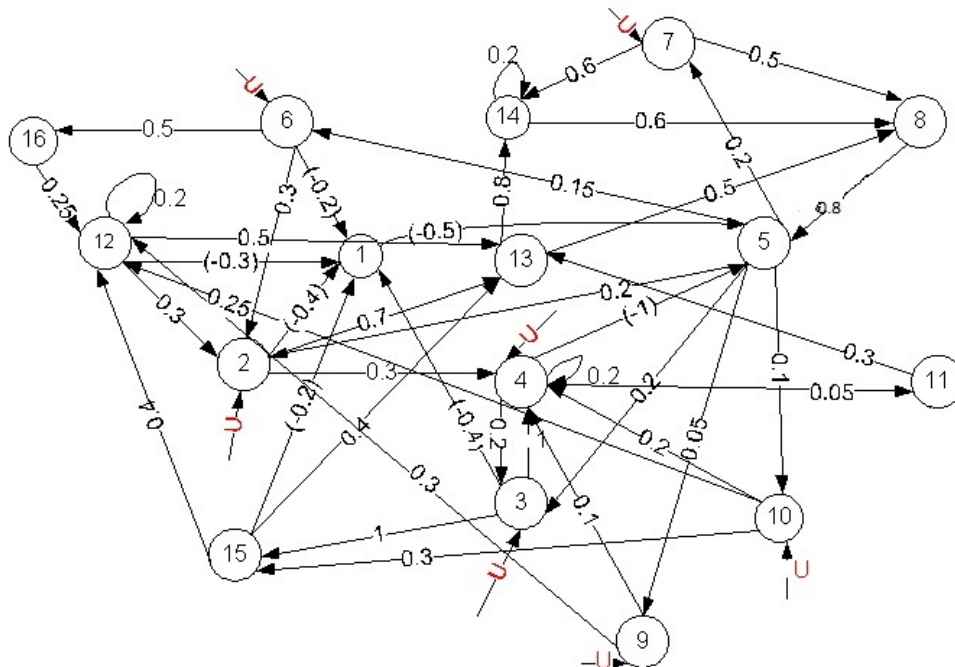


Рис. 1. Когнитивная карта IT-компании

В данной КК есть измеряемые и неизменяемые координаты вершин. Выполним декомпозицию этой КК на две взаимосвязанные части КК. Первая часть КК включает следующие измеряемые координаты вершин: 1 — длительность разработки проекта; 2 — затраты на инновации; 3 — зарплату, премии, бонусы; 4 — бюджет проекта; 5 — прибыль; 6 — затраты на функционирование группы менеджеров; 7 — затраты на маркетинг; 8 — продажу однотипных проектов; 9 — затраты на проведение переподготовки; 10 — затраты на повышение квалификации.

Вторая часть КК включает неизменяемые координаты вершин: 11 — технический контроль; 12 — интеллектуальные активы; 13 — качество проекта; 14 — конкурентоспособность; 15 — удовлетворенность работой; 16 — обмен опытом, информационное взаимодействие.

Ребра между вершинами КК установлены на основе причинно-следственных связей, а весовые коэффициенты для каждого ребра определены экспертами согласно уровню влияния одной вершины на другую.

Для уравнения импульсного процесса первой части КК с измеряемыми координатами вершин $\Delta\bar{X}$ (11) векторы координат будут иметь составляющие: $\Delta\bar{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5, \Delta x_6, \Delta x_7, \Delta x_8, \Delta x_9, \Delta x_{10})^T$, $\Delta\bar{Y} = (\Delta y_{11}, \Delta y_{12}, \Delta y_{13}, \Delta y_{14}, \Delta y_{15}, \Delta y_{16})^T$. Вектор управления $\Delta\bar{u}$ имеет такие составляющие: $\Delta\bar{u} = (\Delta u_2, \Delta u_3, \Delta u_4, \Delta u_6, \Delta u_7, \Delta u_9, \Delta u_{10})^T$, в котором Δu_i воздействует непосредственно на i -ю вершину КК путем изменения ресурсов этой вершины.

Уравнение второй части КК (7) с неизменяемыми координатами вершин $\Delta\bar{Y}$ имеет тот состав векторов $\Delta\bar{X}$ и $\Delta\bar{Y}$, что и в первой части КК. При этом вектор $\Delta\bar{Y}$ представляет внешние неконтролируемые ограниченные по амплитуде возмущения для модели (11). Согласно КК (рис. 1) матрицы A_1, B, D в модели (11) будут равны:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ -0,5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -0,3 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для модели второй части КК (7) матрицы C, Ψ равны:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,25 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,25 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости $R_c = (B \ A_1 B \ A_1^2 B \dots A_1^9 B)$ имеет ранг, равный 10, поэтому система (11) управляема. Моделирование замкнутой системы управления (14) проведено при подаче возмущения на вершину 12 (интеллектуальные активы) и на вершину 14 (конкурентоспособность).

Графики переходных процессов координат вершин КК x_i и y_i при подаче возмущения на вершину 12 в сторону уменьшения координаты, что соответствует утечке интеллектуальных активов, показаны на рис. 2. Пунктиром обозначены переходные процессы при отсутствии управлений согласно модели (6), а сплошными линиями — координаты вершин согласно модели (12) при подаче ограниченных (согласно неравенствам (20), (21)) синтезированных управлений $\Delta \bar{u}(k)$, графики которых показаны на рис. 3.

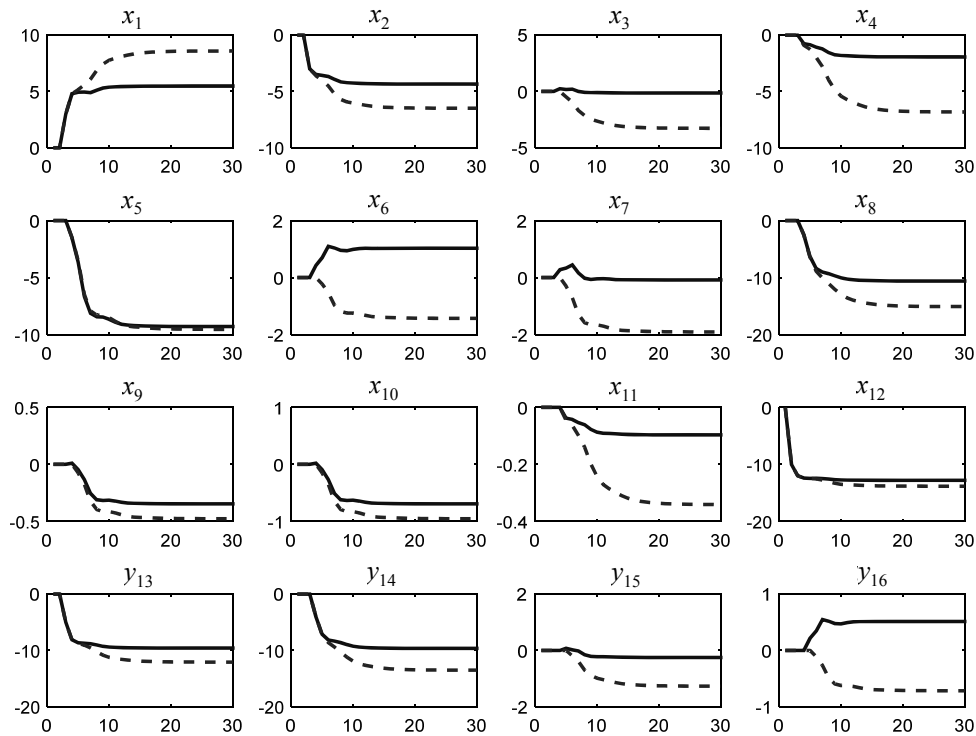


Рис. 2. Управляемый импульсный процесс при возмущении в вершине 12

На рис. 4 показаны графики переходных процессов при подаче возмущения на вершину 14 (конкурентоспособность) в сторону уменьшения. При этом на синтезированные управляющие воздействия также введены

ограничения согласно неравенствам (20), (21). Графики синтезированных ограниченных по амплитуде управляющих воздействий показаны на рис. 5.

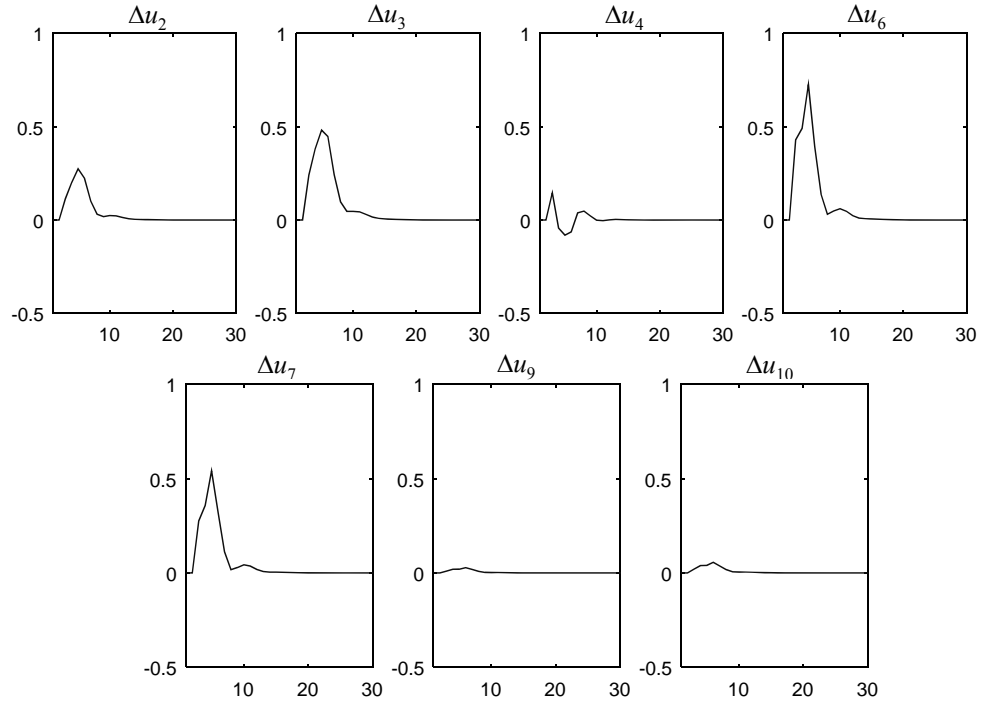


Рис. 3. Управляющие воздействия при возмущении в вершине 12

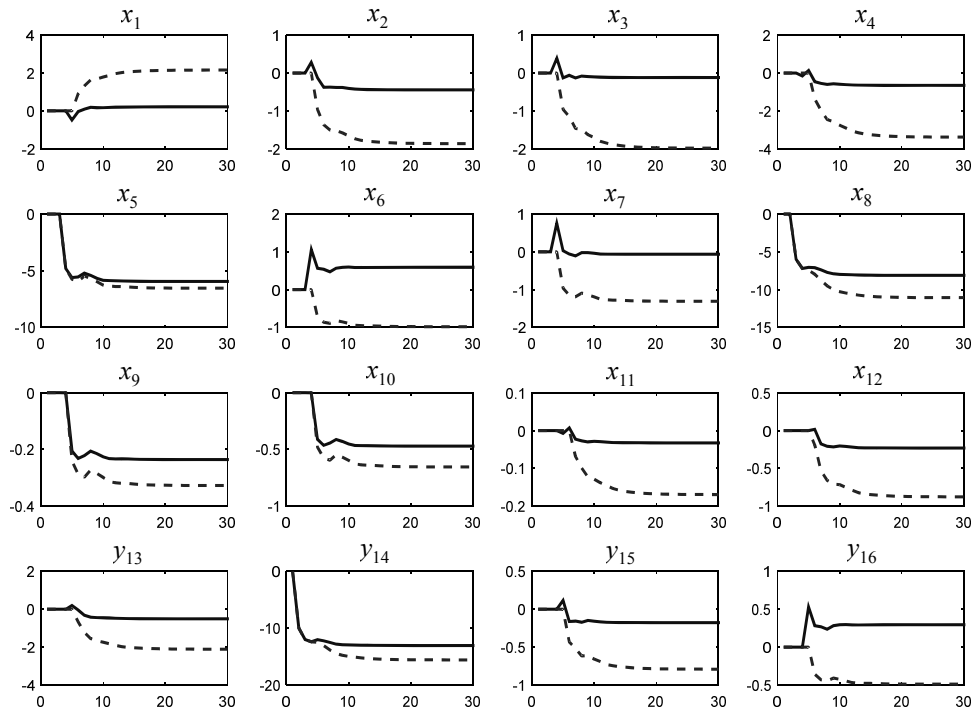


Рис. 4. Управляемый импульсный процесс при возмущении в вершине 14

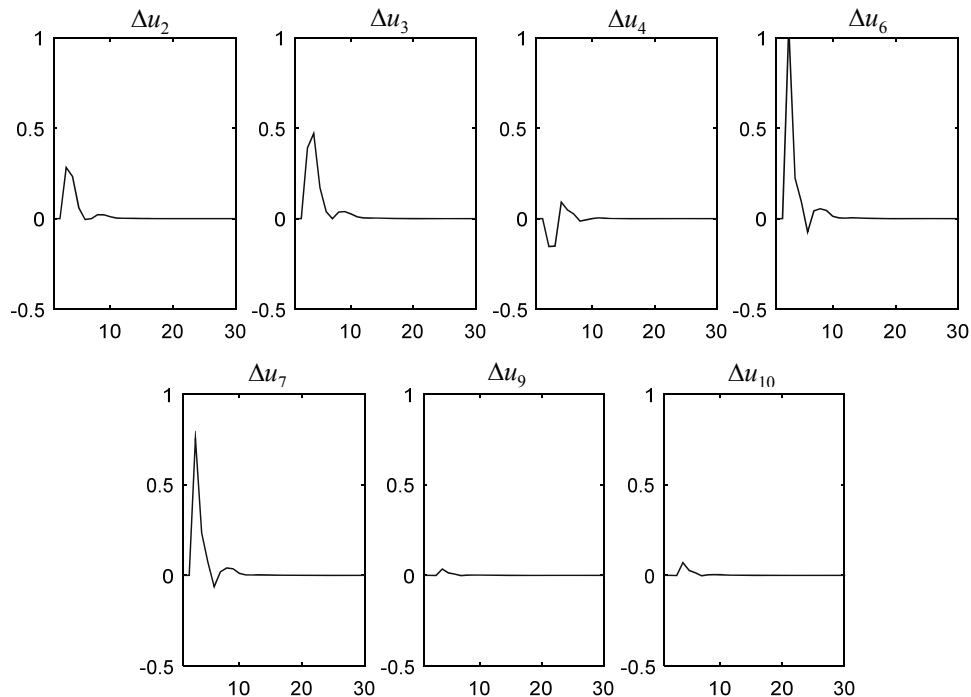


Рис. 5. Управляющие воздействия при возмущении в вершине 14

ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрено применение метода инвариантных эллипсоидов для подавления ограниченных возмущений в динамических режимах сложных систем на основе математических моделей импульсных процессов в КК. Для этого модель импульсного процесса КК разделена на две взаимосвязанные системы разностных уравнений, составленных соответственно для описания динамики измеряемых и неизменяемых координат вершин КК. Изменение неизменяемых координат в первой системе разностных уравнений учтено в качестве неконтролируемых ограниченных возмущений с неизвестными вероятностными характеристиками. На основе первой системы разностных уравнений спроектирована замкнутая система управления в дискретном времени, в которой формируются управляющие сигналы, воздействующие непосредственно на некоторые измеряемые координаты КК. При разработке алгоритма подавления ограниченных возмущений в замкнутой системе управления применен инструментарий линейных матричных неравенств.

Экспериментальные исследования проведены путем цифрового моделирования неуправляемой системы и замкнутой системы управления импульсным процессом в КК ИТ- компании при подаче возмущений на вершины КК, которые отображают интеллектуальные активы и конкурентоспособность выпускаемой продукции. На основе графиков переходных процессов сравнены динамики изменения координат вершин КК при отсутствии управления (в свободном движении) и при подаче синтезированных управляющих воздействий. По сравнению с неуправляемым процессом при пода-

че синтезированных управляющих воздействий значительно уменьшилась длительность разработки проекта, улучшилось качество проекта, увеличились объемы продаж. Это произошло за счет увеличения затрат на маркетинг, зарплаты сотрудников, функционирование группы менеджеров и на инновации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roberts F.* Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems / F. Roberts // Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976. — 559 p.
2. *Романенко В.Д.* Метод адаптивного управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах на основе эталонных моделей / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский, А.А. Реутов // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 2. — С. 35–45.
3. *Романенко В.Д.* Стабилизация импульсных процессов в когнитивных картах сложных систем на основе модальных регуляторов состояния / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Кибернетика и вычислительная техника. — 2015. — Вып. 179. — С. 43–55.
4. *Изерман Р.* Цифровые системы управления / Р. Изерман. — М.: Мир, 1984. — 541 с.
5. *Острём К.* Системы управления с ЭВМ / К. Острём, Б. Виттенмарк. — М.: Мир, 1987. — 480 с.
6. *Романенко В.Д.* Адаптивное координирующее управление соотношениями координат вершин взаимодействующих когнитивных карт в режиме импульсных процессов / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 3. — С. 109–120.
7. *Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
8. *Назин С.А.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов / С.А. Назин, Б.Т. Поляк, М.В. Топунов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
9. *Романенко В.Д.* Исследование сценариев развития IT-компании на основе принятия решений в режиме управления импульсными процессами когнитивных карт / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский, М.В. Поляков и др. // Тезисы докладов 1-го междунар. научно-практ. форума «Наука и бизнес», Днепропетровск, Noosphere (29–30 июня 2015 г.). — С. 233–237.

Поступила 13.04.2017

ТЕХНОЛОГІЯ ВИЗНАЧЕННЯ КЛЮЧОВИХ ТОЧОК НА ОСНОВІ СТАБІЛЬНИХ МЕЖ ОБ'ЄКТІВ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, А.Ю. КОБЗАР

Анотація. Подано ефективну технологію виділення ключових точок на основі меж об'єктів. Наведено опис програмного забезпечення для синтезу експериментальних даних та процесу перевірки результатів роботи різних методів виділення. Створено алгоритм з максимально стійким результатом та швидкодією, який можна використовувати в режимі реального часу. Завдяки високій стійкості запропонованої технології досягається більш ефективна робота алгоритмів реєстрації на наступних етапах.

Ключові слова: реєстрація зображень, оброблення зображень, пошук меж, пошук ключових точок, фотограмметрія, побудова панорамних знімків.

ВСТУП

Збільшення обчислювальних потужностей в останні роки значною мірою посприяло розвитку алгоритмів оброблення зображень та зробило їх доступними для використання на портативних пристроях, таких як ноутбуки та смартфони. Одним з напрямів оброблення зображень є завдання реєстрації, що полягає в пошуку відповідності між об'єктами, показаними на різних зображеннях. Переважна більшість застосувань методів реєстрації зображень пов'язана з фотознімками, або кадрами відеоряду.

Найбільш очевидним їх використанням є побудова панорамних зображень [1]. На першому етапі програмного комплексу склеювання панорамних знімків здійснюється пошук взаємної орієнтації сусідніх зображень на основі об'єктів, наявних на обох зображеннях одночасно. Цей пошук реалізовується за допомогою алгоритмів реєстрації зображень.

Згадані методики використовуються у фотограмметрії. Під цим терміном розуміють відновлення просторової структури фізичних об'єктів на основі їх фотознімків. Останнім часом розвиваються проекти, які додатково використовують інформацію з камери глибини, зокрема, Google Project Tango [2], GeoCV [3], matterport [4] та ін. [5, 6]. Це дозволяє отримати додаткову інформацію про такі проблемні об'єкти, як дзеркала та інші блискучі предмети. У цьому випадку реєстрація зображень допомагає знайти одні і ті самі об'єкти на знімках з різних камер. Завдяки відомому положенню цих

об'єктів на наступних етапах локалізується взаємне розміщення точок зйомки в просторі.

Типова схема алгоритму реєстрації зображень складається з таких етапів:

- 1) виділення характерних точок на зображеннях;
- 2) побудови числових векторів властивостей (дескрипторів) для знайдених точок;
- 3) зв'язування характерних точок різних зображень у пари на основі їх дескрипторів;
- 4) фільтрації пар ключових точок для зменшення кількості хибних елементів;
- 5) пошуку параметрів моделі взаємного розміщення зображень (для панорами — це 3 кути повороту, для задач фотограмметрії — 3 кути повороту та 2 кути, що описують напрямок від першої точки зйомки до другої).

У цій схемі більшість обчислень припадає на перший етап. Типовий розмір вхідного зображення для алгоритмів реєстрації — 640×480 пікселів — це близько 300 000 точок. Щоб отримати задовільний результат алгоритму виділення характерних елементів, необхідно врахувати значення кожної з точок зображення, тоді як на наступних етапах кількість точок, що залишилися для подальшого оброблення, зменшується більш ніж на два порядки. Важливою функцією цього етапу є їх просторова локалізація (ключові точки обираються на певній відстані одна від одної). Це дозволяє розробити технологію побудови дескрипторів стійкою до незначних зміщень об'єктів.

У проведеному дослідженні було побудовано технологію виділення характерних точок на основі властивостей меж об'єктів, що розташовані на зображенні.

Мета роботи — створення швидкодіючого алгоритму, стійкого до афінних та просторових перетворень. Під мірою стійкості розуміють відсоток ключових точок одного зображення, які збігаються з ключовими точками іншого зображення. Велика частка таких збігів свідчить про якість алгоритму, що виражається у підвищенні точності та швидкості роботи алгоритмічного комплексу на наступних етапах за рахунок більш достовірних вхідних даних.

СИНТЕЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Використання реальних зображень під час розроблення не дозволяє повною мірою оцінити якість отриманого результату. Це зумовлено тим, що під час звичайного фотознімання неможливо відслідкувати зміну положення камери в просторі, а також бракує інформації про співвідношення об'єктів, зображених на знімках. Для отримання такого роду інформації слід використовувати спеціальне обладнання, що також має свої похибки, які необхідно додатково враховувати.

Альтернативним вирішенням цієї проблеми є синтез експериментальних даних за допомогою графічної бібліотеки OpenGL. Використання таких зображень дає змогу отримати повну інформацію про розташування камер під час знімання та про зображені на них об'єкти. Ще однією перевагою та-

кого підходу є відсутність шумів, що дозволяє додати їх у потрібній кількості після формування зображень.

Саме тому в межах цієї роботи використовувалися синтезовані зображення, максимально наближені до реальних фотознімків. Для цього на рельєф реальної місцевості накладалися супутникові знімки. Як джерело знімків взято зображення з публічної кадастрової карти України [7] (рис. 1), а інформацію про висоти місцевості — із Shuttle Radar Topography Mission [8] (рис. 2). Отримані зображення максимально наближені до даних, які надходять з безпілотних літальних апаратів, що набули широкого застосування за останні декілька років. Гірську місцевість обрано через те, що її поверхня має значні відхилення від площини і дозволяє врахувати всі можливі деталі розроблюваного алгоритму.

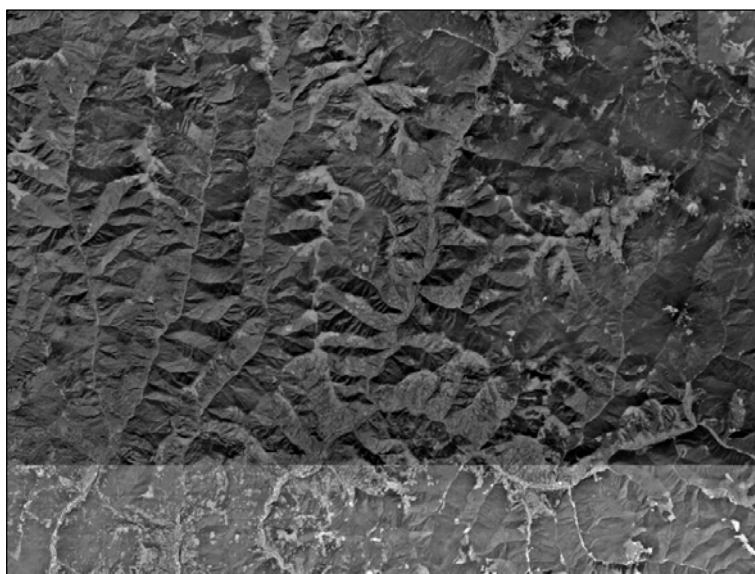


Рис. 1. Супутниковий знімок. Рахівський район Закарпатської області

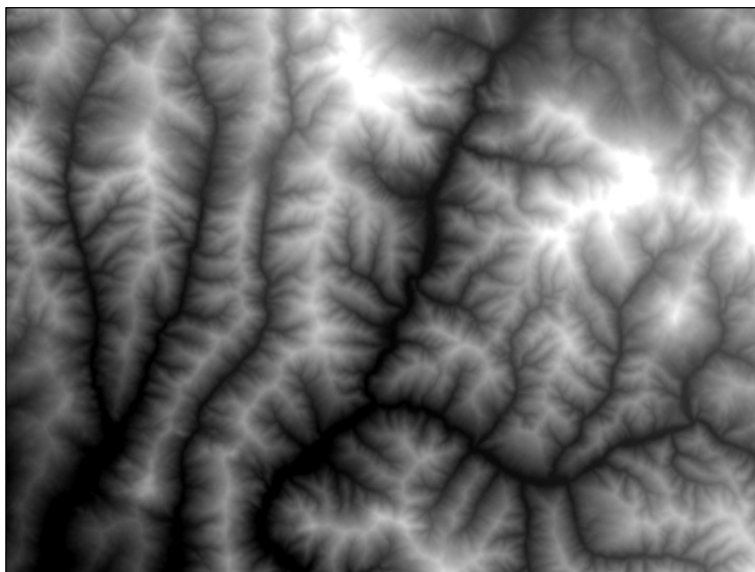


Рис. 2. Рельєф місцевості. Темні ділянки — низини, світлі — підвищення

Програму синтезу розроблено в середовищі Visual Studio Community 2015 з використанням мови програмування C#. Виведення тривимірної графіки здійснювалося засобами бібліотеки OpenGL 3.2.

Результатом роботи програми є серія зображень рельєфу текстурованого супутниковими знімками (рис. 3). До кожного з них додається положення камери в момент генерації зображення та набір відстаней від центра проєкції до всіх видимих точок на рельєфі (рис. 4). Завдяки цим даним можна визначити положення точок у просторі та оцінити точність роботи алгоритмів виділення особливостей.



Рис. 3. Результат проєктування

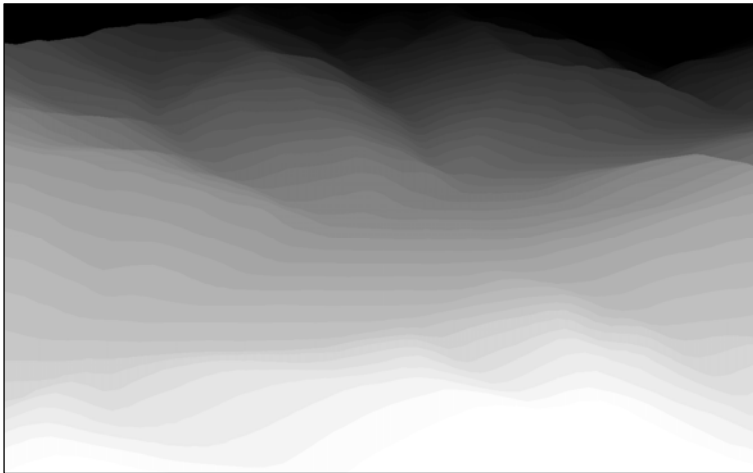


Рис. 4. Відстані від камери до точок, зображених на проєкції місцевості

Можливість перевірки ефективності роботи дозволяє порівняти стійкість запропонованого підходу з уже відомими, такими як SIFT [9] і MSER [10].

ТЕХНОЛОГІЯ ВИДІЛЕННЯ КЛЮЧОВИХ ТОЧОК

На вхід розробленого алгоритму подається зображення, а результатом його роботи є множина ключових точок. Він складається з 8 кроків.

Перший крок. Робота алгоритму починається із завантаження зображення, яке з кольорового зображення переводиться у відтінки сірого (grayscale) таким чином:

$$y = \left\lfloor \frac{77r + 150g + 29b}{256} \right\rfloor,$$

де y — яскравість пікселя у відтінках сірого; r , g , b — насиченість червоним, зеленим та синім кольорами відповідного пікселя вхідного зображення. Їх значення містяться в інтервалі від 0 до 255 включно. Перетворення виконується в цілих числах для збільшення швидкодії алгоритму.

Другий крок. Виконується розмиття зображення гаусіаном з параметром $\sigma = 3$. Ця процедура необхідна для ефективнішого виділення межі на фоні шумів зображення та правильного оброблення різких змін їх орієнтацій. Процес розмиття реалізовується у вигляді згорток зображення ядром гаусіана:

$$f(x_0, x) = e^{-\frac{(x_0 - x)^2}{2\sigma^2}}.$$

Оскільки піксели на зображенні розміщені у вигляді дискретної ґратки, то і згортка буде дискретною. Для збільшення швидкості роботи результат функції f попередньо розраховується для цілих значень $x_0 - x$ в інтервалі від -3σ до 3σ . Ці значення нормуються таким чином, щоб їх сума дорівнювала 2^{16} . Однією з властивостей двовимірної згортки гаусіаном є те, що вона розкладається на композицію двох одновимірних згорток — по вертикалі та по горизонталі. Обчислення згорток ведеться в цілих числах, що є можливим завдяки описаному нормуванню ядра. Урахування кольорів сусідніх точок під час розмиття дозволяє підвищити точність подання яскравостей пікселів зображення з 8 до 16 біт. Такі модифікації позитивно позначаються на якості роботи наступних етапів алгоритму та на швидкості розмиття.

Третій крок. Після розмиття здійснюється пошук градієнтів у кожній точці зображення за формулою

$$G(x, y) = (I(x + 1, y) - I(x - 1, y), I(x, y + 1) - I(x, y - 1)),$$

де $I(x, y)$ — яскравість відповідного пікселя зображення. Якщо параметрами функції G є координати точки, розміщеної біля межі, тоді замість сусідніх точок, що виходять за межі зображення, беруться їх найближчі сусідні точки з поверхні знімка. З урахуванням цього доповнення формула набуває такого вигляду:

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} I(\min(x + 1, W - 1), y) - I(\max(x - 1, 0), y) \\ I(x, \min(y + 1, H - 1)) - I(x, \max(y - 1, 0)) \end{pmatrix}^T,$$

де W і H — ширина та висота зображення відповідно, а нумерація пікселів починається з позиції $(0, 0)$. Знайдені значення градієнтів зменшують у 2^k , $k \geq 0$ рази, де k обирається таким чином, щоб максимальне значення градієнта за модулем було меншим ніж 2^{10} . Градієнти безпосередньо

позв'язані з межами об'єктів зображення і надалі використовуватимуться лише вони. Це автоматично робить запропонований алгоритм стійким до змін яскравості на знімках.

Четвертий крок. На завершальній стадії алгоритму (фільтрації знайдених ключових точок) знадобляться середні значення величин градієнтів в околі кожної такої точки. Тому після знаходження градієнтів розраховуються значення їх модулів у кожній точці зображення та проводиться їх розмиття. Щоб уникнути тривалих розрахунків процедури розмиття, розмір знайденого масиву зі значеннями градієнтів зменшують у 2 рази по вертикалі та 2 рази по горизонталі. Цей крок пришвидшує розмиття за рахунок зменшення площі масиву в 4 рази та величини ядра у 2 рази. Таким чином досягнуто восьмикратного зменшення кількості операцій на етапі розмиття.

П'ятий крок. Визначається положення найближчої межі відносно кожної точки зображення. На цьому кроці відкидаються точки, що розміщені на відстані 3 і більше пікселів від найближчої межі. Оскільки після розмиття зображення велика кількість малопомітних меж втратилася, то цей крок дозволяє далі не враховувати більшість точок зображення. Характерною ознакою межі є те, що на ній досягає локального максимуму сума проєкцій градієнтів точок околу на напрямок градієнта в точці цієї межі. Інакше кажучи, при русі в напрямках градієнта або антиградієнта на межі досягається локальний максимум проєкції градієнта на цей напрямок. Для досягнення субпіксельної точності для кожної точки зображення P будемо шукати її відстань до межі в напрямку градієнта. Для цього виділимо 6 прямокутників A_i розміром 1×2 піксели, які розташовані послідовно і формують прямокутник розміром 6×2 піксели, у центрі якого міститься точка P . Повернемо цей прямокутник таким чином, щоб його більша сторона збігалася з напрямком градієнта в точці P . Для кожного з прямокутників A_i знаходимо значення V_i як суму проєкцій градієнтів пікселів, що перетинаються з ним (піксел розглядається як квадрат), помножену на площу їх перетину. Якщо максимальне значення масиву V розміщене або на початку, або в його кінці, тоді точка P вважається далекою від межі і більше не розглядається. У протилежному випадку на основі елементів масиву V шукається положення межі на прямій градієнта точки P як розв'язок задачі мінімізації, що апроксимує значення V_i параболою

$Ax^2 + Bx + C$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{25}{4}A - \frac{5}{2}B + C - V_1 \right)^2 + \left(\frac{9}{4}A - \frac{3}{2}B + C - V_2 \right)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B + C - V_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + C - V_4 \right)^2 + \\ & + \left(\frac{9}{4}A + \frac{3}{2}B + C - V_5 \right)^2 + \left(\frac{25}{4}A + \frac{5}{2}B + C - V_6 \right)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Розв'язком екстремальної задачі є такі величини:

$$A = \frac{5}{56}(V_1 + V_6) - \frac{1}{56}(V_2 + V_5) - \frac{1}{14}(V_3 + V_4);$$

$$B = \frac{1}{7}(V_6 - V_1) + \frac{3}{35}(V_5 - V_2) + \frac{1}{35}(V_4 - V_3).$$

Максимуму парабола досягає в точці $-\frac{B}{2A}$. Якщо це значення перевищує 3, то точка вважається далекою від межі, інакше воно множить на вектор напрямку градієнта в точці P і зберігається як зміщення межі відносно цієї точки в масиві $O(x, y)$. Найбільшу кількість розрахунків на цьому етапі становить пошук площ перетину прямокутників A_i та пікселів зображення. Щоб уникнути обчислювальних затрат, напрямки векторів градієнтів обмежуються 256 можливими варіантами і для всіх цих значень відшукуються площі перетину. Точність на етапі попередніх розрахунків забезпечується використанням чисел з плаваючою комою, тоді як під час основних розрахунків використовуються лише цілочислові операції.

Шостий крок. Із напрямків до меж формуються точки, на основі яких будуватимуться лінії на зображенні. Цей крок складається з двох частин. У першій частині послідовно беруться всі пари сусідніх по горизонталі точок. Якщо ці точки (x, y) і $(x+1, y)$ розміщені близько до межі і виконуються умови

$$O_x(x, y) > 0; O_x(x+1, y) < 0;$$

$$3(O_x(x, y) - O_x(x+1, y)) > |O_y(x, y) - O_y(x+1, y)|,$$

то в перелік точок додається елемент з координатами $\left(x + \frac{O_x(x, y)}{O_x(x, y) - O_x(x+1, y)}, y\right)$. Аналогічним чином пари сусідніх точок по вертикалі опрацьовуються у другій частині цього кроку.

Сьомий крок. На ньому будуються лінії меж у зображенні. Їх конструювання починається з оброблення знайдених на попередньому етапі точок. Для кожної точки P виконуються такі операції. Спочатку з'ясовується чи не оброблялася якась точка на відстані $\sqrt{2,5}$ пікселів від поточної. Якщо оброблялася, тоді в більшості випадків лінія, на якій міститься точка P , вже додавалася і тому відбувається перехід до наступної точки. Якщо лінія ще не додавалася, вважається, що вона буде додана при виборі іншої точки з цієї лінії. Якщо ні точка P , ні сусідні точки не оброблялися, тоді починається процедура додавання лінії.

Процедура уточнення положення точки K починається з визначення значення градієнта шляхом кубічної інтерполяції функції $G(x, y)$. Далі визначаються зміщення O_1 за схемою, описаною на п'ятому кроці алгоритму, а також точки $K_1 = K + O_1$ і $K_2 = K_1 + O_1$. Так само для точки K_2 знаходиться значення зміщення O_2 . Якщо $O_1 O_2 < 0$, тоді межі містяться між точками K і K_2 і положення точки K становить:

$$K + \frac{2O_1}{1 - \frac{O_1 O_2}{O_1^2}}$$

Інакше положення переміщається до межі:

$$K_2 + O_2.$$

Якщо у процесі ітераційної процедури або $|O_1|$, або $|O_2|$ виявилися більшими ніж 3, тоді уточнення положення точки вважається неуспішним. Ця процедура повторюється декілька разів. У межах запропонованого алгоритму емпірично встановлено, що 5 ітерацій дають достатню точність.

Повернемося до процедури додавання лінії. Вона починається із застосування уточнення положення точки P . Якщо в процесі уточнення відбулося віддалення на 2 піксели від початкового місця, тоді є небезпека наближення до лінії, яка вже додавалася, і тому оброблення точки P зупиняється. Далі алгоритм починає додавати точки у двох напрямках. Початкове положення другої точки лінії P' відносно першої P напрямлене перпендикулярно до градієнта в точці P . Після цього уточнюється положення P' за аналогічною до описаної вище схемою, за винятком того, що після кожної ітерації вектор $|P - P'|$ нормується шляхом зміщення точки P' . Інші точки додаються за аналогічною схемою з урахуванням того, що їх початкове положення розраховується як

$$P_{i+1} = 2P_i - P_{i-1}.$$

Процес додавання точок до лінії зупиняється у випадку, якщо виконується одна з таких умов:

- в околі точки радіусом $\sqrt{2,5}$ піксела є точка, яка уже додавалася (і вона відрізняється від попередньої);
- кут між лінією та градієнтом в точці менший від порогового значення $\frac{\pi}{12}$;
- поворот лінії перевищує порогове значення $\frac{\pi}{2}$.

Другий напрямок, у якому алгоритм додає точки до лінії, як і перший перпендикулярний до градієнта точки P , але зорієнтований у протилежний бік. Результатом роботи цього етапу є набір ліній, стабільних до типових перетворень зображення.

Восьмий крок. На ньому виділяються окремі точки на лініях. В основу його роботи покладено характеристику $D(P)$ кожної точки ліній, яка являє собою значення відстані від самої точки до прямої, що з'єднає точки лінії, які віддалені від P на 3 піксели по різні боки. Якщо для точки P значення функції D більше ніж для сусідніх точок по лінії, тоді вона розглядається як потенційна бути ключовою точкою. Для більшої точності її положення наближується параболою відповідно до значень функції D для самої точки та найближчих сусідніх точок.

Після отримання екстремальних точок описаним способом відбувається їх остаточна фільтрація за допомогою підібраних критеріїв з метою досягнення найбільш стабільного результату. Перелік знайдених критеріїв для точки P :

- різниця між значенням $D(P)$ та максимальним значенням $\max_i D(P_i)$, де P_i — точки, віддалені на 1, 1,5 та 2 піксели по обидва боки від точки P на лінії, не менша ніж 0,1;
- відстань від краю лінії не менша ніж 3;
- відношення довжини градієнта в точці P до середньої довжини градієнта в її околі більше ніж 1,4.

ПІДБІР ПАРАМЕТРІВ АЛГОРИТМУ

Останній етап описаного алгоритму передбачає визначення критеріїв фільтрації, які дозволять досягнути максимальної стабільності отриманого результату. Для розв'язання поставленого завдання було розроблено окремий програмний модуль, який дозволяє перевіряти вплив заданих обмежень та графічно виводити параметри стійкості для всіх порогових значень в обраному інтервалі (рис. 5).

