

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС  
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

## СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 4

2017

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

**РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

**Головний редактор**

**М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ**, акад. НАН України

**Заступник головного редактора**

**Н.Д. ПАНКРАТОВА**, проф., д.т.н., Україна

**Члени редколегії:**

**П.І. АНДОН**, акад. НАН України

**А.В. АНІСІМОВ**, чл.-кор. НАН України

**Г.-В. ВЕБЕР**, проф., Турція

**О.Д. ГВІШАНИ**, акад. РАН, Росія

**П.О. КАСЬЯНОВ**, проф., д.ф.-м.н.,  
Україна

**В.М. КУНЦЕВИЧ**, акад. НАН України

**О.А. ПАВЛОВ**, проф., д.т.н., Україна

**Т.Л. СААТІ**, проф., США

**Л. САКАЛАУСКАС**, проф., Литва

**А.М. САЛЕМ**, проф., Єгипет

**І.В. СЕРГІЄНКО**, акад. НАН України

**Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ**, проф., Румунія

**Е.О. ФАЙНБЕРГ**, проф., США

**Я.С. ЯЦКІВ**, акад. НАН України

**АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:**

03056, м. Київ,  
просп. Перемоги, 37, корп. 35,  
ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського  
Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44  
E-mail: journal.iasa@gmail.com  
<http://journal.iasa.kpi.ua>

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних та соціальних системах**

• **Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX  
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»  
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE  
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

## SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 4

2017

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

### EDITORIAL BOARD:

#### The editor – in – chief

**M.Z. ZGUROVSKY,** Academician of  
NASU

#### Deputy editor – in – chief

**N.D. PANKRATOVA,** Prof., Ukraine

#### Associate editors:

**F.I. ANDON,** Academician of  
NASU

**A.V. ANISIMOV,** Correspondent  
member of NASU

**E.A. FEINBERG,** Prof., USA

**A.D. GVISHIANI,** Academician of RAS,  
Russia

**P.O. KASYANOV,** Prof., Ukraine

**V.M. KUNTSEVICH,** Academician of NASU

**A.A. PAVLOV,** Prof., Ukraine

**T.L. SAATY,** Prof., USA

**L. SAKALAUSKAS,** Prof., Lithuania

**A.M. SALEM,** Prof., Egypt

**I.V. SERGIENKO,** Academician of NASU

**H.-N. TEODORESKU,** Prof., Romania

**G.-W. WEBER,** Prof., Turkey

**Ya.S. YATSKIV,** Academician of NASU

#### THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,  
av. Peremogy, 37, building 35,  
Institute for Applied System Analysis  
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute  
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**  
E-mail: [journal.iasa@gmail.com](mailto:journal.iasa@gmail.com)  
<http://journal.iasa.kpi.ua>

### In the issue:

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Methods of optimization, optimum control and theory of games**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

## Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

### «СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

#### Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

**Головний редактор журналу** — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНТІ РАН, РІНЦ.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**  
Редактор **Р.М. Шульженко**  
Молодший редактор **Л.О. Тарин**  
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

---

Підписано до друку 15.12.2017. Формат 70x108/16.  
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.  
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

---

Видавництво «Політехніка»  
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.  
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15  
Тел. (044) 204-81-78  
Наклад 117 пр. Зам. № 16-163

**Dear Readers!**

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

**«SYSTEM RESEARCH AND  
INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

**The main thematic sections of the Journal are the following:**

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

**The editor-in-chief of the Journal** is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

# СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

4 • 2017

## ЗМІСТ

### ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

<i>Стефанішин Д.В.</i> Урахування ризику невикористаних можливостей під час обґрунтування оптимального сценарію введення нових агрегатів на гідроакумулювальних електростанціях в Україні .....	7
<i>Vedmedenko O.V., Nikolaiev S.S., Tymoshenko Y.A.</i> 3D-Model reconstruction with use of monocular RGB camera .....	20

### ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

<i>Меняйленко О.С., Захожай О.І., Бідюк П.І.</i> Підвищення достовірності перевірки унікальності текстів з використанням комбінованих систем розпізнавання образів .....	29
<i>Попович Б.М.</i> Прогнозирование нелинейных нестационарных процессов в экономике и финансах .....	38

### МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

<i>Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М.</i> Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації за невизначеностей .....	54
<i>Зайченко Е.Ю., Зайченко Ю.П., Ови Нафас Агаи аг Гамши.</i> Нахождение максимального взвешенного потока в компьютерных сетях нового поколения .....	66
<i>Пичугина О.С.</i> Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком .....	74
<i>Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П., Коряшкіна Е.О.</i> Интеграция ГИС-технологий и методов решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств .....	97

### МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

<i>Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т.</i> Адаптивна апроксимація сигналів з використанням методів псевдообернення .....	109
<i>Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л.</i> Приглушення обмежених збурень імпульсних процесів у когнітивних картах за допомогою теорії $H_\infty$ за неповних вимірювань координат вершин .....	119
<i>Моравецька К.В.</i> Конструкція поверхневих мір на поверхнях, укладених у ріманові багатовиди з рівномірною структурою .....	130
Реферати .....	139
Відомості про авторів .....	146
Зміст журналу «Системні дослідження та інформаційні технології» за 2017 р. ....	148
Автори статей за 2017 р. ....	150

# SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

4 • 2017

## CONTENTS

### PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

<i>Stefanyshyn D.V.</i> Considering the risk of unused opportunities when grounding the optimal scenario of commissioning of new units at pumped storage power plants in Ukraine .....	7
<i>Vedmedenko O.V., Nikolaiev S.S., Tymoshenko Y.A.</i> 3D-Model reconstruction with use of monocular RGB camera .....	20

### DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS

<i>Menyaylenko O.S., Zakhochai O.I., Bidyuk P.I.</i> Quality enhancement of testing texts uniqueness using combined image recognition system .....	29
<i>Popovych B.M.</i> Forecasting non-linear non-stationary processes in economics and finances .....	38

### METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM CONTROL AND THEORY OF GAMES

<i>Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk Yu. M.</i> Predictive estimation of mathematical models of information spreading process under uncertainty .....	54
<i>Zaychenko E. Yu., Zaychenko Yu.P., Ovi Nafas Aghaei agh Ghamish.</i> Determination of maximal weighting flow in new generation networks .....	66
<i>Pichugina O.S.</i> Optimization over the general signed permutation set of permutations .....	74
<i>Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P., Koriashkina E.O.</i> Integration of GIS-technologies and methods of solving continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets .....	97

### MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

<i>Garashchenko F.G., Matvienko V.T.</i> Adaptive approximation of signals using pseudoinversion methods .....	109
<i>Romanenko V.D., Milyavsky Yu.L.</i> Constrained disturbances suppression in cognitive maps' impulse processes based on $H_\infty$ -theory under incomplete measurements of vertices coordinates .....	119
<i>Moravetska K.V.</i> Measure construction on surfaces embedded into Riemann manifolds with uniform structure .....	130
References .....	139
Information about the authors .....	146
Contents of journal «System Research & Information technologies» over 2017 .....	148
Information about the authors over 2017 .....	150

**УРАХУВАННЯ РИЗИКУ НЕВИКОРИСТАНИХ  
МОЖЛИВОСТЕЙ ПІД ЧАС ОБҐРУНТУВАННЯ  
ОПТИМАЛЬНОГО СЦЕНАРІЮ ВВЕДЕННЯ НОВИХ  
АГРЕГАТИВ НА ГІДРОАКУМУЛЮВАЛЬНИХ  
ЕЛЕКТРОСТАНЦІЯХ В УКРАЇНІ**

**Д.В. СТЕФАНИШИН**

**Анотація.** Розглянуто завдання обґрунтування оптимального сценарію введення нових потужностей гідрогенерації на гідроакумуляційних електростанціях (ГАЕС) в Україні згідно з прийнятою урядом Програмою розвитку гідроенергетики на період до 2026 р., у якій передбачено добудову і прийняття в експлуатацію чергових агрегатів на Дністровській і Ташлицькій ГАЕС, а також будівництво Канівської ГАЕС. Запропоновано вирішення поставленого завдання на підставі попарного порівняння альтернатив за критерієм мінімального сукупного ризику з урахуванням ризику невикористаних можливостей, де як розрахункові характеристики, за якими формувалися складові сукупних ризиків альтернатив, приймалися енергетичні показники різних варіантів введення агрегатів та їх вартість. Показано принципову можливість вибору оптимального сценарію введення нових агрегатів на ГАЕС в Україні з меншим сукупним ризиком порівняно з іншими можливими сценаріями.

**Ключові слова:** альтернатива, гідроакумуляційна гідроелектростанція, оптимізація, попарне порівняння, прийняття рішень, ризик невикористаних можливостей, сукупний ризик, сценарій.

**ВСТУП**

На сучасному етапі розвитку електроенергетики гідроакумуляційні електростанції (ГАЕС) розглядаються як найбільш ефективні джерела регулювання навантажень в об'єднаних енергетичних системах (ОЕС) в контексті забезпечення стійкості, живучості, надійності і безпеки ОЕС, особливо в країнах з великою часткою теплової і, зокрема, атомної енергетики [1–3], до яких належить і Україна [1].

На відміну, наприклад, від гідроелектростанцій (ГЕС) або високоманеврених газотурбінних установок, ГАЕС поряд з регулюванням здатні забезпечувати ефективну акумуляцію надлишкової енергії (табл. 1) (частка ГАЕС становить понад 99% від ємності акумуляторів усіх типів [4]), здійснюючи таким чином подвійне регулювання потужності в ОЕС (табл. 2). Це стиму-

лює будівництво ГАЕС у світі, у тому числі і в тих країнах, у яких значна увага приділяється пришвидшеному розвитку нетрадиційних (альтернативних) технологій вироблення електроенергії, зокрема і тих, що використовують інші відновлювані джерела енергії (вітрові, геотермальні, сонячні електростанції тощо).

**Таблиця 1.** Коефіцієнт корисної дії (ККД) різних технологій акумуляції електроенергії [2]

Технологія акумуляції електроенергії	ККД, %
Літій-іонні акумулятори	90...95
Свинцево-кислотні акумулятори	80...90
<b>Гідроакумуляція (ГАЕС)</b>	<b>75...80</b>
Ванадієві відновно-окиснювальні акумулятори	~ 75
Нікель-кадмієві, нікелеві металогідридні акумулятори	70
Повітряно-компресорні акумулятори адіабатичної дії	< 70
Повітряно-компресорні акумулятори	42...54
Водневі акумулятори	< 40

**Таблиця 2.** Порівняльна характеристика маневрених якостей основних типів електростанцій [1]

Тип електростанцій	Технічний мінімум навантаження, % (відношення мінімальної допустимої потужності до встановленої)	Діапазон регулювання, %	Час набору повної потужності, хв	
			Після зупинки	Із «гарячого» стану
Атомні	85...90	10...15	390...660	60
Теплові (вугілля, мазут)	70...80	20...30	90...180	20...50
Газотурбінні	0	100	15...30	0,5
ГЕС	0	100	1...2	0,25...0,5
<b>ГАЕС</b>	<b>0</b>	<b>200</b>	<b>1...2</b>	<b>0,25...0,5</b>

На 2011 р. за даними праці [4] загальна потужність ГАЕС у світі досягла 127 ГВт. Найбільша частка встановленої потужності ГАЕС — у країнах Європейського союзу (ЄС), яка на 2009 р. складала 38,3 ГВт (36,8% від світової) при 140 ГВт загальної потужності від гідрогенерації і майже 5% від потужності всіх електростанцій ЄС [5].

У світі налічується понад 460 великих ГАЕС, 63 з яких мають установлену потужність у турбінному режимі 1000 МВт і більше, ще дев'ять — добудовуються. В Україні натепер працює три ГАЕС: Київська (234,5 МВт у турбінному режимі і 120 МВт — у насосному) — перша в Україні і на території країн бывшего СРСР, яку введено в експлуатацію ще в 1972 р. [6]; експлуатуються три агрегати на Дністровській (загальною потужністю в турбінному режимі 972 МВт і насосному — 1263 МВт) і два агрегати на Ташлицькій ГАЕС (302 МВт у турбінному режимі та 633 МВт — у насосному). Основними їх функціями є регулювання частоти і графіка навантажень в ОЕС країни, формування аварійного резерву електроенергії. У Програмі



розвитку гідроенергетики на період до 2026 р. [7], яку схвалено Кабінетом Міністрів України в липні 2016 р., розглядається добудова Дністровської ГАЕС з уведенням в експлуатацію ще чотирьох агрегатів, після чого вона має стати шостою за потужністю ГАЕС у світі (2268 МВт), добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням в експлуатацію чергових чотирьох агрегатів з доведенням її потужності в турбінному режимі до 906 МВт, а також будівництво Канівської ГАЕС з установленою потужністю в турбінному режимі 1000 МВт.

## **ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕНЬ, ЙОГО ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА МЕТА РОБОТИ**

Будівництво та експлуатація гідроенергетичних об'єктів, як показує практика, пов'язуються зі значним ризиком [8–11], детальний аналіз, адекватна кількісна оцінка і належне врахування якого під час прийняття рішень являє собою надзвичайно складну міждисциплінарну проблему [10, 12–16].

Усі можливі ризики будівництва і експлуатації ГЕО (ГЕС, ГАЕС) важко передбачити й ідентифікувати, адже і характер, і масштаб більшості впливів навколишнього середовища на об'єкти і об'єктів на довкілля, якісні і кількісні ефекти і наслідки, які так чи інакше реалізуються в майбутньому, тією чи іншою мірою є невизначеними або стохастичними. Можна стверджувати, що остаточного вирішення завдання аналізу, оцінювання і врахування всіх ризиків для кожного такого об'єкта незалежно від місця його розташування, складу гідроспоруд, їх параметрів, гідроенергетичних показників тощо досягнути неможливо, хоча б тому, що цілі різних природокористувачів, економічні і соціально-екологічні пріоритети суспільства, місцевих общин, а також техніко-економічні та екологічні критерії й обмеження постійно змінюються в часі.

Тому національні стратегії більшості країн світу щодо розвитку потенційно небезпечних технологій, до яких, безумовно, належить і гідроенергетика, в контексті забезпечення їх екологічної і техногенної безпеки, орієнтуються на концепцію прийнятних, а не «нульових» ризиків [10, 16, 17]. При цьому принципова неможливість досягнення «нульового» ризику може зумовлюватися і тим, що відмова від потенційно небезпечної діяльності (наприклад, від будівництва ГАЕС) теж може бути обтяжена ризиком — ризиком невикористаних (або ж утрачених) можливостей [18].

Іншою концепцією, на яку можна спиратися під час керування безпекою складних технічних систем і технологій з урахуванням ризику, є концепція розумно досяжного низького рівня ризику (risk as low as reasonably practicable) [16, 17] або ж раціонального ризику. Згідно з цією концепцією під час прийняття рішень на кожному етапі життєвого циклу об'єкта або технології мають відшуковуватися альтернативи, обтяжені меншими ризиками. Такий підхід дозволяє одночасно реалізовувати три принципи, які сприяють раціоналізації потенційно небезпечної діяльності: доцільності, оптимізації й адаптивізації (адаптивності) [10, 16, 17].

Урахування ризику під час прийняття рішень спрощується у випадку попарного порівняння альтернатив. Такий підхід, зокрема з урахуванням

ризикую невикористаних можливостей, уже використовувався [18] для порівняння варіантів розвитку гідроенергетики в Росії на перспективу до 2030 р. [18] та вибору оптимального варіанта подальшого розвитку Дніпровського каскаду ГЕС [19].

Загальну формалізацію завдання прийняття рішень з урахуванням ризику невикористаних можливостей на підставі попарного порівняння альтернатив наведено у праці [20], де сукупний (повний) ризик кожної з допустимих альтернатив визначається у вигляді лінійної комбінації можливих затрат та інших негативних ефектів і результатів  $l$ , пов'язаних з відповідним рішенням, та очікуваних позитивних ефектів і результатів (вигод, надбань, переваг)  $g$ , що можуть бути отримані у випадку альтернативного рішення, а задача багатокритеріальної оптимізації на зліченній множині допустимих альтернатив  $\mathbf{A} = \{a_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при їх попарному порівнянні, зводиться до такої задачі оптимізації:

$$d_{\text{opt}} = \{a_{i,\text{opt}} \mid a_{i,\text{opt}} \in \mathbf{A} \wedge r_{i,\text{opt}} = \min(r_{i,j}, r_{j,i}) \quad \forall (a_i, a_j)\}, \quad i, j = \overline{0, n}, \quad i \neq j, \quad (1)$$

де  $r_{i,j}$ ,  $r_{j,i}$  — повні ризики відповідно альтернативи  $a_i$  порівняно з  $a_j$  та  $a_j$  порівняно з  $a_i$ :  $r_{i,j} = l_i + g_i$ ,  $r_{j,i} = l_j + g_i$ , де  $l_i$ ,  $l_j$  і  $g_i$ ,  $g_j$  — значення відповідним чином нормованих згорток критеріїв, що мінімізуються та максимізуються, для альтернатив  $a_i$  і  $a_j$  відповідно, подані як власні ризики та ризики невикористаних можливостей альтернатив  $a_i$ ,  $a_j$  відповідно.

**Мета роботи** — презентація можливості раціонального обґрунтування оптимального сценарію введення нових агрегатів на ГАЕС в Україні, обтяженого меншим сукупним ризиком порівняно з іншими можливими сценаріями у випадку реалізації прийнятої Програми розвитку гідроенергетики на період до 2026 р., у якій передбачено добудову і введення в експлуатацію чергових агрегатів на Дністровській і Ташлицькій ГАЕС, а також будівництво Канівської ГАЕС.

## ОЦІНЮВАННЯ КОМПОНЕНТ СУКУПНОГО РИЗИКУ АЛЬТЕРНАТИВ

Як розрахункові характеристики, з яких формувалися складові власного (системного) ризику  $l$  альтернатив, розглядалися: різниця між установленими потужностями в насосному  $N_p$  і турбінному  $N_t$  режимах  $N_p - N_t$ , МВт; різниця між споживанням електроенергії  $E_p$  в насосному режимі та її виробітком  $E_t$  в турбінному режимі  $E_p - E_t$ , млн кВт-год, затрати на будівництво (уведення гідроагрегатів)  $K$ , млрд грн. Як характеристики, з яких формувалися компоненти ризику невикористаних можливостей  $g$ , розглядалися: установлені потужності в турбінному режимі  $N_t$ , МВт; сумарна регульовальна потужність  $N_t + N_p$ , МВт; виробіток електроенергії  $E_t$ , млн. кВт-год. Для спрощення задачі розглянуті розрахункові характеристики, з яких формувалися компоненти сукупного ризику для кожної альтернативи, вважалися рівноцінними.

Оскільки вибрані нами характеристики мають різні одиниці вимірювання, то кількісне оцінювання відповідних компонент сукупного ризику виконувалося в бальних одиницях на основі логарифмічної шкали [20]. Бальна оцінка деякого значення  $y_k$  відповідної характеристики буде такою:

$$r(y_k) = \mu_k \lg y_k + y_{k,0},$$

де  $\mu_k$  — модуль;  $y_{k,0}$  — нуль-пункт на інтегральній логарифмічній шкалі довжиною  $L$ , балів, для параметра  $y_k$ :

$$\mu_k = \frac{L}{\lg y_{k,\max} - \lg y_{k,\min}}; \quad y_{k,0} = -\mu_k \lg y_{k,\min},$$

де  $y_{k,\max}$ ;  $y_{k,\min}$  — максимальне і мінімальне значення  $y_k$ .

Якщо  $y_{k,\min} = 0$ , припускаємо:  $y_{k,0} = 0$ ;  $\mu_k = \frac{L}{\lg y_{k,\max}}$ ,  $r(0) = 0$ .