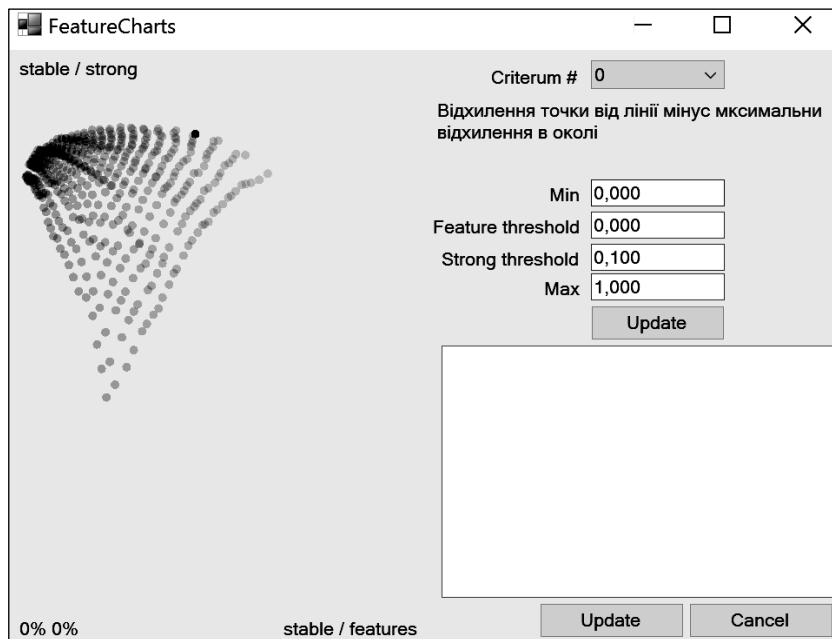


Рис. 5. Вікно підбору меж для критеріїв фільтрації та класифікації ключових точок

У випадковому списку «Criterion #» вибирається номер критерію, який підлягає оптимізації. До розгляду введено такі критерії:

- $D(P) - \max \left(\min_{Q \in [P-2, P]} D(Q), \min_{Q \in [P, P+2]} D(Q) \right)$, де P — точка, яка розглядається; $D(Q)$ — відстань від Q до відрізка, що з'єднує точки на межі, віддалені на 3 піксели від Q (у різні боки);

- $D(P)/\max\left(\min_{Q \in [P-2, P]} D(Q), \min_{Q \in [P, P+2]} D(Q)\right)$;
- відстань від точки P до краю лінії, на якій вона розміщена;
- косинус кута між нормаллю $N(P)$ до лінії в точці P та градієнтом $G(P)$;
- $|G(P)|/|G(Q)| \mid Q \in O(P)$;
- $(G(P), V(P))/|G(Q)| \mid Q \in O(P)$, де $V(P)$ — нормований напрямок уздовж лінії в точці P .

Параметрами для критеріїв є два порогові значення, перехід через одне з них означає належність точки до множини ключових точок, а перехід через друге — до більш стійкої підмножини цих точок. На графіку, розміщеному в лівій частині вікна, зображено статистичні дані, отримані для різних порогових значень поточного критерію. Значення інших критеріїв — фіксовані. На основі графіка окремо підбираються найкращі значення порогів для кожного з критеріїв. У результаті пошуку параметрів за допомогою розробленого модуля виділено лише 3 найголовніші критерії і знайдено для них оптимальні порогові значення.

ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ З ІНШИМИ ТЕХНОЛОГІЯМИ

Підхід, який полягає у використанні двох порогових значень, дозволяє збільшити відношення кількості сформованих пар до кількості перевірок, які виконуються для їх побудови. Для цього база пошуку ключових точок формується з тих, які пройшли слабший критерій, а пошук в базі здійснюється для ключових точок іншого зображення, які пройшли більш сильний критерій (стійкі ключові точки). Такі дії дозволяють урахувати те, що при переході до іншого зображення точка перестає відповідати критерію ключової. У запропонованій технології більшість описаних випадків зводяться до переходу точки з множини стійких до звичайних, які також наявні в базі, на основі якої формуються пари ключових точок.

Використання цієї ідеї та описаного алгоритму в цілому дає змогу значно випередити інші алгоритми за показником стабільності результату, не втративши при цьому в швидкодії.

Тестування якості результату проводилося на наборі синтезованих даних. Знайдені стійкі ключові точки одного зображення переводилися у тривимірний простір і проектувалися на площину іншого зображення. Якщо біля отриманої проекції певної точки містилася ключова точка другого зображення, то вважалося, що вона коректно знайдена. Як стійкість результату роботи алгоритму взято відношення коректно знайдених ключових точок до загальної кількості стійких ключових точок зображення, які у процесі перепроєктування потрапляли у ділянку видимості другого зображення. Значення стійкості усереднювалося для серії пар зображень.

За описаним критерієм запропонована технологія показала результат 91%, тоді як для інших відомих алгоритмів це значення становить: DoG (частина SIFT [9]) — 66%, MSER [10] — 75%.

Синтезовані дані формувалися таким чином, що об'єкти, на яких містилися стабільні ключові точки в одному зображенні, могли повністю зникнути з іншого зображення, оскільки їх перекриває деякий ближчий об'єкт. Це зменшило знайдені значення стійкості на декілька відсотків.

Алгоритм на швидкодію не порівнювався з аналогами через відсутність у відкритому доступі найбільш продуктивних реалізацій інших алгоритмів. Однак запропонований метод побудовано на основі алгоритму, який використовувався для отримання панорамних знімків у режимі реального часу [11, 12]. Його продуктивності вистачало на переведення перерахунку до 20 разів за секунду на смартфоні чотирирічної давності (Samsung Galaxy S3).

ВИСНОВКИ

У межах роботи запропоновано технологію виділення стабільних ключових точок на зображенні, яка за якістю результату значно переважає аналоги. Для оцінювання характеристик розробленої технології та порівняння її з іншими подібними технологіями створено програмне забезпечення для синтезу зображень з інформацією про відстань до об'єктів.

Описаний метод ґрунтується на процедурі виділення стійких меж. Він складається з восьми кроків, на яких послідовно звужується множина точок, що стають ключовими. Запропоновано підхід, який полягає в класифікації ключових точок за ступенем стійкості і допомагає зменшити обсяг процедури пошуку під час компонування в пари. Для вибору критеріїв класифікації та визначення порогових значень розроблено програмний модуль, який у графічному вигляді показує значення стійкості для можливих порогових значень і дає змогу серед усіх варіантів обрати оптимальні.

Результати, отримані в роботі, дозволяють підвищити продуктивність методів реєстрації зображень як за рахунок пришвидшення пошуку ключових точок, так і завдяки тому, що розглянутий алгоритм видає більш стійкі результати, які істотно скорочують розрахунки, необхідні на наступних етапах реєстрації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гаращенко Ф.Г. Интерактивное построение панорамных снимков с помощью портативных компьютеров / Ф.Г. Гаращенко, А.Ю. Кобзарь // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 6. — С. 90–102.
2. *Tango* [Digital resource] // Google Inc. — Access mode: <http://get.google.com/tango>
3. *Nect-generation 3D Virtual Tours* [Digital resource] // GeoCV. — Access mode: <http://www.geocv.com>
4. *Matterport: Immersive 3D Spaces for real-world applications* [Digital resource] // Matterport. — Access mode: <https://matterport.com>
5. *Технология Intel® RealSense™* [Електронний ресурс] // Intel Corporation. — Режим доступу: <http://www.intel.ua/content/www/ua/uk/architecture-and-technology/realsense-overview.html>
6. *Kinect-Windows app development* [Digital resource] // Microsoft Corporation. — Access mode: <https://developer.microsoft.com/en-us/windows/kinect>

7. Публічна кадастрова карта України [Електронний ресурс] // Центр державного земельного кадастру. — Режим доступу: <http://www.map.land.gov.ua/kadastrova-karta>
8. Shuttle Radar Topography Mission [Digital resource] // National Aeronautics and Space Administration. — Access mode: <http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>
9. Lowe D. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints / David Lowe // International Journal of Computer Vision. — 2004. — Vol. 60, Issue 2. — P. 91–110.
10. Donoser M. Efficient Maximally Stable Extremal Region (MSER) Tracking / M. Donoser, H. Bischof // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 2006. — Vol. 1. — P. 553–560.
11. Кобзар А.Ю. Обчислювальні технології інтерактивної побудови панорамних зображень в режимі реального часу : дис. канд. техн. наук : 01.05.02 / Кобзар Андрій Юрійович. — Київ, 2015. — 184 с.
12. Гаращенко Ф.Г. Сопоставление снимков панорамы на основании границ объектов / Ф.Г. Гаращенко, А.Ю. Кобзарь // Компьютерная математика. — 2014. — № 1. — С. 46–53.

Надійшла 17.03.2017

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ І ФІЛЬТРА КАЛМАНА

І.А. ШУБЕНКОВА, С.К. ПЕТРОВА, П.І. БІДЮК

Анотація. Запропоновано концепцію адаптивного моделювання фінансово-економічних процесів, яка ґрунтується на одночасному використанні регресійних моделей і оптимального фільтра Калмана для зменшення впливу випадкових збурень та похибок вимірювань статистичних даних. Створено програмне забезпечення, необхідне для виконання обчислювальних експериментів. Для вибраних фінансово-економічних процесів побудовано кілька регресійних моделей, додатково перетворених у простір станів. Випробування розробленої системи прогнозування на різних вибірках фінансових та економічних даних показало, що можна досягти прийнятних значень середньої абсолютної похибки близько 5–8 % для короткострокових прогнозів. Залежно від конкретної постановки задачі використано динамічні і статичні оцінки прогнозів для отримання потрібних точних оцінок. Застосування фільтра Калмана для попереднього оброблення даних (зменшення впливу випадкових збурень та шумів вимірів) і короткострокового прогнозування дає змогу додатково зменшити кількість похибок оцінок прогнозів на 1,5–2,0 %. У подальших дослідженнях передбачається створити спеціалізовану систему підтримання прийняття рішень для розв'язання задач прогнозування на основі ймовірнісно-статистичних методів.

Ключові слова: регресійна модель, фільтр Калмана, короткочасний прогноз, динамічні та статистичні оцінки прогнозів, ймовірнісно-статистичні методи.

ВСТУП

Вирішення проблеми високоякісного прогнозування для економічних і фінансових процесів потребує розвинення і застосування нових сучасних методів, які ґрунтуються на системному підході до розроблення відповідного обчислювального програмного забезпечення [1, 2]. Частіше це програмне забезпечення реалізується у формі сучасних систем підтримання прийняття рішень, які набувають поширення як інструмент розв'язання багатьох практичних задач. Істотну допомогу у прогнозуванні лінійних і нелінійних нестационарних процесів надає застосування адаптивного фільтра Калмана для оцінювання коваріацій випадкових збурень стану і шумів (похибок) датчика. Фільтр дає змогу обчислювати оптимальні оцінки вектора стану досліджуваної системи і виконувати високоякісне короткострокове прогнозування [3].

Моделювання є важливим засобом вирішення багатьох економічних завдань, наприклад, розподілу державного бюджету та його впливу на виробництво внутрішнього валового продукту (ВВП). Математичне моделювання широко застосовується для розв'язування задач у біології та екології, наприклад, екологічне прогнозування, дослідження антропогенного впливу на навколишнє природне середовище (НПС), створення моделей походження

життя. Системний підхід до моделювання та прогнозування, спрямований на зменшення невизначеностей різних типів: оптимальну фільтрацію даних, заповнення пропусків, оброблення екстремальних значень, урахування можливих типів розподілів статистичних даних, а також використання статистичних критеріїв якості оброблення даних на кожному етапі виконання обчислень. Важливим елементом системного підходу є також застосування ідеологічно різних методів моделювання і прогнозування до одних і тих самих даних з метою комбінування оцінок прогнозів [3–5].

Дослідження присвячено вибору адекватних моделей, моделюванню та прогнозуванню обраних фінансово-економічних процесів на основі регресійних моделей та оптимального фільтра Калмана із застосуванням системного підходу.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Мета дослідження — аналіз предметної галузі та вибір методів математичного моделювання; розроблення математичних моделей для аналізу фінансово-економічних процесів; формування функцій прогнозування та обчислення оцінок прогнозів; ефективне використання критеріальної бази для оцінювання адекватності побудованих моделей та їх прийнятності для прогнозування; застосування фільтра Калмана для отримання оптимальних оцінок вимірювань; розроблення програмного продукту для виконання обчислювальних експериментів; виконання порівняльного аналізу отриманих результатів моделювання і прогнозування із застосуванням розробленої системи з уже існуючими.

Деякі типи невизначеностей та їх урахування за допомогою дискретного фільтра Калмана. Із погляду економічної теорії невизначеність — це об'єктивна неможливість отримання абсолютного знання про об'єктивні та суб'єктивні чинники, які характеризують функціонування системи, а також неоднозначність оцінок її параметрів.

Причини виникнення невизначеності можна поділити на такі групи:

– принципова структурно-параметрична недетермінованість та високий ступінь мінливості більшості процесів, пов'язаних із функціонуванням економіки;

– брак вичерпної інформації про структуру, організацію, динаміку функціонування, моделі і тактично-стратегічне планування поведінки суб'єкта ринкової діяльності;

– недосконалий суб'єктивний аналіз наявної інформації без використання високорозвиненого сучасного інструментарію дослідження даних;

– об'єктивне спотворення наявної інформації (даних і експертних оцінок) унаслідок впливу значних різнотипних випадкових збурень на досліджувані процеси та наявність похибок вимірювань;

– вплив суб'єктивних чинників на аналіз функціонування та моделювання вибраних процесів (недобросовісне збирання інформації у вигляді статистичних та експериментальних даних, експертних оцінок, приховування інформації, цілеспрямована дезінформація).

Розв'язання задач ефективного прогнозування на новому якісному рівні потребує застосування сучасних методів системного аналізу до існуючих підходів та методів, коректного використання методів математичного моделювання на основі досягнень теорії оцінювання та статистичного аналізу даних. Однак процес оброблення даних необхідно організувати таким чином, щоб досягати більш точних оцінок прогнозів в умовах наявності невизначеностей структурного, параметричного і статистичного характеру. Подібні невизначеності можуть зумовлюватися нестационарністю процесу, пропусками даних, наявністю неякісних зашумлених даних, екстремальними значеннями і т. ін.

Для того щоб організувати ієрархічний аналіз процесів моделювання та прогнозування, а також врахувати невизначеності структурного параметричного і статистичного характеру, отримати можливість адаптування моделей до змін у процесах та застосовувати альтернативні методи оцінювання з метою пошуку точніших оцінок параметрів моделей і прогнозів, необхідно розробити концепцію адаптивного прогнозування моделей до процесів довільної природи на основі підходів та методів системного аналізу.

Розглянемо можливість урахування деяких невизначеностей статистичного характеру. Статистичні невизначеності трапляються у процесі розв'язування задач визначення типу розподілу випадкових величин, статистичних параметрів цих розподілів, наявності екстремальних значень, які потребують додаткового оброблення, заповнення пропусків даних, видалення шумових складових і т. ін. [1, 2, 4].

Одним з можливих підходів до врахування статистичних невизначеностей є подання моделі досліджуваного процесу у просторі станів та оптимальне оцінювання стану за допомогою фільтра Калмана або іншого належного інструменту. Загалом фільтр дає змогу обчислювати оптимальні оцінки станів в умовах впливу випадкових збурень та наявності шумів вимірювань; оцінювати компоненти вектора стану, які не вимірюються безпосередньо; оцінювати невідомі статистичні параметри збурень в адаптивному режимі функціонування; уточнювати оцінки станів інтегруванням (комбінуванням) результатів вимірювань, що надходять про об'єкт дослідження з різних джерел. Застосування фільтра Калмана передбачає побудову та використання математичної моделі у просторі станів:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}(k);$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k),$$

де $\mathbf{x}(k)$ — вектор стану процесу; \mathbf{A} — матриця динаміки процесу (перехідна матриця станів); \mathbf{B} — матриця коефіцієнтів керування; $\mathbf{u}(k)$ — вектор керувальних впливів; $\mathbf{w}(k)$ — вектор випадкових зовнішніх збурень; $\mathbf{z}(k)$ — вектор вимірювань; \mathbf{H} — матриця (коефіцієнтів) вимірювань; $\mathbf{v}(k)$ — вектор шумів вимірювань; $k = 0, 1, 2, \dots$ — дискретний час (номер вимірювання), який зв'язується з неперервним часом t через період дискретизації вимірювань $T_s : t = kT_s$. Отриману модель використано далі в алгоритмі оптимальної фільтрації [3]. У класичній постановці задачі оп-

тимальної фільтрації послідовність зовнішніх збурень $\mathbf{w}(k)$ задовольняє властивості білого гаусового шуму з нульовим середнім значенням і коваріаційною матрицею \mathbf{Q} .

Алгоритм оптимального оцінювання стану (фільтрації) динамічної системи:

1. Побудова математичної моделі досліджуваного процесу:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k),$$

$$E[\mathbf{w}(k)] = 0, \quad \forall k,$$

$$E[\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(j)] = \mathbf{Q}(k) \delta_{kj},$$

$$E[\mathbf{v}(k)] = 0, \quad E[\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{R}(k) \delta_{kj},$$

$$E[\mathbf{x}_0] = \bar{\mathbf{x}}_0; \quad E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T] = \mathbf{M}; \quad E[\mathbf{w}(k) \mathbf{x}_0^T] = 0, \quad \forall k,$$

$$E[\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(j)] = 0 \quad \forall k, j;$$

$$E[\mathbf{v}(k) \mathbf{x}_0^T] = 0 \quad \forall k.$$

2. Обчислення матричного коефіцієнта фільтра:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}'(k) \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}(k) \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}.$$

3. Прогнозування вектора стану у вигляді:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{f}(k-1),$$

де $\mathbf{f}(k-1)$ — відома векторна функція $\mathbf{B} \mathbf{u}(k-1)$ на інтервалі $[t_{k-1}, t_k]$.

4. Обчислення оцінки вектора стану після появи вектора вимірювань $\mathbf{z}(k)$:

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{z}(k) - \mathbf{H}(k) \hat{\mathbf{x}}(k)].$$

Якщо середнє значення $E[\mathbf{w}(k-1)]$ випадкового збурення $\mathbf{w}(k-1)$ не дорівнює нулю і може бути виміряне (оцінене) у будь-який момент часу, то його можна досить просто врахувати в рівняннях фільтрації. У такому випадку значення $\mu_w = E[\mathbf{w}(k-1)]$ додається до детермінованого впливу $\mathbf{f}(k-1)$. Крім сигналу керування $\mathbf{B} \mathbf{u}(k-1)$, детерміноване збурення $\mathbf{f}(k-1)$ може включати в себе вплив інших вхідних детермінованих сигналів, що впливають на динамічну систему.

5. Апостеріорна коваріаційна матриця похибок оцінок визначається за виразом

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= E[\mathbf{e}(k) \mathbf{e}^T(k)] = E \left\{ \begin{aligned} & [[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}] [\mathbf{A} \mathbf{e}(k-1) - \mathbf{w}(k-1)] + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}(k)] \times \\ & \times [[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}] [\mathbf{A} \mathbf{e}(k-1) - \mathbf{w}(k-1)] + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}(k)]^T \end{aligned} \right\} = \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}] \mathbf{P}'(k). \end{aligned}$$

Тут $\mathbf{P}'(k)$ — апіорна коваріаційна матриця похибок оцінок вектора стану. Очевидно, що поява випадкового збурення $\mathbf{w}(k)$ призводить до погір-

шення якості оцінок, про що свідчить додатковий член $\mathbf{Q}(k-1)$ у правій частині рівняння

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(k) &= E \{ [\mathbf{A} \mathbf{e}(k-1) - \mathbf{w}(k-1)] [\mathbf{A} \mathbf{e}(k-1) - \mathbf{w}(k-1)]^T \} = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{P}(k-1) \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k-1). \end{aligned}$$

6. Перехід до пункту 2 алгоритму після перерахунку апіорної коваріаційної матриці похибок оцінок для наступного циклу, а саме:

$$\mathbf{P}'(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k).$$

Якщо значення коваріаційних матриць \mathbf{Q} і \mathbf{R} неможливо оцінити за наявною інформацією про процес, то необхідно застосувати алгоритм адаптивної фільтрації, який дає змогу одночасно зі станом оцінювати невідомі статистичні параметри процесу. Однак варто пам'ятати, що ускладнення алгоритму фільтрації потребує особливої уваги до забезпечення його обчислювальної стійкості, оскільки він чутливий до похибок математичної моделі процесу.

Таблиця 1. Параметри адекватності моделей та якості прогнозів

Коефіцієнт детермінації	$R^2 = \frac{\text{var}(\hat{y})}{\text{var}(y)}$
Сума квадратів похибок моделі	$SSE = \left[\sum_{k=1}^N \hat{y}(k) - y(k) \right]^2$
Статистика Дарбіна–Уотсона	$DW = \frac{\sum_{k=2}^N [e(k) - e(k-1)]^2}{\sum_{k=1}^N e^2(k)} = 2 - 2\rho$
F-статистика Фішера	$I = \frac{R^2}{1 - R^2}$
Критерій Байєса–Шварца	$BSA = N \ln \left(\sum_{k=1}^N e^2(k) \right) + n \ln(N)$
Критерій Акайке	$IKA = N \ln \left(\sum_{k=1}^N e^2(k) \right) + 2n$
Абсолютна середня похибка (оцінок прогнозів), %	$MAPE = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{ y(k+s) - \hat{y}(k+s, k) }{ y(k+s) } \cdot 100$

Приклад застосування алгоритму оптимальної фільтрації

Розглянемо застосування алгоритму фільтрації для аналізу та моделювання часового ряду фінансової змінної (формування ціни на біржовий актив), який складається зі 145 значень. Порядок авторегресійної моделі визначено за автокореляційною функцією (АКФ) та частковою АКФ (ЧАКФ) наведено на рис. 1.

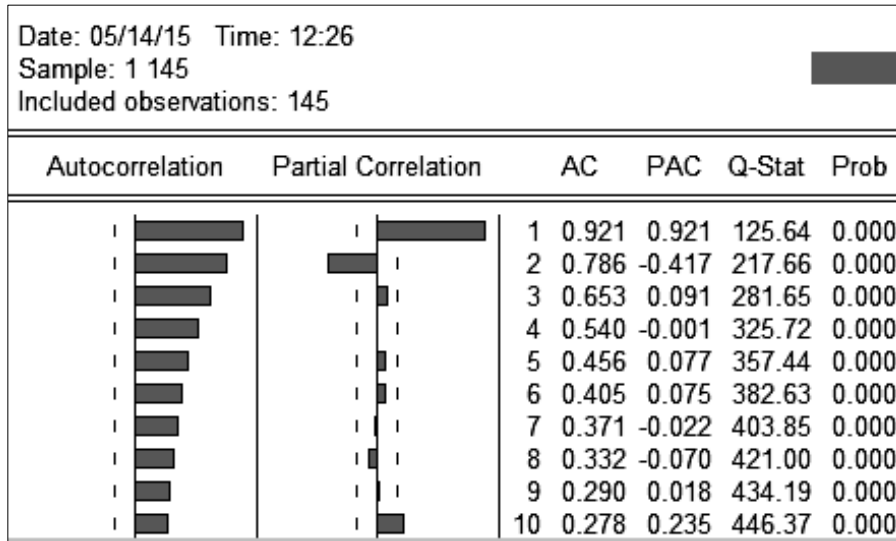


Рис. 1. Значення АКФ і ЧАКФ для процесу формування ціни на актив

Таким чином, АКФ показує, що значущими є тільки два лаги, тобто необхідно будувати авторегресію першого і другого порядку. Результати оцінювання авторегресійної моделі другого порядку $AR(10)$ для відхилень від середнього значення наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Результати оцінювання авторегресійної моделі $AR(10)$ з відхиленням від середнього значення

Dependent Variable: Y2
 Method: Least Squares
 Date: 05/14/15 Time: 21:17
 Sample(adjusted): 11 145
 Included observations: 135 after adjusting endpoints
 $Y2 = C(1) + C(2)*IV(-1) + C(3)*IV(-2) + C(4)*IV(-3) + C(5)*IV(-4) + C(6)*IV(-5) + C(7)*IV(-6) + C(8)*IV(-7) + C(9)*IV(-8) + C(10)*IV(-9) + C(11)*IV(-10)$

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	5.041643	0.292100	17.25999	0.0000
C(2)	1.382059	0.086753	15.93100	0.0000
C(3)	-0.510861	0.147488	-3.463752	0.0007
C(4)	0.037585	0.153569	0.244743	0.8071
C(5)	-0.068696	0.152963	-0.449103	0.6541
C(6)	-0.047572	0.149222	-0.318799	0.7504
C(7)	0.207511	0.148344	1.398853	0.1644
C(8)	-0.056808	0.149094	-0.381021	0.7038
C(9)	0.029839	0.147853	0.201813	0.8404
C(10)	-0.263165	0.140725	-1.870066	0.0638
C(11)	0.227235	0.083139	2.733182	0.0072

R-squared 0.902296 Mean dependent var 4.875358

Значення характеристик моделі:

$$\sum e^2 = 1424,53; \quad DW = 1,93.$$

Характеристики якості однокрокового прогнозу (середньоквадратична похибка (СКП), середня абсолютна похибка у відсотках (САПВ), коефіцієнт Тейла (U)) для побудованої моделі такі:

$$\text{СКП} = 3,24; \text{САПВ} = 7,07; U = 0,144.$$

Результати побудови кількох моделей для нестационарного (з трендом) фінансового процесу формування цін наведено в табл. 3.

Таблиця 3. Результати моделювання та однокрокового прогнозування для вибраного фінансового процесу

Тип моделі	Характеристики моделі			Характеристики прогнозу		
	R^2	$\sum e^2(k)$	DW	СКП	САПВ	Коефіцієнт Тейла
АР(1)	0,856	2127,020	1,184	9,271	18,759	0,557
АР(2)	0,883	1713,686	1,914	10,056	19,162	0,615
АРКС(1,1)	0,882	1740,166	1,889	9,700	17,175	0,587
АРКС(2,1)	0,884	1701,131	1,992	9,963	18,244	0,610
АР(2)+тренд	0,865	1579,274	1,980	11,747	10,452	0,383
Моделі для відхилень від середнього						
АР(2)	0,883	1713,686	1,914	3,461	9,913	0,157
АР(10)	0,900	1424,530	1,931	3,248	7,070	0,144

Процес виробництва ВВП в Україні у період 2002–2008 рр. Для побудови математичної моделі процесу виробництва ВВП скористаємось рядом, який складається з 84 щомісячних значень. Порядок авторегресійної моделі визначено за допомогою АКФ та ЧАКФ (рис. 2).

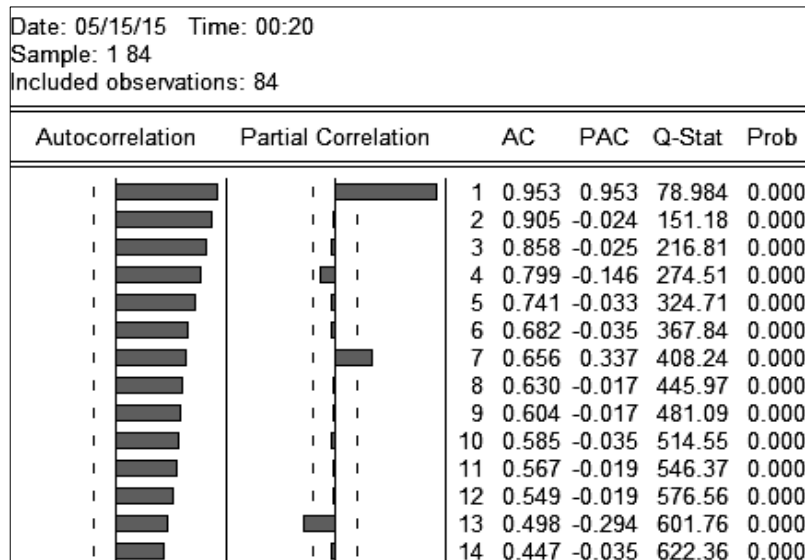


Рис. 2. Значення АКФ і ЧАКФ для процесу формування ВВП

Результати побудови регресійних моделей і однокрокового прогнозування процесу виробництва ВВП в Україні наведено в табл. 4.

Таблиця 4. Результати моделювання та однокрокового прогнозування процесу виробництва ВВП в Україні

Тип моделі	Характеристики моделі			Характеристики прогнозу		
	R^2	$\sum e^2(k)$	DW	СКП	САПВ	Коефіцієнт Тейла
АР(1)	0,97	1227,86	2,07	10,65	16,35	0,107
АР(2)	0,96	1225,02	2,00	10,30	14,96	0,103
АР(4)	0,95	1220,44	1,99	10,04	14,28	0,099
АРКС(1,1)	0,97	1225,65	1,99	10,35	15,36	0,104
АР(1)+тренд	0,95	355,69	1,88	3,57	9,46	0,055
АР(2)+тренд	0,93	432,47	1,36	3,58	9,51	0,055
ФК + АР(2)	0,95	388,65	1,99	3,46	7,43	0,036
Модель для відхилень значень процесу від середнього						
АР(1)	0,967	1209,1	12,09	3,88	7,98	0,040

Для прикладу аналізу виробництва ВВП в Україні застосуємо фільтр Калмана та порівняємо прогноз, отриманий за фільтром, із прогнозом, обчисленим за регресійним рівнянням (побудованим за допомогою створеного програмного продукту). Для цього подамо кращі побудовані моделі.

Модель АР(1) для відхилень середнього має вигляд

$$y(k) = 42,78 + 0,65y(k-1) + 0,99iv(k-1),$$

де iv — ряд $y(k)$ для відхилень від середнього.

Для моделі АР(1) + тренд побудовано рівняння

$$y(k) = 3,32 + 0,74y(k-1) + 0,16k,$$

де $0,16k$ — лінійний ряд. Прогнозування ВВП на 16 кроків за допомогою розробленої програми виконано із САПВ = 7,98%.

Таблицю з першими та останніми 7 значеннями формування ВВП, де ФК — фільтр Калмана, $P[0;0]$ і $P'[0;0]$ — апіорна та апостеріорна матриці відповідно наведено в табл. 5.

Таблиця 5. Прогноз за допомогою фільтра Калмана

Ряд	Прогноз ФК	Вихід ФК	Коефіцієнт ФК	$P[0;0]$	$P'[0;0]$
14,71	14,86	15,92	0,99	0,99	1,02
14,71	16,08	15,35	0,5	0,5	1,01
16,71	15,5	15,66	0,34	0,34	0,51
16,71	15,82	15,89	0,26	0,26	0,35
16,71	16,05	16,15	0,21	0,21	0,26
21,69	16,31	17,23	0,17	0,17	0,21
21,69	17,41	18,08	0,15	0,15	0,18
78,68	56,52	57,09	0,03	0,03	0,03
92,15	57,67	58,48	0,02	0,02	0,03
92,15	59,07	59,89	0,02	0,02	0,03
92,15	60,49	61,25	0,02	0,02	0,03
81,37	61,86	62,37	0,02	0,02	0,03
81,37	63	63,48	0,02	0,02	0,03
81,37	64,11	64,46	0,02	0,02	0,02

Середня абсолютна похибка у відсотках у випадку використання моделі $AR(2)$ з трендом і оптимального фільтра становила 5,62%; тобто спостерігається покращення оцінок прогнозів — середня абсолютна похибка зменшилась на 1,8%.

Аналіз отриманих результатів. Наведено приклади застосування розробленого програмного продукту для обчислення прогнозних значень для двох досліджених процесів, а саме: фінансового процесу ціноутворення на біржі та виробництва ВВП в Україні.

На основі виконаних обчислювальних експериментів встановлено, що кращий результат щодо короткострокового прогнозування фінансового процесу ціноутворення отримано за допомогою регресійної моделі $AR(10)$. Низьку якість оцінок прогнозів за моделями нижчого порядку можна пояснити тим, що ряд значень містить значні викиди на початковому відрізку, який неадекватно описується регресійною моделлю. Включення трендової складової у модель істотно не покращило результату, оскільки тренд явно не виражений.

В обох прикладах (див. табл. 3 і 5) прогноз покращено, про що свідчать значення параметра якості САПВ, але моделі непридатні для прогнозування на велику кількість кроків. Однак побудовані функції прогнозування можуть бути успішно використані для оцінювання короткострокових прогнозів. Таким чином, використання фільтра Калмана з регресійними моделями дає змогу підвищити оцінки короткострокових прогнозів.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто можливість застосування регресійного моделювання і фільтра Калмана для прогнозування стаціонарних та нестационарних фінансово-економічних процесів з використанням статистичних даних. Для аналізу результатів побудови моделей використано такі статистичні критерії: коефіцієнт детермінації, критерій Дарбіна–Уотсона, суму квадратів похибок моделі — критерій адекватності моделі процесу, а для аналізу якості оцінок прогнозів — середню абсолютну похибку у відсотках. Запропоновано концепцію адаптивного моделювання, що ґрунтується на застосуванні оптимального фільтра Калмана для зменшення впливу на дані випадкових збурень та похибок вимірів.

Випробування системи прогнозування із широким набором фінансових та економічних даних показало можливість досягати значень середньої абсолютної похибки близько 5–8 % для короткострокового прогнозування. Використання динамічних і статичних оцінок прогнозів дозволяє отримати необхідні за якістю оцінки залежно від конкретної постановки задачі. Застосування фільтра Калмана для попереднього оброблення даних (зменшення впливу випадкових збурень та шумів вимірювань) і короткострокового прогнозування дає змогу зменшити похибки оцінок прогнозів у середньому на 1,5–2,0 %.

У подальших дослідженнях для розв'язання задач короткострокового та довгострокового прогнозування доцільно побудувати спеціалізовану сис-

тему підтримання прийняття рішень на основі ймовірнісно-статистичних моделей та методів інтелектуального аналізу даних з використанням належної критеріальної бази.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Башина О.Э.* Общая теория статистики: Статистическая методология в изучении коммерческой деятельности: учеб. / О.Э. Башина, А.А. Спирина. — 5-е изд., доп. и перераб. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 440 с.
2. *Математические* методы прогнозирования экономических показателей: учеб. пособие / [А.Р. Саяпова, Е.А. Гусельникова, И.А. Лакман, Н.М. Шамуратов]. — Уфа: Из-во Башкир. ун-та, 2000. — 128 с.
3. *Згуровский М.З.* Аналитические методы калмановской фильтрации / М.З. Згуровский, В.Н. Подладчиков. — К.: Наук. думка, 1995. — 285 с.
4. *Бідюк П.І.* Аналіз часових рядів: навч. посіб. / П.І. Бідюк, О.Л. Тимощук, В.Д. Романенко. — К.: НТУУ КПІ, 2013. — 600 с.
5. *Zgurovsky M.Z.* Method of constructing Bayesian networks based on scoring functions / P.I. Bidyuk, O.M. Terentyev // *Cybernetics and System Analysis*. — 2008. — Vol. 44, No. 2. — P. 219–224.

Надійшла 25.04.2017

**CURVATURE COORDINATES TO DESCRIBE THE EXPLOSION
OF CHERNOBYL'S REACTOR CORE IN APRIL 1986,
USING THE TENSOR EQUATIONS**

Y. MATSUKI, P.I. BIDYUK

Abstracts. This research analyzes the process of the explosion of the reactor core of Chernobyl nuclear plant in April 1986, using the tensor equations. These tensor equations show a movement of a vector in the three dimensional curvature coordinates of time, water flow, and void. The equations shows that this vector moves along the geodesic in the curvature coordinates, which is described by fundamental tensor ($g_{\mu\nu}$), Christoffel symbol ($\Gamma_{\mu\nu\sigma}^{\alpha}$) and Ricci tensor ($R_{\mu\nu}$), where μ, ν, σ, α are suffixes that indicate the coordinates. The solution of the tensor equations shows that the geodesic of the vector has a singular point, which describes a turning point of the reactor core from the normal operation to the explosion, which we reported in our previous articles [1, 2].

Keywords: nuclear power plant, Chornobyl disaster, critical operation mode, regression analysis, void and water environment.

INTRODUCTION

In the previous research [1, 2], we analyzed the physical parameters [3] of nuclear reactor core, which were observed during the time period of five seconds before the explosion of Chernobyl nuclear plant, which happened in April 1986. With the first-order empirical analysis [1], we found that two parameters, water flow and void of the nuclear core, were strongly related to the sudden increase of the reactor power that led to the explosion. And, then, we found that the exponential model with these two parameters can explain the process of the immense power increase [2]. We also found that there was a turning point in the process between the normal operation mode and the explosion.

In this research we analyzed the explosion conditions, using the tensor equations, which show evolution of the three dimensional curvature coordinates of time, water flow, and void.

METHODOLOGY

At first, we assume that there is a scalar field that manages the water flow and void in the reactor core; and then, the derivatives of the scalar field produce a ten-

sor field that is to describe the coordinates evolution in the three dimensional space.

Let S be a scalar field. It can be considered as a function of the three coordinates x^μ ($\mu = 0, 1, 2$). Here $\mu = 0$ corresponds to time (t), and $\mu = 1, 2$ for coordinates of two parameters (water flow and void). Then

$$S_\mu = S_\lambda x_\mu^\lambda.$$

Here $S_\mu = \frac{d}{dx^\mu} S$, $S_\lambda = \frac{d}{dx^\lambda} S$, and $x_\mu^\lambda = \frac{d}{dx^\mu} x^\lambda$; and, the derivative of a scalar field (S_μ) is a covariant vector field by its definition [4].

And then, the movement of the vector in the curvature coordinates of time, water flow and void is described by tensor equations:

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha. \quad (1)$$

Here A_μ is a vector field. And $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ is the Christoffel Symbol of the second kind, while:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\mu\nu},$$

$$A_{\mu,\nu} = \frac{d}{dx^\nu} A_\mu,$$

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} = g_{\lambda\mu,\nu},$$

$g_{\lambda\mu,\nu} = \frac{d}{dx^\nu} g_{\lambda\mu}$: and, $g_{\lambda\mu}$ are¹ fundamental tensors, which determine coordinate system and curvature of the space. The $g_{\lambda\mu}$ also lower and raise suffixes of vectors (contra-variant vector, A^μ , and covariant vector, A_μ), and which vary from a point to a point in a curvature space [4]. Also, it is noted that “:” denotes the covariant differentiation. The covariant derivative of A_μ is $A_{\mu;\nu}$, and its relation to $A_{\mu,\nu}$ is shown in the equation (1).

If we assume that there is no scalar field in the three dimensional space of time, water flow and void, the variables evolve straight in the space. In such a case, the geodesic of the variables is a straight line. On the other hand, if there is a scalar field, the variables move along curvature coordinates. So, in this case, the «curvature» gives the information about the evolvement of the variables.

For a scalar field, S , its derivative is described with the covariant differentiation. And now we consider two differentiations in succession:

$$S_{\mu;\nu} = S_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha = S_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha.$$

¹ Here “are” is appropriate to use, because $g_{\lambda\nu}$ are plural because λ and ν vary for time and spatial coordinates.

To deal with the second covariant derivative of a tensor, we use the Riemann-Christoffel tensor (or, covariant tensor): $R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\beta} - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\beta} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}$. With the symmetries of the first and the last suffixes, we get $R_{\nu\rho\mu}^{\mu} = R_{\nu\rho}$, which is called as Ricci tensor:

$$R_{\nu\rho} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\mu\rho,\mu}^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}. \quad (2)$$

These $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ and $R_{\nu\rho}$ are indicators of the curvature of the physical coordinates.

In the curved space (Riemann space), we can also calculate the distance ds between a point x^{μ} and a neighboring point $x^{\mu} + dx^{\mu}$, by:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

This gives the geodesic of the movement of a vector along the curvature coordinates.

RESULTS

Tensor equations of three dimensional curvature coordinates

According to the theory of the curvature tensors [4], if there is only one scalar field with no other physical field, the curvature space is empty; and, it is described by:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

Then we will calculate the geodesic of the movement of the vector by:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - g_{11}(dx^1)^2 - g_{22}(dx^2)^2. \quad (4)$$

Here time (t) and two coordinates (x and y) form a space, i.e., $t = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$, where x^0 , x^1 and x^2 are contra-variant vectors, and g_{00} , g_{11} , g_{22} are fundamental tensors that lower the suffixes of the contra-variant vectors, to convert them to covariant vectors².

And then, we assume a static coordinate system, where $g_{\mu\nu}$ are constant in time. Therefore, $g_{\mu\nu,0} = 0$, where μ and ν are 0, 1, 2 (while, 0 is for time, and 1 and 2 are coordinates for water flow and void).

Where space is not flat, a vector of the variables moves along the curvature coordinates. This curvature coordinate system is nonlinear; so it is difficult to find solutions. In order to overcome this difficulty, we use spherically symmetric field to get solutions fairly easily. It is Schwarzschild' special solution [4]:

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - Wr^2d\theta^2. \quad (5)$$

² In order to describe a physical space, we need to use covariant vectors.

Here U , V , W are functions of r only. For replacing the equation (5), we use the following equation:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2. \quad (6)$$

From the equation (5), we determine the values of $g_{\mu\nu}$ as follows:

$$g_{00} = e^{2\nu}, \quad g_{11} = -e^{2\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad \text{and } g_{\mu\nu} = 0 \text{ for } \mu \neq \nu.$$

And, then, $g^{00} = e^{-2\nu}$, $g^{11} = -e^{-2\lambda}$, $g^{22} = -r^{-2}$, and $g^{\mu\nu} = 0$ for $\mu \neq \nu$.