Складові сукупного ризику (системного ризику  $l$  та ризику невикористаних можливостей  $g$ ) кожної  $i$ -ї альтернативи відносно  $j$ -ї подаємо сумами бальних оцінок відповідних характеристик:

$$l_i = \sum_{k=1} l_{k,i}; \quad g_j = \sum_{k=1} g_{k,j}.$$

Після формування бальних оцінок складових сукупного ризику для відібраних допустимих альтернатив упорядковуємо їх та визначаємо функції сукупного ризику у вигляді лінійних комбінацій  $r_{i,j} = l_i + g_j$ ;  $r_{j,i} = l_j + g_i$ .

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ З ВИБОРОМ ОПТИМАЛЬНОГО СЦЕНАРІЮ ВВЕДЕННЯ НОВИХ АГРЕГАТИВ НА ГАЕС

На першому кроці досліджень нами розглядалася множина з таких 11 альтернатив:  $a_0$  — відмова від уведення нових потужностей на ГАЕС;  $a_1$  — уведення в експлуатацію агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС;  $a_2$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегатів 3, 4, 5, 6;  $a_3$  — уведення в експлуатацію агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС та добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегатів 3, 4, 5, 6;  $a_4$  — будівництво Канівської ГАЕС;  $a_5$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегата 4 другої черги та агрегатів 5, 6, 7 третьої черги;  $a_6$  — уведення в експлуатацію агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС та будівництво Канівської ГАЕС;  $a_7$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегатів 3, 4, 5, 6 та будівництво Канівської ГАЕС;  $a_8$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегатів 3, 4, 5, 6, уведення в експлуатацію агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС та будівництво Канівської ГАЕС;  $a_9$  — добудова

Дністровської ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегата 4 другої черги, агрегатів 5, 6, 7 третьої черги та побудова Канівської ГАЕС;  $a_{10}$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегатів 3, 4, 5, 6, добудова Дністровської ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегата 4 другої черги, агрегатів 5, 6, 7 третьої черги та побудова Канівської ГАЕС.

Нумерація альтернатив виконувалася за зростанням установленної потужності у турбінному режимі. Розрахункові характеристики порівнюваних альтернатив наведено в табл. 3. Альтернативи з визначенням їх характеристик формували згідно з даними, наведеними в програмі [7].

**Таблиця 3.** Розрахункові характеристики альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{0,10}$

$a_i$	Потужності, МВт				Електроенергія, млн кВт·год			$K$ , млрд грн *
	$N_t$	$N_p$	$N_t + N_p$	$N_p - N_t$	$E_t$	$E_p$	$E_p - E_t$	
$a_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_1$	324	421	745	97	388,5	515,5	127	2,796
$a_2$	604	861	1465	257	582	785	203	14,9
$a_3$	928	1282	2210	354	970,5	1300,5	330	17,696
$a_4$	1000	1120	2120	120	1017	1153	136	11,98
$a_5$	1296	1684	2980	388	1554	2062	508	11,196
$a_6$	1324	1541	2865	217	1405,5	1668,5	263	14,776
$a_7$	1604	1981	3585	377	1599	1938	339	26,88
$a_8$	1928	2402	4330	474	1987,5	2453,5	466	29,676
$a_9$	2296	2804	5100	508	2571	3215	644	23,176
$a_{10}$	2900	3665	6565	765	3153	4000	847	38,076

\* Вартість будівництва в цінах 2013 р. [7]

Бальне оцінювання складових ризику альтернатив проводилося на інтегральній логарифмічній шкалі довжиною  $L = 10$  балів. Результати бального оцінювання характеристик альтернатив зведено в табл. 4.

Оптимальну альтернативу вибирали згідно з правилом (1) попарним порівнянням, починаючи з пари  $(a_0, a_1)$  з відбором і збереженням на кожному кроці альтернативи, обтяженої меншим сукупним ризиком [20].

Результати попарного порівняння наведених альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{0,10}$ , показують, що відмова від уведення нових потужностей на ГАЕС ( $a_0$ ) є найгіршою (найризикованішою) альтернативою і може надалі не розглядатися, а найкращою порівняно з будь-якою іншою альтернативою є альтернатива  $a_1$  — уведення в експлуатацію агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС.

**Таблиця 4.** Результати бального оцінювання характеристик та складових сукупного ризику альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{0,10}$

$a_i$	Від'ємні характеристики			$l$	Додатні характеристики			$g$
	$N_p - N_t$	$E_p - E_t$	$K$		$N_t$	$N_t + N_p$	$E_t$	
$a_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_1$	6,890	7,185	2,825	16,900	7,251	7,524	7,401	22,176
$a_2$	8,357	7,881	7,422	23,660	8,032	8,294	7,903	24,228
$a_3$	8,839	8,602	7,895	25,336	8,571	8,761	8,537	25,869
$a_4$	7,210	7,287	6,823	21,320	8,665	8,714	8,595	25,974
$a_5$	8,978	9,242	6,637	24,856	8,990	9,101	9,122	27,213
$a_6$	8,102	8,265	7,399	23,767	9,017	9,057	8,997	27,070
$a_7$	8,934	8,642	9,043	26,619	9,257	9,312	9,157	27,726
$a_8$	9,279	9,114	9,315	27,708	9,488	9,526	9,427	28,442
$a_9$	9,383	9,594	8,636	27,613	9,707	9,713	9,747	29,166
$a_{10}$	10	10	10	30	10	10	10	30

Сукупні ризики  $r_{i,j}$ ,  $r_{j,i}$  заносилися в рядки таблиці рішень (рис. 1).

$a_i$	$a_j$										
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
$a_0$	–	<b>22,18</b>	24,28	25,87	25,97	27,21	27,07	27,73	28,44	29,17	30
$a_1$	<b>16,90</b>	–	<b>41,13</b>	<b>42,77</b>	<b>42,87</b>	<b>44,11</b>	<b>43,97</b>	<b>44,63</b>	<b>45,34</b>	<b>46,07</b>	<b>46,90</b>
$a_2$	23,66	<b>45,84</b>	–	49,53	49,64	50,87	50,73	51,37	52,10	52,83	53,66
$a_3$	25,34	<b>47,51</b>	49,56	–	51,31	52,55	52,41	53,06	53,78	54,50	55,34
$a_4$	21,32	<b>43,5</b>	45,55	47,19	–	48,53	48,39	49,05	49,76	50,49	51,32
$a_5$	24,86	<b>47,03</b>	49,08	50,73	50,83	–	51,93	52,58	53,30	54,02	54,86
$a_6$	23,77	<b>45,94</b>	47,00	49,64	49,74	50,98	–	51,49	52,21	52,93	53,77
$a_7$	26,62	<b>48,8</b>	50,85	52,49	52,59	53,83	53,69	–	55,06	55,79	56,62
$a_8$	27,71	<b>49,89</b>	51,94	53,58	53,68	54,92	54,78	55,43	–	56,87	57,71
$a_9$	27,61	<b>49,79</b>	51,84	53,48	53,59	54,83	54,68	55,34	56,05	–	57,61
$a_{10}$	30	<b>52,18</b>	54,23	55,87	55,97	57,21	57,07	57,73	58,44	59,17	–

Рис. 1. Таблиця рішень для попарного порівняння альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{0,10}$

Для врахування можливості почергового введення нових агрегатів на Ташлицькій ГАЕС, зокрема і введення агрегата 4 другої черги на Дністров-

ській ГАЕС, додатково порівнювали сім таких альтернатив:  $a_1$  — введення агрегата 3 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_2$  — введення агрегата 3, 4 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_3$  — введення агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС;  $a_4$  — введення агрегата 3, 4, 5 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_5$  — введення агрегата 3 на Ташлицькій ГАЕС і агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС;  $a_6$  — введення агрегата 3, 4 на Ташлицькій ГАЕС і агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС;  $a_7$  — введення агрегатів 3, 4, 5 на Ташлицькій ГАЕС і агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС.

Розрахункові характеристики відповідних альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,7}$ , наведено в табл. 5. Результати бального оцінювання їх характеристик зведено в табл. 6. Таблицю рішень для попарного порівняння альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,7}$ , показано на рис. 2. Підтверджено оптимальність попередньо відібраної альтернативи введення агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС.

**Таблиця 5.** Розрахункові характеристики альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,7}$

$a_i$	Потужності, МВт				Електроенергія, млн кВт-год			$K$ , млрд грн
	$N_t$	$N_p$	$N_t + N_p$	$N_p - N_t$	$E_t$	$E_p$	$E_p - E_t$	
$a_1$	151	226,5	377,5	75,5	87,5	119	31,5	2,42
$a_2$	302	453	755	151	175	238	63	5,6
$a_3$	324	421	745	97	388,5	515,5	127	2,796
$a_4$	453	679,5	1132,5	226,5	262,50	357,00	94,5	8,78
$a_5$	475	647,5	1122,5	172,5	476,00	634,50	158,5	5,216
$a_6$	626	874	1500	248	563,5	753,5	190	8,396
$a_7$	777	1100,5	1877,5	323,5	651,00	872,50	221,5	11,576

**Таблиця 6.** Результати бального оцінювання характеристик та складових сукупного ризику альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,7}$

$a_i$	Від'ємні характеристики			$l$	Додатні характеристики			$g$
	$N_p - N_t$	$E_p - E_t$	$K$		$N_t$	$N_t + N_p$	$E_t$	
$a_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_2$	4,764	3,554	5,360	13,678	4,231	4,321	3,454	12,006
$a_3$	1,722	7,148	0,923	9,793	4,660	4,238	7,428	16,326
$a_4$	7,550	5,633	8,234	21,417	6,706	6,849	5,474	19,029
$a_5$	5,679	8,284	4,907	18,869	6,996	6,793	8,440	22,229
$a_6$	8,173	9,214	7,948	25,335	8,681	8,601	9,281	26,562
$a_7$	10	10	10	30	10	10	10	30