Then, we calculate the Christoffel symbols as follows:

$$\Gamma_{00}^1 = g^{11}(\Gamma_{001} + \Gamma_{001}) = 2g^{11}g_{00,1} = 2e^{-2\lambda}(e^{2\nu})_{,r} = \nu'e^{2\nu-2\lambda};$$

$$\Gamma_{10}^0 = g^{00}(\Gamma_{001} + \Gamma_{001}) = 2g^{00}g_{00,1} = 2e^{-2\nu}(e^{2\nu})_{,r} = \nu'e^{2\nu-2\nu} = \nu';$$

$$\Gamma_{11}^0 = g^{11}(\Gamma_{111} + \Gamma_{111}) = 2g^{11}g_{11,1} = -2e^{-2\lambda}(-e^{2\lambda})_{,r} = \lambda'e^{2\lambda-2\lambda} = \lambda';$$

$$\Gamma_{12}^2 = g^{22}(\Gamma_{221} + \Gamma_{221}) = 2g^{22}g_{22,1} = 2(-r^{-2})(-r^2)_{,r} = r^{-1};$$

$$\Gamma_{22}^1 = g^{11}(\Gamma_{221} + \Gamma_{221}) = 2g^{11}g_{22,1} = 2e^{-2\lambda}(-r^2)_{,r} = -re^{-2\lambda}.$$

With these Christoffel symbols rewrite the equation (2) as follows:

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2\nu-2\lambda}; \quad (7)$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}; \quad (8)$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1. \quad (9)$$

Here $\nu' = d\nu/dr$, $\nu'' = d^2\nu/dr^2$, and $\lambda' = d\lambda/dr$.

From the equation (3),

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0. \quad (10)$$

From the equations (7), (8) and (10):

$$\lambda' + \nu' = 0.$$

For large values of r , the space must become approximately flat; so, when $r \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$ and $\nu \rightarrow 0$.

From the equations (9) and (10): $(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1$, and then:

$$(re^{2\nu})' = 1. \quad (11)$$

By integrating the equation (11), we get:

$$re^{2\nu} = r - 2m.$$

Here m is a constant of integration.

Because $g_{00} = e^{2\nu}$, we get:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (12)$$

From the equations (4), (6), and (12), we get the equation to calculate the geodesic of the movement of a vector along the curvature coordinates:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2. \quad (13)$$

The equation (13) becomes singular at $r = 2m$, because then $g_{00} = 0$ and $g_{11} = -\infty$.

Estimation of the magnitude of the scalar field

Thus, $r = 2m$ is the critical radius of the geodesic equation (13). From our previous research [2], we assume that the value of $r = 40$. Now, we neglect the angular component, $x^2 = \theta$, therefore the critical length of r occurs when the void (%) becomes the maximum, while the water flow (m³/sec) becomes minimum. The critical value of the void is 40 (%).³

From our previous research [2], the water flow and void influenced the reactor power. With the total output energy (Mega Joules) as the dependent variable, the relations are shown in the following equation:

$$TotalEnergy = 1903.8 + \exp(11.809 - 3.2934MCPflowrate + 0.7552void). \quad (14)$$

As far as we neglected the angular component, the critical length of r takes place when the void acquires its critical (maximum) value, and the water flow approaches its minimum level. With keeping this in mind, equation (14) allows to compute the total energy that is to be released in critical cases using the values of MCP flow rate and of the void. From the equation developed in [2], it was shown that the 40 percent of void is leading to approximately $5.0 \cdot 10^4$ Mega Joules of the total output kinetic energy of the reactor.

CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS

Thus, it was shown that the curvature coordinates, fundamental tensor ($g_{\mu\nu}$), Christoffel symbol ($\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$) and Ricci tensor ($R_{\mu\nu}$) appear as indicators of development the processes in time, which describe the curvature of the coordinates of time, water flow and void, along which a vector of the variables considered evolves. The track of the movement of a hypothetical particle was described by the tensor equation (4), $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - g_{11}(dx^1)^2 - g_{22}(dx^2)^2$, given ds is a distance of the vector's movement, x^0 is the coordinate of time, x^1 and x^2 are coordinates for water flow and void. And then, the coordinates are converted into the symmetrical two dimensional curvature coordinates; after that the fundamental tensors were calculated.

³ Here, x^2 does not mean "squared x ". It is the suffix for the third coordinate, θ .

The tensor equations considered showed qualitatively and quantitatively that there is a minimum distance to describe evolution of the process of possible explosion, as in the minimum radius of three-dimensional curvature coordinates. The order of magnitude of the reactor power is approximately in the order of 10^{-8} (Mega Joules⁻¹), at the singular point in the curvature space.

REFERENCE

1. *Matsuki Y.* Empirical Analysis of Chernobyl Nuclear Reactor Core for 5 seconds before the Explosion / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology, 3/2016, October 2016. — P. 33–41.
2. *Matsuki Y.* Analysis of the nuclear reactor core of Chernobyl Power Plant, for 5 seconds before explosion, with the three-dimensional spherical space / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology, 4/2016, December 2016. — P. 88–94.
3. *Jose M. Martinez.* An Analysis of the Physical Causes of the Chernobyl Accident / Jose M. Martinez, Jose M. Aragonez, Emilio Mingues, Jose M. Peri and Guillermo Velarde // Nuclear Technology. —Vol. 90. — June, 1990. — P. 371–399. Madrid Polytechnic University, Institute of Nuclear Fusion, J. Gutierrez Abascal, 2, 28006 Madrid, Spain <http://life-upgrade.com/DATA/Artikel%20zu%20Tschernobyl%20in%20Nuclear%20Technology%20Vol%2090.pdf> (last access, 22 November, 2015).
4. *Dirac P.A.M.* General Theory of Relativity / P.A.M. Dirac // Florida University, A Wiley-Interscience Publication. — John Wiley & Sons, New York, 1975. — P. 69. — Available at: <http://amarketplaceofideas.com/wp-content/uploads/2014/08/P%2520A%2520M%2520Dirac%2520-%2520General%2520Theory%2520Of%2520Relativity1.pdf> (last access, 5 July 2016).

Received 30.09.2016

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ІНФОРМАЦІЙНО-АЛГОРИТМІЧНА ПІДТРИМКА КОМПЛЕКСНОЇ ОЦІНКИ ЕКОЛОГІЧНОСТІ СИСТЕМНИХ ОБ'ЄКТІВ

Т.В. КОЗУЛЯ, Д.І. ЄМЕЛЬЯНОВА

Анотація. Обґрунтовано доцільність застосування комплексного підходу до розроблення методичного забезпечення оцінки якості і безпечності системних об'єктів з позицій сталого розвитку. Визначено необхідність застосування показників комплексного оцінювання екологічності на основі *MIPS*-аналізу і ризик-характеристик стану складних систем з метою підвищення якості прийняття об'єктивних рішень щодо зниження ступеня небезпеки в екологічному аспекті. Алгоритмічне забезпечення розроблено для практичної реалізації методики комплексної оцінки екологічності системних об'єктів з урахуванням зв'язку між їх станом і процесами внутрішньої самоорганізації і зовнішньої взаємодії з навколишнім середовищем.

Ключові слова: екологічна безпека, складна система, природно-техногенний об'єкт, *MIPS*-аналіз, ризик-аналіз, комплексне оцінювання якості.

ВСТУП

Розроблення комплексного підходу до формування інформаційно-алгоритмічного забезпечення системного аналізу та оцінки екологічності природно-техногенних об'єктів зумовлено необхідністю запровадження інформаційної підтримки рішень з управління безпечністю різнорідними структурованими системними об'єднаннями. Методика комплексного оцінювання екологічності, заснована на принципах гармонізації сталого розвитку складних систем, полягає в можливості встановлення зовнішніх і внутрішніх факторів деструктивних явищ і процесів, що призводять до зменшення рівня небезпеки і зниження негативного техногенного впливу на об'єкти навколишнього природного середовища (НПС) [1].

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

Основи комплексного методичного підходу з еколого-економічної оцінки якості та безпечності складних систем подано у працях вітчизняних науковців Г.В. Лисиченка [2], М.С. Мальованого [3], зарубіжних авторів А.М. Dies [4], М.Н. Ordoueiа [5], V. Costantini [6].

Розглянуті методики еколого-економічного оцінювання мають економічну змістовність, що ґрунтується на вартісних показниках якості системних об'єктів, не враховують еколого-соціальних складових оцінок.

Зарубіжні розробки з використання методів *MIPS*-аналізу засновані на працях М. Ritthoff [7], I.K. Wernick [8], K. Wiesen [9], C. Liedtkea [10],

L. Mancini [11], S. Laaksoa [12]. Методика *MIPS*-аналізу в цих працях має об'єктом дослідження економічні системи і оперує до економічних характеристик, що потребує зміни її змістовності та математичної інтерпретації вхідної інформації і кінцевих результатів для отримання оцінки екологічності та небезпечного впливу господарської діяльності на об'єкти природного середовища.

Методичне забезпечення ризик-аналізу сформовано на підставі праць вітчизняних науковців А.Б. Качинського [13], Є.О. Яковлева [14], Г.О. Статюхи [15]; зарубіжних авторів D.W. Connell [16], M.H. Whittaker [17]. Під час використання методики оцінювання екологічних ризиків на основі досліджень зазначених авторів не враховуються процеси, які відбуваються при переході системи у певній ситуації у кінцевий стан. Таким чином, доцільним і необхідним стає формування комплексної моделі дослідження, поданої у вигляді аналітичної системи оцінювання «стан₁ – процес – стан₂», що дозволить відповідно до загальнодетального і детального встановлення екологічних ризиків виявити довірливі процеси дестабілізації і стабілізації стану системи, фактори регулювання безпечності системних об'єктів.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Мета роботи — визначення інформаційно-алгоритмічної основи вирішення завдань комплексного оцінювання екологічності і безпечності природно-техногенних системних об'єктів (ПТСО) відповідно до *MIPS*- і ризик-аналізу для забезпечення інформаційної підтримки прийняття управлінського рішення.

У роботі досліджено такі завдання теоретично-практичного змісту:

1) визначення складових методичного забезпечення комплексного оцінювання якості і безпечності системних об'єктів з установами зовнішніх та внутрішніх деструктивних факторів і процесів для прийняття зваженого рішення щодо регулювання їх функціональних можливостей зі стабілізації розвитку;

2) розроблення інформаційно-алгоритмічного забезпечення комплексного оцінювання екологічності ПТСО з метою визначення рівня якості на рівні дослідження «об'єкт – навколишнє середовище» на основі *MIPS*-аналізу, загальнодетального і детального оцінювання змін у системі за результатами ризик-аналізу «стан₁ об'єкта – процес – стан₂ об'єкта»;

3) проведення апробації запропонованої методики комплексного оцінювання екологічності конкретного ПТСО для отримання об'єктивної та обґрунтованої інформаційної підтримки управлінських рішень відповідно до його стану і умов функціонування в певному навколишньому середовищі.

МАТЕРІАЛИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для визначення відповідності стану об'єкта визначеному рівню екологічної якості пропонується запровадити аналітичну систему досліджень на рівні загальнодетального, детального аналізу стану об'єктів і факторів невідповідності. За поданим підходом дослідження складної системи застосовано

також комплексне поняття якості, яке становить екологічність — відповідність природним властивостям компонентів НПС; безпечність — відповідність вимогам збереження функціональності систем, стану екологічного благополуччя. Отже, у пропонованій методиці має враховуватись системність об'єкта, особливі властивості складових систем, характерні прояви їх взаємодії з навколишнім середовищем.

Для узагальненої оцінки стану системи «об'єкт – навколишнє середовище» пропонується застосувати MIPS-аналіз, що дозволяє встановити відповідність вимогам природної стабільності та допустимого рівня дії техногенних факторів:

$$MIPS_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n MI_i C_i x_j}{S_j} = \frac{MI_{\text{заг}}}{S_j},$$

де MI_i — матеріальна інтенсивність i -го небезпечного фактора для компонента НПС (const); C_i — концентрація i -го небезпечного фактора у j -й системі в кількості x_j , яка має продуктивність S_j (кількість кінцевого продукту тощо); $MI_{\text{заг}}$ — оцінка відповідності складу системи — наявність елементів, компонентів структури) забезпеченість певної енергії взаємодії між складовими, що надалі гарантує необхідний рівень функціональності, обмеження навантаження з боку навколишнього середовища, яке спричиняє негативні впливи на систему загалом [18].

Таким чином, MIPS-аналіз дозволяє визначити загальну оцінку стану ПТСО з урахуванням внутрішніх факторів у складному системному об'єкті та зовнішніх факторів його взаємодії з навколишнім середовищем. Проте MIPS-оцінка не надає інформації про ступінь деструкції системи і прояв дестабілізуювальних факторів та процесів для визначення регулювальних механізмів стану системного об'єкта чи необхідних заходів управління якістю.

Ступінь відповідності для факторів і процесів у загальнодетальному і детальному вигляді запропоновано визначати на основі ризик-аналізу.

Детальні дослідження з оцінювання безпечності за методикою комплексного ризик-аналізу системи «стан₁ об'єкта – процес – стан₂» дозволяють установити вагомі механізми регулювання сталого розвитку систем і надати інформаційну підтримку для прийняття управлінського рішення (рис. 1).

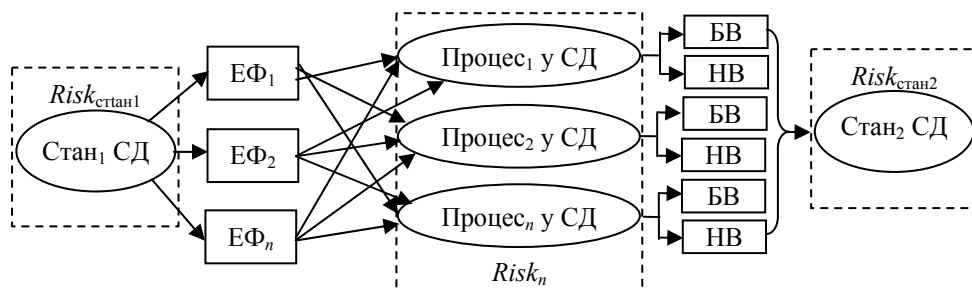


Рис. 1. Схема взаємодії складових системи оцінки екологічного ризику: СД — система дослідження; ЕФ — екологічний фактор; БВ (НВ) — безпечний (небезпечний) вплив

Ризик-аналіз здійснюється системно з урахуванням структури внутрішніх і зовнішніх зв'язків, які визначають інформацію про вплив факторів НПС на об'єкт, перетворення на рівні процесів у системі та формування параметрів стану (стан₂ СД). Взаємодія системи з об'єктами НПС визначається рівнем прояву факторів техногенного навантаження як сукупна дія різномірної природи. Характеристики впливу змінюються відповідно до особливостей перебігу процесів, які відбуваються в системах і мають деструктивний характер, що визначає рівень безпечності для складових ПТСО.

Доцільність комплексного ризик-аналізу перебігу процесів у системах ПТСО, оцінювання їх безпечності зумовлено необхідністю визначення деструктивних змін, причин порушень відповідності вимогам екологічності для встановлення регульовальних дій зі стабілізації стану і функціональності систем (рис. 2).

Для оцінювання екологічного ризику порушення екологічної стійкості ПТСО і виявлення точок екологічної небезпеки проводиться пофакторний ризик-аналіз стану кожної системи відповідно до її стабільності та прояву процесів у ній. Згідно з послідовністю виявлення негативних змін у системі (рис.2) аналізуються процеси трансформації вхідних факторів впливу: синергетичне посилення небезпечності, поява нових «продуктів» змін.

Деталізація ризик-аналізу на рівні процесів необхідна для уточнення дестабілізуювальних механізмів, обґрунтування вагомих факторів деструктуризації системи, що призводить до реалізації незворотних явищ, які ймовірно приводять систему в новий стан.

Таким чином, ризик-характеристики змін у системному об'єкті визначаються з метою узгодження і підтвердження результатів *MIPS*-аналізу, встановлення процесів порушення стаціонарності системи і процесів її стабілізації. Системний аналіз процесів у системах об'єкта дослідження першочергово ідентифікує фактори порушень, які треба нейтралізувати, і дозволяє обґрунтовано виявляти механізми стабілізації, які треба активізувати.

Комплексний підхід до формування інформаційно-методичного забезпечення дозволяє узгодити результати різномірних досліджень систем ПТСО у такій послідовності:

- 1) визначення загального рівня екологічної безпечності за *MIPS*-аналізом і підтвердження цієї оцінки результатами сумарного ризик-аналізу;
- 2) виявлення точок екологічної небезпеки за пофакторним ризик-аналізом стану систем ПТСО і процесів у них за високого значення коефіцієнта кореляції між однаковими ризик-факторами;
- 3) інтерпретація результатів ризик-аналізу відповідно до загальної оцінки стану «система – навколишнє середовище» і детального оцінювання змін у системі «стан – процес – кінцевий стан» [19].

Методику комплексного оцінювання якості та безпечності системних об'єктів апробовано на прикладі визначення екологічної ефективності діяльності підприємства ПАТ «Юкрейніан кемікал продактс» (на базі ПАТ «Кримський титан»), продукцією якого є діоксид титану, мінеральні добрива, сульфат алюмінію, залізний купорос. Оцінні розрахунки виконано за даними екологічного моніторингу системи «викиди у атмосферу забруднювальних речовин – розміщення відходів – вплив на НПС».

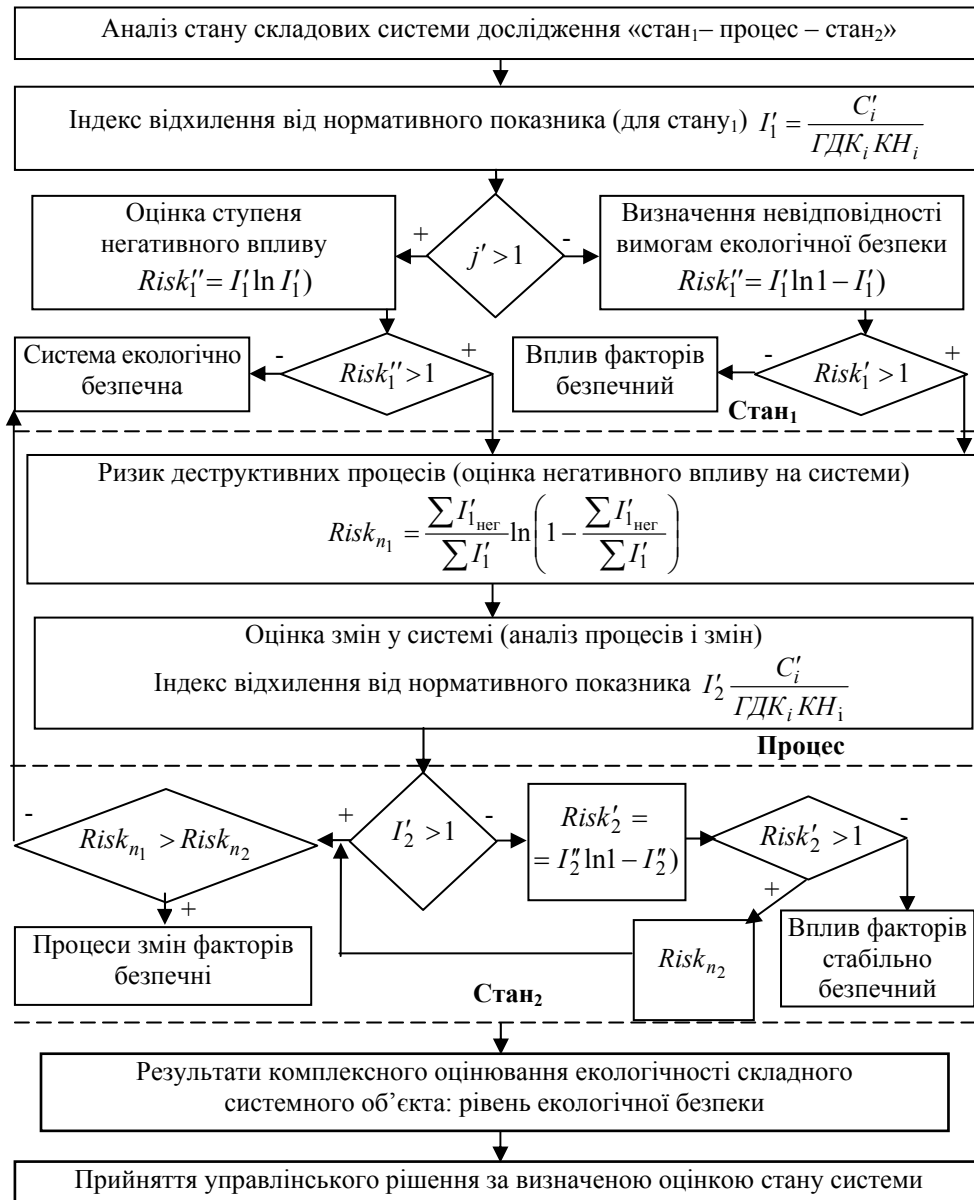


Рис. 2. Алгоритм ризик-оцінки екологічності системних об'єктів

Результати оцінювання відповідності технології виробництва діоксиду титану, мінеральних добрив, сульфату алюмінію, залізного купоросу вимогам безпеки НПС отримано за MIPS-аналізом викидів у атмосферу, розміщення відходів на полігоні за відповідним складуванням і захороненням їх у фосфогіпсосховищі та кислотонакопичувачі (табл. 1).

За всіма показниками оцінювання екологічності $MIPS_2 > MIPS_1$, отже, кінцевий стан взаємодії «об'єкт – НПС» визначається як екологічно небезпечний.

Негативний фактор впливу на НПС технології виробництва діоксиду титану, мінеральних добрив, сульфату алюмінію, залізного купоросу оціню-

ється за величиною ризику, отриманого при порівнянні вимірюваних фактичних показників з рівнями безпеки у вигляді граничнодопустимих концентрацій (ГДК). Нормативне значення ГДК допускає обмежене коливання у дестабілізації системи, прийнятну «міру» навантаження на природне середовище (розрахунки відповідно до алгоритму, показаному на рис. 2) (табл. 2).

Таблиця 1. MIPS-аналіз екологічності виробництва ПАТ «Юкрейніан кемикал продактс»

№ з/п	Забруднювальна речовина	MI-число [20]	C_i		$MI_{заг}$	
			2014	2015		
Викиди в атмосферу: стаціонарні джерела						
1	Азоту діоксид	1,05	207,95	251,74	218,35	39,51
2	Аміак	5,04	10,7	22,36	53,93	19,80
3	Ангідрид сірчаний	0,41	4417,88	4432,84	1824,58	5345,63
4	Оксид вуглецю	4,70	45,87	69,82	215,59	318,34
5	Вуглеводороди	2,19	1,52	1,83	3,33	6,57
6	Зважені сполуки	-	771,32	1013,4	0,00	0,00
7	Газоподібні фтористі сполуки	0,06	3,15	5,43	0,18	9,23
8	Марганець, сполуки	2,23	0,004	0,0047	0,01	0,07
9	Свинець і його сполуки	-	0,00025	0,00013	-	0,00
10	Хром і його сполуки	2,30	0,029	0,033	0,07	0,39
11	Сірчана кислота	0,70	561,63	584,24	393,14	140,41
Сумарне MIPS-число					0,38	0,98
Викиди в атмосферу: пересувні джерела						
12	Дизельне паливо	0,02	979,3	1283,47	18,61	1331,85
13	Бензин етиловий	3,20	487,72	459	1560,70	2170,35
Сумарне MIPS-число*					1,08	2,39
Розміщення відходів						
14	Гідролізна кислота	0,38	32637	6987,1	12402,06	30352,41
15	Шлам чорний	0,66	13712	11246,4	8981,36	32634,56
16	Залізний купорос	1,73	56550	15283,4	97605,30	75211,50
17	Пульпа фосфогіпсу	0,06	29820	74440	1669,92	19979,40
18	Відпрацьовані шини	1,65	5,63	8,17	9,29	32,09
19	Відходи очищення обладнання	-	774	838	-	-
20	Будівельні відходи	0,06	875	952	52,50	1452,50
21	Відходи футерування	-	570	734	-	-
22	Відпрацьовані ртутні лампи	-	211	206	-	-
23	Відпрацьовані акумулятори	0,64	0,4	0,162	0,26	1,07
24	Відпрацьований ванадієвий каталізатор	-	1,4	100	-	-
Сумарне MIPS-число					0,89	1,18

Таблиця 2. Ризик-оцінка виробництва ПАТ «Юкрейниан кемикал продактс»

№ з/п	Забруднювальна речовина	ГДК	К	I_i		Risk	
				2014	2015	Стан ₁	Стан ₂
Викиди в атмосферу: стаціонарні джерела							
1	Азоту діоксид	725,04	2	0,14	0,17	0,022	0,03
2	Аміак	75,04	4	0,04	0,07	0,001	0,01
3	Ангідрид сірчаний	5862,8	3	0,25	0,25	0,073	0,07
4	Оксид вуглецю	164,15	4	0,07	0,11	0,005	0,01
5	Вуглеводороди	1,73	3	0,29	0,35	0,101	0,15
6	Зважені сполуки	3111,6	3	0,08	0,11	0,007	0,01
7	Газоподібні фтористі сполуки	33,24	2	0,05	0,08	0,002	0,01
8	Марганець, сполуки	0,012	2	1,67	1,96	0,851	1,32
9	Свинець і його сполуки	0,0003	1	0,96	0,5	3,133	0,35
10	Хром і його сполуки	0,1164	1	0,25	0,28	0,071	0,09
11	Сірчана кислота	1561,5	2	0,18	0,19	0,036	0,04
<i>Risk_n процесів</i>						0,713	0,314
Розміщення відходів							
12	Гідролізна кислота	537,2	2	30,4	6,503	103,7	12,18
13	Шлам чорний	163327	4	0,02	0,017	0,0003	3·10 ⁻⁴
14	Залізний купорос	65802	4	0,21	0,058	0,052	0,003
15	Пульпа фосфогіпсу	277120	4	0,03	0,067	0,0007	0,005
16	Відпрацьовані шини	16	4	0,09	0,128	0,0081	0,017
17	Відходи очищення обладнання	1000	4	0,19	0,21	0,0416	0,049
18	Будівельні відходи	1000		0,88	0,952	1,8195	2,891
19	Відходи футерування	800		0,71	0,918	0,8882	2,289
20	Відпрацьовані акумулятори	1,4	2	0,14	0,058	0,022	0,003
21	Відпрацьований ванадієвий каталізатор	130	4	0	0,192	10 ⁻⁶	0,041
<i>Risk_n процесів</i>						2,477	2,321

Небезпечними факторами відповідно до отриманих результатів (табл. 2) визначено марганець та його сполуки, гідролізну кислоту, будівельні відходи і відходи футерування. Загальна ризик-оцінка відповідає ситуації $Risk_{n1} > Risk_{n2}$, що зумовлено проявом процесів самоорганізації, які нівелюють негативний вплив на об'єкти НПС. Аналіз таких процесів проводиться в межах даної методики додатково на основі термодинамічних розрахунків довільних реакцій між складовими відходів і їх взаємодії з елементами середовища [21, 22].

ВИСНОВКИ

У роботі обґрунтовано теоретико-методичні основи комплексного аналізу стану ПТСО на основі системи оцінювання екологічної відповідності за

MIPS- і ризик-аналізом з ідентифікацією негативних порушень у системі «техногенний об'єкт – НПС» і отримано таке:

1) сформовано методичне забезпечення комплексного оцінювання якості та безпечності системних об'єктів з урахуванням специфіки їх функціонування, взаємозв'язку між станом і процесами внутрішньої самоорганізації та зовнішнього зв'язку з НПС відповідно до системного гомеостазу;

2) розроблено інформаційно-алгоритмічне забезпечення комплексного оцінювання екологічності ПТСО відповідно до аналізу стану системи «об'єкт – навколишнє середовище» на основі *MIPS*-аналізу і детального оцінювання змін за послідовним ризик-аналізом «стан₁ – процес – стан₂»;

3) показано перспективність реалізації комплексного методичного забезпечення з оцінювання якості ПТСО для отримання інформаційної підтримки прийняття зважених рішень для розв'язання практичних завдань екологічної безпеки на прикладі оцінювання рівня безпеки виробництва діоксиду титану, мінеральних добрив, сульфату алюмінію, залізного купоросу відповідно до аналізу системи «викиди у атмосферу забруднювальних речовин – розміщення відходів – вплив на НПС» (табл. 1, 2).

Наукова новизна отриманих результатів у роботі полягає в удосконаленні математичного забезпечення *MIPS*-аналізу для врахування екологічної змістовності складових ПТСО. У методиці ризик-аналізу враховується узгодженість «стан₁ – процес – стан₂» для різних рівнів деталізації оцінки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Згуровский М.З. Глобальное моделирование процессов устойчивого развития в контексте качества и безопасности жизни людей / М.З. Згуровский, А.Д. Гвишиани. — К.: Політехніка, 2008. — 331 с.
2. Лисиченко Г.В. Природний, техногенний та екологічний ризики: аналіз, оцінка, управління / Г. В. Лисиченко, Ю.Л. Забулонов, Г.А. Хміль. — К.: Наук. думка, 2008. — 543 с.
3. Харламова Е.В. Теоретические основы управления экологической безопасностью техногенно нагруженного региона / Е.В. Харламова, М.С. Малеваный, Л.Д. Пляцук // Екологічна безпека. — 2012. — № 1. — С. 9–12.
4. Dies A.M. Economic aspects of thermal treatment of solid waste in a sustainable WM system / A.M. Dies // Waste Management. — 2015. — Vol. 37. — P. 45–57.
5. Ordouei M.H. New sustainability indices for product design employing environmental impact and risk reduction: case study on gasoline blends / M.H. Ordouei, Ali Elkamela, Maurice B. Dusseault, I. Alhajric // Journal of Cleaner Production. — 2015. — Vol. 108. — Part A. — P. 312–320.
6. Costantini V. Hybrid Economic-Environmental Accounts / V. Costantini, M. Mazzanti, A. Montini. — Routledge: New York, 2012. — 264 p.
7. Риттхофф М. Вычисления MIPS: ресурсная продуктивность продукции и услуг / М. Риттхофф; под науч. ред. О.Сергиенко, Х. Рона // Основы теории эко-эффективности. — СПб, 2004. — 246 с.
8. Wernick I.K. Material Flows Accounts – A Tool for Making Environmental Policy, WRI Report / I.K. Wernick, F.H. Irwin. — World Resource Institute: Washington, DC, USA, 2005. — 246 p.
9. Wiesen K. Calculating the material input per service unit using the ecoinvent database / K. Wiesen, M. Saurat, M. Lettenmeier // International journal of performance engineering. — 2014. — Vol. 10, N. 4. — P. 357–366.

10. *Lukasa M.* The nutritional footprint – integrated methodology using environmental and health indicators to indicate potential for absolute reduction of natural resource use in the field of food and nutrition / M. Lukasa, H. Rohna, M. Lettenmeierd etc. // *Journal of Cleaner Production*. — 2015. — Vol. 110. — P. 322–330.
11. *Mancini L.* Application of the MIPS method for assessing the sustainability of production-consumption systems of food / L. Mancini, H. Rohn, C. Liedtke // *Journal of Economic Behavior & Organization*. — 2012. — Vol. 81(3). — P. 779–793.
12. *Laakso S.* Household-level transition methodology towards sustainable material footprints / S. Laakso, M. Lettenmeierb // *Journal of Cleaner Production*. — 2016. — Vol. 125. — P. 267–278.
13. *Качинский А.Б.* Структурный анализ системы обеспечения экологической и природно-техногенной безопасности Украины / А.Б. Качинский, Н.В. Агаркова // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2013. — № 1. — С. 7–15.
14. *Биченок М.М.* Ризики життєдіяльності у природно-техногенному середовищі: моногр. / М.М. Биченок, С.П. Іванюта, Є.О. Яковлев. — К.: РНБО, 2009. — 160 с.
15. *Статюха Г.О.* Системний підхід до оцінювання ризиків при проектуванні промислових об'єктів / Г.О. Статюха, Т.В. Бойко, А.О. Абрамова // *Східно-Європейський журнал передових технологій*. — 2013. — Т. 2, 14 (56). — С. 8–12.
16. *Cao Q.* Health risk characterisation for environmental pollutants with a new concept of overall risk probability / Q. Cao, Q. Yu, D.W. Connell // *Journal of Hazardous Materials*. — 2013. — Vol. 187. — P. 480–487.
17. *Whittaker M.H.* Risk Assessment and Alternatives Assessment: Comparing Two Methodologies / M.H. Whittaker // *Risk Analysis*. — 2015. — Vol. 35. — N 12 — P. 2129–2136.
18. *Козуля Т.В.* Використання МІ-чисел при формуванні комплексної оцінки екологічності виробництва і ПТК / Т.В. Козуля, Д.І. Ємельянова // *Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 15 Міжнар. науково-техн. конф. SAIT*. — К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ». — 2013. — С. 115–116.
19. *Козуля Т.В.* Екологічний ризик на різних рівнях дослідження природно-техногенних систем, інформаційне забезпечення його оцінки / Т.В. Козуля, Д.І. Ємельянова // *Проблеми інформаційних технологій*. — 2015. — № 17. — С. 138–144.
20. *Ritthoff M.* Calculating MIPS – Resource Productivity of Products and Services / M. Ritthoff, H. Rohn, C. Liedtke. — Wuppertal, 2003. — Access mode: www.mips.online.info
21. *Касимов А.М.* Применение методики термодинамической оценки воздействия известняковой технологии мокрой сероочистки на объекты окружающей среды / А.М. Касимов, Т.В. Козуля, Д.И. Емельянова, М.М. Козуля // *Экология и промышленность*. — 2016. — № 1. — С. 94–98.
22. *Касимов А.М.* Методическое обеспечение оценки воздействия техногенных объектов на окружающую среду / А.М. Касимов, Т.В. Козуля, Д.И. Емельянова, М.М. Козуля // *Экологический вестник Северного Кавказа*. — 2016. — № 1. — С. 48–54.

Надійшла 09.11.2016

ПРО ДИНАМІКУ ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ МОНОПОЛІСТІВ І ФІНАНСОВИХ ЗОБОВ'ЯЗАНЬ

А.П. МАХОРТ

Анотація. Досліджено рівновагу відкритої економічної системи, яка складається з ненасичуваних споживачів товарів. Частина споживачів отримує фінансові надходження за рахунок власного виробництва, решта споживачів фінансується із зовнішніх джерел. Розглянуто рівновагу вальрасового типу. Модель економіки враховує наявність монополістів серед виробників товарів і фінансових зобов'язань у суб'єктів економічної системи. Фінансові зобов'язання спричиняють перерозподіл капіталу в економічній системі. Формування споживчих уподобань залежить від фінансових зобов'язань. Для такої економічної системи встановлено умови існування рівноваги. Визначено характеристики стану рівноваги, прийнятого для всіх суб'єктів економічної системи за рівнями споживання. Знайдено обсяги перерозподілу капіталу, за яких рівні споживання перевищуватимуть визначену межу. За еволюцію фінансових зобов'язань запропоновано опис динаміки економічної системи.

Ключові слова: рівновага, монополісти, попит, пропозиція, ціни.

ВСТУП

Моделювання поведінки економічних систем дає змогу виявляти інструменти впливу на них. Застосування інструментів впливу має сприяти усуненню процесів, які негативно діятимуть на економічну систему. Рівноважні підходи дослідження економічних систем надають потрібну для цього інформацію. Використання моделей рівноваги за Вальрасом [1, 2] є результативним щодо виявлення кризових чинників в економічних системах та вказує на засоби усунення їх дії.

Взаємовідносини між учасниками ринку призводять до встановлення певних фінансових зобов'язань. Зокрема, інвестиційна діяльність суб'єктів економічної системи є одним з мотивів появи фінансових зобов'язань. Але залежно від обставин ці зобов'язання можуть бути і кризовими чинниками. А в монополізованих економіках, які вже є потенційно вразливими до дестабілізуючих процесів, навіть незначні дисбаланси можуть істотно посилюватись. Важливо запобігти розвитку таких сценаріїв.

У моделі економіки врахуємо, що наявність фінансових зобов'язань впливатиме на особливості формування споживчих уподобань суб'єктів економічної системи. Крім того, розглядатимемо функціонування економічної системи в динаміці, щоб використати інформацію про еволюцію фінансових зобов'язань.

Мета роботи — з'ясування комбінованого впливу монопольних явищ та необхідності виконання зобов'язань на умови встановлення рівноваги економічної системи. Серед набору ймовірних станів рівноваги виокремлю-

ватимемо лише прийнятні за рівнем споживання для всіх суб'єктів економічної системи.

МОДЕЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо дискретну динаміку відкритої економічної системи. У кожному періоді функціонування економічна система формуватиметься з l споживачів наявних n різновидів товарів (послуг). Вважатимемо, що стратегії поведінки споживачів передбачають їх ненасичуваність. Це означає, що всі можливі фінансові надходження споживачів витратяться на придбання нових товарів. Одним з джерел фінансових надходжень є реалізація споживачами на ринку своїх надлишкових товарних ресурсів та отримання прибутку. Щодо надлишкових товарних ресурсів, то вони можуть утворюватись у процесі виробництва. Отже, частина споживачів водночас є і виробниками товарів. Будемо вважати, що серед виробників є і монополісти. Інша частина споживачів, яка не виробляє власних товарів, отримуватиме фінансування за рахунок перерозподілу прибутків виробників. Перерозподіл здійснюватиметься в результаті оподаткування прибутків.

Споживчі уподобання суб'єктів економічної системи в s -му періоді функціонування описуватимемо за допомогою матриці попиту $C^{\{s\}} = \|c_{kj}^{\{s\}}\|_{k=1, j=1}^{n, l}$. На формування уподобань впливають різні чинники і ці впливи можна враховувати, якщо ввести функціональну залежність матричних елементів $c_{kj}^{\{s\}} = c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}})$ від обраного чинника $z^{\{s\}}$. Вважатимемо надалі, що характеристика $z^{\{s\}}$ пов'язана з наявністю фінансових зобов'язань одних суб'єктів економічної системи перед іншими. Для визначених фінансових зобов'язань $z^{\{s\}}$ значення величин $c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}})$ вказуватимуть на обсяг k -го товару, який потрібен j -му споживачу. За вектора цін на товари $p^{\{s\}} = \{p_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ і таких споживчих уподобань суб'єктів економічної системи попит i -го споживача на k -й товар $\Lambda_{ik}^{\{s\}}(p)$ у s -му періоді функціонування матиме вигляд

$$\Lambda_{ik}^{\{s\}}(p) = \frac{c_{ki}^{\{s\}}(z^{\{s\}})p_k^{\{s\}}}{\sum_{j=1}^n c_{ji}^{\{s\}}(z^{\{s\}})p_j^{\{s\}}}, \quad i = \overline{1, l}, \quad k = \overline{1, n},$$

а щоб отримати вираз для попиту на k -й товар в економічній системі $\Phi_k^{\{s\}}$, слід врахувати прибуток споживачів

$$\tilde{D}_i^{\{s\}}(p^{\{s\}}) = y_i^{\{s\}} \sum_{j=1}^n c_{ji}^{\{s\}}(z^{\{s\}})p_j^{\{s\}}, \quad i = \overline{1, l}. \quad (1)$$

У підсумку матимемо

$$\Phi_k^{\{s\}} = \frac{1}{p_k^{\{s\}}} \sum_{i=1}^l \Lambda_{ik}^{\{s\}}(p^{\{s\}}) \tilde{D}_i^{\{s\}}(p^{\{s\}}), \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Величини $y^{\{s\}} = \{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$ у виразі (1) є ступенями задоволення потреб споживачів і визначають спроможність суб'єктів економічної системи в s -му періоді функціонування забезпечити своєю діяльністю той рівень прибутку, якого буде достатньо для придбання всього (або частини) бажаного набору товарів. Відповідно вони набувають значень в інтервалі $(0, 1]$.