$a_i$	$a_j$						
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_1$	–	<b>12,01</b>	<b>16,33</b>	19,03	22,23	26,56	30,00
$a_2$	<b>13,68</b>	–	<b>30,00</b>	32,71	35,91	40,24	43,68
$a_3$	<b>9,79</b>	<b>14,56</b>	–	<b>28,82</b>	<b>32,02</b>	<b>36,36</b>	<b>39,79</b>
$a_4$	21,42	33,42	<b>37,74</b>	–	43,65	47,98	51,42
$a_5$	18,87	30,88	<b>35,20</b>	37,90	–	45,43	45,43
$a_6$	25,33	37,34	<b>41,66</b>	44,36	47,56	–	55,33
$a_7$	30,00	42,01	<b>46,33</b>	49,03	52,23	56,56	–

Рис. 2. Таблиця рішень для попарного порівняння альтернатив  $a_i, i = \overline{1,7}$

На наступному кроці здійснювався вибір оптимальної альтернативи після введення в експлуатацію агрегата 4 другої черги на Дністровській ГАЕС. Сформовано нову групу із шести альтернатив, серед яких:  $a_1$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням агрегатів 3, 4, 5, 6;  $a_2$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги;  $a_3$  — будівництво Канівської ГАЕС;  $a_4$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням агрегатів 3, 4, 5, 6 та будівництво Канівської ГАЕС;  $a_5$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги та побудова Канівської ГАЕС;  $a_6$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням агрегатів 3, 4, 5, 6, добудова Дністровської ГАЕС з уведенням в експлуатацію агрегатів 5, 6, 7 третьої черги та побудова Канівської ГАЕС. Розрахункові характеристики альтернатив  $a_i, i = \overline{1,6}$ , та результати їх бального оцінювання зведено в табл. 7, 8. Таблицю рішень для їх попарного порівняння показано на рис. 3. Кращою альтернативою в цьому випадку виявилась альтернатива  $a_3$  — будівництво Канівської ГАЕС потужністю 1000 МВт.

Додатково враховувалась можливість почергового введення нових агрегатів на Ташлицькій ГАЕС при будівництві Канівської ГАЕС. Розглядалися сім відповідних альтернатив, як і в попередньому випадку введення агрегата 4 на Дністровській ГАЕС. Підтверджено оптимальність альтернативи будівництва Канівської ГАЕС після введення агрегата 4 на Дністровській ГАЕС.

Таблиця 7. Розрахункові характеристики альтернатив  $a_i, i = \overline{1,6}$

$a_i$	Потужності, МВт				Електроенергія, млн кВт·год			$K$ , млрд грн
	$N_t$	$N_p$	$N_t + N_p$	$N_p - N_t$	$E_t$	$E_p$	$E_p - E_t$	
$a_1$	604	861	1465	257	582	785	203	14,9
$a_2$	972	1263	2235	291	1165,5	1546,5	381	8,4
$a_3$	1000	1120	2120	120	1017	1153	136	11,98
$a_4$	1604	1981	3585	377	1599	1938	339	26,88
$a_5$	1972	2383	4355	411	2182,5	2699,5	517	20,38
$a_6$	2576	3244	5820	668	2764,5	3484,5	720	35,28

**Таблиця 8.** Результати бального оцінювання характеристик та складових сукупного ризику альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,6}$

$a_i$	Від'ємні характеристики			$l$	Додатні характеристики			$g$
	$N_p - N_t$	$E_p - E_t$	$K$		$N_t$	$N_t + N_p$	$E_t$	
$a_1$	4,436	2,403	3,994	10,833	0	0	0	0
$a_2$	5,160	6,181	0,000	11,341	3,280	3,062	4,457	10,799
$a_3$	0,000	0,000	2,474	2,474	3,476	2,679	3,582	9,737
$a_4$	6,668	5,480	8,105	20,253	6,734	6,487	6,486	19,708
$a_5$	7,171	8,013	6,176	21,360	8,158	7,898	8,483	24,539
$a_6$	10	10	10	30	10	10	10	30

$a_i$	$a_j$					
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	–	<b>21,632</b>	20,5704	30,5407	35,3718	40,8332
$a_2$	<b>11,341</b>	–	<b>21,0782</b>	31,0485	35,8795	41,3409
$a_3$	2,47377	<b>13,273</b>	–	<b>22,1813</b>	<b>27,0124</b>	<b>32,4738</b>
$a_4$	20,2534	31,0525	<b>29,9906</b>	–	44,792	50,2534
$a_5$	21,3597	32,1588	<b>31,0969</b>	41,0672	–	51,3597
$a_6$	30	40,7991	<b>39,7373</b>	49,7075	54,5386	–

Рис. 3. Таблиця рішень для попарного порівняння альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,6}$

На заключному кроці досліджень вибиралася оптимальна альтернатива після уведення агрегата 4 на Дністровській ГАЕС та побудови Канівської ГАЕС. Порівнювалися альтернативи:  $a_1$  — уведення агрегата 3 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_2$  — уведення агрегатів 3, 4 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_3$  — уведення агрегатів 3, 4, 5 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_4$  — добудова Ташлицької ГАЕС з уведенням агрегатів 3, 4, 5, 6;  $a_5$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги;  $a_6$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги і уведенням агрегата 3 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_7$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги і введенням агрегатів 3, 4 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_8$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги і введенням агрегатів 3, 4, 5 на Ташлицькій ГАЕС;  $a_9$  — добудова Дністровської ГАЕС та добудова Ташлицької ГАЕС. Розрахункові характеристики альтернатив та результати їх бального оцінювання зведено в табл. 9, 10. Таблицю рішень для попарного порівняння альтернатив  $a_i$ ,  $i = \overline{1,9}$ , показано на рис. 4.



**Таблиця 9.** Розрахункові характеристики альтернатив  $a_i, i = \overline{1,9}$

$a_i$	Потужності, МВт				Електроенергія, млн кВт-год			$K$ , млрд грн
	$N_t$	$N_p$	$N_t + N_p$	$N_p - N_t$	$E_t$	$E_p$	$E_p - E_t$	
$a_1$	151	226,5	377,5	75,5	87,5	119	31,5	2,42
$a_2$	302	453	755	151	175	238	63	5,6
$a_3$	453	679,5	1132,5	226,5	262,50	357,00	94,50	8,78
$a_4$	604	861	1465	257	582	785	203	14,9
$a_5$	972	1263	2235	291	1165,5	1546,5	381	8,4
$a_6$	1123	1489,5	2612,5	366,5	1253,00	1665,50	412,50	10,82
$a_7$	1274	1716	2990	442	1340,5	1784,5	444	14
$a_8$	1425	1942,5	3367,5	517,5	1428,00	1903,50	475,50	17,18
$a_9$	1576	2124	3700	548	1747,5	2331,5	584	23,3

**Таблиця 10.** Результати бального оцінювання характеристик та складових сукупного ризику альтернатив  $a_i, i = \overline{1,9}$

$a_i$	Від'ємні характеристики			$l$	Додатні характеристики			$g$
	$N_p - N_t$	$E_p - E_t$	$K$		$N_t$	$N_t + N_p$	$E_t$	
$a_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_2$	3,497	2,374	3,705	9,576	2,955	3,037	2,315	8,307
$a_3$	5,543	3,762	5,690	14,995	4,684	4,813	3,669	13,166
$a_4$	6,180	6,381	8,026	20,587	5,911	5,941	6,328	18,180
$a_5$	6,807	8,537	5,495	20,839	7,939	7,792	8,647	24,378
$a_6$	7,970	8,809	6,613	23,393	8,555	8,475	8,889	25,919
$a_7$	8,915	9,061	7,751	25,728	9,093	9,067	9,115	27,274
$a_8$	9,711	9,296	8,655	27,662	9,571	9,587	9,326	28,484
$a_9$	10	10	10	30	10	10	10	30

$a_i$	$a_j$								
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
$a_1$	–	<b>8,31</b>	<b>13,17</b>	<b>18,18</b>	<b>24,38</b>	25,92	27,27	28,48	30,00
$a_2$	<b>9,58</b>	–	22,74	27,76	<b>33,95</b>	35,49	36,85	38,06	39,58
$a_3$	<b>15,00</b>	23,30	–	33,18	<b>39,37</b>	40,91	42,27	43,48	45,00
$a_4$	<b>20,59</b>	28,89	33,75	–	<b>44,96</b>	46,51	47,86	49,07	50,59
$a_5$	<b>20,84</b>	<b>29,15</b>	<b>34,01</b>	<b>39,02</b>	–	<b>46,76</b>	<b>48,11</b>	<b>49,32</b>	<b>50,84</b>
$a_6$	23,39	31,70	36,56	41,57	<b>47,77</b>	–	50,67	51,88	53,39
$a_7$	25,73	34,03	38,89	43,91	<b>50,11</b>	51,65	–	54,21	55,73
$a_8$	27,66	35,97	40,83	45,84	<b>52,04</b>	53,58	54,94	–	57,66
$a_9$	30,00	38,31	43,17	48,18	<b>54,38</b>	55,92	57,27	58,48	–

Рис. 4. Таблиця рішень для попарного порівняння альтернатив  $a_i, i = \overline{1,9}$

Кращою альтернативою на цьому кроці виявилася  $a_5$  — добудова Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги.

## ВИСНОВКИ

Одним з підходів до обґрунтування програм і планів розвитку енергетики може бути врахування ризику під час прийняття рішень. При цьому під час обґрунтування доцільності введення нових потужностей гідрогенерації на ГАЕС з урахуванням ризику мають братися до уваги і ризики невикористаних можливостей.

У результаті проведених досліджень встановлено, що найбільш доцільним сценарієм введення нових потужностей гідрогенерації на ГАЕС в Україні для реалізації Програми розвитку гідроенергетики на період до 2026 р., який дозволяє мінімізувати сукупний ризик включно з ризиком невикористаних можливостей, є сценарій, за яким на першому етапі рекомендується зосередити зусилля на введенні агрегата 4 на Дністровській ГАЕС, на другому — на будівництві Канівської ГАЕС, на третьому — на добудові Дністровської ГАЕС з уведенням агрегатів 5, 6, 7 третьої черги. Після цього може розглядатися можливість добудови Ташлицької ГАЕС з почерговим введенням агрегатів 3, 4, 5, 6.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Розвиток теплоенергетики та гідроенергетики* / Є.Т. Базеев, Б.Д. Білека, Є.П. Васильєв та ін.; наук. ред. В.М. Клименко, Ю.О. Ландау, І.Я. Сігал. 2013. — 399 с. — Режим доступу: <http://energetika.in.ua/ua/books/book-3/part-2/section-2/2-8>)
2. *Vennerman P. Pumped storage plants – Status and perspectives* / P. Vennerman, K.H. Gruber, J.U. Naaheim and al. // *VGB Power Tech.* — 2011. — N. 4. — P. 32–38.
3. *Родионов В.Г. Оптимизация структуры генерирующих мощностей. Аккумуляторы – накопители энергии* // *Энергетика: проблемы настоящего и возможности будущего.* — М.: ЭНАС, 2010. — С. 68–69.
4. *Electric Energy Storage Technology Options: A White Paper Primer on Applications, Costs, and Benefits* / Rastler et al. EPRI, Palo Alto, CA, 2010. — Available at: <http://www.epri.com/abstracts/Pages/ProductAbstract.aspx ProductId=000000000001020676>
5. *International Energy Statistics.* — Available at: <http://www.eia.gov>.
6. *Поташиник С.И. Каскад Среднеднепровских ГЭС: Опыт освоения и эксплуатации* / С.И. Поташиник. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 144 с.
7. *Програма розвитку гідроенергетики на період до 2026 року.* Схвалено розпорядженням Кабінету Міністрів України від 13 липня 2016 р. № 552-р. — Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/552-2016-%D1%80#n7>
8. *Ivashintsov D.A. Ecological and sociodemographic consequences of hydrotechnical construction (Problems of safety and risk)* / D.A. Ivashintsov, D.V. Stefanishin, A. B. Veksler // *Power Technology and Engineering.* — 1993. — Vol. 27, Issue 12. — P. 685–691.
9. *Environmental experience gained from reservoirs in operation.* Trans. of the 18-th Int. Cong. on Large Dams. — Vol 2. — Q.69. Durban-South Africa, 1994. — 780 p.

10. Векслер А.Б. Надежность, социальная и экологическая безопасность гидротехнических объектов: оценка риска и принятие решений / А.Б. Векслер, Д.А. Ивашинцов, Д.В. Стефанишин. — СПб.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2002. — 591 с.
11. *Гидроэнергетика* и окружающая среда / Под общ. ред. Ю. Ландау и Л.А. Сиренко. — К.: Либра, 2004. — 484 с.
12. *The use of risk analysis to support dam safety decisions and management*. Trans. of the 20-th Int. Congress on Large Dams. — Vol. 1. — Q. 76. — Beijing-China, 2000. — 896 p.
13. *Risk Assessment in Dam Safety Management*. A reconnaissance of benefits, methods and current applications. ICOLD Bulletin 130. — Paris, 2005. — 276 p.
14. Качинський А.Б. Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи: моногр. / А.Б. Качинський; Ін-т проблем нац. безпеки Нац. акад. служби безпеки України. — К.: [б. н.], 2004. — 470 с.
15. Панкратова Н.Д. Оцінювання багатофакторних ризиків в умовах концептуальної невизначеності / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська // *Кибернетика и системный анализ*. — 2009. — № 2. — С. 72–82.
16. Стефанишин Д.В. Методологічні підходи до оцінки та врахування ризику в задачах забезпечення надійності і безпеки гребель / Д.В. Стефанишин, О.М. Трофимчук // *Концепція захисту критичної інфраструктури: Стан, проблеми та перспективи її впровадження в Україні: зб. матеріалів міжнар. наук.-практ. конф. (7–8 листоп. 2013 р., Київ–Вишгород) Національний інститут стратегічних досліджень. Сер. «Національна безпека»*. — Вип. 5. — К., 2014. — С. 88–98.
17. Маршалл В. Основные опасности химических производств / В. Маршалл. — М.: Мир, 1989. — 671 с.
18. Стефанишин Д.В. Вибрані задачі оцінки ризику та прийняття рішень за умов стохастичної невизначеності / Д.В. Стефанишин. — К.: Азимут-Україна, 2009. — 104 с.
19. Стефанишин Д.В. Про перспективи гідроенергетики в Україні та вибір варіанту розвитку Дніпровського каскаду з врахуванням ризику / Д.В. Стефанишин // *Гідроенергетика України*. — 2010. — № 3. — С. 5–11.
20. Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д. Прийняття рішень у природокористуванні з урахуванням ризику невикористаних можливостей на підставі попарного порівняння альтернатив / Ю.Д. Стефанишина-Гаврилюк, Д.В. Стефанишин // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2016. — № 3. — С. 51–62.

*Надійшла 07.04.2017*

## 3D-MODEL RECONSTRUCTION WITH USE OF MONOCULAR RGB CAMERA

O.V. VEDMEDENKO, S.S. NIKOLAIEV, Y.A. TYMOSHENKO

**Abstract.** Every year the edge between the real and digital worlds is becoming more and more blurred. Augmented and virtual reality rapid development creates new opportunities for more productive work and entertainment, revolution in 3D printing technologies begets boost in multiple DIY communities appearance and sharing economy growth. All these factors require new technologies that allow making 3D models from real world objects, but most of these solutions are either very expensive or require complex technical knowledge that most ordinary people do not have. This paper provides a review and comparison of modern methods for 3D models of physical objects real time reconstruction that can be used in present-day mobile solutions.

**Keywords:** 3D model, 3D object, simultaneous localization and mapping problem, SLAM, monocular camera, RGB camera, LSD-SLAM, ORB-SLAM.

### INTRODUCTION

Nowadays a rapid transition from two-dimensional to three-dimensional information space can be observed: flat interfaces are becoming less popular, three-dimensional printing technology has achieved great success in a wide range of different industries, virtual and augmented reality are no longer only ideas of science fiction.

Each of the examples above requires a certain electronic volumetric representation — a 3D-model. 3D interface requires a layout in space, 3D printing technology requires a model of a 3D object, virtual and augmented reality are both, in essence, just a manipulation and display of various 3D models.

However, the creation of three-dimensional content is a very difficult and painstaking work. Designers and 3D illustrators spend a lot of resources to develop even a simple model despite the fact that we see many of them in our daily lives, and those we don't see are often only modifications of objects from the real world. We use the following methods directly to solve such problems. Those methods provide a possibility to turn your smartphone into a monocular 3D scanner — it's very convenient to have a model, which is ready for further modification and use of other software, just a few minutes after you saw it.

### METHODS CLASSIFICATION

Today, having special knowledge, 3D model can be reconstructed with a number of methods that solve the problem described in the literature as the problem of simultaneous localization and mapping (i.e. SLAM). There are many different implementations of this problem and they can be classified by:

1. The way algorithm analyze image information:
  - a. Ones which do not use features or key points (feature-less);
  - b. Ones which do use features (feature-based).
2. The type of sensor used to capture images: RGB camera, RGB-D camera [1], laser range finders [2].
3. The number of cameras the video stream is received from:
  - a. Ones which use one camera (monocular);
  - b. Ones which use two or more cameras (stereo).

## **ORB-SLAM METHOD**

ORB-SLAM [3] is a feature-based monocular SLAM system which can operate in real time, in all kinds of environments. The system is robust to sharp and fast motion, allows fast loop closing algorithm and relocalization algorithm. Also it includes automatic initialization. It uses a survival of the fittest strategy that aimed to select unique points and key frames, which leads to excellent robustness and generates a compact map that grows only when environment varies in time.

Main design idea of ORB-SLAM system is that the same remembered key features are used by the mapping, tracking, and for place recognition to perform relocalization and loop closing. This allows to avoid the need to calculate the depths of recognized features. ORB-SLAM system requires algorithm which can extract features from image in less than 33ms per image, which excludes the popular SIFT (~300 ms) [4], SURF (~300 ms) [5] or the recent A-KAZE (~100 ms) [6]. To obtain general place recognition capabilities, it also requires rotation invariance, which excludes BRIEF [7] and LDB [8].

ORB-SLAM uses ORB [9] method. It is extremely fast, while it has good invariance to viewpoint. This boosts the accuracy of bundle adjustment.

ORB-SLAM system incorporates three components which are running simultaneously: tracking component, local mapping component and loop closing component.

The tracking component is responsible for localizing the camera with every frame and deciding when to create a new key frame. Algorithm performs feature comparison between current and previous frame and optimize the pose using motion-only bundle adjustment. If the tracking for any reason is lost (e.g. because of occlusions or sharp movements), the place recognition module is responsible to perform a global relocalization. When there is an initial estimation of the camera position and feature matchings, a local visible map is reclaimed using the covisibility graph consisting of key frames that is remembered by the system. Then matches with the local map points are searched by reprojection, and camera position is optimized again with all found matches. Finally the tracking thread is inserting a new key frame if needed.

All visual SLAM works in the literature agree that running bundle adjustment with all the points and all the frames is not feasible. The work of Strasdat et al. [10] showed that the most cost effective approach is to keep as much points as possible, while keeping only non-redundant key frames. One approach is to insert

key frames very cautiously to avoid an excessive growth of the computational complexity. This restrictive key frame insertion algorithm makes the tracking fail in hard exploration conditions. ORB-SLAM uses survival of the fittest strategy which achieves unprecedented robustness in difficult scenarios by inserting key frames as quickly as possible, and removing later the redundant ones, to avoid the extra cost. This permits a flexible map expansion during exploration, which increases tracking robustness in hard conditions (e.g. camera rotation, fast and sharp movements), while its size is bounded in continual revisits to the same environment, i.e. lifelong operation.