Наявні товари в економічній системі є або ж виготовленими в процесі виробництва, або ж такими, що лишилися з попередніх періодів функціонування і містилися у запасах суб'єктів економічної системи. Нехай для реалізації на ринку кожен виробник виготовляє лише один тип товару і може мати запас товарів інших виробників, крім, хіба що, товарів монополістів. У s -й період функціонування обсяги випуску нових товарів в економічній системі опишемо компонентами вектора $x^{\{s\}} = \{x_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$, а обсяги запасів товару визначатимуть компоненти вектора $\{b_{ki}^{\{s\}}\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1, n}$. Технологічний процес виготовлення товарів та витрати, пов'язані з ним, характеризуватиме матриця вигляду $\|a_{ki}^{\{s\}} + b_{ki}^{\{s\}} / x_i^{\{s\}}\|_{k,i=1}^n$, де її складові $a_{ki}^{\{s\}}$ визначають поточні витрати на виготовлення одиниці випуску i -го товару в натуральних показниках k -м виробником, а елементи $b_{ki}^{\{s\}}$ стосуються постійних витрат усього виробництва. За такого вигляду технологічної матриці з урахуванням запасів товарів, їх експорту $\{e_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ та імпорту $\{i_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ рівень пропозиції $\Psi_k^{\{s\}}$ k -го товару на ринку становитиме

$$\Psi_k^{\{s\}} = x_k^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n a_{ki}^{\{s\}} x_i^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n b_{ki}^{\{s\}} + \sum_{i=1}^n b_{ki}^{1\{s\}} - e_k^{\{s\}} + i_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Реалізувавши на ринку свою пропозицію товарів, після оподаткування суб'єкти економічної системи матимуть прибуток

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j^{1\{s\}}(p^{\{s\}}) &= \pi_j^{\{s\}} x_j^{\{s\}} \left(p_j^{\{s\}} - \sum_{k=1}^n a_{kj}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} \right) - \\ &- \pi_j^{\{s\}} \sum_{k=1}^n b_{kj}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} + \pi_j^{\{s\}} \sum_{k=1}^n b_{kj}^{1\{s\}} p_k^{\{s\}}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Стратегію оподаткування у s -му періоді функціонування визначатиме вектор $\pi = \{\pi_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$. Наявність фінансових зобов'язань зумовлюватиме появу додаткового перерозподілу капіталу між виробниками

$$\tilde{D}_j^{\{s\}}(p^{\{s\}}) = \tilde{D}_j^{1\{s\}}(p^{\{s\}}) + D_j^{\{s\}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

У наборі величин $z^{\{s\}} = \{D_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ є і додатні, пов'язані з отриманням капіталу, і від'ємні через необхідність здійснення виплат за зобов'язаннями. Для тих суб'єктів економічної системи, які є і виробниками, і споживачами товарів, вираз (1) має збігатися з виразом (4). А прибутки тих споживачів, які не є виробниками, формуватимуться з урахуванням вимоги

$$\sum_{j=n+1}^l \tilde{D}_j^{\{s\}}(p^{\{s\}}) = \sum_{j=1}^n (1 - \pi_j^{\{s\}}) D_j^{\{s\}}(p^{\{s\}}) / \pi_j^{\{s\}}.$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Висновки про поведінку економічної системи можна зробити за значеннями її характеристик. А всі значення характеристик економічної системи гарантовано визначені лише в одному зі станів рівноваги. Рівновага економічної системи вальрасового типу [1, 2] передбачає, що в кожному періоді функціонування пропозиція товарів в економічній системі перевищує попит на них. Звуження цієї вимоги до випадку рівності попиту і пропозиції дозволить отримати набір лише економічно прийнятних станів економічної системи [1] (тих, які забезпечуватимуть надходження прибутків усім її суб'єктам). На підставі співвідношень (2) і (3) запишемо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_k^{\{s\}}} \sum_{i=1}^l \Lambda_{ik}^{\{s\}}(p^{\{s\}}) \tilde{D}_i^{\{s\}}(p^{\{s\}}) = \\ & = x_k^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n a_{ki}^{\{s\}} x_i^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n b_{ki}^{\{s\}} + \sum_{i=1}^n b_{ki}^{1\{s\}} - e_k^{\{s\}} + i_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) y_j^{\{s\}} &= x_k^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n a_{ki}^{\{s\}} x_i^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n b_{ki}^{\{s\}} + \\ &+ \sum_{i=1}^n b_{ki}^{1\{s\}} - e_k^{\{s\}} + i_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{5}$$

Крім того, з виразів (1) і (4) також впливатимуть рівняння

$$\begin{aligned} D_j^{\{s\}} + \pi_j^{\{s\}} x_j^{\{s\}} \left(p_j^{\{s\}} - \sum_{k=1}^n a_{kj}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} \right) - \pi_j^{\{s\}} \sum_{k=1}^n b_{kj}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} + \\ + \pi_j^{\{s\}} \sum_{k=1}^n b_{kj}^{1\{s\}} p_k^{\{s\}} = y_j^{\{s\}} \sum_{i=1}^n c_{ij}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) p_i^{\{s\}}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{6}$$

У системі рівнянь (5), (6) заданими є ті характеристики, на значення яких безпосередньо можуть впливати суб'єкти економічної системи. За наявних фінансових зобов'язань $z^{\{s\}} = \{D_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ споживачі визначаються зі своїми уподобаннями. Не братимемо до уваги випадок, коли всі споживачі не зацікавлені в окремому товарі, а окремий споживач не цікавиться жодним товаром. Вважатимемо, що для коефіцієнтів споживання справедлива оцінка $c_{kj}^{1\{s\}} \leq c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \leq c_{kj}^{0\{s\}}$, а величини $\{c_{kj}^{1\{s\}}\}_{k=1}^n$ і $\{c_{kj}^{0\{s\}}\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1, l}$ — відомі. Вони задають відповідно мінімальний та максимальний набори бажаних товарів, що ними цікавиться i -й споживач, і утворюють матриці $C_{\{s\}}^1 = \left\| c_{kj}^{1\{s\}} \right\|_{k=1, j=1}^{n, l}$ та $C_{\{s\}}^0 = \left\| c_{kj}^{0\{s\}} \right\|_{k=1, j=1}^{n, l}$. Мінімальний та максимальний

набори виникатимуть унаслідок можливих змін у виплатах фінансових зобов'язань $z^{\{s\}}$. Виробники приймають рішення щодо технологій виготовлення своїх товарів, тому елементи матриць технологічних коефіцієнтів $\|a_{kj}^{\{s\}}\|_{k,j=1}^n$, $\|b_{kj}^{\{s\}}\|_{k,j=1}^n$ мають бути відомими. Відомими будуть і обсяги запасу

товарів суб'єктів економічної системи, подані матрицею $\|b_{kj}^{1\{s\}}\|_{k,j=1}^n$.

Із технологічним процесом пов'язані і ціни та обсяги випусків товарів. Їх значення залежать від балансу між попитом і пропозицією, який встановлюється внаслідок рівноваги. Виготовлений товар має реалізовуватись на ринку за певною ціною. На ціну виробників товару можуть впливати лише монополісти, але баланс попиту і пропозиції обмежує їх вплив на обсяги випуску товарів. Решта виробників навпаки впливають лише на обсяги випусків товарів, тоді як ціна складатиметься в результаті досягнення рівноваги між попитом і пропозицією. Отже, якщо в економічній системі наявні $n-t$ монополістів, ціни на товари монополістів $(p_{t+1}^{0\{s\}}, \dots, p_n^{0\{s\}})$ і обсяги випусків товарів решти виробників $(x_1^{0\{s\}}, \dots, x_t^{0\{s\}})$ будуть заданими. Відповідно до економічних реалій також припускаємо, що і стратегія оподаткування $(\pi_1^{0\{s\}}, \dots, \pi_t^{0\{s\}})$ тих виробників, які не є монополістами, і структура зовнішньоекономічних зв'язків, подана векторами $\{e_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ й $\{i_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$, є заданими.

Від ситуації на ринку залежать рівні споживання суб'єктів економічної системи, подані компонентами вектора $(y_1^{\{s\}}, \dots, y_l^{\{s\}})$, ціни $(p_1^{\{s\}}, \dots, p_l^{\{s\}})$, обсяги випусків $(x_{t+1}^{\{s\}}, \dots, x_n^{\{s\}})$. Унаслідок антимонопольного регулювання змінюватимуться також рівні оподаткування монополістів $(\pi_{t+1}^{\{s\}}, \dots, \pi_n^{\{s\}})$. Значення всіх цих величин залежить від поточного стану рівноваги економічної системи. Отже, систему рівнянь (5), (6) розв'язуватимемо стосовно векторів $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$, $\{p_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$, $\{x_i^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$ і $\{\pi_i^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$. Кожен розв'язок відповідатиме можливому стану рівноваги економічної системи. З набору рівноважних станів виокремлюватимемо лише ті, перебування в яких забезпечуватиме ефективне функціонування її суб'єктам, що можна з'ясувати за компонентами вектора ступенів задоволення потреб споживачів. Вважатимемо, що їх значення мають бути не нижчими за встановлений рівень.

Міжперіодну динаміку економічної системи враховуватимемо за еволюцією фінансових зобов'язань. Тоді зобов'язання змінюватимуться за формулою

$$D_j^{\{s+1\}} = -\lambda_{jD}^{\{s\}} D_j^{\{s\}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Унаслідок таких змін можна виявити і трансформації характеристик станів рівноваги економічної системи в різних періодах її функціонування:

$$y_k^{\{s+1\}} = \delta_{ky}^{\{s\}} y_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, l},$$

$$p_k^{\{s+1\}} = \delta_{kp}^{\{s\}} p_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, t},$$

$$x_k^{\{s+1\}} = \delta_{kx}^{\{s\}} x_k^{\{s\}}, \quad \pi_k^{\{s+1\}} = \delta_{k\pi}^{\{s\}} \pi_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{t+1, n}.$$

СТУПЕНІ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ ВИРОБНИКІВ ТОВАРІВ

Вектор ступенів задоволення потреб споживачів $y^{\{s\}} = \{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$ є важливою характеристикою для встановлення якості стану рівноваги економічної системи. Наявність фінансових зобов'язань впливатиме на рівноважні значення компонентів цього вектора. Поява фінансових зобов'язань у деякому періоді функціонування зумовлено бажанням суб'єктів економічної системи поліпшити умови функціонування. Тоді для кожного суб'єкта економічної системи рівень задоволення потреб, визначений у випадку відсутності фінансових зобов'язань, не повинен знизитись у разі їх появи. Зміну уподобань суб'єктів економічної системи не пов'язуватимемо зі збільшенням, або зменшенням споживання окремих товарів. Отже, тут ідеться не про формальне збільшення обсягів споживання товарів, а саме про рівень задоволення потреб для обраного споживчого набору товарів. З'ясуємо, які обсяги перерозподілу капіталу забезпечуватимуть це. Слід враховувати, що і потреба у додаткових фінансових надходженнях і спроможність робити виплати за зобов'язаннями залежать від рівня прибутку. Тому має бути і зворотний вплив рівнів задоволення суб'єктів економічної системи на обсяги перерозподілу капіталу $\{D_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$. Нехай такий зворотний вплив задається виразом

$$D_j^{\{s\}} = \vartheta_j^{\{s\}} F_j^{\{s\}}(y_1^{\{s\}}, \dots, y_n^{\{s\}}), \quad F_j^{\{s\}}(y_1^{\{s\}}, \dots, y_n^{\{s\}}) \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де сталі $\{\vartheta_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ набувають значення 1, або -1 залежно від знака величин $\{D_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$.

Нехай $A^{\{s\}} = \|a_{kj}^{\{s\}}\|_{k,j=1}^n$ є нерозкладною матрицею зі спектральним радіусом меншим за одиницю. Тоді, увівши позначення

$$d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) = \sum_{i=1}^n (E - A^{\{s\}})^{-1}_{ki} c_{ij}^{\{s\}}(z^{\{s\}}),$$

$$b_k^{\{s\}} = x_k^{\{s\}} - \sum_{i=1}^n (E - A^{\{s\}})^{-1}_{ki} \left[\sum_{j=1}^n b_{ij}^{\{s\}} - \sum_{j=1}^n b_{ij}^{1\{s\}} + e_i^{\{s\}} - i_i^{\{s\}} \right],$$

систему рівнянь (5) можна подати у вигляді

$$\sum_{j=1}^l d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) y_j^{\{s\}} = b_k^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Знайдемо вектори $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$ й $\{D_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$, які задовольнятимуть систему рівнянь (7), (8). Обсяги випусків $(x_1^{\{s\}}, \dots, x_t^{\{s\}})$ задано, тому і величини

$(b_1^{0\{s\}}, \dots, b_t^{0\{s\}})$ будуть заданими. Їх значення мають бути лише додатними унаслідок спектральних властивостей матриці $A^{\{s\}}$ і того, що пропозиція товарів в економічній системі не може бути від'ємною. Рівняння (7) з відомою правою частиною дають змогу визначити рівноважні значення ступенів задоволення потреб кожного суб'єкта економічної системи $\{y_i^{m\{s\}}\}_{i=1}^l$ у випадку відсутності фінансових зобов'язань $z^{\{s\}} = 0$ [3, 4]. Щоб фінансові зобов'язання не призводили до зниження рівнів задоволення потреб споживачів, слід вимагати виконання оцінок $y_i^{\{s\}} \geq y_i^{m\{s\}}$, $i = \overline{1, n}$. Використаємо алгоритм, запропонований у праці [4]. Нехай коливання обсягів перерозподілу капіталу в економічній системі відбуваються у межах $D_j^{m\{s\}} \leq |D_j^{\{s\}}| \leq D_j^{M\{s\}}$, $j = \overline{1, n}$ та узгоджені з оцінками на коефіцієнти споживання $c_{kj}^{1\{s\}} \leq c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \leq c_{kj}^{0\{s\}}$.

Задамо константи $\Delta_0^{\{s\}}$, $\Delta_1^{\{s\}}$ за умови, що вони задовольнятимуть нерівності

$$\sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{1\{s\}} y_{kj}^{m\{s\}} - y_k^{m\{s\}} \Delta_1^{\{s\}} \leq b_k^{0\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} \leq \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{0\{s\}} - \Delta_1^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, t}. \quad (9)$$

З урахуванням цього виберемо сукупність параметрів $(\alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha_{t+1}^1, \dots, \alpha_n^1)$, за якими побудуємо величини $\{\beta_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$:

$$\beta_j^{\{s\}} = \Delta_1^{\{s\}} \alpha_j^{\{s\}} + \sum_{k=1}^t \alpha_k^{\{s\}} d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}), \quad j = \overline{1, t},$$

$$\beta_j^{\{s\}} = \Delta_0^{\{s\}} \alpha_j^1 + \sum_{k=1}^t \alpha_k^{\{s\}} d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}), \quad j = \overline{t+1, n}.$$

Будемо вважати, що для них виконуватимуться оцінки

$$y_j^{m\{s\}} \leq \beta_j^{\{s\}} \leq 1, \quad j = \overline{1, n},$$

якщо

$$d_{kj}^{0\{s\}} = \sum_{i=1}^n (E - A^{\{s\}})^{-1}_{ki} c_{ij}^{0\{s\}} \geq d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \geq d_{kj}^{1\{s\}} = \sum_{i=1}^n (E - A^{\{s\}})^{-1}_{ki} c_{ij}^{1\{s\}}.$$

Рівноважні компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів $y_1^{\{s\}}, \dots, y_n^{\{s\}}$ визначатимемо з оптимізаційної задачі

$$\min_{(y_1^{\{s\}}, \dots, y_n^{\{s\}})} \mathcal{F}^{\{s\}}, \quad \mathcal{F}^{\{s\}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\beta_j^{\{s\}} - y_j^{\{s\}}]^2 \quad (10)$$

за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^n d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) y_j^{\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} = \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}}, \quad k = \overline{1, t}. \quad (11)$$

Теорема 1. Нехай для заданих значень сталих $\Delta_0^{\{s\}}$, $\Delta_1^{\{s\}}$ і параметрів $(\alpha_{t+1}^1, \dots, \alpha_n^1)$ з умов

$$y_j^{m\{s\}} \leq \sigma_m^{\{s\}} \left(\Delta_1^{\{s\}} + \sum_{k=1}^t d_{kj}^{1\{s\}} \right) \leq \sigma_M^{\{s\}} \left(\Delta_1^{\{s\}} + \sum_{k=1}^t d_{kj}^{0\{s\}} \right) \leq 1, \quad j = \overline{1, t},$$

$$y_j^{m\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} \alpha_j^{1\{s\}} \leq \sigma_m^{\{s\}} \sum_{k=1}^t d_{kj}^{1\{s\}} \leq \sigma_M^{\{s\}} \sum_{k=1}^t d_{kj}^{0\{s\}} \leq 1 - \Delta_0^{\{s\}} \alpha_j^{1\{s\}}, \quad j = \overline{t+1, n}$$

вибрано величини $\sigma_m^{\{s\}}$, $\sigma_M^{\{s\}}$ так, щоб виконувалися нерівності

$$\frac{\Delta_0^{\{s\}}}{(\Delta_1^{\{s\}})^2} \left(b_j^{0\{s\}} - \sum_{j=t+1}^n d_{kj}^{1\{s\}} \alpha_j^{1\{s\}} \right) -$$

$$- \frac{\sigma_m^{\{s\}}}{(\Delta_1^{\{s\}})^2} \left(\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^n d_{ki}^{1\{s\}} d_{ji}^{1\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} \sum_{j=1}^t d_{kj}^{1\{s\}} + \Delta_1 \sum_{j=1}^t d_{jk}^{1\{s\}} \right) \leq \sigma_M^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, t},$$

$$\frac{\Delta_0^{\{s\}}}{(\Delta_1^{\{s\}})^2} \left(b_j^{0\{s\}} \alpha_k^{0\{s\}} - \sum_{j=t+1}^n d_{kj}^{0\{s\}} \alpha_j^{1\{s\}} \right) -$$

$$- \frac{\sigma_M^{\{s\}}}{(\Delta_1^{\{s\}})^2} \left(\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^n d_{ki}^{0\{s\}} d_{ji}^{0\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} \sum_{j=1}^t d_{kj}^{0\{s\}} + \Delta_1 \sum_{j=1}^t d_{jk}^{0\{s\}} \right) \geq \sigma_m^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, t}.$$

Тоді за обмежень на коефіцієнти споживання $c_{kj}^{1\{s\}} \leq c_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \leq c_{kj}^{0\{s\}}$ існуватиме розв'язок оптимізаційної задачі (10), (11) $y_1^{\{s\}}, \dots, y_n^{\{s\}}$, який набудуватиме значень у множині $\{[y_i^{m\{s\}}, 1], j = \overline{1, n}\}$. Цьому розв'язку відповідатиме оптимальний обсяг перерозподілу капіталу, який задовольняє рівняння (7) і міститься в діапазоні $D_j^{m\{s\}} \leq |D_j^{\{s\}}| \leq D_j^{M\{s\}}, j = \overline{1, n}$.

Доведення. Оптимізаційна задача (9), (10) приводить до функції Лагранжа вигляду

$$\mathcal{L}^{\{s\}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\beta_j^{\{s\}} - y_j^{\{s\}}]^2 + \sum_{k=1}^t \lambda_k^{\{s\}} \left[\sum_{j=1}^n d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) y_j^{\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} \right].$$

Із необхідних і достатніх умов існування мінімуму екстремальних задач випливатиме вимога

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{\{s\}}}{\partial y_i^{\{s\}} \partial y_j^{\{s\}}} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{y}_k^2 > 0,$$

яка виконуватиметься для будь-якого довільно вибраного ненульового вектора $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$, і з'являтимуться рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\{s\}}}{\partial y_j^{\{s\}}} = y_j^{\{s\}} - \beta_j^{\{s\}} + \sum_{k=1}^t \lambda_k^{\{s\}} (\Delta_1^{\{s\}} \delta_{kj} + d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}})) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\{s\}}}{\partial \lambda_k^{\{s\}}} = \sum_{j=1}^n d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) y_j^{\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} = 0, \quad k = \overline{1, t}. \quad (13)$$

Із виразів (12), (13) отримаємо рівняння на множники Лагранжа $\{\lambda_i^{\{s\}}\}_{i=1}^t$:

$$\begin{aligned} (\alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}}) &= \frac{\Delta_0^{\{s\}}}{(\Delta_1^{\{s\}})^2} \left(b_k^{0\{s\}} - \sum_{j=t+1}^n d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \alpha_j^{1\{s\}} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_1^{\{s\}}} \sum_{j=1}^t d_{jk}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) (\alpha_j^{\{s\}} - \lambda_j^{\{s\}}) - \\ &\quad - \frac{1}{(\Delta_1^{\{s\}})^2} \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) d_{ji}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \right] (\alpha_j^{\{s\}} - \lambda_j^{\{s\}}) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_1^{\{s\}}} \sum_{j=1}^t d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) (\alpha_j^{\{s\}} - \lambda_j^{\{s\}}), \quad k = \overline{1, t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вираз (12) визначатиме функціональну залежність $y_k^{\{s\}} = y_k^{\{s\}}(\alpha_1^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}, \dots, \alpha_t^{\{s\}} - \lambda_t^{\{s\}})$, $k = \overline{1, n}$, тому $F_j^{\{s\}}(y_1^{\{s\}}, \dots, y_n^{\{s\}}) = F_j^{*\{s\}}(\alpha_1^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}, \dots, \alpha_t^{\{s\}} - \lambda_t^{\{s\}})$, $k = \overline{1, n}$. Відповідно вирази (7) і (14) можуть бути трансформовані до вигляду

$$\begin{aligned} |D_j^{\{s\}}| &= F_j^{*\{s\}}(\alpha_1^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}, \dots, \alpha_t^{\{s\}} - \lambda_t^{\{s\}}), \quad j = \overline{1, n}, \\ \alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}} &= \Theta_k^{\{s\}}(\alpha_1^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}, \dots, \alpha_t^{\{s\}} - \lambda_t^{\{s\}}), \quad k = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Отже, оптимальні обсяги перерозподілу капіталу визначатимуться за множниками Лагранжа. З умов теореми впливатиме, що множина

$$\mathcal{M}_\lambda^{\{s\}} = \left\{ \alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}} \in R, \left| \frac{\sigma_M^{\{s\}} + \sigma_m^{\{s\}}}{2} - \alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}} \right| \leq \frac{\sigma_M^{\{s\}} - \sigma_m^{\{s\}}}{2}, \quad k = \overline{1, t} \right\}$$

переводитиметься оператором $\{\Theta_k^{\{s\}}(\alpha_1^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}, \dots, \alpha_t^{\{s\}} - \lambda_t^{\{s\}})\}_{i=1}^t$ сама в себе. Тому теореми про нерухому точку [5] гарантуватимуть існування ненульових множників Лагранжа $\{\lambda_i^{\{s\}}\}_{i=1}^t$, діапазон значень яких $\sigma_m^{\{s\}} \leq \alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}} \leq \sigma_M^{\{s\}}$, $k = \overline{1, t}$. Визначення множників Лагранжа одразу дозволить визначити оптимальні обсяги перерозподілу капіталу.

За таких значень множників Лагранжа та обсягів перерозподілу капіталу компоненти вектора ступенів задоволення потреб споживачів, які розв'язуватимуть оптимізаційну задачу (10), (11), розраховуватимуться за формулами

$$\begin{aligned} y_j^{\{s\}} &= \Delta_1^{\{s\}} (\alpha_j^{\{s\}} - \lambda_j^{\{s\}}) + \sum_{k=1}^t (\alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}}) d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}), \quad j = \overline{1, t}, \\ y_j^{\{s\}} &= \Delta_0^{\{s\}} \alpha_j^{1\{s\}} + \sum_{k=1}^t (\alpha_k^{\{s\}} - \lambda_k^{\{s\}}) d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}), \quad j = \overline{t+1, n}, \end{aligned}$$

і задовольнятимуть обмеження $y_i^{\{s\}} \geq y_i^{m\{s\}}$, $i = \overline{1, n}$. Теорему доведено.

Якщо знайдені за допомогою оптимізаційної задачі (10), (11) компоненти $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ вектора ступенів задоволення потреб споживачів є рівноважними, вони мають задовольняти рівняння (8). Визначимо ступені задоволення потреб чистих споживачів $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$ так, щоб ця вимога виконувалась.

РІВНОВАЖНІ СТУПЕНІ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ СПОЖИВАЧІВ

Відповідно до алгоритму, запропонованому у праці [4], щоб знайти компоненти вектора $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$, сформулюємо задачу

$$\min_{(\tilde{y}_{n+1}, \dots, \tilde{y}_l)} \tilde{\mathcal{F}}^{\{s\}}, \quad \tilde{\mathcal{F}}^{\{s\}} = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^l [\tilde{\beta}_j^{\{s\}} - \tilde{y}_j^{\{s\}}]^2 \quad (15)$$

за додаткових вимог

$$b_k^0\{s\} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^0\{s\} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} = \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) - \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \tilde{y}_j^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, t}; \quad (16)$$

$$0 \leq \tilde{y}_k^{\{s\}} \leq 1 - y_k^m\{s\}, \quad k = \overline{n+1, l}, \quad (17)$$

де введено допоміжний вектор $\{\tilde{y}_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$ з компонентами $\tilde{y}_i^{\{s\}} = 1 - y_i^{\{s\}}$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (9), матриця $C_{\{s\}}^1$ не містить нульових рядків і стовпців, а матриця $A^{\{s\}}$ нерозкладна зі спектральним радіусом меншим за одиницю.

Існує сукупність параметрів $\{\alpha_i^1\{s\}\}_{i=1}^t$ і $\{\beta_i^1\{s\}\}_{i=1}^t$, для яких розв'язок оптимізаційної задачі (15) з

$$\tilde{\beta}_j^{\{s\}} = \beta_j^1\{s\} - \sum_{k=1}^t \alpha_k^1\{s\} d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}), \quad j = \overline{n+1, l}$$

задовольнятиме обмеження (17) і рівності (16).

Доведення. Функцію Лагранжа для оптимізаційної задачі (15)–(17) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}^{\{s\}} = & \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^l [\tilde{\beta}_j^{\{s\}} - \tilde{y}_j^{\{s\}}]^2 + \sum_{j \in \{n+1, l\}} \chi_j^{\{s\}} [\tilde{y}_j^{\{s\}} - 1 + y_j^m\{s\}] + \\ & + \sum_{k=1}^t \lambda_k^1\{s\} \left[\sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) - \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \tilde{y}_j^{\{s\}} - b_k^0\{s\} + \Delta_0^{\{s\}} b_k^0\{s\} - \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} \right]. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (15) – (17) має бути додатним і задовольняти рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}^{\{s\}}}{\partial \tilde{y}_j^{\{s\}}} = & \tilde{y}_j^{\{s\}} - \beta_j^1\{s\} + \sum_{k=1}^t \alpha_k^1\{s\} d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) - \\ & - \sum_{k=1}^t \lambda_k^1\{s\} d_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) + \chi_j^{\{s\}} = 0, \quad j = \overline{n+1, l}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_k^{1\{s\}}} = \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) - \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \tilde{y}_j^{\{s\}} - b_k^{0\{s\}} + \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} - \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} = 0, \quad k = \overline{1, t}.$$

Такий розв'язок забезпечуватиме мінімум функціонала $\tilde{\mathcal{F}}^{\{s\}}$, оскільки за будь-якого довільно вибраного ненульового вектора $(\mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_l)$ виконуватиметься вимога

$$\sum_{j=n+1}^l \sum_{i=n+1}^l \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{L}}^{\{s\}}}{\partial \tilde{y}_i \partial \tilde{y}_j} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j = \sum_{s=n+1}^l \mathbf{y}_s^2 > 0.$$

В оптимізаційній задачі (15)–(17) наявні обмеження в формі нерівностей, унаслідок чого за теоремою Куна–Таккера [6] додатково вимагатимемо виконання умов

$$\chi_j^{\{s\}} \geq 0, \quad \chi_j^{\{s\}} [\tilde{y}_j^{\{s\}} - 1 + y_j^{m\{s\}}] = 0, \quad j \in [n+1, l]. \quad (19)$$

На підставі виразу (18) отримаємо

$$\chi_j^{\{s\}} = \beta_j^{1\{s\}} - \tilde{y}_j^{\{s\}} - \sum_{k=1}^t \alpha_k^{1\{s\}} d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) + \sum_{k=1}^t \lambda_k^{1\{s\}} d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}), \quad j \in [n+1, l].$$

Тому з вимог (19) випливатимуть рівності

$$\tilde{y}_j^{\{s\}} = 1 - y_j^{m\{s\}}, \quad j \in \tilde{M}_1,$$

$$\beta_j^{1\{s\}} - \tilde{y}_j^{\{s\}} - \sum_{k=1}^t \alpha_k^{1\{s\}} d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) + \sum_{k=1}^t \lambda_k^{1\{s\}} d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) = 0, \quad j \in \tilde{M}_2, \quad (20)$$

де $\bigcup_{i=1}^2 \tilde{M}_i = [n+1, l]$. Тоді запишемо рівняння на множники Лагранжа $\{\lambda_i^{1\{s\}}\}_{i=1}^t$:

$$\begin{aligned} & b_k^{0\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} - \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) + \sum_{j \in M_1} d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) (1 - y_j^{m\{s\}}) = \\ & = \sum_{i \in \tilde{M}_2} d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \beta_i^{1\{s\}} + \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i \in \tilde{M}_2} d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) d_{ji}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \right] \left(\lambda_j^{0\{s\}} - \alpha_j^{1\{s\}} \right), \quad k = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Спектральні властивості матриці $A^{\{s\}}$ і вимоги до матриці $C_{\{s\}}^1$ дадуть змогу виконати оцінку

$$\sum_{i \in M_2} d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) d_{ji}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \geq \min_{i \in [n+1, l]} d_{ki}^{1\{s\}} d_{ji}^{1\{s\}} > 0, \quad k, j = \overline{1, t}.$$

Це означатиме, що матриця $\left\| \sum_{i \in \tilde{M}_2} d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) d_{ji}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \right\|_{k, j=1}^t$ додатна. Нехай $\{\lambda_i^{1\{s\}} - \alpha_i^{1\{s\}} - \nu_i^{\{s\}}\}_{i=1}^t$ — її пероновий вектор, який відповідає власному значенню $\tilde{\lambda}^{\{s\}}$. Рівняння на множники Лагранжа подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
 & b_k^{0\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} - \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) + \sum_{j \in M_1} d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}})(1 - y_j^{m\{s\}}) = \\
 & = \sum_{i \in \tilde{M}_2} d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \beta_i^{1\{s\}} + \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i \in \tilde{M}_2} d_{ki}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) d_{ji}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) \right] v_j^{\{s\}} + \\
 & + \tilde{\lambda}^{\{s\}} (\lambda_k^{1\{s\}} - \alpha_k^{1\{s\}} - v_k^{\{s\}}), \quad k = \overline{1, t}.
 \end{aligned}$$

звідки випливатиме, що для гарантованого існування ненульових множників Лагранжа $\{\lambda_i^{1\{s\}}\}_{i=1}^t$ достатньо відповідним чином підібрати компоненти векторів $\{\alpha_i^{1\{s\}}\}_{i=1}^t$ і $\{v_i^{\{s\}}\}_{i=1}^t$.

За вектором $\{\lambda_i^{1\{s\}} - \alpha_i^{1\{s\}}\}_{i=1}^t$ зі співвідношення (20) визначимо вектор $\{\tilde{y}_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$, на якому досягатиметься мінімум функціонала $\tilde{\mathcal{F}}^{\{s\}}$. Вибором значень сукупності параметрів $\{\beta_i^{1\{s\}}\}_{i \in \tilde{M}_2}$ досягнемо того, щоб його компоненти мали лише додатні значення. За рахунок вибору $\{\beta_i^{1\{s\}}\}_{i \in \tilde{M}_1}$ забезпечуватиметься і вимога $\chi_j^{\{s\}} > 0, j \in \tilde{M}_1$.

Теорему доведено.

Унаслідок зв'язку між компонентами векторів $\{\tilde{y}_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$ і $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$ з обмежень (16), (17) впливатимуть і обмеження на компоненти вектора $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=n+1}^l$:

$$\begin{aligned}
 & b_k^{0\{s\}} - \Delta_0^{\{s\}} b_k^{0\{s\}} + \Delta_1^{\{s\}} y_k^{\{s\}} = \sum_{j=n+1}^l d_{kj}^{\{s\}}(\mathbf{z}^{\{s\}}) y_j^{\{s\}}, \quad k = \overline{1, t}, \\
 & y_k^{m\{s\}} \leq y_k^{\{s\}} \leq 1, \quad k = \overline{n+1, l}.
 \end{aligned}$$

За таких умов значення всіх ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$ задовольнятимуть рівняння (8), тобто є рівноважними. Крім того, вони гарантуватимуть, що наявність фінансових зобов'язань не призводить до зниження рівнів задоволення потреб споживачів порівняно з випадком відсутності зобов'язань.

ЦІНОУТВОРЕННЯ В ЕКОНОМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Ціна є результатом домовленості між покупцем і власником товару, тобто результатом збалансування попиту і пропозиції (6). Ціни мають бути додатними. З'ясуємо, чи раніше визначені рівноважні ступені задоволення потреб споживачів забезпечуватимуть цю вимогу. З урахуванням умови щодо спектрального радіуса матриці $A^{\{s\}}$ вираз (6) трансформуємо до вигляду операторного рівняння

$$p_k^{\{s\}} = \mathcal{P}_k^{\{s\}}(p^{\{s\}}), \quad k = \overline{1, t}; \tag{21}$$

$$\mathcal{P}_k^{\{s\}}(p^{\{s\}}) = \sum_{j=1}^t (E - A^{\{s\}})^{-1}_{jk} \times \left[\sum_{i=t+1}^n a_{ij}^{\{s\}} p_i^{0\{s\}} - D_j^{\{s\}} + \frac{1}{x_j^{0\{s\}}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_j^{\{s\}}}{\pi_j^{0\{s\}}} c_{ij}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) + b_{ij}^{\{s\}} - b_{ij}^{1\{s\}} \right) p_i^{\{s\}} \right].$$

Вважатимемо, що для обсягів перерозподілу капіталу з діапазону $D_j^m \{s\} \leq |D_j^{\{s\}}| \leq D_j^M \{s\}$, $j = \overline{1, n}$, справедлива оцінка

$$\sum_{j=1}^t (E - A^{\{s\}})^{-1}_{jk} \times \left[\sum_{i=t+1}^n a_{ij}^{\{s\}} p_i^{0\{s\}} - D_j^{\{s\}} + \frac{y_j^{m\{s\}}}{\pi_j^{0\{s\}} x_j^{0\{s\}}} \sum_{i=1}^n c_{ij}^{1\{s\}} p_i^{0\{s\}} + \frac{1}{x_j^{0\{s\}}} \sum_{i=t+1}^n b_{ij}^{\{s\}} p_i^{0\{s\}} \right] > 0, \quad (22)$$

а рівень запасів товарів у суб'єктів економічної системи в s -му періоді функціонування (щодо запасів товарів монополістів, то лише вони можуть здійснювати продаж своїх товарів) узгоджуватиметься з обмеженням

$$\frac{y_j^{m\{s\}}}{\pi_j^{0\{s\}}} c_{ij}^{1\{s\}} + b_{ij}^{\{s\}} - b_{ij}^{1\{s\}} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, t}. \quad (23)$$

Вищий рівень запасів може призводити до надлишкового нагромадження товарів, що несприятливо впливатиме на існування відповідних виробництв, а економічно прийнятні для всіх суб'єктів економічної системи стани рівноваги не реалізовуватимуться.

За умови виконання нерівностей (22), (23) для всіх ступенів задоволення потреб споживачів, які можуть бути розв'язками екстремальних задач (10), (11) і (15)–(17), додатний розв'язок рівняння (21) існуватиме, якщо справедлива оцінка [7]

$$\sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A^{\{s\}})^{-1}_{jk} \frac{1}{x_j^{0\{s\}}} \max_{i \in [1, t]} \left(\frac{1}{\pi_j^{0\{s\}}} c_{ij}^{0\{s\}} + b_{ij}^{\{s\}} - b_{ij}^{1\{s\}} \right) < 1.$$

Для рівноважних значень ступенів задоволення потреб споживачів і визначених за ними оптимальних обсягів перерозподілу капіталу можна записати аналітичний вираз розв'язку системи рівнянь (21)

$$p_i^{\{s\}} = \sum_{j=1}^t (E - \mathcal{H}^{\{s\}})^{-1}_{ji} \times \left(\sum_{k=t+1}^n \left[a_{kj}^{\{s\}} + \frac{1}{x_j^{0\{s\}}} b_{kj}^{\{s\}} + \frac{y_j^{\{s\}}}{\pi_j^{0\{s\}} x_j^{0\{s\}}} c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \right] p_k^{0\{s\}} - D_j^{\{s\}} \right), \quad i = \overline{1, t},$$

якщо матриця $\mathcal{H}^{\{s\}} = \left\| a_{kj}^{\{s\}} + \frac{1}{x_j^{0\{s\}}} b_{kj}^{\{s\}} - \frac{1}{x_j^{0\{s\}}} b_{kj}^{1\{s\}} + \frac{y_j^{\{s\}}}{\pi_j^{0\{s\}} x_j^{0\{s\}}} c_{kj}^{\{s\}}(z^{\{s\}}) \right\|_{k, j=1}^t$

буде невиродженою, інакше рівноважні значення цін розраховуватимуться за допомогою рівняння (21).

На відміну від цін рівноважні обсяги випуску товарів монополістами (x_{t+1}, \dots, x_n) однозначно визначаються ступенями задоволення потреб споживачів

$$x_k^{\{s\}} = \sum_{j=1}^l d_{kj}^{\{s\}} (z^{\{s\}}) y_j^{\{s\}} + \sum_{i=1}^n (E - A^{\{s\}})_{ki}^{-1} \left[\sum_{j=1}^n b_{ij}^{\{s\}} - \sum_{j=1}^n b_{ij}^{1\{s\}} + e_i^{\{s\}} - i_i^{\{s\}} \right], \quad k = \overline{t+1, n}.$$

Стан рівноваги економічної системи в s -му періоді її функціонування, який задається певними значеннями характеристик $\{y_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$, $\{p_i^{\{s\}}\}_{i=1}^t$, $\{x_i^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$, є одним з можливих. Забезпечити саме його реалізацію може вибір відповідної стратегії оподаткування. Якщо рівні оподаткування монополістів $\{\pi_i^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$ набуватимуть значень

$$\pi_j^{\{s\}} = \frac{\sum_{k=1}^t c_{kj}^{\{s\}} (\bar{z}^{\{s\}}) \bar{y}_j^{\{s\}} \bar{p}_k^{\{s\}} + \sum_{k=t+1}^n c_{kj}^{\{s\}} (\bar{z}^{\{s\}}) \bar{y}_j^{\{s\}} p_k^{0\{s\}} - \bar{D}_j^{\{s\}}}{p_j^{0\{s\}} \bar{x}_j^{\{s\}} - \sum_{k=1}^t (a_{kj}^{\{s\}} \bar{x}_j^{\{s\}} + b_{kj}^{\{s\}} - b_{kj}^{1\{s\}}) \bar{p}_k^{\{s\}} - \sum_{k=t+1}^n (a_{kj}^{\{s\}} \bar{x}_j^{\{s\}} + b_{kj}^{\{s\}}) p_k^{0\{s\}}}, \quad j = \overline{t+1, n}.$$

то за обсягів перерозподілу капіталу $\bar{z}^{\{s\}} = \{\bar{D}_i^{\{s\}}\}_{i=1}^n$ розв'язком рівнянь рівноваги (5), (6) будуть вектори $\{\bar{y}_i^{\{s\}}\}_{i=1}^l$, $\{\bar{p}_i^{\{s\}}\}_{i=1}^t$, $\{\bar{x}_i^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$.

Аналіз динаміки трансформацій рівноважних станів економічної системи в різних періодах її функціонування виконуватиметься за спостереженнями змін значень набору параметрів $\{\lambda_{iD}^{\{s\}}\}_{i=1}^l$, $\{\delta_{ky}^{\{s\}}\}_{i=1}^l$, $\{\delta_{ip}^{\{s\}}\}_{i=1}^t$, $\{\delta_{ix}^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$, $\{\delta_{i\pi}^{\{s\}}\}_{i=t+1}^n$. Слід зауважити, що в $s+1$ -му періоді функціонування економічної системи деякі з рівноважних характеристик можуть бути зафіксовані з огляду на рівноважні значення s -го періоду, тоді решта характеристик визначатимуться за ними. Наприклад, за відомих рівнів задоволення потреб споживачів $\{y_i^{\{s+1\}}\}_{i=1}^l$ визначатимуться ціни та обсяги випусків товарів $\{p_i^{\{s+1\}}\}_{i=1}^t$, $\{x_i^{\{s+1\}}\}_{i=1}^n$, а якщо за цінами попереднього s -го періоду вибирати бажану зміну рівнів цін у $s+1$ -му періоді $\{\delta_{ip}^{\{s\}}\}_{i=1}^t$, то з умов рівноваги визначатимуться вектори $\{y_i^{\{s+1\}}\}_{i=1}^l$ і $\{x_i^{\{s+1\}}\}_{i=t+1}^n$. Для цього випадку функціональна залежність $\mathfrak{F}_j^{\{s+1\}} F_j^{\{s+1\}}(y_1^{\{s+1\}}, \dots, y_n^{\{s+1\}})$, $j = \overline{1, t}$ обсягів перерозподілу капіталу в економічній системі може бути задана у вигляді

$$D_j^{\{s+1\}} = \pi_j^{0\{s+1\}} \sum_{k=1}^n b_{kj}^{\{s+1\}} \delta_{kp}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} + y_j^{\{s\}} \sum_{k=1}^n c_{kj}^{\{s+1\}} (z^{\{s+1\}}) \delta_{kp}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} - \pi_j^{0\{s+1\}} x_j^{0\{s+1\}} \left(\delta_{jp}^{\{s\}} p_j^{\{s\}} - \sum_{k=1}^n a_{kj}^{\{s+1\}} \delta_{kp}^{\{s\}} p_k^{\{s\}} \right) -$$

$$-\pi_j^{0\{s+1\}} \sum_{k=1}^n b_{kj}^{1\{s\}} \delta_{kp}^{\{s\}} p_k^{\{s\}}, \quad j = \overline{1, t}.$$

Тоді обсяги перерозподілу капіталу в економічній системі залежатимуть від досягнення бажаного рівня цін.