The local mapping is responsible for processing new key frames added by previous components and performs local bundle adjustment, which leads to optimal reconstruction in areas, close to camera position. It is looking for a new features in all new key frames by a comparison to connected key frames in the map, and when it finds new feature it generates a new point. Based on the information gathered during the work of the system, special algorithm is applied to cut all redundant remembered points and save only most informative ones. Also it cuts all redundant key frames.

Each key frame  $K_i$  stores:

1. The camera pose  $T_{iw}$ , which is a rigid body transformation that transforms points from the world to the camera coordinate system.
2. The camera intrinsics, including focal length and principal point.
3. All the ORB features extracted in the frame, associated or not to a map point, whose coordinates are undistorted if a distortion model is provided.

Each map point  $p_i$  stores:

1. Its 3D position  $X_{w,i}$  in the world coordinate system.
2. The viewing direction  $n_i$ , which is the mean unit vector of all its viewing directions (the rays that join the point with the optical center of the key frames that observe it).
3. A representative ORB descriptor  $D_i$ , which is the associated ORB descriptor whose hamming distance is minimum with respect to all other associated descriptors in the key frames in which the point is observed.
4. The maximum  $d_{\max}$  and minimum  $d_{\min}$  distances at which the point can be observed, according to the scale invariance limits of the ORB features.

The loop closing searches for loops with every new key frame. If a loop is detected, it computes a similarity transformation that informs about the drift accumulated in the loop. Then both sides of the loop are aligned and duplicated points are merged. Finally algorithm performs a pose graph optimization over similarity constraints to achieve global consistency.

Running ORB-SLAM system is demonstrated on fig. 1. At the bottom left corner there is a current frame with features highlighted with green. At the right side there is a built map: remembered features displayed with red dots, green square is a current camera position and blue squares are key frames.



Fig 1. Running ORB-SLAM system

### LSD-SLAM METHOD

Large-Scale Direct Monocular SLAM (LSD-SLAM) [11] — a direct (feature-less) monocular SLAM algorithm. Along with highly accurate pose estimation based on direct image alignment, it provides the 3D environment real-time reconstruction as a graph of key frames with semi-dense depth maps. These are obtained by a huge number of pixel-by-pixel comparisons.

The fundamental idea behind feature-based approaches is to split the overall problem — estimating geometric information from images — into two sequential steps: first, a set of feature observations is extracted from the image. Second, the camera position and scene geometry is computed as a function of these feature observations only. While this decoupling simplifies the overall problem, it comes with an important limitation: only information that conforms to the feature type can be used. In particular, when using keypoints, information contained in straight or curved edges — which especially in man-made environments make up a large part of the image — is discarded.

Direct visual odometry methods circumvent this limitation by optimizing the geometry directly on the image intensities, which enables using all information in the image. In addition to higher accuracy and robustness in particular in environments with little keypoints, this provides substantially more information about the geometry of the environment, which can be very valuable for robotics or augmented reality applications.

A condensed summary of the relevant mathematical concepts is given in the next paragraphs.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  is the set of normalized pixel coordinates, i.e., they include the intrinsic camera calibration.

$d$  is used to denote the inverse of the depth  $z$  of a point, i.e.,  $d = z^{-1}$ .

$SO(3)$  is a rotations around a fixed point in three-dimensional Euclidean space group, which consists of orthogonal  $3 \times 3$  matrices with a determinant equals to 1.

A 3D rigid body transform  $G \in SE(3)$  denotes rotation and translation in 3D, i.e. is defined by

$$G = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } R \in SO(3) \text{ and } t \in \mathbb{R}^3.$$

During optimization, a minimal representation for the camera pose is required, which is given by the corresponding element  $\xi \in SE(3)$  of the associated Lie-algebra. Elements are mapped to  $SE(3)$  by the exponential map  $G = \exp_{se(3)}(\xi)$ , its inverse being denoted by  $\xi = \log_{SE(3)}(G)$ . With a slight abuse of notation, element of  $se(3)$  can be used to represent pose and written as vector  $\xi \in R^6$ .

The transformation moving a point from frame  $i$  to frame  $j$  is written as  $\xi_{ji}$ . For convenience, the pose concatenation operator  $\circ : se(3) \times se(3) \rightarrow se(3)$  should be defined as

$$\xi_{ki} = \xi_{kj} \circ \xi_{ji} = \log_{SE(3)}(\exp_{se(3)}(\xi_{kj}) \exp_{se(3)}(\xi_{ji})).$$

Further, 3D projective warp function  $\omega$  should be defined, which projects an image point  $p$  and its inverse depth  $d$  into a by  $\xi$  transformed camera frame

$$\omega(p, d, \xi) = \begin{pmatrix} x' \\ z' \\ y' \\ z' \\ 1 \\ z' \end{pmatrix} \text{ with } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp_{se(3)} \begin{pmatrix} p_x \\ d \\ p_y \\ d \\ 1 \\ d \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A 3D similarity transform  $S \in Sim(3)$  denotes rotation, scaling and translation, i.e. is defined by

$$G = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \text{ and } s \in \mathbb{R}^+.$$

As for rigid body transformations, a minimal representation is given by elements of the associated Lie-algebra  $\xi \in sim(3)$ , which now have an additional degree of freedom, that is  $\xi \in R^7$ . The exponential and logarithmic map, pose concatenation and a projective warp function  $\omega_s$  can be defined analogously to the  $se(3)$  case.

Propagation of uncertainty is a statistical tool to derive the uncertainty of the output of a function  $f(X)$ , caused by uncertainty on its input  $X$ . Assuming  $X$  to be Gaussian distributed with covariance  $\Sigma_X$ , the covariance of  $f(X)$  can be approximated (using the Jacobian  $J_f$  of  $f$ ) by

$$\Sigma_f \approx J_f \Sigma_X J_f^T.$$



The algorithm consists of three major components: tracking, depth map estimation and map optimization.

The tracking component continuously tracks new camera images. That is, it estimates their rigid body pose  $\xi \in se(3)$  with respect to the current key frame, using the pose of the previous frame as initialization.

The depth map estimation component uses tracked frames to either refine or replace the current key frame. Depth is refined by filtering over many per-pixel, small-baseline stereo comparisons coupled with interleaved spatial regularization. If the camera moves too far away from the existing map, a new key frame is created from the most recent tracked image. Algorithm threshold a weighted combination of relative distance and angle to the current key frame:

$$\text{dist}(\xi_{ji}) = \xi_{ji}^T W \xi_{ji},$$

where  $W$  is a diagonal matrix containing the weights.

Each key frame  $K_i$  consists of a camera image  $I_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$ , an inverse depth map  $D_i : \Omega_{D_i} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , and the variance of the inverse depth  $V_i : \Omega_{D_i} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Note that the depth map and variance are only defined for a subset of pixels  $\Omega_{D_i} \subset \Omega_i$ , containing all image regions in the vicinity of sufficiently large intensity gradient, hence semi-dense. Edges  $E_{ji}$  between key frames contain their relative alignment as similarity transform  $\xi_{ji} \in \text{sim}(3)$ , as well as the corresponding covariance matrix  $\Sigma_{ji}$ .

Once a key frame is replaced as tracking reference — and hence its depth map will not be refined further — it is incorporated into the global map by the map optimization component. To detect loop closures and scale-drift, a similarity transform  $\xi \in \text{sim}(3)$  to close-by existing key frames (including its direct predecessor) is estimated using scale-aware, direct  $\text{sim}(3)$  — image alignment.

To bootstrap the LSD-SLAM system, it is sufficient to initialize a first key frame with a random depth map and large variance. Given sufficient translational camera movement in the first seconds, the algorithm “locks” to a certain configuration, and after a couple of key frame propagations converges to a correct depth configuration.

Starting from an existing key frame  $K_i = (I_i, D_i, V_i)$ , the relative 3D pose  $\xi_{ij} \in se(3)$  of a new image  $I_j$  is computed by minimizing the variance-normalized photometric error

$$E_p(\xi_{ji}) = \sum_{p \in \Omega_{D_i}} \left\| \frac{r_p^2(p, \xi_{ji})}{\sigma_{r_p(p, \xi_{ji})}^2} \right\|_{\delta},$$

$$\text{with } r_p(p, \xi_{ji}) = I_i(p) - I_j(\omega(p, D_i(p), \xi_{ji})),$$

$$\sigma_{r_p(p, \xi_{ji})}^2 = 2\sigma_I^2 + \left( \frac{\partial r_p(p, \xi_{ji})}{\partial D_i(p)} \right)^2 V_i(p),$$

where  $\|\cdot\|_\delta$  is the Huber norm applied to the normalized residual

$$r_\delta = \begin{cases} \frac{r^2}{2\delta}, & \text{if } |r| \leq \delta, \\ |r| - \frac{\delta}{2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The residual's variance  $\sigma_{r_p(p, \xi_{ji})}^2$  is computed using covariance propagation as described above, utilizing the inverse depth variance  $V_i$  and assuming Gaussian image intensity noise  $\sigma_1^2$ .

Running LSD-SLAM system is demonstrated on fig. 2. At the top left corner there is a current frame captured by the camera. At the bottom left there is a current key frame with color-coded depth map (from red — close objects, to blue — far objects). At the right side there is a built point cloud with red square as a current camera position and blue ones as camera trajectory.