ВИСНОВКИ

Результатом дослідження є з'ясування впливу наявності фінансових зобов'язань та пов'язаного з ними перерозподілу капіталу в економічній системі на умови встановлення рівноваги, або балансу попиту і пропозиції. Розглянуто взаємозалежність досягнення певних рівнів задоволення потреб суб'єктів економічної системи та величин обсягів перерозподілу їх капіталу. Ураховано, що стратегії поведінки споживачів ґрунтуються на намірі витратити весь наявний фінансовий ресурс на придбання нових товарів або послуг.

На підставі запропонованого раніше алгоритму визначення станів рівноваги економічної системи за наявності монополістів [4], який враховує можливість впливу додаткових чинників на формування споживчих уподобань (тут враховувався вплив фінансових зобов'язань), наведено характеристики прийняттого для всіх суб'єктів економічної системи стану рівноваги. Прийнятність оцінюється за значеннями рівнів задоволення потреб споживачів.

Наведено засоби аналізу можливих сценаріїв еволюції економічної системи. Функціонування економічної системи розбито на окремі послідовні періоди, у кожному з яких система досягає стану рівноваги. Зв'язок між характеристиками економічної системи в різних періодах її функціонування будується на основі припущення про динаміку змін фінансових зобов'язань.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончар М.С. Математичні основи інформаційної економіки / М.С. Гончар. — К.: Ін-т теорет. фізики, 2007. — 464 с.
2. Debreu G. Existence of competitive equilibrium / G. Debreu // Handbook of Mathematical Economics, ed. by K.J.Arrow and M.D.Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. — Vol. II. — P. 698–742.
3. Махорт А.Ф. Оптимизация негативных влияний монополизма на состояние экономической системы / А.Ф. Махорт // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 146–153.
4. Махорт А.П. Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 95–107.
5. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 442 с.
6. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
7. Махорт А.Ф. О влиянии зависимости структуры потребления товаров от цены на равновесие в экономической системе / А.Ф. Махорт // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 2. — С. 52–61.

Надійшла 07.04.2017

КАСКАДНЫЕ НЕЙРО- НЕЧЕТКИЕ СЕТИ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА РЫНКАХ ЦЕННЫХ БУМАГ

Ю.П. ЗАЙЧЕНКО, ГАМИДОВ ГАЛИБ И.

Аннотация. Рассмотрена проблема прогнозирования на рынках ценных бумаг. Для решения этой задачи предложено использование каскадных нео-фаззинейронных сетей (CNFN). Рассмотрены архитектура нео-фаззи нейрона и архитектура CNFN. Описаны алгоритмы обучения нео-фаззи-нейронной сети в пакетном и он-лайнном режимах. Проведены экспериментальные исследования CNFN в задаче прогнозирования биржевых индексов на рынке ценных бумаг ФРГ. В ходе экспериментов варьировалось число входов нейронной сети, число каскадов, число значений лингвистических переменных, соотношение размеров обучающей и проверочной выборок. В результате экспериментов найдены оптимальные значения указанных параметров для рассматриваемой задачи. Проведены сравнительные эксперименты по оценке эффективности прогнозирования CNFN и нечеткой нейронной сети ANFIS.

Ключевые слова: прогнозирование, рынок ценных бумаг, каскадная нео-фаззи нейронная сеть, ННС ANFIS.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи прогнозирования курсов акций и биржевых индексов на рынках ценных бумаг в последние годы вызывают значительный интерес среди инвесторов и руководства инновационных фондов. Для прогнозирования на финансовых рынках традиционно использовались методы регрессионного анализа, метод экспоненциального сглаживания [1] и метод группового учета аргументов [2]. Однако в последние годы все шире для этих целей используют системы с нечеткой логикой и нечеткие нейронные сети. Их преимуществом являются возможность работы с нечеткой и качественной информацией, а также использование экспертной информации в виде базы нечетких правил вывода.

Для организации применения нейро-нечетких сетей (ННС) в задачах прогнозирования необходимо настроить базу правил и обучить параметры функций принадлежности нечетких правил вывода. Это сопряжено с большими вычислительными затратами и требует значительного времени обучения.

В последние годы появился новый класс ННС — каскадные нео-фаззи нейронные сети (CNFN), которые не требуют обучения базы правил и па-

раметров функций принадлежности нечетких множеств. Они обучаются по выборке только веса связей, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты и время обучения [3], а также решать задачи большой размерности. Это дает возможность применения каскадных нео-фаззи сетей в задачах анализа многомерных данных (Big Data Mining).

Цель работы — исследование CNFNN в задачах прогнозирования курсов акций и индексов на финансовых рынках и сравнительный анализ ее эффективности.

НЕО-ФАЗЗИ НЕЙРОН, АРХИТЕКТУРА И ФУНКЦИИ КАСКАДНОЙ НЕО-ФАЗЗИ СЕТИ

Рассмотрим нео-фаззи нейрон с несколькими входами и единственным выходом, который изображен на рис. 1. Он реализуется следующим отображением [2, 3]:

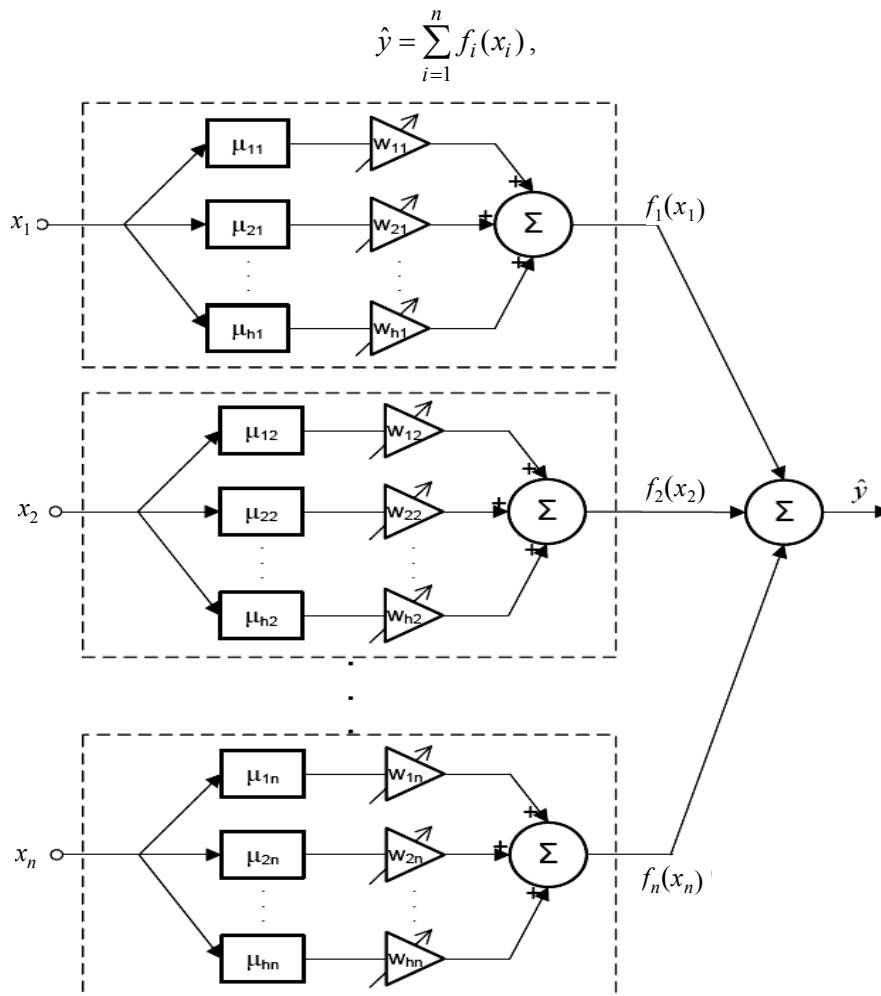


Рис. 1. Архитектура нео-фаззи нейрона

где x_i — i -й вход ($i = 1, 2, \dots, n$); \hat{y} — выход системы.

Структурный блок нео-фаззи нейрона является нелинейным синапсом NS_i , который переводит i -й входной сигнал в форму $f_i(x_i) = \sum_{j=1}^h w_{ji} \mu_{ji}(x_i)$ и выполняет нечеткий вывод: если x_i есть x_{ji} , то выходом есть w_{ji} , где x_{ji} — нечеткое число, функция принадлежности которого μ_{ji} ; x_{ji} — синаптический вес. Очевидно, что нелинейный синапс фактически реализует нечеткий вывод Такаги–Сугено нулевого порядка [2].

Когда векторный сигнал $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$ ($k = 1, 2, \dots$ дискретное время) подается на вход нео-фаззи нейрона, выход его определяется обеими функциями принадлежности $\mu_{ji}(x_i(k))$ и настраиваемыми синаптическими весами $w_{ji}(k-1)$, которые получены в предыдущей эпохе обучения:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h w_{ji}(k-1) \mu_{ji}(x_i(k)).$$

Таким образом, нео-фаззи нейрон содержит hn синаптических весов, которые необходимо определить.

АРХИТЕКТУРА КАСКАДНОЙ НЕО-ФАЗЗИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Архитектура каскадной нео-фаззи сети показана на рис. 2, и характеризующие ее отображения имеют следующий вид:

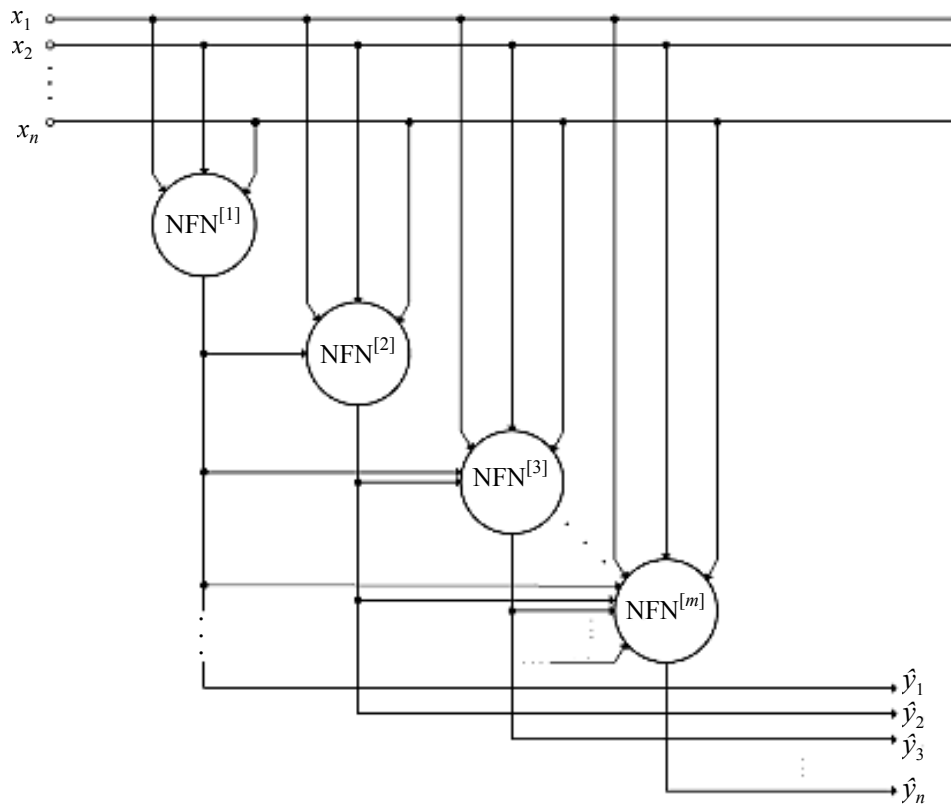


Рис. 2. Структура каскадной нео-фаззи сети

– нео-фаззи нейрон первого каскада (NFN^[1])

$$\hat{y}^{[1]} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h w_{ij}^{[1]} \mu_{ji}(x_i);$$

– нео-фаззи нейрон второго каскада (NFN^[2])

$$\hat{y}^{[2]} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h w_{ji}^{[2]} \mu_{ji}(x_i) + \sum_{j=1}^h w_{j,n+1}^{[2]} \mu_{j,n+1}(\hat{y}^{[1]});$$

– нео-фаззи нейрон третьего каскада (NFN^[3])

$$\hat{y}^{[3]} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h w_{ji}^{[3]} \mu_{ji}(x_i) + \sum_{j=1}^h w_{j,n+1}^{[3]} \mu_{j,n+1}(\hat{y}^{[1]}) + \sum_{j=1}^h w_{j,n+2}^{[3]} \mu_{j,n+2}(\hat{y}^{[2]});$$

– нео-фаззи нейрон m -го каскада (NFN^[m])

$$\hat{y}^{[m]} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h w_{ji}^{[m]} \mu_{ji}(x_i) + \sum_{l=n+1}^{n+m-1} \sum_{j=1}^h w_{j,l}^{[m]} \mu_{j,l}(\hat{y}^{[l-n]}). \quad (1)$$

Следовательно, каскадная нео-фаззи нейронная сеть содержит $h(n + \sum_l^{m-1} l)$ настраиваемых параметров и, что важно, все они линейно включены в описание (1).

Пусть вектор функций принадлежности m -го нео-фаззи нейрона размерности $h(n + m - 1)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mu^{[m]} = & (\mu_{11}(x_1), \dots, \mu_{h1}(x_1), \mu_{12}(x_2), \dots, \mu_{h2}(x_2), \dots, \mu_{ji}(x_i), \dots \\ & \dots, \mu_{hn}(x_n), \mu_{1,n+1}(\hat{y}^{[1]}), \dots, \mu_{h,n+1}(\hat{y}^{[1]}), \dots, \mu_{h,n+m-1}(\hat{y}^{[m-1]}))^T, \end{aligned}$$

а соответствующий вектор синаптических весов:

$$\begin{aligned} w^{[m]} = & (w_{11}^{[m]}, w_{21}^{[m]}, \dots, w_{h1}^{[m]}, w_{12}^{[m]}, \dots, w_{h2}^{[m]}, \dots, w_{ji}^{[m]}, \dots \\ & \dots, w_{hn}^{[m]}, w_{1,n+1}^{[m]}, \dots, w_{h,n+1}^{[m]}, \dots, w_{h,n+m-1}^{[m]})^T, \end{aligned}$$

который имеет ту же размерность. Тогда можно выражение (1) представить в векторном виде

$$\hat{y}^{[m]} = w^{[m]T} \mu^{[m]}.$$

ОБУЧЕНИЕ КАСКАДНОЙ НЕО-ФАЗЗИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Обучение каскадной нео-фаззи нейронной сети может быть выполнено как в пакетном режиме, так и в режиме последовательной обработки информации (адаптивной настройки весов).

Пусть рассматривается ситуация, когда обучающая выборка определена априорно, т.е. имеется выборка значений $x(1), y(1); x(2), y(2); \dots; x(k), y(k); \dots; x(N), y(N)$. Для нео-фаззи нейрона первого каскада NFN^[1] выборка значений функций принадлежности $\mu^{[1]}(1), \mu^{[1]}(2), \dots, \mu^{[1]}(k), \dots, \mu^{[1]}(N)$,₁ (вектора размерности $h(n + m - 1)$) определяется как

$$\mu^{[1]}(k) = (\mu_{11}(x_1(k)), \dots, \mu_{h1}(x_1(k)), \mu_{12}(x_2(k)), \dots, \mu_{h2}(x_2(k)), \dots, \mu_{ji}(x_i(k)), \dots, \mu_{hn}(x_n(k)))^T.$$

Тогда, минимизируя критерий обучения

$$E_N^{[1]} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^{[1]}(k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}^{[1]}(k))^2,$$

вектор синаптических весов можно оценить так:

$$w^{[1]}(N) = \sum_{k=1}^N (\mu^{[1]}(k) \mu^{[1]T}(k))^+ \sum_{k=1}^N \mu^{[1]}(k) y(k) = P^{[1]}(N) \sum_{k=1}^N \mu^{[1]}(k) y(k), \quad (2)$$

где $(\bullet)^+$ означает псевдоинверсию Мура–Пенроуза.

Для последовательной обработки данных используется рекуррентный метод наименьших квадратов [1, 2]:

$$\begin{cases} w^{[1]}(k+1) = w^{[1]}(k) + \frac{P^{[1]}(k)(y(k+1) - w^{[1]T}(k)w^{[1]}(k+1))}{1 + \mu^{[1]T}(k+1)P^{[1]}(k)\mu^{[1]}(k+1)} \mu^{[1]}(k+1), \\ P^{[1]}(k+1) = P^{[1]}(k) - \frac{P^{[1]}(k)(\mu^{[1]}(k+1)\mu^{[1]T}(k+1)P^{[1]}(k))}{1 + \mu^{[1]T}(k+1)P^{[1]}(k)\mu^{[1]}(k+1)}, P^{[1]}(0) = \beta I, \end{cases} \quad (3)$$

где β — большое положительное число; I — единичная матрица соответствующей размерности.

Возможно использование алгоритмов адаптации (3) приводит к сокращению вычислительной сложности процесса обучения. В любом случае использование процедур (2), (3) существенно сокращают время обучения по сравнению с градиентным методом, лежащим в основе алгоритма back propagation [2, 3].

После обучения первого каскада синаптические веса нео-фази нейрона $NFN^{[1]}$ становятся «замороженными», все значения $\hat{y}^{[1]}(1), \hat{y}^{[1]}(2), \dots, \hat{y}^{[1]}(k), \dots, \hat{y}^{[1]}(N)$ определены: получаем второй каскад сети, который состоит из единственного нео-фази нейрона $NFN^{[1]}$. Он имеет один дополнительный вход для сигнала выхода первого каскада. Затем снова используем процедуру (2) для настройки вектора весовых коэффициентов $w^{[2]}$, размерность которого $h(n+1)$.

В он-лайн методе нейроны обучаются последовательно, т.е. на основании входных сигналов $x(k)$. Пусть оценены синаптические веса $w^{[1]}(x)$ и получен вектор выходов $\hat{y}^{[1]}(k)$. Тогда, используя вектор входов второго каскада $(x^T(k), \hat{y}^{[1]}(k))$, вычисляем веса $w^{[2]}(x)$ и выходы $\hat{y}^{[2]}(k)$. Для этой цели можно использовать одинаково успешно алгоритмы (2) и (3).

Процесс роста нейронной сети (увеличивающееся количество каскадов) продолжается до тех пор, пока не получим требуемую точность решения или пока величина общего критерия не начнет возрастать, а для настройки

весовых коэффициентов последнего m -го каскада используем следующие выражения [3]:

$$w^{[m]}(N) = \sum_{k=1}^N (\mu^{[m]}(k) \mu^{[m]T}(k))^+ \sum_{k=1}^N \mu^{[m]}(k) y(k) = P^{[m]}(N) \sum_{k=1}^N \mu^{[m]}(k) y(k)$$

в пакетном режиме;

$$\begin{cases} w^{[m]}(k+1) = w^{[m]}(k) + \frac{P^{[m]}(k)(y(k+1) - w^{[m]T}(k)w^{[m]}(k+1))}{1 + \mu^{[1]T}(k+1)P^{[1]}(k)\mu^{[1]}(k+1)} \mu^{[m]}(k+1), \\ P^{[m]}(k+1) = P^{[m]}(k) - \frac{P^{[m]}(k)(\mu^{[m]}(k+1)\mu^{[m]T}(k+1)P^{[m]}(k))}{1 + \mu^{[m]T}(k+1)P^{[m]}(k)\mu^{[m]}(k+1)}, P^{[m]}(0) = \beta I, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} w^{[m]}(k+1) = w^{[m]}(k) + (r^{[m]}(k+1))^{-1} (y(k+1) - w^{[m]T}(k)\mu^{[m]}(k+1))\mu^{[m]}(k+1), \\ r^{[m]}(k+1) = \alpha r^{[m]}(k) + \|\mu^{[m]}(k+1)\|^2, 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ в последовательном режиме.} \end{cases}$$

Таким образом, предложенная каскадная сеть CNFNN значительно превосходит стандартную каскадную архитектуру в скорости обучения и может обучаться как в пакетном режиме, так и в последовательном (адаптивном) режиме. Лингвистическая интерпретация полученных результатов значительно расширяет функциональные средства каскадной нео-фаззи нейронной сети.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КАСКАДНОЙ НЕО-ФАЗЗИ СЕТИ

Цель исследований — анализ работы каскадной нео-фаззи нейронной сети для прогнозирования поведения рынка ценных бумаг Германии, динамика биржевого индекса которого приведена в табл. 1. Данные представляют собой отношения NAS по методологии 2008 Systems of National Account.

Таблица 1. Динамика биржевого индекса рынка ценных бумаг ФРГ 2010–2016)

Месяц	Годы						
	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Январь	100	112,5032	96,8841	123,189	154,8426	140,4772	127,3783
Февраль	91,32258	119,0592	107,396	122,1897	155,3302	148,9331	123,2948
Март	96,74254	116,4645	109,996	122,595	154,2723	152,4478	131,1697
Апрель	99,67204	124,9138	105,958	120,2768	156,6237	154,271	135,7509
Май	89,38131	125,5138	98,0491	128,8783	159,2462	154,6962	135,1146
Июнь	88,73958	123,1834	92,7264	127,6049	161,3321	150,7816	132,4843
Июль	92,74674	124,5796	96,2023	127,7148	157,7584	148,275	131,6502
Август	94,39056	101,4666	103,017	132,616	147,5007	144,4888	141,021
Сентябрь	97,24559	88,79165	111,930	135,6962	148,5193	134,0826	140,8114
Октябрь	106,9113	96,40158	112,958	143,4353	136,0243	136,9621	139,7606
Ноябрь	109,9191	94,39673	111,048	147,9172	141,4704	140,8389	136,0866
Декабрь	110,4825	92,2427	118,689	151,2206	144,6012	138,8777	139,7837

Объем выборки — 80 элементов. Обучение сети происходило градиентным методом с коррекцией шага в последовательном режиме

В ходе экспериментов изменялось число входов (длина предыстории), число каскадов, число значений лингвистических переменных (число нечетких множеств), число правил, а также соотношение обучающей и проверяющей выборок ($N_{об} / N_{пров}$, %).

В первой серии экспериментов исследовалось влияние числа каскадов для разного соотношения $N_{об} / N_{пров}$. Соответствующие результаты приведены в табл. 2. В обозначении CNFNN(m, n, k) первое значение m — число каскадов, второе значение n — число входов, третье значение k — число значений лингвистических переменных,

Таблица 2. Зависимость точности прогнозирования от числа каскадов

Точка выборки	Real	CNFNN(2,4,4)	CNFNN(3,4,4)	CNFNN(4,4,4)	CNFNN(5,4,4)
1	123,8357	120,2385	120,0617	120,2182	120,0592
2	126,0397	120,4322	114,1211	117,2790	118,0517
3	128,409	117,7389	114,8922	117,9889	115,4811
4	128,7385	118,4927	113,208	117,6473	113,5136
5	132,4883	121,1244	111,1652	117,0835	112,7041
6	133,1655	121,4939	110,6172	116,9650	111,8039
7	132,7558	119,7117	109,0291	116,5953	110,7565
8	133,6719	120,0188	107,9253	116,2916	109,5454
9	137,1628	122,1271	106,9552	116,0143	108,4890
10	137,3587	122,6921	105,8058	115,7067	107,5251
11	137,8369	121,5249	104,8954	115,4196	106,6397
12	133,7879	121,6437	103,9669	115,1320	105,7586
13	131,7595	123,2983	103,0752	114,8453	104,9126
14	123,0304	123,9825	102,2693	114,5639	104,1018
15	125,2205	123,2698	101,4767	114,2843	103,3391
16	122,7718	123,3236	100,7373	114,0078	102,6109
17	120,376	124,6254	100,0392	113,7343	101,9165
18	126,8454	125,3622	99,3719	113,4634	101,2516
19	124,4129	124,9920	98,7449	113,1955	100,6181
20	126,7627	125,0476	98,1495	112,9303	100,0140
21	131,0407	126,0878	97,5853	112,6678	99,4383
22	128,8726	126,8343	97,0522	112,4080	98,8889
23	126,1661	126,7216	96,5466	112,1510	98,3649
24	123,4818	126,8151	96,0682	111,8966	97,8649
25	115,3801	127,6681	95,6152	111,6448	97,3882
26	119,0233	128,4008	95,1862	111,3956	96,9335
27	117,5468	128,4805	94,7801	111,1490	96,4998
28	113,9723	128,6299	94,3955	110,9050	96,0861
29	105,1481	129,3537	94,0314	110,6634	95,6916
30	103,2481	130,0627	93,6867	110,4244	95,3152
31	107,7221	130,2851	93,3602	110,1878	94,9563

Окончание табл. 2

Точка выборки	Real	CNFNN(2,4,4)	CNFNN(3,4,4)	CNFNN(4,4,4)	CNFNN(5,4,4)
32	110,0536	130,4976	93,0511	109,9537	94,6139
33	109,9942	131,1365	92,7585	109,7220	94,2873
34	107,4861	131,82	92,4814	109,4927	93,9759
35	105,812	132,1484	92,219	109,2658	93,6788
36	108,7387	132,4245	91,9706	109,0412	93,3955
37	109,2837	133,0117	91,7354	108,8190	93,1252
38	105,0767	133,6728	91,5126	108,5990	92,8674
39	102,8346	134,0803	91,3017	108,3813	92,6215
40	105,3798	134,4172	91,1021	108,1659	92,3870
MAPE,%	–	25,78	23,8	14,3	15,6

Соответствующая зависимость точности прогноза MAPE от числа каскадов показана на рис. 3.

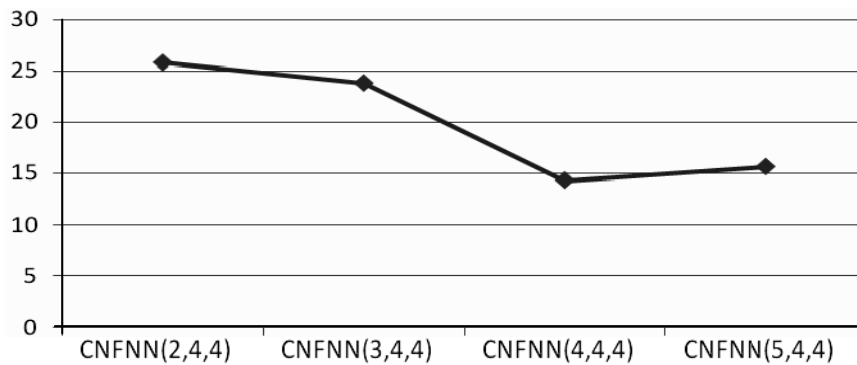


Рис. 3. Зависимость критерия MAPE (%) от числа каскадов для $N_{об} / N_{пров} = 50 / 50$

Как следует из результатов, приведенных на табл. 2 и рис. 3, оптимальное число каскадов для данного эксперимента равно 4.

Результаты исследования зависимости MAPE от числа входов приведены на рис. 4 для соотношения $N_{об} / N_{пров} = 50 / 50$.

Как следует из этих результатов, существует оптимальное число входов, которое в общем случае зависит от соотношения $N_{об} / N_{пров}$. Оптимальное число входов равно 4 (для $N_{об} / N_{пров} = 50 / 50$).

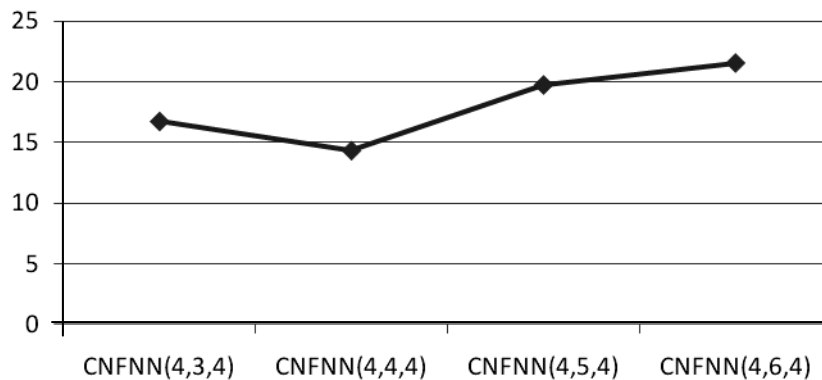


Рис. 4. Зависимость критерия MAPE (%) от числа входов

Важным параметром для каскадной нео-фаззи сети является число значений лингвистической переменной (нечетких множеств). Проведены соответствующие исследования, результаты которых показаны на рис. 5.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что оптимальное число значений лингвистических переменных равно 4 для данной задачи прогнозирования.

Далее были проведены исследования зависимости количества прогноза от соотношения $N_{об} / N_{пров}$. Соответствующие результаты зависимости точности прогноза от числа каскадов для различных соотношений $N_{об} / N_{пров}$ приведены на рис. 6 и табл. 3.

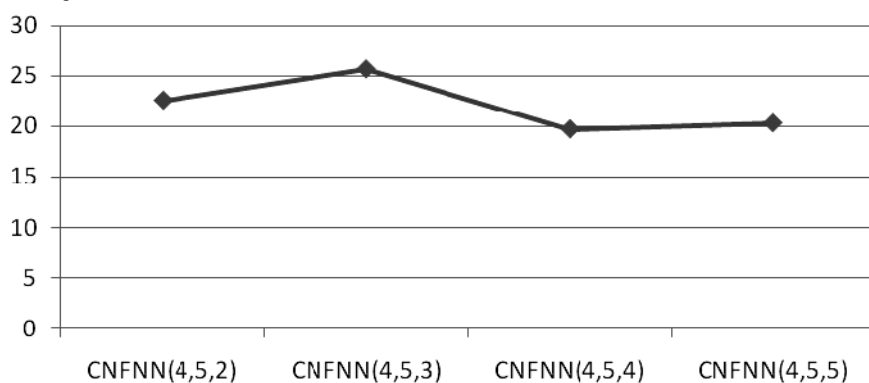


Рис. 5. Зависимость критерия MAPE (%) от числа значений лингвистических переменных

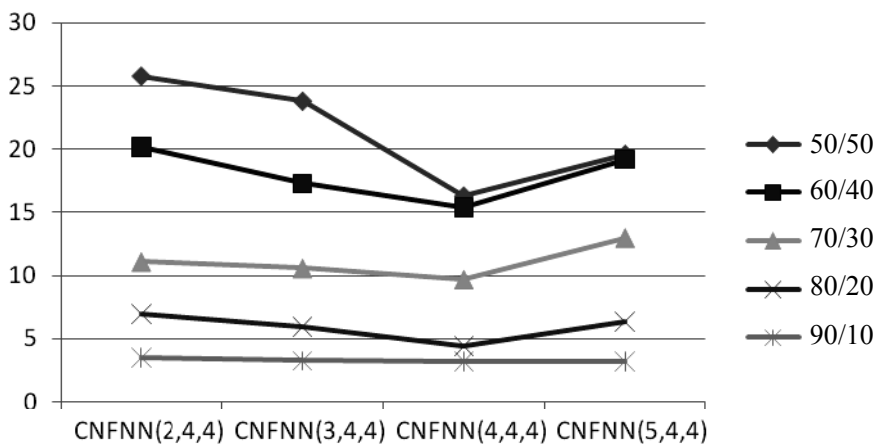


Рис. 6. Зависимость MAPE (%) от числа каскадов для различных соотношений $N_{об} / N_{пров}$

Таблица 3. Зависимость точности прогнозирования (%) от числа каскадов

$N_{об} / N_{пров}$	50/50	60/40	70/30	80/20	90/10
CNFNN(2,4,4)	25,78	20,2	11,052	7,0012	3,5213
CNFNN(3,4,4)	23,8	17,3	10,5341	5,9654	3,2592
CNFNN(4,4,4)	16,3	15,4	9,6584	4,4325	3,1952
CNFNN(5,4,4)	19,6	19,2	12,9532	6,3454	3,2421

Найденные зависимости критерия MAPE от числа входов для разных соотношений $N_{об}/N_{пров}$ приведены на рис. 7 и табл. 4.

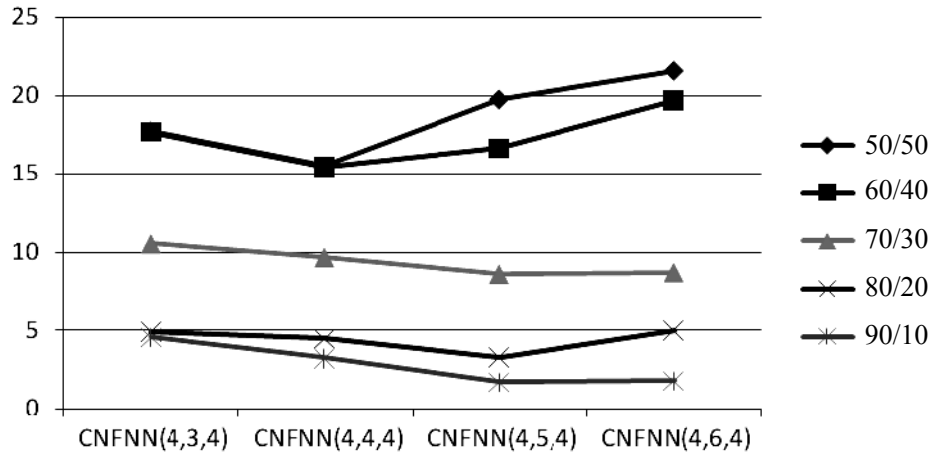


Рис. 7. Зависимость MAPE (%) от числа входов

Таблица 4. Зависимость точности прогнозирования от числа входов

$N_{об} / N_{пров}$	50/50	60/40	70/30	80/20	90/10
CNFNN(4,3,4)	17,7	17,642	10,5329	4,8543	4,5213
CNFNN(4,4,4)	15,5	15,4	9,6584	4,4325	3,1952
CNFNN(4,5,4)	19,7	16,5922	8,5811	3,2151	1,6819
CNFNN(4,6,4)	21,5	19,6483	8,6954	4,9623	1,7651

Исследована зависимость точности прогноза от числа значений лингвистических переменных для различных соотношений $N_{об} / N_{пров}$. Соответствующие результаты показаны на рис. 8.

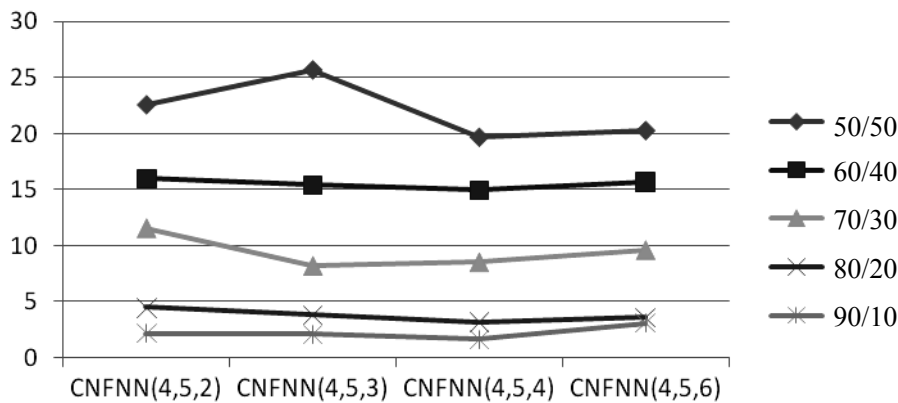


Рис. 8. Зависимость MAPE (%) от числа значений лингвистических переменных

Как видно из полученных результатов, для каждого класса прогнозируемых финансовых процессов имеется свое значение оптимального числа каскадов. При дальнейшем их увеличении ошибка прогноза либо перестает изменяться, либо начинает расти. С ростом числа значений лингвистических переменных ошибка прогноза сначала уменьшается, достигает минимума, а

затем начинает возрастать. Такая же зависимость прослеживается и для числа входов модели и числа значений лингвистических переменных.

Проведены также аналогичные эксперименты по прогнозированию с использованием ННС ANFIS. Число входов и число значений лингвистических переменных выбраны равными 4. Сравнивалась эффективность прогнозирования с каскадной сетью с аналогичными значениями параметров CNFNN (4,4,4). Соответствующие результаты для обеих сетей при варьировании соотношения $N_{об} / N_{пров}$ приведены в табл. 5.

Таблица 5. Сравнение результатов прогнозирования каскадной сети CNFNN и ННС ANFIS

$N_{об} / N_{пров}$	50/50	60/40	70/30	80/20	90/10
FNN ANFIS	19,7	17,65	12,54	6,9554	4,5614
CNFNN(4,4,4)	15,5	15,4	9,6584	4,4325	3,1952

Как показывают результаты сравнения, каскадная нео-фаззи нейронная сеть имеет более высокую точность прогнозирования. Дополнительными преимуществами каскадной сети в сравнении с ННС ANFIS является отсутствие необходимости настраивать параметры функций принадлежности, что позволяет сократить вычислительные затраты и время обучения сети. Эти свойства каскадной сети позволяют использовать ее в задачах анализа с большими массивами данных (Big Data Mining).

ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена каскадная нео-фаззи нейронная сеть (CNFNN), описаны ее алгоритмы обучения в пакетном и последовательном режимах.

2. Проведены экспериментальные исследования CNFNN в задачах прогнозирования финансовых индексов. Исследовалась зависимость точности прогноза от числа каскадов, входов, числа значений лингвистических переменных и соотношения обучающей и проверочной выборок. В результате экспериментов найдены оптимальные значения указанных параметров для конкретной задачи прогнозирования.

3. Проведены сравнительные эксперименты с ННС ANFIS, которые показали преимущество предлагаемой каскадной сети в сравнении с ANFIS в рассмотренной задаче прогнозирования биржевых индексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей: пер. с англ. / К.Д. Льюис. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 133 с.
2. Згуровский М.З. Основы вычислительного интеллекта / М.З. Згуровский, Ю.П. Зайченко. — К.: Наук. думка, 2013. — 406 с.
3. Bodyanskiy Ye. The cascade NFNN learning algorithm / Ye. Bodyanskiy, Ye. Viktorov, I. Pliss // Вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Серія «Математика і інформатика». — 2008. — Вип. 17. — С. 48–58.
4. Bodyanskiy Ye. Neo-fuzzy neural network structure optimization using GMDH for solving forecasting and classification problems / Ye. Bodyanskiy, Yu. Zaychenko, E. Pavlikovskaya etc // Proc. Int. Workshop on Inductive Modeling 2009. Krynica, Poland, 2009. — P. 77–89.

Поступила 22.02.2017

**ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ
ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФУЗІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ
НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ
З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ**

В.К. ЯСИНСЬКИЙ, І.В. ЮРЧЕНКО

Анотація. Розглянуто питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу. Отримано достатні умови на коефіцієнти нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ), які гарантують існування з імовірністю одиниця його розв'язку. Методика доведення ґрунтується на результатах О.М. Станжицького та А.О. Цуканової щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Доведено існування «м'якого розв'язку» НДСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, які передбачається розглядати в подальших роботах.

Ключові слова: задача Коші, стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних, існування розв'язку, випадкові збурення.

ВСТУП

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [3, 4, 6, 7, 8, 11, 12]. У працях [9, 10] О.М. Станжицький та А.О. Цуканова отримали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. У цій роботі розглядається питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, P)$ задано НДСДРРНТ у частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу,

$$d\left(u(t, x) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, y)u(t - \tau, y)dy\right) = \sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2} dt + \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sigma(t, u(t - \tau, x)) dw(t, x), \quad (1)$$

для $t \in (0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t, x) = \psi(t, x), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де $\gamma_j \equiv \gamma_j(\omega) \in \mathbf{R}^1$, $j = \overline{1, r+1}$, незалежні попарно та незалежні від вінерівського процесу $w(t, x)$ випадкові величини; зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$ — берівські функції, додатні, попарно незалежні та незалежні від вінерівського процесу і початкової функції; $T \in (0, \infty)$ — фіксований дійсний час, $\tau > 0$, випадковий r -вимірний оператор Лапласа [1, 4]:

$$\Delta_x(\omega) \equiv \sum_{j=1}^r \varphi_j(x_j) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

де $w(t, x)$ — $L_2(\mathbf{R}^r)$ -вимірний Q -вінерівський процес [2]; $\sigma: [0, T] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ і $b: [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ — деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi: [-\tau, 0] \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ — функція початкових даних.

ОБГОВОРЕННЯ ПОПЕРЕДНІХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Наведемо декілька тверджень із праць [9, 10, 11, 12].

Лема 1. [12, с.188]. Оператор

$$S(t): L_2(\mathbf{R}^r) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r)$$

генерує розв’язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1 [9]) за початковими даними (2) з імовірністю 1

$$d(u(t, x)) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z)u(t - \tau, z)dz = \Delta_x u(t, x)dt,$$

за правилом

$$u(t, x) = (s(t)g(\bullet))(x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y)g(\bullet)dy$$

та утворює C_{0-} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). А ця напівгрупа $S(t)$ є стискальною, тобто

$$\|(S(t)g(\bullet))(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \|g(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \quad (4)$$

Уведемо потік (фільтрацію) σ -алгебр $\{F_t, t \geq t_0 \geq 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значним Q -вінерівським процесом

$$w(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t),$$

де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t, \omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ — незалежні стандартні одновимірні вінерівські (броунівські) процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty.$$

При цьому система векторів $e_n(x) \equiv \bar{e}_n(x)$ утворює ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbf{R}^r} |e_n(x)| \leq 1.$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ усіх $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значних F_t -вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\Phi(\bullet) \equiv \Phi(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\Phi(\bullet)\|_{B_{2,T}} \equiv \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|\Phi(t, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2}.$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t, x, \omega) : [-\tau, T] \times \mathbf{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

- 1) u є F_T -вимірною для майже всіх $t \in [-\tau, T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r$, $\omega \in \Omega$;
- 2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right) dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, y) u(t - \tau, y) dy - \\ & - \int_0^t \left(\sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j) \Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \times \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s - \tau, z) dz dy \right) ds + \\ & + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \times \sigma(s, u(s - \tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s) \end{aligned}$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

- 3) існує норма

$$\mathbf{E} \left\{ \int_0^T \|u(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 dt \right\} < \infty. \quad (5)$$

Лема 2 [10]. Вираз (5) для випадкової функції $u(t, x, \omega)$ є нормою.

Основний результат

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ побудований [1–5] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї роботи.

Основне твердження. Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1) коефіцієнт $\sigma \equiv \sigma(t, u, y)$ є:

- вимірним за всіма аргументами;
- задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом $|\sigma(t, u, x) - \sigma(t, v, x)| \leq L|u - v|$ для $\forall t \in [0, T], u, v \in \mathbf{R}^1, x \in \mathbf{R}^r$;

2) початкова функція $\psi(t, x, \omega)$ є:

- F_0 -вимірною відносно аргумента $t \in [0, T]$;
- незалежною від вінерівського процесу $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0, T]$;
- незалежною від зовнішніх збурень $\varphi_j(\gamma_j), j = \overline{1, r+1}$;
- має норму

$$\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 < \infty; \tag{6}$$

3) функція $b \equiv b(t, x, y)$ задовольняє умови:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dy} dx = K_1; \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dy dx = K_2;$$

- для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b, \partial_{x_i x_j} b$, де $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$;
- матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$|\nabla_x b(t, x, y)| + \|D_x^2 b(t, x, y)\| \leq Z(t, x, y) \tag{7}$$

для $\forall t \in [0, T] \subset [0, \infty), \{x, y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $Z : [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow [0, \infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтеграла

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z(t, x, y) dx dy = K_3 < \infty; \tag{8}$$

4) для функції $Z(t, x, y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|Z(t, x, z) - Z(t, x_0, z)| \leq \zeta(t, z, x_0, \delta) |x - x_0|, \tag{9}$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t, z, x_0, \delta)$ для $\forall t \in [0, T], |x - x_0| < \delta; z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \zeta(t, \cdot, x_0, \delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \delta \in \mathbf{R}_+; \tag{10}$$

5) зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$,

- попарно незалежні;
- незалежні від вінерівського процесу та від початкової функції $\psi(t, x) \equiv \psi(t, x, \omega) \in \mathbf{R}^1$;
- виконується умова обмеженості математичних сподівань квадратів зовнішніх збурень $\mathbf{E}\{\varphi_{r+1}^2\} \leq K_4 < \infty$.

Тоді задача (1), (2) для НДСДРРНТ має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t, x, \omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0, T]$, якщо

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dx dy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \quad (11)$$

Доведення основного твердження

Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха [1, 2], яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методу, викладену в працях [9, 10].

Розглянемо оператор $S: \mathfrak{B}_{2,T} \rightarrow \mathfrak{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbf{R}^r$,

$$\begin{aligned} (Su)(t) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x-y) \left[\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right] dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(t, y, z) u(t-\tau, y) dy - \\ & - \int_0^t \left[\sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j) \Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s-\tau, z) (s-\tau, z) dz \right] dy ds + \\ & + \int_0^t \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left[\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, s-y) \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right] d\rho_n(s) \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^3 I_j(t) \end{aligned} \quad (12)$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискальними.

Спочатку треба довести, що $Su \in \mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u \in \mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити чотири норми $\|I_j(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 \equiv \sup \mathbf{E} \|I_j(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Використаємо нерівність (4) леми 1, нерівність Коші–Шварца [4] та умови (6), (11) і отримаємо оцінку для супремуму математичного сподівання $I_0(s)$ з оператора $(Su)(t)$ (див. рівняння (12)), а саме:

$$\begin{aligned}
 & \|I_0(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_0(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}^2 \equiv \\
 & = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} K(s, x-y) (\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz) dy \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
 & \leq 2\mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 2\mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z) \psi(-\tau, z) dz \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\
 & = 2\mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 2\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z) \psi(-\tau, z) dz \right)^2 dx \leq \\
 & \leq 2\mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 2 \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(0, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau, z) dz = \\
 & = 2\mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau, z) dz = 2\mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \\
 & + 2 \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(0, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \|\psi(-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = C < \infty.
 \end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Коші–Шварца [4] та припущення (6), (11), оцінюючи супремум математичного сподівання $I_1(s)$, а саме:

$$\begin{aligned}
 & \|I_1(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_1(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \equiv \\
 & = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(s, x, y) u(s-\tau, y) dy \right)^2 dx \leq \\
 & \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} u^2(s-\tau, y) dy \leq \\
 & \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
 & \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx.
 \end{aligned}$$

Далі спрацює очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0, \tau]$ для розв’язку $u(t)$ рівняння (1) для $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \sup_{0 \leq s \leq \tau} \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{\tau \leq s \leq t} \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\
 & = \sup_{-\tau \leq s-\tau \leq 0} \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq s-\tau \leq t-\tau} \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \quad (13)
 \end{aligned}$$

З урахуванням рівняння (13) попередня нерівність дасть оцінку

$$\begin{aligned} \|I_1(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s - \tau \leq 0} \mathbf{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq s - \tau \leq t - \tau} \mathbf{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) = \\ &= \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq s \leq t - \tau} \mathbf{E} \|u(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) \leq \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|u(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) = C_1 < \infty. \end{aligned}$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрата інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$\begin{aligned} \|I_2(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_2(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \equiv \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_0^s \left(\sum_{j=1}^r \varphi_j(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dl \right) d\tau \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\ &\leq t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E} \{ \varphi_j(\gamma_j) \} \right)^2 \varepsilon(s), \end{aligned}$$

де

$$\varepsilon(s) \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dy \right) dl \right) dx. \quad (14)$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. рівняння (14)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$\begin{aligned} \|I_2(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\leq t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E} \{ \varphi_j(\gamma_j) \} \right)^2 \varepsilon(s) = t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E} \{ \varphi_j(\gamma_j) \} \right)^2 \times \\ &\times \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^r} \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dy \right) dx \right) dl \leq \\ &\leq Ct \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \left\| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l - \tau, z) dz \right\|^2 dx dl \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x \equiv (\partial_{x_1} \dots \partial_{x_r})^T; \quad D_x^2 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 & \dots & \partial_{x_1 x_r}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_r x_1}^2 & \dots & \partial_{x_r}^2 \end{pmatrix};$$

$\|\cdot\|$ — відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [9, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$u(l, x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(s-l, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \right) dy,$$

$$g(l, x) \equiv \int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \quad (16)$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискальним (див. рівняння (4)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що з імовірністю одиниця для кожного $l \in [0, t]$

$$\int_{\mathbf{R}^r} b(l, \cdot, z) u(l-\tau, z) dz \in L_1(\mathbf{R}^r) \quad (17)$$

і

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (18)$$

Перевіримо умову 1). Доведення (17) випливає з використання умов Коші–Шварца та умов 2 основного твердження і (11) зі сталою K_5 :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \varphi_j^2(\gamma_j) \right\} \mathbf{E} \left\{ \left| \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l-\tau, z) dz dx \right| \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \varphi_j^2(\gamma_j) \right\} \left(\sup_{0 \leq l \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l, x, z) dz dx} \left(\sqrt{\sup_{-\tau \leq l \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sup_{0 \leq l \leq t} \mathbf{E} \|u(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

звідки з імовірністю одиниця умова 1 виконується

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l-\tau, z) dz \right| dx = C_1 < \infty.$$

Перевіримо умову 2) леми 1. Умову (18) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $\|D_x^2 g\|$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g(l, x)$ (див. умову (16)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. Використовуючи умови (17) та (9), (10), матимемо

$$\begin{aligned} & |\nabla_x b(t, x, z)u(t - \tau, z)| \leq \psi(t, x, z)|u(t - \tau, z)| = \\ & = (\psi(t, x, z) - \psi(t, x_0, z) + \psi(t, x_0, z))|u(t - \tau, z)| \leq \\ & \leq (\delta\varphi(t, z, x_0, \delta) + \psi(t, x_0, z))|u(t - \tau, z)|. \end{aligned}$$

Перевіримо включення

$$(\delta\varphi(t, \cdot, x_0, \delta) + \psi(t, x_0, \cdot))|u(t - \tau, \cdot)| \in L_1(\mathbf{R}^r).$$

Використовуючи нерівність Коші–Шварца та умови (7), (8), (11), очевидно матимемо

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1, z, x_0, \delta) + \psi(t_1, x_0, z))|u(t_1 - \tau, z)| dz = \\ & = \delta \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(t_1, z, x_0, \delta)|u(t_1 - \tau, z)| dz + \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi(t_1, x_0, z)|u(t_1 - \tau, z)| dz \leq \\ & \leq \left(\delta \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1, z, x_0, \delta) dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1, x_0, z) dz} \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \|u(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Звідси з імовірністю одиниця отримаємо

$$\int_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1, z, x_0, \delta) + \psi(t_1, x_0, \zeta))|u(t_1 - \tau, z)| dz < \infty.$$

Згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром для функції (16) існує градієнт $\nabla_x g$ [4] та

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z)u(t - \tau, z) dz = \int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t, x, z)u(t - \tau, z) dz. \quad (19)$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, \cdot, z)u(t - \tau, z) dz \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (20)$$

З урахуванням (19), (7), нерівності Коші–Шварца, умов (8) і (6) виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z)u(t - \tau, z) dz \right|^2 dx = \\ & = \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t, x, z)u(t - \tau, z) dz \right)^2 dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} |\nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z)| dz \right)^2 dx \leq \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \times \\ \times \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} E \|\psi(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} E \|u(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) < \infty,$$

звідки

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1, x, z) u(t_1 - \tau, z) dz \right|^2 dx < \infty.$$

Остаточно з рівняння (15) матимемо оцінку

$$\|I_2(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq Ct \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \|D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1, x, z) u(t_1 - \tau, z) dz\|^2 dx dt_1 \leq \\ \leq Ct^2 \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ \left. + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \|u(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) \leq C_2 < \infty. \quad (21)$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $\|\cdot\|$ будемо розуміти $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}$. З урахуванням нерівності Коші–Шварца, теореми Фубіні [4] та умов (4), (6) отримуємо для норми $I_3(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ оцінку

$$\|I_3(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 = \sup_{0 \leq s \leq t} E \|I_3(s)\|^2 \equiv \\ = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s) \right\|^2 \leq \\ \leq 2L^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) \left(t + \tau \sup_{-\tau \leq y \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(y)\|^2 + \mathbf{E} \int_0^t \|u(y)\|^2 dy \right) = C_3 < \infty. \quad (22)$$

Об'єднавши чотири оцінки $I_0(s) - I_3(s)$, отримаємо для $u \in \mathfrak{B}_{2,T}$ нерівність

$$\|(\Psi u)(t)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^3 I_j(t) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq 4 \sum_{j=0}^3 \|I_j(t)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2. \quad (23)$$

Оскільки F_t -вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискальну фіксовану точку.

Дійсно, слід взяти до уваги (25), (33), (34), (35) та властивість лінійності r -вимірного інтеграла. У результаті для різниці $I_1(s)(u) - I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ маємо оцінку

$$\begin{aligned} \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогічно дістаємо оцінку для різниці $I_2(s)(u) - I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$, а саме:

$$\begin{aligned} &\|I_2(s)(u) - I_2(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq \\ &\leq Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx \right) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \end{aligned}$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u) - I_3(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$, тоді

$$\|I_3(s)(u) - I_3(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 \leq L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2. \quad (25)$$

Урахувавши оцінки (23) і (25), матимемо

$$\begin{aligned} \|\Psi u - \Psi v\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^3 (I_j(s)(u) - I_j(s)(v)) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\ &\leq 4 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx + Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx + \right. \\ &\quad \left. + L^2 ct^2 + L^2 c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 = \gamma(t) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2; \\ \gamma(t) &\equiv 4 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx + Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx + \right. \\ &\quad \left. + L^2 ct^2 + L^2 c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \end{aligned} \quad (26)$$

для $\{u, v\} \subset \mathfrak{B}_{2,T}$.

ВИСНОВКИ

Згідно з оцінкою (11) $K_5 < \frac{1}{4}$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ у рівнянні (26) менший за 1. Щодо наступних трьох доданків можна зауважити таке: за рахунок вибору $t_1 \in [0, T]$ їх сума може дорівнювати $\frac{3}{16}$. Отже, $\gamma(t_1) \in (0, 1)$.

Це означає, що оператор Ψ , визначений у просторі Банаха \mathfrak{B}_{2,t_1} , є стискальним. А отже, згідно з теоремою Банаха [4] про стискальне відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку — м'який розв'язок $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0, t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ..., $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, які в сумі дають відрізок $[0, T]$, на якому розв'язується задача (1), (2). У результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

Ця робота має теоретичне значення, оскільки вона доводить існування м'якого розв'язку НДСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, розгляд яких передбачається у подальших роботах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андреева Е.А. Управление системами с последствием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. — М.: Наука, 1992. — 333 с.
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
3. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1980. — 612 с.
4. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными: сб. науч. тр. / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С. 25–59.
5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 541 с.
6. Перун Г.М. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Кибернетика и вычислительная математика. — 1991. — № 83. — С.19–25.
7. Перун Г.М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 9. — С. 1773–1781.
8. Свердан М.Л. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений / М.Л. Свердан, Л.И. Ясинская, В.К. Ясинский // Кибернетика и вычислительная техника. — 1988. — №81. — С. 7–12.
9. Станжицкий А.Н. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа / А.Н. Станжицкий, А.О. Цуканова // Нелінійні коливання. — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 408–430.
10. Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space / A.O. Tsukanova // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, № 3–4. — С. 179–189.
11. Tessitore G. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations / G. Tessitore, J. Zabczyk // Probability and Mathematical Statistics. — 1998. — 18. — P. 271–287.
12. Zabczyk J. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems / J. Zabczyk, G. Da Prato // Dynamic Systems and Applications. — Cambridge University Press. — 1996. — 449 p.

Надійшла 21.04.2017

**МЕТОДИКА ВИБОРУ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЕКОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ**

В.В. МІКУЛІН

Анотація. У XXI ст. пошук підходів до вирішення екологічних проблем зумовлений загрозами існування навколишнього середовища внаслідок провадження різноманітних видів діяльності та бездіяльності людини. Більшу половину земної поверхні змінено людиною. Ця модифікація називається зміною в землекористуванні. Нелінійності у змінах у землекористуванні можна вивчати за допомогою інструментів інтелектуального аналізу даних. Запропоновано розглядати більш детально три моделі для зміни землекористування: штучні нейронні мережі, методи класифікації і регресії за допомогою побудови дерева рішень і багатовимірні адаптивні регресійні сплайни. Порівнюються результати трьох інструментів інтелектуального аналізу даних.

Ключові слова: множинна класифікація, штучні нейронні мережі, багатовимірні адаптивні регресійні сплайни, множинна детермінація, оцінка правдоподібності, комірка, зміни у землекористуванні.

ВСТУП

В Україні дедалі більш актуальною проблемою стає охорона навколишнього середовища. Показники екологічного стану в Україні наближаються до критичних значень за результатами аудита ООН. Для України екологічна безпека стає одним із перших пріоритетів формування національної політики. Однією з необхідних умов сучасності в Україні є реконструкція людської і господарської діяльності з урахуванням екологічних факторів. Тільки за допомогою екологічного аналізу ситуації діючих об'єктів діяльності та об'єктів, які перебувають на стадії проектування, можна досягти позитивних змін. Актуальність цієї теми зумовлено загрозами існування навколишнього середовища внаслідок провадження різноманітних видів діяльності та бездіяльності людини.

Натепер у галузі промисловості екологія розглядається як важливий аспект майже всіх нових проектів розвитку виробництва. Розвиток екологічного менеджменту як наукового напрямку спонукає до збільшення кількості методів і прийомів, які можуть бути застосовані як інструменти для поліпшення екологічних параметрів кожного виробничого процесу.

У сучасному підході до удосконалення технологічних процесів для контролю екологічних параметрів дедалі частіше використовують матема-

тичні методи прогнозування. Актуальність розроблення таких методів полягає у передбаченні поведінки екологічних параметрів технологічних процесів з метою прогнозування потенційної небезпеки впровадження технологій на виробництві.

З огляду на потенційні екологічні наслідки зміни клімату основне завдання сьогодення — оцінювання динамічних ефектів зовнішнього впливу клімату на флуктуацію. Це не є тривіальним завданням, оскільки клімат може взаємодіяти з іншими факторами, такими, як густота населення, ступінь міжвидової конкуренції, вплив випасу і людського ставлення до фізичного забруднення навколишнього середовища. Хоча відносна значущість внутрішніх факторів і змін зовнішнього навколишнього середовища у визначенні динаміки популяцій тварин уже давно є центральною темою в екології, інтерактивний вплив клімату і густота населення, як правило, ігноруються. Взаємодія між кліматом та іншими факторами може призвести до появи складної динаміки, що не належним чином моделюється лінійними системами. Виконано огляд відомих робіт із цієї тематики. Сьогодні існує декілька типів моделей, які успішно використовуються в прогнозуванні екологічних процесів.

Одним з інструментів, які можуть бути використані для цієї мети, є штучні нейронні мережі (ШНМ) [1]. Як об'єкт моделювання за допомогою ШНМ був викид газоподібного діоксиду сірки, постійний моніторинг якого проводився у місті Бор (Сербія). Крім того, для процедури моделювання використовувалися метеорологічні параметри: сезон, швидкість вітру, напрямки вітру, температура повітря, вологість і атмосферний тиск.

Ці дослідження дали змогу сформувати математичну модель, яка дозволить прогнозувати надмірну емісію діоксиду сірки з достатньою точністю, на підставі записаних метеорологічних і технологічних параметрів, отриманих з виробництва, зокрема мідеплавильного комплексу. Ця модель не може бути використана для поліпшення технологічного процесу, однак вона придатна для непрямого захисту від впливу на громадян підвищеного вмісту діоксиду сірки в повітрі.

Описана математична модель ґрунтується на прогнозуванні динаміки метеорологічних і технологічних параметрів, впливає з плану виробництва мідеплавильного комплексу і може бути використана для прогнозування потенційного надмірного викиду діоксиду сірки в повітрі. Таким чином, за ті дні року, коли передбачається надлишкова емісія, можна скоригувати план виробництва, у тому числі щодо зменшення кількості концентрату, що підлягає обробленню та збільшенню виробництва сірчаної кислоти. Ці поправки можуть бути виконані ітеративно до передбаченого вмісту діоксиду сірки, що не знижується менше від його граничного значення.

Користувачі таких моделей прагнуть отримати якомога точніших прогнозів і дедалі частіше потребують формальних оцінок невизначеності в модельних прогнозах для обґрунтованого прийняття рішень та управління ризиками. Одним із нетривіальних інструментів нелінійного моделювання є байєсівські методи формування логічного висновку. Такий підхід запропоновано до розроблення моделі стохастичного процесу, у якому екофізіологічні властивості планктонних груповань виражені авторегресійними випадко-

вими процесами [2]. Цей підхід відображає вплив змін у планктонних групуваннях з плином часу і застосовується до тематичного дослідження в океані на станції Папа з використанням методу Монте-Карло для ланцюгів Маркова. Отримані результати свідчать про те, що, спираючись на об'єктивну попередню ретроспективу, можна виокремити корисну інформацію про стан моделі та підмножини параметрів, і навіть зробити корисні довгострокові прогнози на підставі рідкісних і зашумлених спостережень.

Формулювання байєсівської моделі дасть змогу інтегрувати вимірювання за допомогою стандартних спостережень змінних стану в межах послідовної і строгої структури логічного висновку.

Для множинної класифікації використовують методи класифікації і регресії за допомогою регресійного дерева рішень (РДР) і багатовимірних адаптивних регресійних сплайнів (БАРС), які свідчать про їх широке застосування для моделювання складних екологічних процесів. Насамперед ці моделі потрібні для того, щоб переконатися, що правила зупинення не заважають моделі вилучати правильні дані в ході тренувального прогону. Отже, модель спрощується через зменшення складності моделі і видалення розривів моделі, які не роблять її більш точною. Також для множинної класифікації використовується модель трансформації землекористування, яка має дві особливості на відміну від початкової структури. По-перше, змінено початкову структуру моделі ШНМ, яка використовується у підходах до змін у землекористуванні для бінарної класифікації, де кількість вузлів у вихідному шарі відповідає кількості бажаних результатів. По-друге, використано стратегію кодування «один за класом» для вихідного шару, який містить комбінацію k -двійкових чисел для подання атрибутів до категорії, кожна з яких пов'язана з одним із переходів. Щоб визначити робочий стан переходу для кожного класу землекористування, тільки один з k чисел у вихідному шарі має бути кодований як один, а решта k чисел дорівнюють нулю. Усі вузли у вихідному шарі кодуються як нуль, якщо використання землі зберігається між двома кроками. Модель множинної класифікації у змінах у землекористуванні дозволяє користувачу визначити входи, приховані блоки і вихідні блоки.

Мета роботи — вибір із трьох математичних моделей (ШНМ, РДР, БАРС) кращої. Одна із запропонованих моделей ґрунтується на формальному і неформальному виборі моделі у випадку неповноти вхідних даних. Друга обрана модель прийнятна до оцінювання моделей і ґрунтується на байєсовських критеріях вибору моделі, що показують задовільні результати за відомого розподілу помилок унаслідок моделювання процесів. Третя модель оцінювання екологічних процесів — дедуктивне моделювання (від загального до часткового) математичного сподівання, дисперсії та густонаселеності, яке використовувалося в автоматизованому оцінюванні фінансових процесів.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Розробити методику побудови математичної моделі та її апробації на фактичних даних стосовно екологічних процесів. За допомогою обраних трьох

математичних моделей (ШНМ, РДР, БАРС) проаналізувати та дослідити розглянутий підхід до моделювання екологічних процесів.

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ЕКОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ

Виділимо етапи побудови моделі екологічного процесу: 1) аналіз досліджуваних процесів; 2) підготовку даних для побудови моделі (нормування, заповнення пропусків, екстремальні значення, фільтрацію); 3) оцінювання структури і параметрів моделі; 4) аналіз адекватності моделі.

Аналіз досліджуваного процесу — це фундаментальний етап побудови моделей різних процесів. Для його виконання дослідник повинен мати реальний досвід практичної побудови процесів різної природи. Етап аналізу процесу полягає у виконанні таких завдань [6, 7, 8]:

- а) визначення розмірності (кількості входів і виходів) моделі процесу;
- б) визначення логічних зв'язків між змінними досліджуваного процесу та аналіз можливості їх математичного опису;
- в) визначення кількості зовнішніх збурень та їх типу (детерміноване чи стохастичне);
- г) установлення потенційної можливості виділення окремих підпроцесів (декомпозиція), які є простішими як у функціонуванні, так і у математичному описі. Однак такий процес розподілу є досить складним, виконання якого потребує застосування спеціальних математичних методів;
- д) визначення функції рівнів і типів зв'язків між ними у випадку ієрархічної структури досліджуваного процесу. У технологічних процесах раціонально будувати дерево ієрархії, що дозволить поділити процес на два і більше рівнів функціонування і керування;
- е) використання бази знань, нагромадженої за рахунок наукових досліджень та їх результатів щодо особливостей життєвого циклу процесу, а також застосування напрацьованих законів і закономірностей цього процесу, виявлення досвіду теоретичного чи експериментального дослідження;
- ж) визначення переваг, недоліків, можливостей подальшого удосконалення досліджуваного процесу за наявності розроблених моделей. Використання робочих моделей дозволить оптимізувати процес побудови і застосування моделі.

Підготовка даних для побудови моделі

Метою підготовки експериментальних даних для побудови моделі є зведення даних до зручної форми для визначення закономірностей у досліджуваних процесах. У прикладному сенсі оброблення даних спрямовано на виявлення відмінності між відповідними показниками та оцінювання достовірності такої відмінності. Оскільки дані фактично є випадковими величинами, у процесі дослідження може виникнути недостовірний результат моделювання процесу, тобто різний результат за однакових вхідних умов.

Процес попереднього оброблення експериментальних даних включає: а) нормування — логарифмування даних або зведення до зручного діапазону їх зміни; б) коригування даних — заповнення пропусків та зменшення екстремальних значень, яких явно немає в основному інтервалі значень

змінних; в) формування перших або різниць вищих порядків, необхідних для аналізу відповідних складових часового ряду.

Оцінювання структури і параметрів моделі

На цьому етапі оцінюються коефіцієнти (параметри) та структури моделі [7, 8]. Параметри узагальненої лінійної моделі в основному оцінюються за допомогою методу найменших квадратів (МНК) з використанням принципу економії або збереження. Цей принцип обмежує використання кількості коефіцієнтів для їх оцінювання, що не перевищує їх необхідної кількості. Така кількість формується на основі потреби у збереженні статистичних характеристик процесу.

Найпоширенішими методами оцінювання параметрів моделі є такі: МНК; метод максимальної правдоподібності (ММП); метод допоміжної (інструментальної) змінної (МДП); нелінійний метод найменших квадратів (НМНК) та їх рекурсивні версії (РМНК, РММП, РМДП). Для отримання незміщених, консистентних та ефективних оцінок вектора параметрів θ лінійної регресійної математичної моделі, наприклад, моделі змішаної регресії

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 x(k) + b_2 z(k) + \varepsilon(k),$$

за допомогою МНК необхідно задовольнити такі умови: $\varepsilon(k)$ — некорельована послідовність випадкових чисел з нульовим середнім; $E[\varepsilon(k)] = 0$,

$$\text{cov}[\varepsilon(k)] = E[\varepsilon(k)\varepsilon(j)] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \text{ тобто послідовності } \varepsilon(k) \text{ і } y(k) \text{ не}$$

повинні бути корельовані між собою. Зазначимо, що перевірити виконання наведених умов можна тільки після оцінювання коефіцієнтів моделі, а до оцінювання можна лише постулювати їх виконання [9].

Діагностика моделі

На цьому етапі оцінюється адекватність процесу моделювання шляхом перевірки оцінених кандидатів. Аналіз ґрунтується на оцінюванні таких параметрів:

1. Коефіцієнт множинної детермінації R^2 , який обчислюється таким чином:

$$R^2 = \frac{\text{var}(\tilde{y})}{\text{var}(y)} = 1 - \frac{SSE}{SST},$$

де $\text{var}(\tilde{y})$ — дисперсія залежної змінної, оціненої за допомогою побудованої моделі; $\text{var}(y)$ — дисперсія вимірів залежної змінної; $SSE =$

$= \sum_{k=1}^N [y(k) - \tilde{y}(k)]^2$ — сума квадратів похибок (залишків) моделі (sum of

squared errors); $SST = \sum_{k=1}^N [y(k) - \bar{y}]^2$ — загальна сума квадратів (total sum of

squares); \bar{y} — середнє значення; $SST = SSE + SSR$, де $SSR = \sum_{k=1}^N [\tilde{y}(k) - \bar{y}]^2$

— загальна сума квадратів для регресії (sum of squares for regression). Найкращим значенням є $R^2 = 1$, тобто коли дисперсії вимірів змінної та цієї ж змінної, оціненої за рівнянням, збігаються [9].

2. Сума квадратів похибок для вибраної моделі повинна бути мінімальною, тобто $\sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^N (\tilde{y}(k) - y(k))^2 \rightarrow \min(\tilde{y})$ порівняно з усіма іншими моделями [9].

3. Похибки моделі не повинні бути корельовані між собою. Корельованість похибок визначають за статистикою Дарбіна–Уотсона DW , яка розраховується за формулою $DW = 2 - 2\rho$, де $\rho = E[e(k)e(k-1)] / \sigma_e^2$ — коефіцієнт кореляції між сусідніми в часі значеннями похибки; σ_e^2 — дисперсія послідовності похибок $\{e(k)\}$. Таким чином, за повної відсутності кореляції між похибками $DW = 2$ — це ідеальне значення. Граничними значеннями для DW є 0 (якщо $\rho = 1$) і 4 (якщо $\rho = -1$) [9].

Приклад побудови математичних моделей екологічного процесу

Зміни у землекористуванні являють собою складний процес і моделювання цих систем є теж досить складним. Добре відомо, що чинники впливу на зміни у землекористуванні працюють у різних просторово-часових масштабах нелінійним чином і, отже, для моделювання цієї динаміки потрібні нелінійні інструменти. Нелінійні методи часто застосовуються у моделюванні навколишнього середовища, такі як ШНМ, що набули поширення протягом останніх двох десятиліть. Багатовимірні адаптивні регресійні сплайни і РДР теж відомі моделі, зокрема РДР обчислює ймовірність результатів з використанням декількох просторових збудників, щоб показати монотонні результати; БАРС долає обмеження кусково-постійних функцій у РДР, генеруючи кусково-лінійні моделі з використанням базисних функцій.

Однією з проблем моделювання є те, що в межах обраного регіону відбувається кілька змін у землекористуванні. Це характерно для деяких регіонів, де міські ліси будуть перетворені із земель сільського господарства, у той час, як сусідні перетворюються в сільськогосподарські. Проте деякі дослідники розглядали кілька переходів у землекористуванні в одній і тій же моделі і таким чином спрощували процес зміни у землекористуванні. Під час моделювання або імітації більш ніж один результат часто створює проблему МК. Кілька підходів були розроблені протягом останніх трьох десятиліть для імітації змін у землекористуванні, використовуючи численні змінні навколишнього середовища. Однак більшість з них обмежує їх застосування тільки для одного переходу в землекористуванні. Наприклад, модель трансформації землі (МТЗ), яка являє собою ШНМ, використовувалась у різних місцях по всьому світу для моделювання тільки однієї зміни. У роботі пропонуються різні стратегічні схеми кодування, які можна застосувати для зміни своїх моделей математичної класифікації (МК). В аналізі екологічних процесів використовуються три інструменти інтелектуального аналізу даних (ШНМ, РДР і БАРС) для моделювання МК.

Моделі МК повинні фіксувати кожен комірку на карті до унікального класу землекористування; проте часто комірки можна віднести до більш ніж одного класу землекористування у МК (неоднозначне прогнозування). Деякі моделі можуть комунікувати з декількома класами землекористування, таких як комірчасті автоматичні моделі, моделі логістичної регресії, агентсько-орієнтовані моделі і ШНМ. У деяких з них використовується простий ієрархічний підхід до МК, у той час, як в інших — конкурентний підхід до розподілу землі. Дослідження, запропоновані вирішити різними способами МК, не змогли виявити ефективного правила для усунення проблем у моделюванні МК. Інша мета дослідження — запропонувати простий метод для вирішення проблем шляхом усунення неоднозначних прогнозів.

Таким чином, існує необхідність порівняти і протиставити нелінійні інструменти для моделювання МК, визначити методи, які працюють краще ніж МК, і дослідити їх виконання для умов, коли кілька переходів у землекористуванні відбуваються в одному місці. Порівнюються три відомі підходи інтелектуального аналізу даних (ШНМ, РДР і БАРС) для моделювання МК з метою виявлення закономірностей використання земель на Середньому Заході США.

У дослідженні поєднуються три нелінійні інструменти інтелектуального аналізу даних для імітації більш як одного класу для двох різних регіонів Середнього Заходу США. Метою цієї роботи є: 1) запропонувати різні стратегії кодування схеми трьох інструментів для кількох переходів з одного стану в інший стан землекористування, розроблених для однієї зміни; 2) розробити ефективні правила для подолання неоднозначних прогнозів МК; 3) порівняти кілька переходів у землекористуванні трьох методів інтелектуального аналізу даних один з одним щодо їх потенціалу для сільського господарства, лісів та моделювання міського землекористування у басейні річки Маскегон (*MRV*) та у Південно-східному Вісконсіні (*CEVI*), використовуючи відносну робочу характеристику (*ROC*) і відсоток правильних порівнянь (*PCM*); 4) зробити висновки про моделі змін у галузі землекористування на Середньому Заході США.

Моделювання РДР. Вузли А, Б, В у дереві містять комірки: міську територію, ліс, землю сільськогосподарського призначення відповідно.

Комірка, яка задовольняє умову у вузлах, переходить по лівому плечу, або перехід відбувається по правому плечу. Однак вузли Г (рис. 1) містять комірки — інші переходи у землекористуванні, або які залишаються у тому самому класі землекористування. Відстані до лісу і сільського господарства в *CEVI* та відстані до сільського господарства, доріг і лісів у *MRV* є найбільш значущими для міських умов, що імітують приріст лісу і сільського господарства одночасно (рис. 1, а, б). За розрахунком приросту визначається якість розмежування (чим більший бал, тим вища якість). Відношення дисперсії до розмежування у міру спадання наведено в табл. 1.

За відстані до сільськогосподарських розмежувань 75 м приріст становить 0,065, що набагато нижчий, ніж за основної відстані розмежувань 63 м (за відстані до лісу приріст — 0,094) у *CEVI*. Відстань до чагарника є найкращою змінною (51 м), приріст — 0,064 як головний показник у *MRV* (табл. 1).

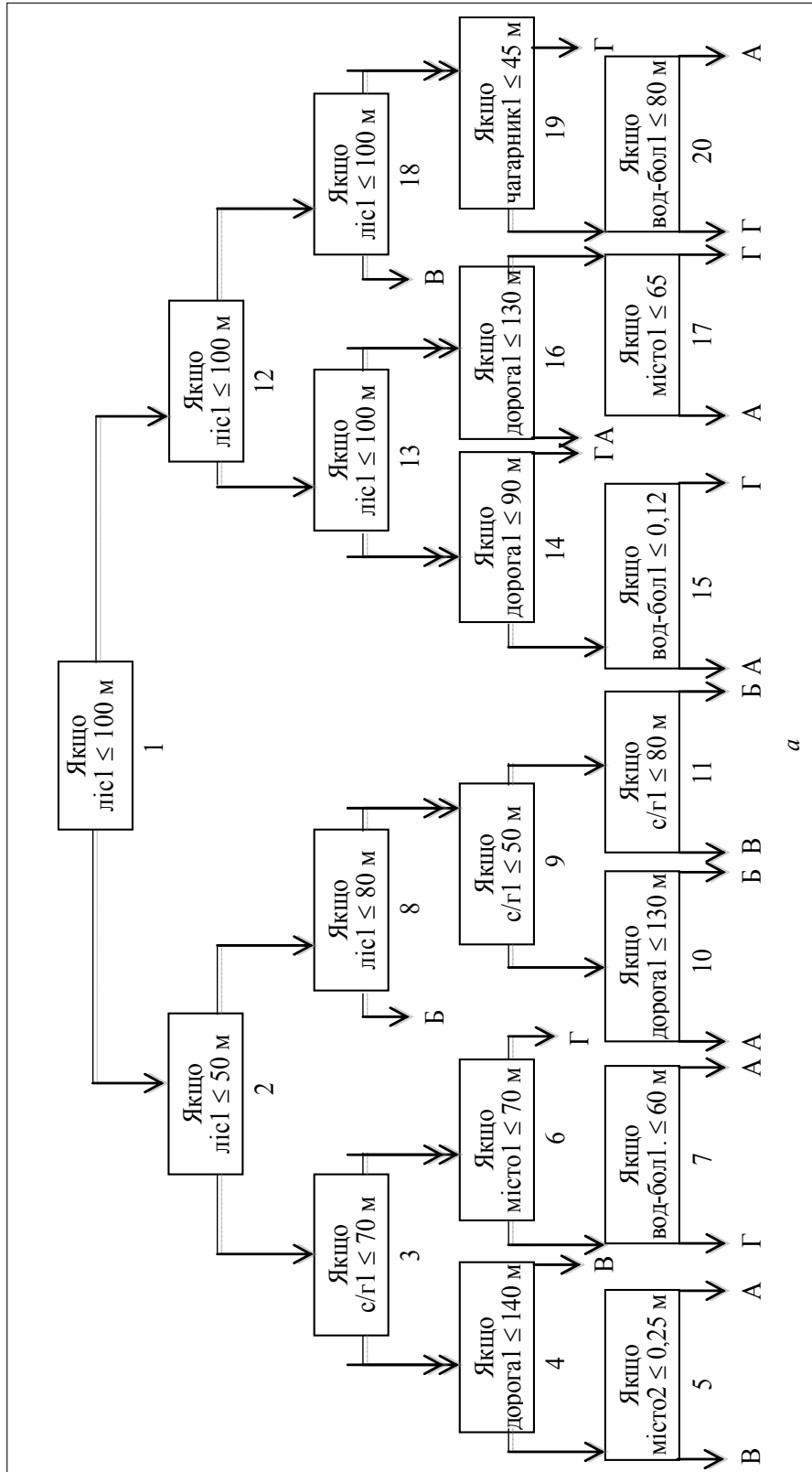
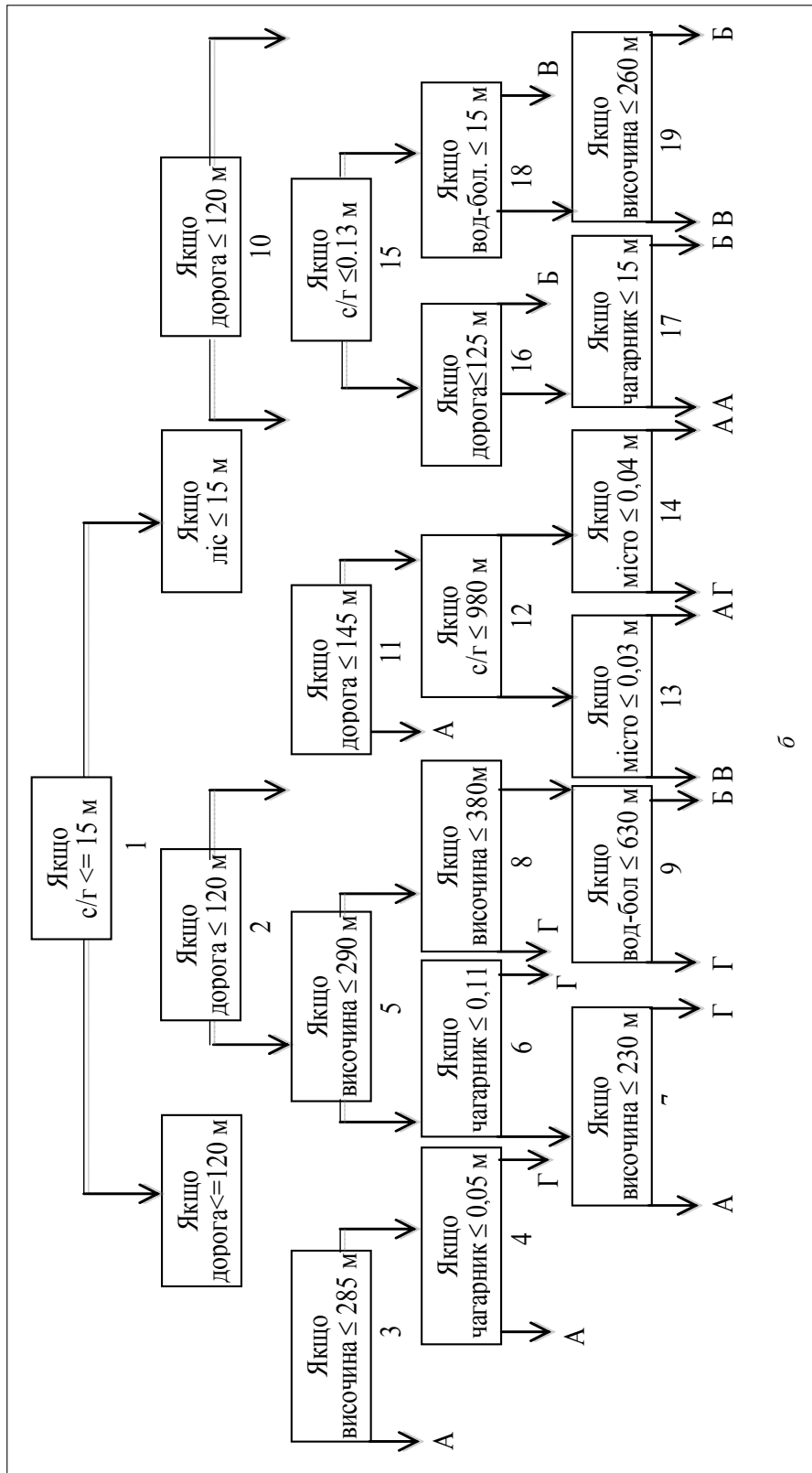


Рис. 1. Візуалізація основних розгалужувачів БАРС: дерево рішень у SEVI (a) і MRV (б); вод-бол — водянисто-болотиста місцевість; с/г — сільськогосподарська земля. (Див. також с. 123)



б

Рис. 1. Закічення

Комірки, розміщені в межах А, Б і В вузлів з великими значеннями придатності мають найбільшу ймовірність існування міських, лісових і приросту сільськогосподарських земель відповідно (рис. 1, а, б). У *CEVI* комірки на вузлі 8 (відстань до лісу менша за 80 м), вузол 20 (відстань до заболоченого місця більша ніж 80 м) і вузол 18 (відстань до сільського господарства менша ніж 75 м) найбільш придатні для лісів, міського і сільського господарства відповідно (рис. 1). У *MRV* комірки у вузлі 17 (відстань до чагарника понад 40 м), вузол 14 (щільність міського господарювання більша ніж 0,04) і вузла 18 (відстань до заболоченого місця більша ніж 60 м) мають найбільшу придатність і вигоду для лісового, міського і сільського господарства відповідно (рис. 1, б). Ця процедура триває від вузла зі значеннями більшої придатності до інших вузлів з більш низьким значенням придатності до РДР, де не задовольняється загальна кількість еталонних змін для кожного класу землекористування (табл. 2).