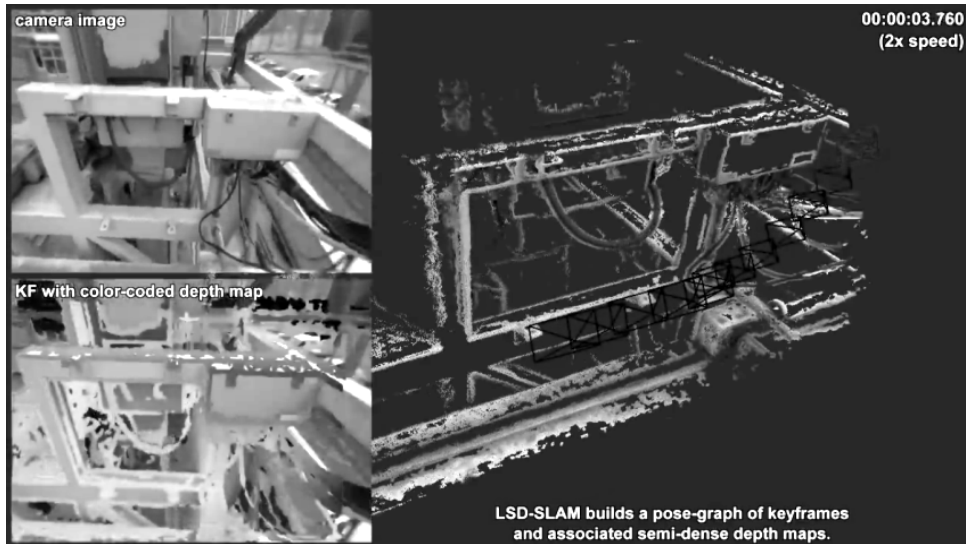


Fig 2. Running LSD-SLAM system

The authors of this work were able to obtain promising results using the LSD-SLAM method (see fig. 3–6).



Fig 3. Experiment 1. Object

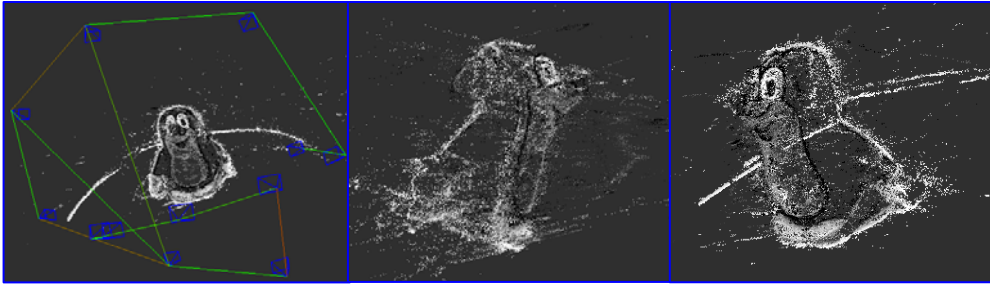


Fig. 4. Experiment 1. Result



Fig. 5. Experiment 2. Object

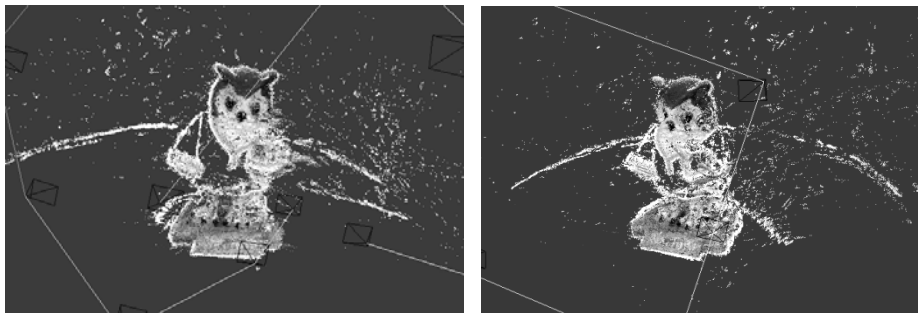


Fig. 6. Experiment 2. Result

## METHODS COMPARISON

It's convenient to compare those methods with a following table.

LSD-SLAM compared to ORB-SLAM

Method	Trajectory loss	Relocalization	Point cloud	Speed of work
LSD-SLAM	Method is unstable, trajectory is often lost	Slow and not precise	Monochrome point cloud from RGB camera	Works in real time, but requires fast GPU
ORB-SLAM	Method is robust, trajectory is lost only for very sharp movements in the direction of non-scanned areas	Fast and precise	Colored point cloud only from RGB-D camera	Works in real time, fast GPU is not required

## CONCLUSIONS

The analysis of these methods and their comparison give the following results. If the task is to only localize camera position and build movement trajectory it is clearly necessary to choose ORB-SLAM. In case the user can handle RGB-D camera it is also possible to build colored point cloud representing the three-dimensional model of the environment or object. Instead, if it is crucial to build a 3D model a user needs to choose LSD-SLAM even though the scans may have worse quality.

## REFERENCES

1. *An evaluation of the RGB-D SLAM system* / F. Endres, J. Hess, N. Engelhard etc. // Robotics and Automation (ICRA). — 2012. // IEEE International Conference. — P. 1691–1696.
2. *Robot pose estimation in unknown environments by matching 2d range scans* / Lu F., Milios E. // Journal of Intelligent and Robotic Systems. — 1997. — Vol. 18, № 3. — P. 249–275.
3. *ORB-SLAM: A Versatile and Accurate Monocular SLAM System* / Raúl Mur-Artal, J. M. M. Montiel, Juan D. Tardós // IEEE Transactions on Robotics. — 2015. — Vol. 31, N 5. — P. 1147–1163.
4. *Distinctive image features from scale-invariant keypoints* / D. G. Lowe // International Journal of Computer Vision. — 2004. — Vol. 60, N 2. — P. 91–110.
5. *SURF: Speeded Up Robust Features* / H. Bay, T. Tuytelaars, and L. Van Gool // European Conference on Computer Vision (ECCV). — 2006. — P. 404–417.
6. *Fast explicit diffusion for accelerated features in nonlinear scale spaces* / P. F. Alcantarilla, J. Nuevo, and A. Bartoli // British Machine Vision Conference (BMVC). — 2013. — P. 1–11.
7. *BRIEF: Binary Robust Independent Elementary Features* / M. Calonder, V. Lepetit, C. Strecha, and P. Fua // European Conference on Computer Vision (ECCV). — 2010. — P. 778–792.
8. *LDB: An ultra-fast feature for scalable augmented reality on mobile devices* / X. Yang and K.-T. Cheng // IEEE International Symposium on Mixed and Augmented Reality. — 2012. — P. 49–57.
9. *ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF* / E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, G. Bradski // IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). — 2011. — P. 2564–2571.
10. *Visual SLAM: Why filter?* / H. Strasdat, J. M. M. Montiel, A. J. Davison // Image and Vision Computing. — 2012. — Vol. 30, № 2. — P. 65–77.
11. *LSD-SLAM: Large-Scale Direct Monocular SLAM* / J. Engel, T. Schöps, D. Cremers // European Conference on Computer Vision (ECCV). — 2014. — P. 834–849.

Received 23.06.2017

---

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

**ПІДВИЩЕННЯ ДОСТОВІРНОСТІ ПЕРЕВІРКИ  
УНІКАЛЬНОСТІ ТЕКСТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ  
КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ**

**О.С. МЕНЯЙЛЕНКО, О.І. ЗАХОЖАЙ, П.І. БІДЮК**

**Анотація.** Крім очевидних переваг пошуку та використання інформації з мережі Інтернет, останнім часом почала проявлятися негативна тенденція — намагання користувачів мережі розпоряджатись нагромадженою інформацією та подавати її як продукт власної творчої праці. Для підвищення достовірності визначення унікальності тексту в роботі запропоновано побудову бази даних текстових фрагментів на основі комбінованої системи розпізнавання образів. Використання запропонованих технічних рішень дало змогу підвищити достовірність визначення частки унікальності тексту в середньому на 54%.

**Ключові слова:** інформаційні технології, мережа Інтернет, плагіат, достовірність розпізнавання тексту, система для розпізнавання образів.

**ВСТУП**

Інтенсивний розвиток інформаційних технологій, інструментів і засобів автоматизованого оброблення та зберігання надвеликих масивів інформації створює сприятливі умови для формування глобальних, централізованих і розподілених сховищ даних для численних користувачів. В останні десятиріччя глобальна мережа Інтернет об'єднала ці сховища і разом із сучасними пошуковими сервісами дозволила створити майже необмежений для подальшого розширення та удосконалення ресурс доступу до різноманітної інформації з можливостями розгорнутого пошуку та упорядкування даних. Окрім очевидних переваг такого прогресу, проявляється також і негативна тенденція — намагання використовувати та розпоряджатися нагромадженою інформацією та подавати її як продукт власної творчої праці. На жаль, термін «плагіат» стає дедалі поширенішим і «нормою» для будь-яких сфер людської діяльності. Така ситуація спостерігається, зокрема, у галузі освіти, де під час підготовки студентських робіт, доповідей, рефератів, курсових і дипломних робіт, а іноді й дисертацій суб'єктами освітнього процесу реалізуються спроби запозичення результатів чужої інтелектуальної праці.

Натепер у сучасній науці й освіті стає дедалі популярнішим підхід до написання робіт, який полягає у звичайному копіюванні інформації з одного

або декількох джерел, подальшому редакторському обробленні та поданні отриманих матеріалів як результату особистої інтелектуальної праці [1].

Одним зі способів протидії негативним аспектам є використання спеціальних засобів перевірки текстів на унікальність, які дозволяють за результатами аналізу поданих продуктів інтелектуальної праці виявляти запозичені матеріали, визначати їх обсяг, а також ідентифікувати джерела запозичення [2–9]. Такі засоби отримали назву систем антиплагиату [3, 5, 7].

Принцип функціонування систем перевірки текстів на унікальність полягає у порівнянні поданих текстів з наявними у базі даних. У процесі роботи системи збирається і фільтрується інформація про наявні продукти інтелектуальної праці [5]. Після попереднього оброблення тексти індексуються і вносяться до бази даних. Надалі цю базу даних можна використовувати для порівняння з поданими для аналізу текстами. Кожний документ, завантажений для перевірки, ставиться в чергу для оброблення. Після перевірки необхідного документа система формує звіт, у якому детально подаються усі результати пошуку та рівень унікальності перевіреного матеріалу. Зазвичай ті фрагменти, що не є унікальними, для наочності виділяються в тексті [8].