Таблиця 1. Змінна, розмежування і приріст

Крок	Змінні	Розмежування	Приріст
<i>CEVI</i>			
0	Ліс 1	63	0,09451
1	С/г 1	75	0,06582
2	Місто 1	51	0,03752
3	Ліс 2	0,11346	0,02820
4	Дорога 1	121	0,01776
5	Місто 2	0,16735	0,01632
6	Вод-бол 1	51	0,01451
7	С/г 2	0,43037	0,01371
8	Схил 1	3,14572	0,01317
9	Чагарник 1	142	0,00712
10	Парк 1	1499	0,00648
11	Чагарник 2	0,05948	0,00610
12	Вод-бол 2	0,09972	0,00473
13	Височина 1	265	0,00458
14	Вода 1	101	0,00456
15	Потік 1	121	0,00418
16	Аспект 1	0,50	0,00349
<i>MRV</i>			
0	С/г 1	345	0,06587
1	Чагарник 1	51	0,06486
2	Дорога 1	114	0,03823
3	Ліс 1	190	0,03040
4	Місто 2	0,03543	0,01517
5	Місто 1	270	0,01333
6	С/г 2	0,14085	0,00980
7	Височина 1	266	0,00939
8	Вод-бол 1	875	0,00910
9	Чагарник 2	0,13359	0,00829
10	Вод-бол 2	0,04490	0,00374
11	Ліс 2	0,37794	0,00346
12	Потік 1	915	0,00227
13	Парк 1	2772	0,00110
14	Схил 1	1,14232	0,00089
15	Аспект 1	5,58117	0,00056

Таблиця 2. Приріст, часовий інтервал і розмір комірок для *CEBI* і *MRV*

Місцевість, яка вивчається	Часовий інтервал, роки	Приріст с/г земель	Приріст лісу	Приріст міських земель	Інші зміни	Всього	Розмір комірок, м
<i>CEBI</i>	1990–2000	135,709	79,467	491,031	314,265	1020,472	30×30
<i>MRV</i>	1978–1998	120,013	641,237	412,302	693,598	1967,150	30×30

Зміни у землекористуванні мають однакові значення придатності комірок у кожному вузлі. Дослідник здатен знайти вузли через їх сортування від високих до низьких концентрацій для різних класів землекористування. Наприклад, фермери, містобудівники та управляючі природними ресурсами цікавляться розширенням сільського господарства, урбанізацією і збільшенням лісів у певному регіоні (наприклад, вузли 3 і 18 у *CEBI* для збільшення сільського господарства; вузли 10 і 14 у *MRV* для урбанізації і вузли 7 і 11 у *CEBI* для збільшення лісів). Показник придатності відображає кожен вид землі, тобто кожен клас з власною відміткою (інші види землекористування, сільськогосподарські землі, ліси і міські землі — Г, В, Б і А відповідно). Вузли 3, 5, 7 і 14 мають найвищу концентрацію сільськогосподарських, міських, лісових земель та інших переходів землекористування в *CEBI*. Вузли 11, 10, 19 і 13 мають також найвищу концентрацію сільського, міського господарства та збільшення лісового господарства й інших видів переходів у землекористуванні у *MRV* відповідно.

Моделювання БАРС. Змінна з великим стандартним відхиленням (*ANOVA*) краще описує взаємозв'язок між входами і виходами. Відстань до сільського господарства зі стандартними відхиленнями 0,74 і 0,29 показують більший внесок для моделювання переходів у землекористуванні в *CEBI* і *MRV* відповідно (рис. 2).

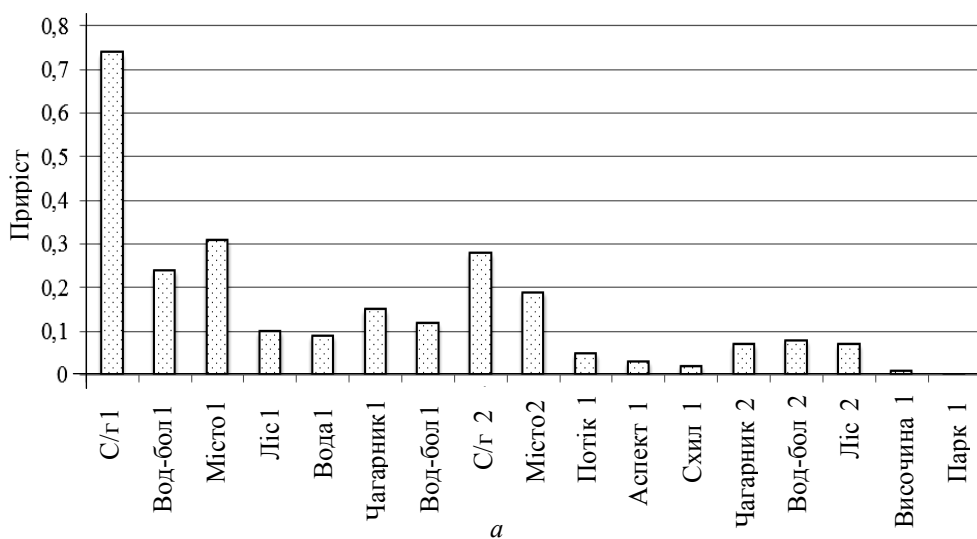


Рис. 2. Дисперсія у БАРС: а — *CEBI*; б — *MRV*. (Див. також с.126)

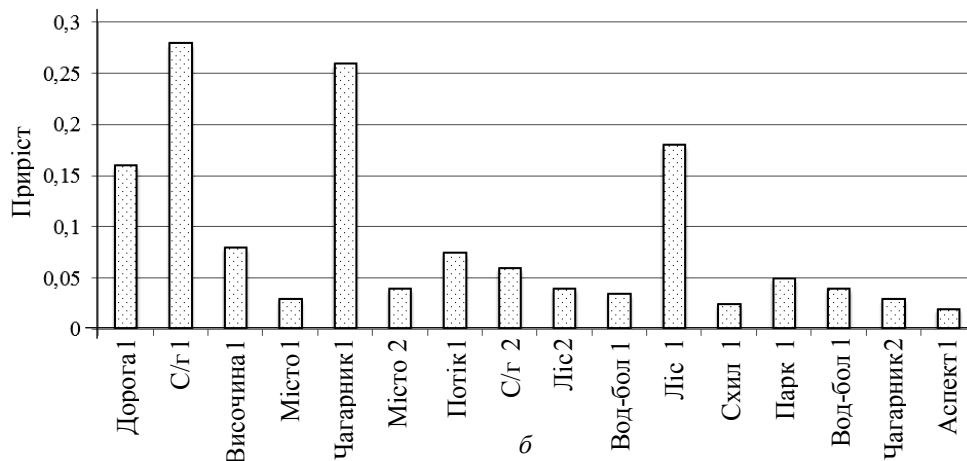


Рис. 2. Закінчення

Відстань до міських земель зі стандартним відхиленням 0,31 і відстані до чагарників зі стандартним відхиленням 0,25 вказують на більший внесок для імітації переходів у землекористуванні в *CEBI* і *MRV* (рис. 2), відстань до чагарників із чотирьох базисних функцій в *CEBI* і підвищенні до 8 базисних функцій у *MRV* містять найбільшу кількість базисних функцій в БАРС (табл. 3).

Таблиця 3. Коефіцієнти, змінні та вузли в БАРС для *CEBI*

<i>N</i>	Коефіцієнт	Змінна	Стан	Вузол
0	-0,984680			
1	-0,061248	С/г 1	-	67
2	0,035816	С/г 1	+	67
3	-0,031057	Місто 1	+	42
4	-0,015252	Вод-бол 1	-	161
5	0,014962	Вод-бол 1	+	161
6	-0,001308	Дорога 1	-	161
7	0,003081	Дорога 1	+	161
8	-0,022361	Вод-бол 1	+	60
9	-0,000101	Вода 1	-	90
10	-0,006427	Вода 1	+	90
11	-0,004736	Чагарник 1	-	366
12	0,004286	Чагарник 1	+	366
13	0,000015	Ліс 1	-	67
14	-0,004473	Ліс 1	+	67
15	0,012819	Місто 1	-	42
16	-3,674577	Місто 2	+	0,7726
17	-1,079093	Місто 2	-	0,7726
18	-3,326859	С/г 2	+	0,0790
19	-2,891896	С/г 2	-	0,0790
20	-0,007839	Чагарник 1	+	134
21	0,000535	Аспект 1	+	145
22	0,000145	Аспект 1	-	145
23	-0,722788	Чагарник 2	+	0,3728
24	-1,050544	Чагарник 2	-	0,3728
25	0,999261	Вод-бол 2	+	0,1020
26	0,056512	Вод-бол 2	-	0,1020

Продовження табл. 3

N	Коефіцієнт	Змінна	Стан	Вузол
27	0.792730	Ліс 2	+	-0.0000
28	-0.006119	Схил 1	-	2.8624
29	-0.027395	Схил 1	+	2.8624
30	0.003083	Чагарник 1	-	174
31	-0.000693	Височина 1	+	267
32	-0.001118	Височина 1	-	267
33	-1.464719	Вод-бол 2	+	0.5492
34	0.002106	Місто 1	+	84
35	-0.000475	Потік 1	+	240
36	0.000135	Потік 1	-	1218
37	0.000110	Вода 1	+	684
38	4.434641	С/г 2	-	0.1045
39	0.000002	Парк 1	+	0.0001

Порівняння моделей інтелектуального аналізу даних

Відповідно до РСМ (рис. 3, а) МТЗ і РДР мали однакову точність і більшу точність, ніж БАРС для імітації міського, сільського господарства і збільшення лісів в обох регіонах.

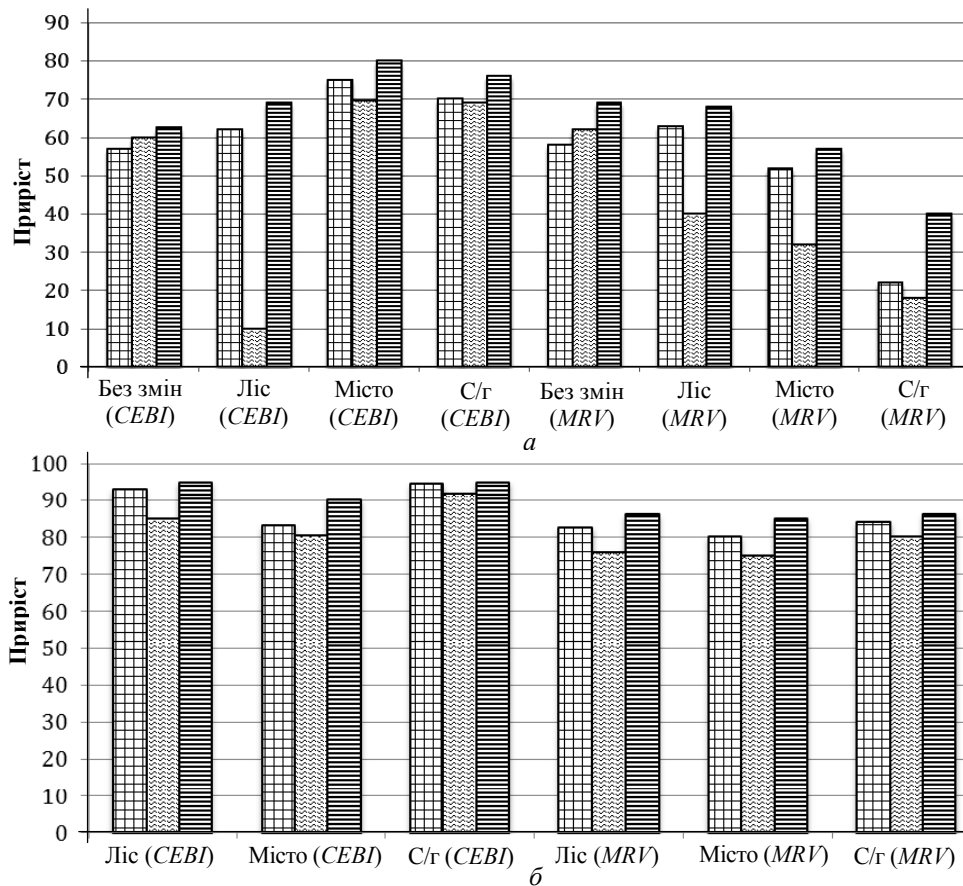


Рис. 3. Розрахований РСМ для незмінних сільськогосподарського, міського та лісового приростів у CEBI і MRV; ROC для моделей (ШНМ, РДР, БАРС) для приростів сільського, міського та лісового господарств у CEBI і MRV

Тільки для моделювання збільшення лісу в *CEBI* відмінність між МТЗ і РДР з БАРС була великою і зумовлена тим, що кілька комірок показали приріст лісів протягом 10 років (близько 7,7%). Відповідно до *ROC* (рис. 3, б) МТЗ і РДР приріст значно перевищив БАРС за даними перевірки. Характеристики *ROC* для трьох моделей були подібні в *CEBI*, проте *ROC* для МТЗ і РДР більші, ніж *ROC* для БАРС у *MRV*.

ВИСНОВКИ

Таким чином, алгоритми класифікації допомагають зрозуміти існуючу структуру даних і можуть бути використані для прогнозування класу землекористування з використанням відповідних методів інтелектуального аналізу даних. Більшість моделей змін у землекористуванні розроблено для бінарного прогнозування. У цій роботі реформуються три нелінійні інструменти інтелектуального аналізу даних для моделювання декількох змін для двох різних регіонів Середнього Заходу США (сільського господарства, лісових і міських земель). Модифіковано методи МТЗ, РДР і БАРС для МК, які спочатку розроблялись для бінарного моделювання змін. Виявлено, що стратегія кодування один-у-класі (наприклад, МТЗ) є більш придатною, ніж стратегія кодування розподіленого висновку (наприклад, РДР і БАРС) для моделювання задач МК. Результати дослідження підтверджують висновок про можливість використання МТЗ, РДР і БАРС для моделювання декількох змін у землекористуванні.

Оцінка моделі для бінарної класифікації проста. Використано таблицю на випадок непередбачених обставин для порівняння модельованих процесів і вибору карт земель у двох категоріях — змінних і незмінних. Проте далеко не всі дослідження були зосереджені на побудові моделі змін землекористування для МК або порівняння різних моделей цих змін для багаторазового їх моделювання. Це дослідження дає змогу імітувати кілька переходів землекористування з використанням нелінійних інструментів. Результати показують, що моделі інтелектуального аналізу даних виконуються досить добре з використанням жорсткої класифікації *PCM* і м'якої класифікацію (*ROC*). Виявлено, що МТЗ дала послідовно вищий ступінь узгодженості ніж РДР і БАРС для кожного класу землекористування. Метод ШНМ має більш високу точність, але мало що пояснює (див. рис. 3). Методи РДР і БАРС передбачають, що найбільше їх значення залежать від чинників, пов'язаних з кожним видом переходу у землекористуванні (див. табл. 1 і 2).

Показано, що зміни у землекористуванні є послідовними у центрально-західній частині США (*CEBI* і *MRV*). Ділянки біля лісу перетворюються в сільське господарство і сільськогосподарські землі, згодом — у міські. Перший період землекористування, як правило, швидший. Неоднозначні передбачення в МК відбуваються через складність моделей змін, коли підходи до інтелектуального аналізу даних не можуть визначати чіткі межі між класами землекористування. Кількість комірок з неоднозначними прогнозами залежить від здатності процедур інтелектуального аналізу даних розмежувати класи землекористування, різні чинники, кількість еталонних змін для кожного класу землекористування і вихідних класів землекористування.

Тут розроблено простий метод для вирішення конфліктних проблем у МК. Це досягається усуненням неоднозначних прогнозів для даних комірок у моделюванні землекористування, яке відображає модельовані карти землекористування з довільними класами землекористування.

Необхідно більш поглиблено вивчати проблематику моделювання кількох переходів землекористування. Моделі землекористування, особливо для МК, генерують як помилковий позитивний результат, так і помилковий негативний результат класу помилок. Отже, використання тільки однієї моделі не може бути ідеальним, вони можуть доповнювати одна одну. Застосування двох або більше потужних інструментів, таких як РДР і БАРС у поєднанні з моделлю ШНМ допомагає зрозуміти базовий складний процес у землекористуванні.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Mihajlović I.* Statistical modelling in ecological management using the artificial neural networks (ANNs) / I. Mihajlović, Đ. Nikolić, N. Strbac and Z. Zivković // *Serbian Journal of Management*. — 2010, No 5 (1). — P. 39–50.
2. *Parslow J.* Bayesian learning and predictability in a stochastic nonlinear dynamical model / J. Parslow, N. Cressie, P. Campbell E., E. Jones and L. Murray // *Ecological Applications*. — 2013. — No 23 (4). — P. 679–698.
3. *Verbeke G.* Formal and Informal Model Selection with Incomplete Data / G. Verbeke, G. Molenberghs and C. Beunckens // *Statistical Science*. — 2008. — Vol. 23, No. 2. — P. 201–218.
4. *Bubna K.* Model selection and surface merging in reconstruction algorithms / K. Bubna, C.V. Stewart // *Journal Computer Vision and Image Understanding archive*. — 2000. — Vol. 80, Issue 2. — P. 215–245.
5. *Sucarrat G.* Automated Model Selection in Finance: General-to-Specific Modelling of the Mean, Variance and Density. *Oxford bulletin of economics and statistics* / G. Sucarrat, A. Escribano // *Oxford: Wiley-Blackwell*. — 2012. — Vol. 74. — P. 716–735.
6. *Бідюк П.І.* Аналіз часових рядів : навч. посіб. / П.І. Бідюк, В.Д. Романенко, О.Л. Тимошук. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — С. 115–158.
7. *McCullagh P.* *Generalized Linear Models* [Text] / P. McCullagh, J.A. Nelder. — New York: Chapman & Hall, 1990. — 526 p. Doi: 10.1007/978-1-4899-3242-6.
8. *Трухан С.В.* Прогнозування актуальних процесів за допомогою узагальнених лінійних моделей / С.В. Трухан, П.І. Бідюк // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. — 2014. — № 2. — С. 14–20.
9. *Довгий С.О.* Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів / С.О. Довгий, П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук. — К.: Логос, 2014. — 419 с.
10. *Tayyebi A.* Modeling multiple land use changes using ANN, CART and MARS: Comparing tradeoffs in goodness of fit and explanatory power of data mining tools / A. Tayyebi, Bryan C. Pijanowski // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* 28 (2014). — P. 102–116.

Надійшла 27. 10. 2016

ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ НАВЧАННЯ У СПАЙКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖАХ З ГОМЕОСТАЗОМ ТА НАВЧАННЯМ З ПІДКРІПЛЕННЯМ

В.М. ОСАУЛЕНКО

Анотація. Складність молекулярних механізмів, що підтримують формування пам'яті, заважає побудові простих, але вичерпних моделей для ефективної симуляції великих нейронних мереж. Запропоновано феноменологічну модель правила навчання, що описує силу зв'язку через повільну і швидку змінні. Їх взаємодія дозволяє об'єднати навчання без учителя та навчання з підкріпленням. Результати симуляції свідчать про стабільність сили зв'язку завдяки взаємодії двох змінних та швидкій формі гомеостатичної пластичності. Мультиплікативна форма масштабування ваг зберігає патерни пам'яті статистично більш частих стимулів. Подібним чином до підходу допоміжних слідів модель відслідковує нещодавні зміни сили зв'язку між нейронами і дозволяє їх підсилити. Наведено міркування про можливу біологічну інтерпретацію запропонованої моделі, що включає швидке переміщення рецепторів до мембрани і стабілізацію їх у кластери.

Ключові слова: правила навчання, спайкові нейронні мережі, навчання з підкріпленням.

ВСТУП

Нейронні мережі третього покоління [1], так звані спайкові нейронні мережі, вважаються перспективними в побудові адаптивних систем з навчанням і пам'яттю, що відтворюють характеристики живих організмів. Використання математичних моделей для відтворення динаміки реального нейрона призводить до складної і різноманітної поведінки розв'язків у штучних системах. Головне завдання — з'ясувати, як з хаотичної динаміки об'єднаних у мережу тисяч нейронів сформувати здатність запам'ятовувати велику кількість стимулів і надалі їх відтворювати та розпізнавати. Досі залишається не зрозумілим, яким чином кодується інформація в таких нейронних мережах і в реальному мозку в цілому.

Реальний біологічний нейрон використовує безліч механізмів, які забезпечують стабільне навчання на великих проміжках часу, такі як гомосинаптичні хебівські та гетеросинаптичні гомеостатичні механізми [2], а також механізми, що змінюють структуру мережі через створення і видалення зв'язків [3]. Окремі механізми добре вивчені і побудовані їх математичні моделі, проте залишається проблема об'єднати їх у єдину робочу модель [4].

У роботі пропонується об'єднати навчання з підкріпленням та навчання без учителя в поєднанні з гомеостатичним механізмом. Модель навчання включає дві змінні, які відслідковують силу зв'язку між нейронами на двох різних часових масштабах. Завдяки взаємодії змінних удалося включити в модель швидке підсилення зв'язку з надходженням сигналу підкріплення,

а також сформувані стійкі зв'язки у випадку статистично частих вхідних стимулів. Гомеостатичний механізм є формою швидкого негативного зворотного зв'язку, який протидіє насиченню сили зв'язків до граничних значень.

Пропонована модель подібна до існуючих підходів з використанням допоміжних слідів, де додаткова змінна відслідковує попередню активність і в разі сигналу підкріплення підсилює зв'язок [5]. Проте в цьому випадку змінною, що відслідковує попередню активність, є сама сила зв'язку, і тому реалізується форма короткострокової пам'яті. У поєднанні з повільною змінною можна впровадити навчання без учителя, де нейрон вибирає статистичні закономірності з вхідного сигналу.

МЕТОДИ

Для тестування моделі симулювали один вихідний нейрон, який отримує сигнал від 100 вхідних нейронів, і обмежилися лише додатними вагами. Тому вхідні нейрони можуть тільки збуджувати вихідний.

Як модель нейрона використано стандартну дисипативну модель «інтегруй–активуй», що описує зміну напруги на мембрані [6]:

$$C \frac{du}{dt} = g_{leak}(u_{rest} - u) + g_{AMPA}(t)(u_{AMPA} - u).$$

Якщо $u > u_{thr}$, то напруга скидається $u = u_{rest}$ і нейрон генерує спайк.

Провідність *AMPA* рецепторів g_{AMPA} описується таким чином:

$$\tau_{AMPA} \frac{dg_{AMPA}}{dt} = -g_{AMPA} + \sum_{i \in \{input\}} w_i S_i(t).$$

Тут g_{AMPA} збільшується на w_i у момент надходження спайку від i -го вхідного нейрона; $S_i(t) = \sum_f \delta(t - t_f^i)$, де δ — функція Дірака; t_f^i — час надходження спайку.

Зміну сили зв'язку, або синаптичну пластичність можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dw^i}{dt} = \frac{1}{\tau_w}(w_s^i - w^i) + \frac{1}{\tau_{hebb}}(S^i(t)(x^i p_{slow}) - S_{post}(t)p) \\ \frac{dw_s^i}{dt} = \frac{1}{\tau_{w_s}}(w^i - w_s^i)M + \frac{1}{\tau_{hom}}w_s^i \left(1 - \frac{y^s}{A}\right)^3. \end{cases} \quad (1)$$

Це власне і є запропонована модель. Тут x , p_{slow} — сліди спайків для вхідного нейрона і p — для вихідного. Слід розуміється як низькочастотний фільтр і описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \tau_x \frac{dx^i}{dt} = -x^i + S^i(t), \\ \tau_p \frac{dp}{dt} = -p + S_{post}(t), \\ \tau_{p_{slow}} \frac{dp_{slow}}{dt} = -p_{slow} + S_{post}(t). \end{cases}$$

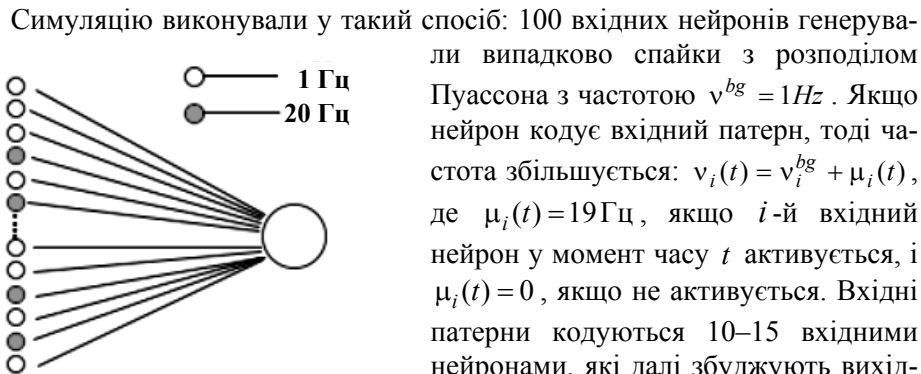


Рис. 1. Схематичне зображення мережі нейрони активують один вихідний.

Симуляцію виконано мовою програмування Python з використанням бібліотеки Brian2. Код і значення параметрів для детального ознайомлення доступні за посиланням [7].

ОГЛЯД МОДЕЛІ

Сила зв'язку між двома нейронами пов'язана з кількістю і ефективністю *AMPA* рецепторів, що регулюється взаємною активністю вхідного і вихідного нейронів. *AMPA* рецептори розміщуються на шипику, малому дендритному відростку, який приймає, обробляє і зберігає сигнал від вхідного нейрона. Усі основні збуджувальні нейрони головного мозку в місцях контакту з іншими нейронами утворюють шипики і вважається, що вони є субстратом пам'яті. Визначення сили зв'язку залежить не лише від моменту навчання, але й від динаміки стану шипика, яка має повільний масштаб часу і залежить від інших рецепторів і регуляторних білків. Тому пропонується розрізняти моментальне значення сили зв'язку і динамічний стан шипика, який впливає на силу зв'язку і після синхронної активації вхідного та вихідного нейронів.

Необхідність опису зв'язку між нейронами з кількома змінними виникає під час навчання з підкріпленням. Вважається, що нейрон має відслідковувати попередню активність протягом 1–5 с, щоб із надходженням сигналу підкріплювалися лише потрібні зв'язки. Для цього вводять додаткову змінну, яку в літературі називають допоміжним слідом. Установлено, що це теоретичне припущення відповідає поведінці реального нейрона [8]. Детальні молекулярні механізми ще мають бути з'ясовані, але потенційні кандидати — певні кінази і фосфатази, що регулюють силу зв'язку через модуляцію кількості та ефективності *AMPA* рецепторів, мають часовий масштаб залишкової активності порівняно з тим, який має допоміжний слід в теоретичних моделях. Тому є підстави надати допоміжному сліду фізичної інтерпретації.

Інший важливий фактор формування сили зв'язків — стабільність. Згідно із хевіцьким правилом зв'язки між нейронами А і Б підсилюються, якщо нейрон А бере участь в активації нейрона Б, за своєю природою має позитивний зворотний зв'язок, тобто збільшення сили зв'язку приводить до

підвищення активації, яку, у свою чергу, ще більше підсилює зв'язок. У біологічних мережах стабільність забезпечується багатьма механізмами через збалансовану активацію пригнічувальних нейронів [9], короткочасове пригнічення чи швидку форму гомеостазу [10,11,12]. У математичних моделях хевівське правило має бути доповнене стабілізуючими механізмами, що зумовлює формування простої пам'яті в спайкових нейронних мережах [13].

Запропонована модель ґрунтується на кількох ідеях:

- є дві змінні, що описують силу зв'язку між двома нейронами, — швидка і повільна. Ці змінні взаємодіють на різних часових масштабах;
- повільна змінна описує стан шипика і може швидко зрівнятися зі швидкою з надходженням сигналу підкріплення;
- нейрон повинен мати частоту активації в певних межах. Гомеостатична пластичність забезпечує цю стабільність через масштабування сил зв'язку.

Модель описується такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau_w}(w_s - w) + \frac{1}{\tau_{hebb}}Hebb, \\ \frac{dw_s}{dt} = \frac{1}{\tau_{w_s}}(w - w_s)M + \frac{1}{\tau_{homeo}}Homeo, \end{cases} \quad (2)$$

де w — швидка змінна, миттєве значення сили зв'язку; w_s — повільна змінна, що описує стан шипика; M — сигнал підкріплення, $M = 1$ без сигналу. $Hebb$ і $Homeo$ описують гомосинаптичну хевівську пластичність і гетеросинаптичну гомеостатичну пластичність відповідно. Має справджуватися співвідношення часових масштабів $\tau_{w_s} > \tau_w$, що визначає відношення швидкості динаміки двох змінних.

Розглянемо фіксований момент навчання, коли відповідно до хевівської пластичності w зростає (рис. 2, а). Тоді згідно з рівняннями (2) w починає зменшуватись, а w_s збільшуватися. Загалом повільна змінна збільшиться на

Δw , що залежить від співвідношення $\frac{\tau_w}{\tau_{w_s}}$. Якщо навчальна подія повториться, тоді загальне зростання Δw буде більшим (рис. 2, б). Це добре відповідає твердженню, що реактивація навчання зміцнює пам'ять [14].

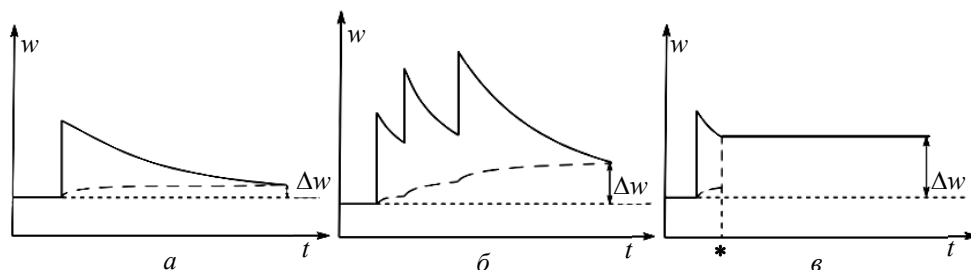


Рис. 2. Зображення еволюції швидкої та повільної змінних: а — зображення динаміки двох змінних у разі одного моменту навчання; б — повторення навчання, що підсилює зв'язок; в — сигнал підкріплення, що майже миттєво збільшує силу зв'язку

Основна відмінність запропонованої моделі навчання полягає в тому, що вона природно включає навчання з підкріпленням. Припустимо, що після навчання нейрон отримує сигнал підкріплення M . Тоді швидкість зміни w_s буде значно більшою і $w_s \rightarrow w$, що виразиться у великій Δw (рис. 2, в).

Модель (2) показує такі властивості:

- сила зв'язку залежить не тільки від моменту навчання, але і від більшого часового проміжку;
- модель одночасно включає навчання без учителя і навчання з підкріпленням.

Для хевівської форми використано правило триплетної спайк-часовозалежної пластичності [15], яке може бути зведено до розширеного правила ВСМ [16].

Гомеостатична пластичність:

$$Homeo = w_s \left(1 - \frac{y_s}{A} \right)^3, \quad (3)$$

де w_s — відповідає мультиплікативній природі пластичності, коли зміна сили зв'язку залежить від самої величини; y_s — слід активації нейрона

$\tau_y \frac{dy_s}{dt} = -y_s + S_{post}(t)$; A — задана частота активації.

Кубічну залежність (рис. 3) використано для підсилення негативного зворотного зв'язку за сильної активації і послаблення, коли частота активації близька до заданої частоти. Недолік такого припущення — зміна сили зв'язку за низької активації значно повільніша, а у випадку $w_s = 0$ зміни не відбуваються.

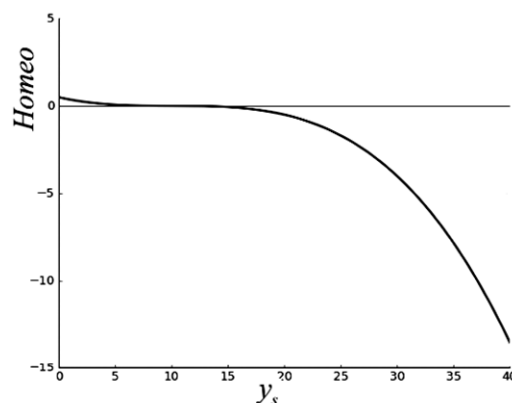


Рис. 3. Графік зміни сили зв'язку залежно від сліду активації вихідного нейрона

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАБІЛЬНОСТІ ЗВ'ЯЗКІВ

Симульовано роботу 100 вхідних нейронів, які надсилають спайки з розподілом Пуассона з частотою 1ГЦ до одного вихідного нейрона. На мережу перші 20 с подавався активний патерн, у результаті чого 11 вхідних

нейронів активувалися з частотою 20 Гц. Відповідно до хевівського правила навчання зв'язки, пов'язані з активним патерном, підсилюлися (рис. 4).

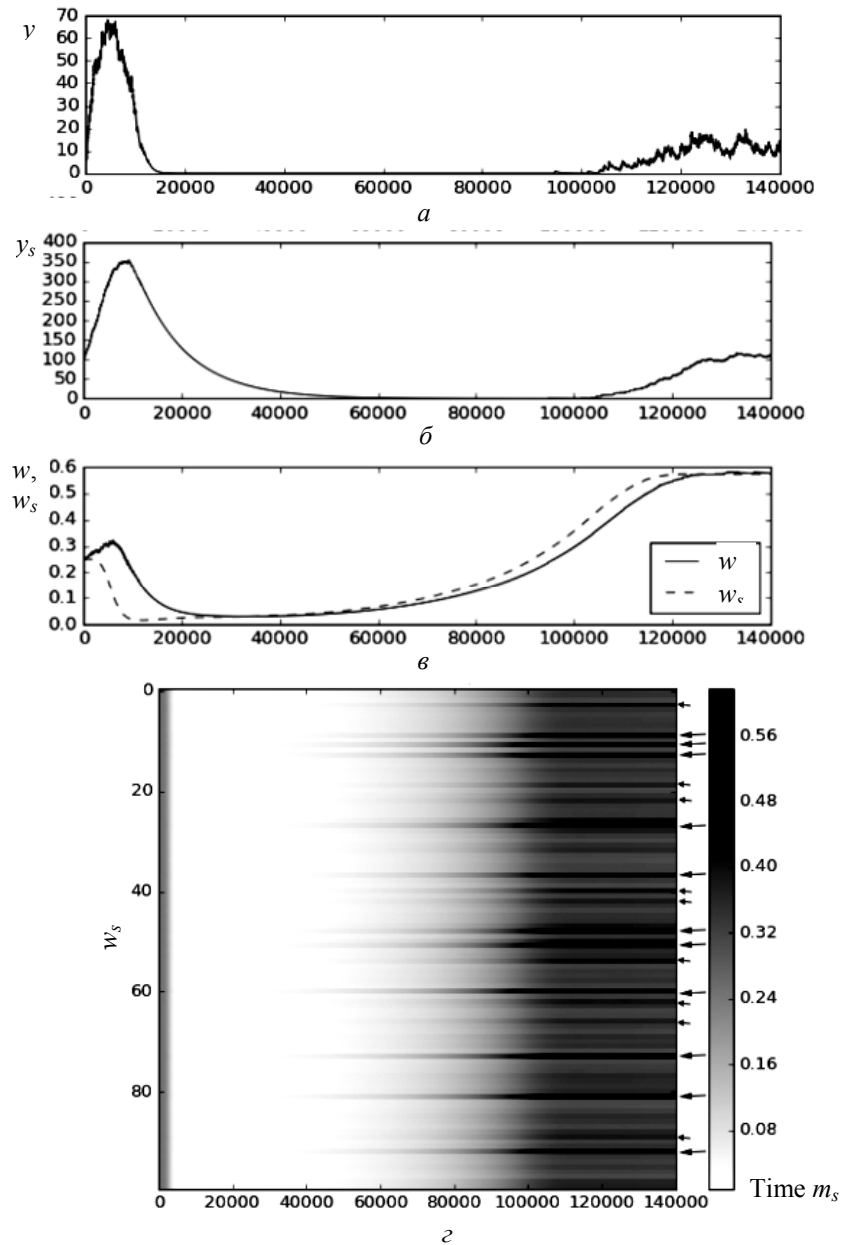


Рис. 4. Регуляція активності нейрона

Графіки, показані на рис. 4, а, б, відповідають сліду активності активації постсинаптичного нейрона з часовими сталими 1 с і 10 с. Графік, зображений на рис. 4, в, показує залежність від часу двох змінних зв'язку до одного нейрона з групи, які активувались від патерну. Залежність повільної змінної від часу для всіх 100 зв'язків ілюструє рис. 4, г. Стрілками показано активний патерн. Градієнт сірого вказує на роботу гомеостатичної пластичності.

Зі збільшенням частоти активації вихідного нейрона член *Homeo* зменшує зв'язки і нейрон перестає збуджуватись. Тоді гомеостатична пластичність починає працювати у зворотному напрямку для вирівнювання активації до бажаного рівня. Завдяки w_s у виразі (3) навчений патерн збільшує зв'язки сильніше, оскільки він має більше значення w_s , а, отже, тому можливе виділення і збереження навченого патерну. Така властивість називається мультиплікативністю і узгоджується з експериментальними даними на реальних нейронах [11]. У випадку відсутності мультиплікативності навчений патерн після відновлення активації нейрона був би відсутній. Отримано результати, коли під час навчання спочатку сили зв'язку збільшуються, а за рахунок гомеостатичної пластичності зменшуються подібно до результатів, отриманих у праці [17]. Проте в розгляданому випадку кінцеве значення сили зв'язку навченого патерну більше за початкове.

Стабілізаційний ефект виникає за різниці $w_s - w$ у рівнянні (2). Чим більша різниця, тобто чим далі система від стабільності, тим менший вплив хевівського члена, який відповідає за виникнення нестабільності.

Якщо врахувати гіпотезу, що спонтанна активність, симульована через розподіл Пуассона, дійсно має просторово часові кореляції [18], які відповідають попередньо навченим стимулам, тоді гомеостаз відновиться швидше і помітно не зменшиться період неактивності.

Застосовано лише один з багатьох механізмів стабільності. Для повної картини нейрони-інгібітори мусять бути додані в систему. Проте навіть застосоване просте правило гомеостатичної пластичності узгоджує значення ваг відповідно до вхідної активності і протидіє насиченню сили зв'язків до граничних значень $(0, w_{\max})$, а головне — зберігає навчений патерн.

ВПЛИВ АКТИВАЦІЇ КІЛЬКОХ ПАТЕРНІВ

Досліджено поведінку моделі у випадку активації кількох патернів, передусім, чи збережеться сила зв'язків до кількох патернів за гомеостатичної регуляції і чи буде виділятися частий стимул. Використано 5 різних патернів, кожен з яких активує 10–15 нейронів, Один патерн використовувався частіше від інших.

На рис. 5, *a* показано залежність змінних від часу, на рис. 5, *б* — залежність w_s від t , великі стрілки вказують на частий патерн, малі стрілки — на інші менш часті патерни. Частіший патерн отримав найбільший приріст сил зв'язку, як і очікувано; збережено й інші патерни, хоча і з меншим значенням сили зв'язку. Таким чином, нейрон навчається на більш статистично вагомій стимулі, тим самим реалізуючи простий варіант навчання без учителя.

Процедура масштабування ваг згідно з виразом (3) подібна до нормалізації ваг $|w| = (\sum_i w_i^p)^{1/p} = 1$, що використовується в правилі Оджі [19]. Тому така модель імовірно також виділяє принципові компоненти з вхідного стимулу, проте для підтвердження потрібні додаткові дослідження.

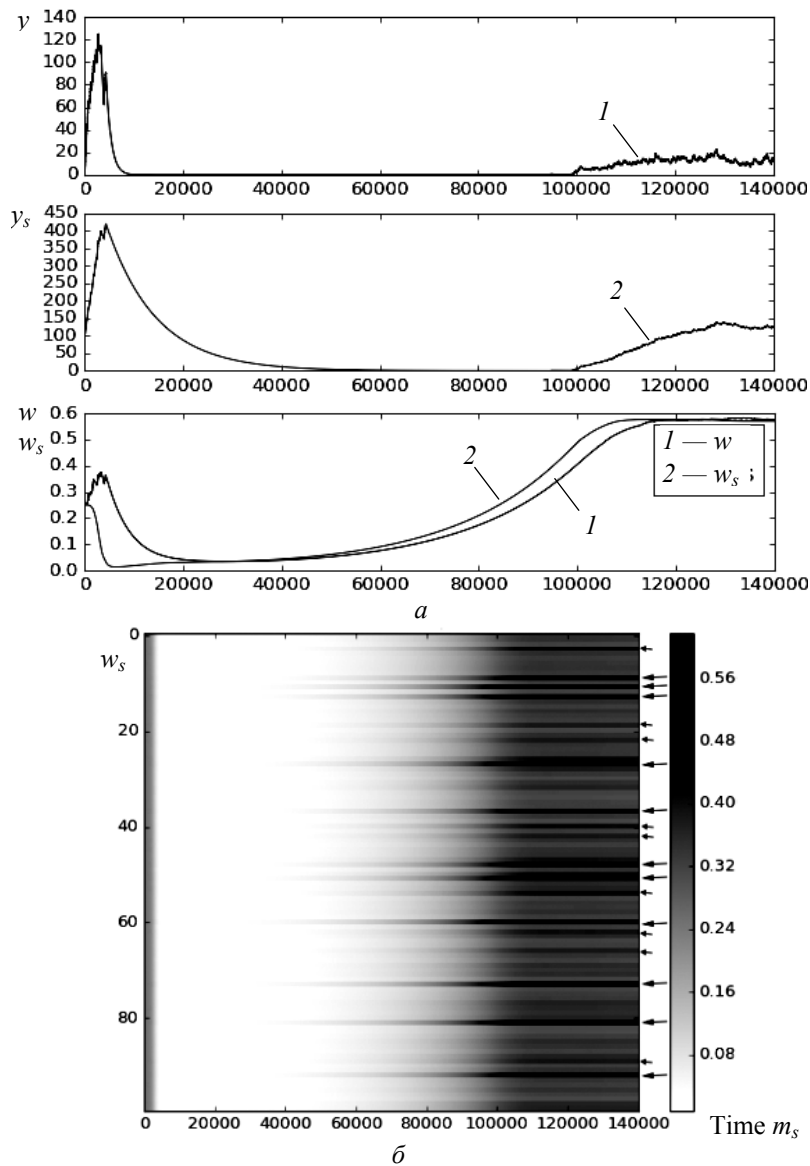


Рис. 5. Поведінка моделі за активації кількох патернів

ДОСЛІДЖЕННЯ НАВЧАННЯ З ПІДКРІПЛЕННЯМ

В обчислювальному експерименті на мережу також подавалися кілька патернів, і їх комбінували із сигналом підкріплення (рис. 6).

Загалом використано три патерни і останній з них підкріплено. На рис. 6 зірочка вказує на час надходження сигналу підкріплення. Підкріпленний патерн має значно більші значення синаптичних ваг порівняно з попередніми патернами.

Два патерни подавалися на початку експерименту протягом 5 с роботи мережі, далі в момент часу 9,8 с — третій патерн і через 0,3 с — сигнал підкріплення. Відповідно до моделі повільна змінна зростає до швидкої, у результаті чого відбулося швидке навчання. Якщо у випадку навчання без учителя потрібно було подавати велику кількість раз потрібний патерн, щоб

нейрон вважав його важливим і навчився до певного рівня, то в разі навчання з підкріпленням одного разу достатньо, щоб відбулося значне перерозподілення ваг.

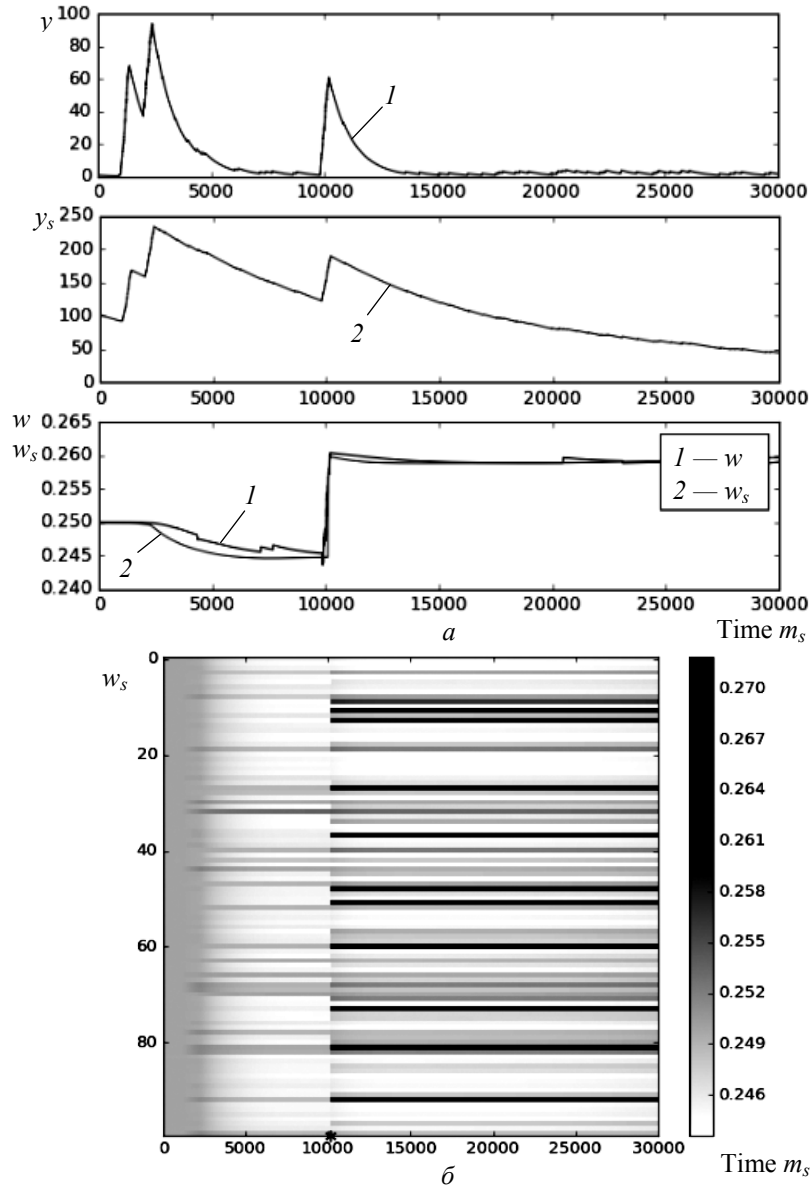


Рис. 6. Дослідження підкріплення ваг зв'язків

ВИСНОВКИ

Основна відмінність запропонованої моделі полягає у використанні двох змінних для опису сили зв'язку. Через взаємодію змінних удалось зручно впровадити навчання з підкріпленням зі збереженням навчання без учителя. Оскільки змінні мають різні часові масштаби, швидка змінна реагує на вхідний стимул, а повільна з часом консолідується, що, у свою чергу, стабілізує зв'язок.

Симуляцією моделі на простій нейронній мережі показано здатність до вивчення активного патерну, збереження сили зв'язку у випадку багатьох

вхідних патернів, а також здатність до стабілізації зв'язків для підтримання заданого рівня активації нейрона. Показано здатність моделі до швидкого навчання через сигнал підкріплення.

У роботі обрано сталу часу швидкої змінної w порядку 1 с, тому вона відслідковувала попередню активність і використовувалась для навчання з підкріпленням. Проте, якщо часова константа становила десятки хвилин, то швидку змінну можна інтерпретувати як опис ранньої фази довготермінової пластичності, а повільну — як консолідацію сили зв'язку. Тут сигналом підкріплення може бути висока активність вихідного нейрона, який генерує пачки спайків, і тоді швидка консолідація співвідноситься з експериментами у межах гіпотези синаптичної мітки і закріплення [20].

Пропонована модель подібна до загального підходу до навчання з підкріпленням на спайкових нейронних мережах – допоміжні сліди [5]. У таких моделях уводиться допоміжна змінна, яка відслідковує активність і в разі потреби підкріплює зв'язок. Проте в запропонованому підході швидка змінна відіграє роль сили зв'язку і може слугувати формою короткострокової пам'яті, яка впливає на активацію нейрона.

Модель має цікаву можливу біологічну інтерпретацію. Після активації синапсу в постсинаптичний нейрон входять іони Ca^{2+} , які активують регуляторні протеїни, такі як СаМКІІ та РКА, які, у свою чергу, спричиняють швидке переміщення *AMPA* рецепторів зі внутрішніх сховищ на поверхню мембрани [21], [22]. Активація протеїнів спадає протягом однієї хвилини [23] і нестійкі *AMPA* рецептори інтерналізуються назад у клітину. Якщо прийняти гіпотезу про те, що *AMPA* рецептори формують стабільний кластер на поверхні мембрани [24], то зміну повільної змінної можна інтерпретувати як випадкове включення (виключення) рецепторів у кластер. Із надходженням сигналу підкріплення активуються дофамінові рецептори, які запускають невідомі молекулярні механізми, які закріплюють вільні *AMPA* рецептори в кластери, тим самим збільшуючи силу зв'язку. Тому модель може мати біологічну основу, де w_s відповідає розміру шипика і молекулярній машинерії, що підтримує його стан, і w відповідає кількості та ефективності *AMPA* рецепторів.

Основу роботи нейрона становить множина механізмів пластичності, що забезпечують навчання просторово-часових стимулів і в результаті кооперації з іншими нейронами формується пам'ять складних вхідних стимулів. Усі необхідні механізми об'єднуються в єдину модель лише на початку розвитку адекватних моделей, але вже отримано цікаві результати [13]. Навчання без учителя і навчання з підкріпленням разом з механізмами стабільності, реалізовані у спайковій нейронній мережі, мають перспективи щодо ефективного оброблення інформації і подальшого вдосконалення адаптивних роботів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Maass W. Networks of spiking neurons: The third generation of neural network models // *Neural Networks*. — Vol. 10, N. 9. — 1997. — P. 1659–1671.
2. Zenke F. Synaptic Plasticity in Neural Networks Needs Homeostasis with a Fast Rate Detector / F. Zenke, G. Hennequin, W. Gerstner // *PLoS Comput. Biol.* — 2013. — Vol. 9, N 11. e1003330, 11 p.
3. Fauth M. Opposing Effects of Neuronal Activity on Structural Plasticity / M. Fauth, C. Tetzlaff // *Front. Neuroanat.* — Vol. 10, N June. — 2016. — P. 1–18.
4. Brea J. Does computational neuroscience need new synaptic learning paradigms? / J. Brea and W. Gerstner // *Curr. Opin. Behav. Sci.* — 2016. — P. 1–6.

5. *Frémaux N.* Neuromodulated Spike-Timing-Dependent Plasticity and Theory of Three-Factor Learning Rules / N. Frémaux and W. Gerstner // *Front. Neural Circuits.* — Vol. 9, N. 85. — 2016. — 85 p.
6. *Відибіда О.К.* Вихідний потік інтегруючого нейрона з втратами / О.К. Відибіда // *arXiv:1501.04874 [q-bio.NC].* — 2015. — 11 p.
7. (<https://github.com/hronoses/ProjectOne>)
8. *He K.* Distinct Eligibility Traces for LTP and LTD in Cortical Synapses / K. He, M. Huertas, S. Z. Hong, X. Tie, J. W. Hell, H. Shouval, and A. Kirkwood // *Neuron.* — Vol. 88, N 3. — 2015. — P. 528–538.
9. *Abbott L.F.* Synaptic plasticity: taming the beast / L.F. Abbott, S.B. Nelson // *Nat. Neurosci.* — Vol. 3, N November. — 2000. — P. 1178–1183.
10. *Chistiakova M.* Heterosynaptic Plasticity: Multiple Mechanisms and Multiple Roles // M. Chistiakova, N.M. Bannon, M. Bazhenov and M. Volgushev // *Neurosci.* — Vol. 20, N. 5. — 2014. — P. 483–498.
11. *Turrigiano G.G.* Homeostatic plasticity in the developing nervous system / G.G.Turrigiano, S.B. Nelson // *Nat. Rev. Neurosci.* — 2004. — Vol. 5. — P. 97–107.
12. *Ibata K.* Rapid Synaptic Scaling Induced by Changes in Postsynaptic Firing / K. Ibata, Q. Sun, G.G. Turrigiano // *Neuron.* — Vol. 57, N. 6. — 2008. — P. 819–826.
13. *Zenke F.* Diverse synaptic plasticity mechanisms orchestrated to form and retrieve memories in spiking neural networks / F. Zenke, E.J. Agnes, W. Gerstner // *Nat. Commun.* — Vol. 6. — 2015. — P. 6922.
14. *Nadel L.* Memory formation, consolidation and transformation / L. Nadel, A. Hupbach, R. Gomez, K. Newman-Smith // *Neurosci. Biobehav. Rev.* — Vol. 36, N 7. — 2012. — P. 1640–1645.
15. *Pfister J.-P.* Triplets of Spikes in a Model of Spike Timing-Dependent Plasticity / J.-P. Pfister, W. Gerstner // *J. Neurosci.* — Vol. 26, N 38. — 2006. — P. 9673–9682.
16. *Gjorgjieva J.* A triplet spike-timing-dependent plasticity model generalizes the Bienenstock-Cooper-Munro rule to higher-order spatiotemporal correlations / J. Gjorgjieva, C. Clopath, J. Audet, J.-P. Pfister // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* — Vol. 108, N 48. — 2011. — P. 19383–8.
17. *Yeung L.C.* Synaptic homeostasis and input selectivity follow from a calcium-dependent plasticity model / L.C. Yeung, H.Z. Shouval, B.S. Blais, L.N. Cooper // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* — Vol. 101, N 41. — 2004. — P. 14943–8.
18. *Leighton A.H.* The Wiring of Developing Sensory Circuits: From Patterned Spontaneous Activity to Synaptic Plasticity Mechanisms / A.H. Leighton, C. Lohmann // *Front. Neural Circuits.* — Vol. 10, N September. — 2016. — P. 1–13.
19. *Oja E.* A simplified neuron model as a principal component analyzer / Oja E. // *J. Math. Biol.* — Vol. 15, N 3. — 1982. — P. 267–273.
20. *Redondo R.L.* Making memories last: the synaptic tagging and capture hypothesis / R.L. Redondo, R.G.M. Morris // *Nat. Rev. Neurosci.* — Vol. 12, N 1. — 2011. — P. 17–30.
21. *Song I.* Regulation of AMPA receptors during synaptic plasticity / I. Song, R.L. Huganir // *Trends Neurosci.* — Vol. 25, N 11. — 2002. — P. 578–588.
22. *Esteban J.A.* PKA phosphorylation of AMPA receptor subunits controls synaptic trafficking underlying plasticity / J.A. Esteban, S.-H. Shi, C. Wilson, M. Nuriya, R.L. Huganir, R. Malinow // *Nat. Neurosci.* — Vol. 6, N 2. — 2003. — P. 136–143.
23. *Lee S.-J.R.* Activation of CaMKII in single dendritic spines during long-term potentiation / S.-J.R. Lee, Y. Escobedo-Lozoya, E.M. Szatmari, R. Yasuda // *Nature.* — Vol. 458, N 7236. — 2009. — P. 299–304.
24. *Shouval H.Z.* Clusters of interacting receptors can stabilize synaptic efficacies / H.Z. Shouval // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* — Vol. 102, N 40. — 2005. — P. 14440–14445.

Надійшло 22.12.2016

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І
МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS
AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS

УДК 517.938

Системный подход к решению прямых и обратных задач в системах с хаосом / Данилов В.Я., Зинченко А.Ю., Данилов В.Я. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 7–18.

Предложен системный подход к эффективному применению средств математического и компьютерного моделирования динамических систем для решения проблем исследования детерминированного хаоса в сложных нелинейных системах и связанных с ними обратных задачах. Решена научно-техническая задача усовершенствования математического моделирования путем улучшения существующих методологий исследования детерминированного хаоса и разработки новых математических моделей на основе специализации существующих. Предложены схемы исследования прямых (исследование динамических режимов поведения нелинейных систем в зависимости от бифуркационных параметров) и обратных (реконструкции математических моделей) задач детерминированного хаоса в сложных нелинейных системах. Экспериментальные исследования приведены для скалярных реализаций нелинейных систем Ю.-Ш. Чена и Ресслера. Для последней найдена эквивалентная модель. Рис.: 11. Табл.: 2. Библиогр.: 7 назв.

UDC 517.938

System approach of solving direct and reverse tasks in systems with chaos / Danylov V.Ya., Zinchenko A.Yu., Danilov V.Ya. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 7–18.

In this paper, the systematic approach to the effective application of mathematical and computer modeling of dynamic systems is proposed for solving the problems of deterministic chaos research in complex nonlinear systems and related inverse problems. The scientific and technical task of enhancing mathematical modeling by improving existing methodologies of investigation of the deterministic chaos and by developing new mathematical models, based on the specialization of existing ones, is solved. To solve the problem, we suggested investigation schemes of direct (research modes of behavior depending on the bifurcation parameters) and inverse (reconstruction of mathematical models) tasks of the deterministic chaos in complex non-linear systems. Experimental studies are presented for scalar implementations of YU.-SH. Chen and Roessler nonlinear systems. For the last one, the equivalent model was constructed. Fig.: 11. Tabl.: 2. Refs.: 7 titles.

УДК 519.812.3 + 519.722

Математическая модель ситуационного синтеза автоматизированной системы сбора и обработки информации от технических средств мониторинга / Писарчук А.А., Гуменюк М.А., Тимчук С.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 19–28.

Рассмотрена проблема повышения эффективности функционирования автоматизированной системы сбора и обработки информации от технических средств мониторинга. Как возможный вариант решения проблемы предложено применение ситуационного синтеза системы. Сформулированы частные критерии оптимальности структуры автоматизированной системы сбора и обработки информации. На основе дискретной свертки частных критериев разработана математическая модель ситуационного синтеза системы. Для определения необходимого количества технических средств мониторинга был применен энтропийный подход. Произведено деление технических средств мониторинга на классы и оценку информативности каж-

дого класса. Применение разработанной комплексной математической модели ситуационного синтеза позволяет оптимально по заданным показателям выбрать технические средства мониторинга, которые будут привлекаться к исполнению текущего задания системы. Рис.: 1. Табл.: 3. Библиогр.: 18 назв.

UDC 519.812.3 + 519.722

Mathematical model of situational synthesis automated system for collecting and processing information from the technical means of monitoring / Pysarchuk O.O., Humeniuk M.O., Tymchuk S.V. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 19–28.

The problem was considered of increasing the efficiency of the automated system for collecting and processing information from the technical means of monitoring. The usage of situational synthesis system was proposed as a possible solution to this problem. Particular criteria of the optimal structure of the automated system for collecting and processing information were formulated. On the basis of the discrete convolution of partial criteria, a mathematical model of the situational synthesis system was developed. The entropy approach was applied to determine the necessary amount of technical means for monitoring. Technical means of monitoring were divided into classes and the informational content for each class was evaluated. The application of the complex mathematical model of the situational synthesis using given indicators allows to optimally choose means of monitoring that will be involved in the execution of the current job of the system. Fig.: 1. Tabl.: 3. Refs.: 18 titles.

УДК 62.50

Автоматизація керування імпульсними процесами в когнітивних картах з придушенням обмежених збурень на основі методу інваріантних еліпсоїдів / Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 29–39.

Досліджено застосування методу інваріантних еліпсоїдів для придушення обмежених збурень за часткового керування динамічними процесами у складних системах різної природи, поданими математичними моделями імпульсних процесів у когнітивних картах (КК). Під час розроблення алгоритму придушення обмежених збурень застосовано інструментарій лінійних матричних нерівностей. Модель динаміки імпульсних процесів КК поділяється на дві взаємопов'язані системи різнице-вих рівнянь відповідно до вимірюваних та невимірюваних координат вершин КК. При цьому зміни невимірюваних координат враховуються як обмежені збурення у першій системі рівнянь моделі КК для імпульсних процесів з вимірюваними координатами. Рис.: 5. Бібліогр.: 9 назв.

UDC 62.50

Control automation of impulse processes in cognitive maps with constrained disturbance suppression based on invariant ellipsoids method / Romanenko V.D., Milyavsky Y.L. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 29–39.

An application of the invariant ellipsoids method to suppress constrained disturbances by means of the incomplete control of dynamic processes in complex systems of different nature, represented by mathematical models of impulse processes in cognitive maps (CM), is investigated. When developing the algorithm for suppressing constrained disturbances, linear matrix inequalities are applied. The dynamics model of CM impulse processes is split into two interrelated systems of difference equations with measurable and unmeasurable coordinates of CM vertices, respectively. Changes in unmeasurable coordinates are considered as constrained disturbances in the first system of equations for CM impulse processes with measurable coordinates. Fig.: 5. Refs.: 9 titles.

УДК 004.932.2

Технология определения ключевых точек на основе стабильных границ объектов / Гарашенко Ф.Г., Кобзар А.Ю. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 40–51.

Представлено ефективну технологію виділення ключевих точок на базі границь об'єктів. Приведено описання програмного забезпечення для синтезу експериментальних даних і процесу перевірки результатів роботи різних методів виділення. Створено алгоритм з максимально стабільним результатом і максимальним швидким ефектом, який можна використовувати в режимі реального часу. Завдяки високій стійкості запропонованої технології досягається більш ефективна робота алгоритмів реєстрації на наступних етапах. Рис.: 5. Бібліогр.: 12 назв.

UDC 004.932.2

A technology for feature points detection based on stable edges of objects / Harashchenko F.H., Kobzar A.Yu. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 40–51.

An efficient technology for detection of feature points based on the edges of objects is introduced. The description of software for experimental data synthesis and checking the outcomes of different methods of detection is included. An algorithm achieving the most stable outcomes and real-time performance has been created. Due to high repeatability of the suggested technology, more efficient performance of registration algorithms in general is achieved. Fig.: 5. Refs.: 12 titles.

УДК 519.246.8

Системний підхід к моделюванню і прогнозуванню на основі регресійних моделей і фільтра Калмана / Шубенкова І.А., Петрова С.К., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 52–61.

Предложена концепция адаптивного моделирования финансово-экономических процессов, основанная на одновременном использовании регрессионных моделей и оптимального фильтра Калмана для уменьшения влияния случайных возмущений и погрешностей измерений на статистические данные. Создано программное обеспечение, необходимое для проведения вычислительных экспериментов. Для выбранных финансово-экономических процессов построены несколько регрессионных моделей, которые дополнительно были преобразованы в пространство состояний. Проверка разработанной системы прогнозирования на различных выборках финансовых и экономических данных показала, что можно достигнуть приемлемых значений средней абсолютной погрешности в процентах (около 5–8%) для краткосрочных прогнозов. В зависимости от конкретной постановки задачи использовались динамические и статические оценки прогнозов, которые дали возможность получить необходимую точность оценок. Использование фильтра Калмана для предварительной обработки данных (уменьшения влияния случайных возмущений и шумов измерений) и краткосрочного прогнозирования дает возможность дополнительно уменьшить погрешности оценок прогнозов в среднем на 1,5–2%. В дальнейшем планируется создать специализированную систему поддержки принятия решений для решения задач прогнозирования на основе вероятностно-статистических методов. Рис.: 2. Табл.: 5. Библіогр.: 5 назв.

UDC 519.246.8

Systemic approach to modeling and forecasting on the basis of regression models and Kalman filter / Shubenkova I.A., Petrova S.K., Bidyuk P.I. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 52–61.

A concept for adaptive modeling of financial and economic processes is proposed that is based upon simultaneous application of regression models and optimal Kalman filter for reducing the influence of stochastic disturbances and measurement errors on statistical data. Specialized software has been developed that is necessary for performing computational experiments. Several regression models were constructed for the selected financial and economic processes that were transformed to the state space representation. Testing of the software system developed using various data samples of financial and economic data showed that it was quite possible to reach an acceptable quality of short-term forecasting with the mean absolute percentage error of about 5–8 %. Depending on a specific problem statement, dynamic and static estimates of forecasts were used with an acceptable quality. An application of Kalman filter for preliminary data processing (reduction of the influence of external stochastic disturbances and measurement errors) and short term forecasting provides a possibility for further reduction of forecasting errors by about 1,5–2,0 %. In the future research, it is planned to develop a specialized decision support system for solving the problems of forecasting on the basis of probabilistic and statistical procedures. Fig.: 2. Tabl.: 5. Refs.: 5 titles.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL
AND SOCIAL SYSTEMS

УДК 519.004.942

Аналіз вибуху ядерного реактора Чорнобильської АЕС у квітні 1986 р. за допомогою тензорних рівнянь / Мацукі Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 62–67.

Проаналізовано процес вибуху активної зони ядерного реактора на Чорнобильській атомній електростанції у квітні 1986 р. за допомогою тензорних рівнянь, які демонструють рух вектора в тривимірних координатах кривої часу, потоку води та пустоти. Рівняння показують, що цей вектор рухається вздовж геодезичної прямої у координатах кривої, яка описується фундаментальним тензором ($g_{\mu\nu}$), символом Крістоффеля ($\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$) і тензором Річчі ($R_{\mu\nu}$), де μ , ν , σ , α — індекси, які позначають координати. Розв'язання тензорних рівнянь показує, що геодезична пряма вектора має сингулярну точку, яка описує точку обертання активної зони ядерного реактора від нормального функціонування до вибуху. Бібліогр.: 4 назв.

УДК 519.004.942

Анализ взрыва ядерного реактора Чернобыльской АЭС в апреле 1986 г. при помощи тензорных уравнений / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 62–67.

Проанализирован процесс взрыва активной зоны ядерного реактора на Чернобыльской атомной электростанции в апреле 1986 г. при помощи тензорных уравнений, которые демонстрируют движение вектора в трехмерных координатах кривой времени, потока воды и пустоты. Уравнения показывают, что этот вектор движется вдоль геодезической прямой в координатах кривой, которая описывается фундаментальным тензором ($g_{\mu\nu}$), символом Кристоффеля ($\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$) и тензором Риччи ($R_{\mu\nu}$), где μ , ν , σ , α — индексы, обозначающие координаты. Решение тензорных уравнений показывает, что геодезическая прямая вектора имеет сингулярную точку, которая описывает точку вращения активной зоны ядерного реактора от нормального функционирования до взрыва. Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.713: 631.411.6

Інформаційно-алгоритмічна підтримка комплексної оцінки екологічності системних об'єктів / Козуля Т.В., Емельянова Д.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 68–76.

Обоснована целесообразность применения комплексного подхода к разработке методического обеспечения оценки качества и безопасности системных объектов с позиций устойчивого развития. Определена необходимость применения показателей комплексной оценки экологичности на основе MIPS-анализа и риск-характеристик состояния сложных систем с целью повышения качества принятия объективных решений по снижению степени опасности в экологическом аспекте. Алгоритмическое обеспечение разработано для практической реализации методики комплексной оценки экологичности системных объектов с учетом связи между их состоянием и процессами внутренней самоорганизации и внешнего взаимодействия с окружающей средой. Табл.: 2. Рис.: 2. Библиогр.: 22 назв.

UDC 519.713: 631.411.6

Information-algorithmic support for complex ecological assessment of system objects / Kozulia T.V., Emelianova D.I. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 68–76.

In this work, the rationality is justified for using the complex approach for methodical support development for assessing the system objects' quality and safety from the sustainable development position. The necessity was determined for applying the complex ecological assessment indicators based on the MIPS-analysis and complex systems risk characteristics for the purpose of increasing the quality of effective decision-making for risk reduction related to the environment. The algorithmic support is designed for the practical methodology implementation for assessing the complex ecological system objects state while taking into account the relationship between the state and the processes of the internal self-organization and external communication with the environment. Fig.: 2. Tabl.: 2. Refs.: 22 titles.

УДК 519.86

О динамике открытой экономической системы при наличии монополистов и финансовых обязательств / Махорт А.Ф. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 77–91.

Исследовано равновесие открытой экономической системы, состоящей из насыщаемых потребителей товаров. Часть потребителей получает финансовые поступления за счет собственного производства, остальные потребители финансируются из внешних источников. Рассмотрено равновесие вальрасового типа. Модель экономики учитывает наличие монополистов среди производителей и финансовых обязательств у субъектов экономической системы. Финансовые обязательства приводят к перераспределению капитала в экономической системе. Формирование потребительских предпочтений зависит от финансовых обязательств. Для такой экономической системы определены условия существования равновесия. Указаны значения характеристик состояния равновесия, приемлемого для всех субъектов экономической системы по уровням потребления. Определены объемы перераспределения капитала, при которых уровни потребления будут находиться в заданной области значений. По эволюции финансовых обязательств предложено описание динамики экономической системы. Библиогр.: 7 назв.

UDC 519.86

On dynamics of an open economy under presence of monopolies and financial obligations / Makhort A.Ph. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 77–91.

An investigation was conducted of an open economy consisting of insatiable consumers. Some consumers can produce own goods to gain a profit while other consumers obtain an external support. The equilibrium is of a Walrassian type. The model takes into account an economy with monopolies and financial obligations of its subjects. The financial obligations lead to the capital redistribution between subjects of the

economy. A formation of consumers' preferences depends on the financial obligations. There exists an equilibrium of such an economy. Obtained equilibrium values of model characteristics agree on an acceptable level of the consumption satisfaction of all economy subjects. The values of the capital redistribution are determined at which the levels of the consumption belong to the defined set of values. Based on the evolution of the financial obligations, the description of economy dynamics was proposed. Refs.: 7 titles.

ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНИ
КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ

PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED
COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS

УДК 519.8

Каскадні нейро-нечіткі мережі в задачах прогнозування на ринках цінних паперів / Зайченко Ю.П., Гамідов Галіб І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 92–102.

Розглянуто проблему прогнозування на ринках цінних паперів. Для її вирішення запропоновано застосування каскадних нео-фаззі нейронних мереж (CNFNN). Розглянуто архітектуру нео-фаззі нейрона та CNFNN. Описано алгоритми навчання нео-фаззі нейронної мережі в пакетному і он-лайнному режимі. Проведено експериментальні дослідження CNFNN в задачі прогнозування біржових індексів на ринку цінних паперів ФРН. У процесі експериментів варіювалась кількість каскадів, входів мережі, число значень лінгвістичних змінних, співвідношення обсягів навчальної та перевіркової вибірок. У результаті експериментів знайдено оптимальні значення параметрів для розглянутої задачі. Проведено порівняльні експерименти з оцінювання ефективності прогнозування CNFNN та нечіткої нейронної мережі ANFIS. Рис.: 8. Табл.: 5. Бібліогр.: 4 назв.

UDC 519.8

Cascade neo-fuzzy neural network in the forecasting problem at stock exchange / Zaychenko Yu.P., Hamidov Galib I. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 92–102.

A forecasting problem at the stock exchange is considered. For its solution the application of a cascade neo-fuzzy neural network (CNFNN) is suggested. The architecture of the neo-fuzzy neuron and architecture of CNFNN is presented. Training algorithms of CNFNN in packet mode and on-line are described and discussed. The experimental investigations of CNFNN for market index forecasting at the German stock exchange are carried out. During experiments, the number of cascades, inputs, linguistic terms, and the training-to-test ratio of samples were varied. In the experiments, the optimal values of the aforesaid parameters of the training algorithm were found. The comparative experiments estimating forecasting efficiency of the cascade neo-fuzzy neural network and FNN ANFIS were carried out. Fig.: 8. Tabl.: 5. Refs.: 4 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 519.21

О существовании решения задачи Коши для нелинейного диффузионного стохастического дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа в частных производных с учетом случайных внешних возмущений / Ясинский В.К., Юрченко И.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 103–114.

Рассмотрены вопросы существования решения задачи Коши в классе нелинейных диффузных стохастических дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа в частных производных с учетом случайных внешних возмущений, независимых от винеровского процесса. Получены достаточные условия на коэффи-

циенты нелинейного диффузионного стохастического дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа (НДСДРУНТ), которые гарантируют существование с вероятностью единица его решения. Методика доказательства базируется на результатах А.Н. Станжицкого и А.А. Цукановой о существовании и единственности решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа. Доказано существование «мягкого решения» НДСДРУНТ. В отдельных случаях подобные уравнения являются математическими моделями реальных процессов, которые предполагается рассматривать в дальнейших работах. Библ.: 12 назв.

UDC 519.21

On existence of solution of the Cauchy problem for nonlinear diffusion stochastic partial differential-difference equations of neutral type with random external perturbations / Yasynsky V.K., Yurchenko I.V. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 103–114.

The question related to the existence of the Cauchy problem solution in the class of nonlinear diffusion stochastic partial differential-difference equations of a neutral type with random external disturbances which are independent from the Wiener process is considered. Sufficient conditions are obtained for the diffusion coefficients of nonlinear stochastic differential-difference equations of a neutral type (NDSDRRNT) that guarantee the existence of the solution with the probability of 1. The method of the proof is based on the results of O.M. Stanzhitsky and A.O. Tsukanova on the existence and uniqueness of the Cauchy problem solution for the stochastic differential reaction-diffusion equation of a neutral type. In this paper, we prove the existence of a “mild solution” of NDSDRRNT. In some cases, such equations are mathematical models of real processes, the consideration of which is planned in the future work. Refs.: 12 titles.

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ
СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ
І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND
CONTROL IN CONDITIONS OF RISK
AND UNCERTAINTY CONDITIONS

УДК 519.226

Методика выбора математической модели экологического процесса / Микунин В.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 115–129.

В XXI ст. поиск подходов к решению экологических проблем обусловлен угрозами существования окружающей среды в результате осуществления различных видов деятельности и бездеятельности человека. Более половины земной поверхности изменено человеком. Эта модификация называется изменением в землепользовании. Нелинейности в изменениях в землепользовании можно изучать с помощью инструментов интеллектуального анализа данных. Предложено рассматривать более подробно три модели для изменений землепользования: искусственные нейронные сети, методы классификации и регрессии с помощью построения дерева решений и многомерные адаптивные регрессионные сплайны. Сравниваются результаты трех инструментов интеллектуального анализа данных. Рис.: 3. Табл.: 3. Библиогр.: 10 назв.

UDC 519.226

Method of choosing an environmental mathematical model / Mikulin V.V. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 115–129.

In the twenty-first century, the search for approaches to solving environmental problems is caused by the threat to the environment as a result of a variety of human activities, or lack thereof. More than half of the Earth's surface has been altered by people. This modification is called the change of land use. The nonlinearities in changes of land use can be studied with the help of data mining tools. It is proposed to consider the three

models for the change of land use: artificial neural networks, methods for solving problems of classification and regression method of building decision trees, and multidimensional adaptive regression splines. Further studies compared the results of three data mining tools. Fig.: 3. Tabl.: 3. Refs.: 10 titles.

УДК 004.942

Двумерная модель обучения в спайковых нейронных сетях с гомеостазом и обучением с подкреплением / Осауленко В.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 130–140.

Сложность молекулярных механизмов, которые поддерживают формирование памяти, затрудняет построение простых, но точных и исчерпывающих моделей для эффективного моделирования больших нейронных сетей. Предложена феноменологическая модель правила обучения, описывающая силу связи нейронов посредством медленной и быстрой переменных. Их взаимодействие позволяет сочетать обучение с подкреплением и обучение без учителя. Результаты показывают стабильность силы связи за счет сочетания двух переменных и быстрой гомеостатической пластичности. Мультипликативный способ масштабирования весов сохраняет паттерны памяти статистически более частых входных сигналов. Схожим образом к подходу дополнительных следов модель отслеживает последние изменения весов и позволяет их усилить. Приведены соображения о возможной биофизической интерпретации модели, которая включает в себя быстрое перемещение рецепторов к мембране и стабилизации их в кластеры. Рис.: 6. Библиогр.: 24 назв.

UDC 004.942

Two dimensional model of learning in spiking neural networks with homeostasis and reward / Osaulenko V.M. // System Research and Informational Technologies. — 2017. — № 2. — P. 130–140.

The huge complexity of molecular mechanisms that support memory formation makes it difficult to build simple, but precise and sufficient models for an efficient simulation of large neural networks. In this paper, we propose the phenomenological model of a learning rule that describes the synaptic strength via slow and fast variables. Two variables interact with each other in a bidirectional manner that allows to combine the reward and unsupervised learning. Results show the stability of synaptic strength due to coupling of two variables and fast homeostatic plasticity. The multiplicative approach of synaptic scaling preserves memory patterns of statistically more frequent input signals. Similar to the eligibility traces approach, the model tracks recent synaptic changes and allows to reinforce these changes. Also, we speculate on a possible biophysical interpretation of such a model that includes the fast movement of receptors to the membrane and their stabilization into clusters. Fig.: 6. Refs.: 24 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Гамідов Галіб І.,

доктор філософських наук (PhD), директор департаменту інформаційних технологій Азербайджаненерго, Азербайджан, Баку

Гарашенко Федір Георгійович,

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Гуменюк Максим Олексійович,

кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник Наукового центру Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова, Україна, Житомир

Данилов Валерій Якович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Данілов Володимир Якович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Ємельянова Дар'я Ігорівна,

аспірантка кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Зайченко Юрій Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зінченко Артем Юрійович,

кандидат технічних наук, асистент кафедри програмних систем і технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Кобзар Андрій Юрійович,

кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Козуля Тетяна Володимирівна,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерного моніторингу і логістики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Україна, Харків

Махорт Андрій Пилипович,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник лабораторії математичного моделювання відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

Мацукі Йошіо,

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Україна, Київ

Мікулін Віктор Вікторович,

аспірант ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Мілявський Юрій Леонідович,

кандидат технічних наук, старший викладач кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Осауленко В'ячеслав Миколайович,

аспірант ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Петрова Світлана Костянтинівна,

студентка ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Писарчук Олексій Олександрович,

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова, Україна, Житомир

Романенко Віктор Демидович,

професор, доктор технічних наук, заступник директора з науково-педагогічної роботи ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Тимчук Сергій Віталійович,

ад'юнкт науково-організаційного відділу Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова, Україна, Житомир

Шубенкова Ірина Анатоліївна,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Юрченко Ігор Валерійович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри системного аналізу і страхової та фінансової математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Україна, Чернівці

Ясинський Володимир Кирилович,

професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри системного аналізу і страхової та фінансової математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Україна, Чернівці