Існує велике розмаїття програмних продуктів, які дозволяють перевірити текст на унікальність та ідентифікувати ознаки плагіату. Кожний з них може мати специфічні особливості, а також переваги та недоліки [2–6, 9]. Аналіз таких систем дав змогу виявити основні функції, властиві більшості з них, а саме:

- визначення частки унікальності поданого тексту;
- пошук фрагментів тексту, що були запозичені, а також ідентифікація джерел інформації, що були використані у плагіаті;
- маркування запозичених фрагментів тексту кольором для наочності, а також використання різних кольорів для фрагментів, запозичених з різних джерел;
- формування детальних звітів після перевірки тексту на унікальність.

Програмне забезпечення, як правило, має можливість гнучкого налагодження алгоритмів та інструментарію пошуку подібності (наприклад, визначення кількості слів у шинглі, кількість вибірок з тексту і т. ін.).

Додаткові функції програмного забезпечення перевірки текстів на унікальність:

- перевірка контенту різноманітних web-ресурсів на унікальність з формуванням докладного звіту, що містить зафіксовані джерела плагіату;
- робота зі списком проксі;
- пакетна перевірка поданих текстових файлів;
- можливість повторної перевірки текстів після видалення неунікальних фрагментів;
- збереження історії перевірок та ведення журналу подій під час функціонування алгоритму.

Незважаючи на існуючу достатньо велику розмаїтість систем перевірки унікальності текстів, їх поєднує один негативний аспект — неоднозначність отриманих результатів аналізу, рівень достовірності яких істотно залежить від умов перевірки і більшою мірою від організації бази даних текстів, за якими виконується перевірка. Можливість отримання достовірного резуль-

тату аналізу тексту ускладняється застосуванням методів трансформування тексту, які штучно підвищують унікальність тексту, що не дозволяє системі подавати адекватний результат перевірки.

Отже, можна зробити висновок, що удосконалення систем перевірки текстів на унікальність, особливо в частині логічної організації бази даних текстів та алгоритмів перевірки, є актуальним науково-технічним завданням, розв'язання якого надасть можливість ефективно протидіяти незаконному використанню запозичених продуктів інтелектуальної праці.

## **ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ**

Для визначення основних аспектів завдання, що значною мірою впливають на достовірність результатів перевірки унікальності текстів, було заплановано та проведено експеримент, у якому різними програмами перевірки на плагіат подавалися на вхід повністю запозичені текстові фрагменти, їх частка унікальності становила 0%.

В експерименті використано чотири найбільш відомі та поширені системи перевірки на антиплагіат, назви яких з метою недопущення реклами або антиреклами, не будуть розкриватися. Назвемо досліджувані системи: «система 1», «система 2», «система 3», «система 4». Для перевірки достовірності експериментального дослідження на вхід кожної з чотирьох систем подавалися для аналізу повністю запозичених 20 фрагментів тексту (відповідно до планування експерименту це 20 груп дослідів).

Дисперсію середнього значення розрахункової частки унікальності тексту визначали так [10, 11]:

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_i)^2}{m-1}, \quad (1)$$

де  $m$  — кількість рівнобіжних дослідів;  $y_{ji}$  — відгук  $j$ -го рівнобіжного дослідів;  $\bar{y}_i$  — середній відгук у досліді.

Відтворюваність середнього значення частки унікальності тексту оцінювалась за критерієм Кохрена [10, 11]:

$$G = \frac{s_{i\text{макс}}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2},$$

де  $n$  — кількість груп дослідів;  $s_i^2$  — дисперсія  $i$ -го дослідів, яка визначається за формулою (1);  $s_{i\text{макс}}^2$  — максимальне значення дисперсії в групі дослідів.

Результати виконаного експерименту з аналізу текстових фрагментів, поданих мовою оригіналу, зведено у табл. 1.

Проаналізувавши результати дослідів, поданих в табл. 1, можна зробити висновок, що всі системи майже однаково визначили поданий плагіат. Значення коефіцієнта Кохрена не перевищувало табличного значення відпо-

відно до методики [10]. Такі результати можна назвати очікуваними, оскільки тексти бралися із загально доступних джерел і в базах даних досліджуваних систем містився однаковий обсяг відомостей про наявний плагіат.

**Таблиця 1.** Результати аналізу текстових фрагментів, поданих мовою оригіналу з очікуваною часткою унікальності 0%

Параметр	Система 1	Система 2	Система 3	Система 4
Середнє значення частки унікальності тексту $\bar{y}_i$	4,65	5,60	10,35	8,65
Середня дисперсія значення частки унікальності тексту $\bar{s}_i^2$	2,33	4,36	2,72	1,74
Значення коефіцієнта Кохрена (за довірчого інтервалу 0,95)	0,37	0,39	0,32	0,31

Оскільки системи перевірки можуть аналізувати тексти за умови їх можливого перекладання іншими мовами, на наступному етапі досліджень виконувалося автоматизоване перекладання текстів загальновідомими системами перекладу з української мови оригіналу на англійську та з української мови оригіналу на російську. Для збереження чистоти експерименту ручне редагування перекладених текстів не проводилося.

Результати аналізу на унікальність текстів, перекладених з української мови на англійську та з української мови на російську, наведено в табл. 2 і 3 відповідно.

**Таблиця 2.** Результати аналізу текстових фрагментів, перекладених з української мови на англійську з очікуваною часткою унікальності 0%

Параметр	Система 1	Система 2	Система 3	Система 4
Середнє значення частки унікальності тексту $\bar{y}_i$	65,95	62,85	56,18	67,34
Середня дисперсія значення частки унікальності тексту $\bar{s}_i^2$	6,38	8,03	7,64	5,12
Значення коефіцієнта Кохрена (за довірчого інтервалу 0,95)	0,35	0,36	0,34	0,30

**Таблиця 3.** Результати аналізу текстових фрагментів, перекладених з української мови на російську з очікуваною часткою унікальності 0%

Параметр	Система 1	Система 2	Система 3	Система 4
Середнє значення частки унікальності тексту $\bar{y}_i$	40,30	38,74	44,57	41,05
Середня дисперсія значення частки унікальності тексту $\bar{s}_i^2$	7,32	8,94	7,42	5,04
Значення коефіцієнта Кохрена (за довірчого інтервалу 0,95)	0,36	0,38	0,36	0,32



Аналіз результатів дослідів, поданий в табл. 2 і 3, показав достатньо високу відтворюваність усіма чотирма системами, і переклад тексту з часткою плагіату 100% дає можливість значно підвищити розрахункову частку унікальності. При цьому переклад англійською мовою дає вищий результат унікальності. Отримані результати пояснюються тим, що всі системи перевірки текстів на унікальність фактично здійснюють пошук послідовності символів, що збігаються з фрагментами, наявними в базі даних, повністю на кшталт пошуковим системам. Таким чином, синтаксично текст російською мовою буде мати більшу кількість збігів з текстом українською мовою завдяки більшій кількості однакових символів. Цей аспект може бути використаний плагіаторами для підвищення унікальності тексту через автоматичну підміну на латинські символи, наприклад, в українському тексті букв, що мають однакове написання (тобто підміна «а», «Н», «К», «р» та інших символів кирилиці на відповідні символи латиниці). Візуально це не помітно, але під час аналізу буде отримано вищу частку унікальності.

Очевидно, що найбільш ефективним і універсальним способом підвищення достовірності визначення унікальності тексту може бути повна відмова від синтаксичного аналізу текстів на користь логічного (сміслового) аналізу. Утім велике розмаїття текстів, їх тематики та спрямованості, а також достатньо велика розбіжність специфічних понять з різних галузей знань не дозволить у сучасних умовах створити систему штучного інтелекту з такою високорозвинутою семантикою та забезпечити її ефективне функціонування.

На сучасному етапі розвитку інформаційних технологій має науково-практичну значущість розв'язання задачі з удосконалення існуючих систем синтаксичного аналізу текстів на унікальність з метою підвищення достовірності результатів, що отримуються особливо за умови достовірності подання перекладеного або трансформованого тексту.

## **РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ**

На основі виконаного аналізу встановлено, що достовірність визначення частки унікальності текстових фрагментів істотно залежить від форми подання матеріалу на аналіз, а також форми та вмісту бази даних текстових фрагментів, з якими ведеться порівняння. Якщо для порівняння текстових фрагментів система має його трансформувати (наприклад, під час порівняння фрагментів різними мовами), достовірність результату значно зменшується. Отже, можна зробити висновок, що підвищення достовірності аналізу можливе у випадку усунення необхідності попередньої трансформації текстових фрагментів та забезпечення прямого порівняння наданих фрагментів з вмістом бази даних системи перевірки на плагіат. Такий варіант стає можливим у випадку спеціальної організації бази даних систем перевірки текстів на унікальність. Для підвищення достовірності визначення частки унікальності текстів пропонується використовувати апарат комбінованих систем розпізнавання образів [10–14].

У комбінованих системах розпізнавання об'єкт подається сукупністю образів, ознаки яких однозначно характеризують об'єкт розпізнавання [10, 11]. За кожним з цих образів (або за довільною їх сукупністю) мож-

на віднести об'єкт до одного з наперед визначених класів. У цьому випадку стає можливим отримання коректного рішення щодо класифікації за різних умов спостереження об'єкта розпізнавання, оскільки окремі образи за різних умов спостереження мають різний ступінь інформативності. Відповідно до цього комбінована система для визначених умов спостереження об'єкта розпізнавання здійснює селекцію найбільш інформативних образів для отримання якомога достовірнішого результату класифікації.

Таким чином, відповідно до теорії розпізнавання образів об'єктом розпізнавання є текстовий фрагмент, що надається для аналізу, а фрагменти з якими він порівнюється, є апіорно визначеними класами, ступінь подібності до яких визначатиме частку унікальності тексту, що перевіряється. Кожен з цих класів  $C_1 - C_n$  характеризується відповідними образами  $P_1 - P_n$ . Узагальнену схему порівняння тексту з наявними в базі даних фрагментами з погляду теорії розпізнавання образів показано на рис. 1.

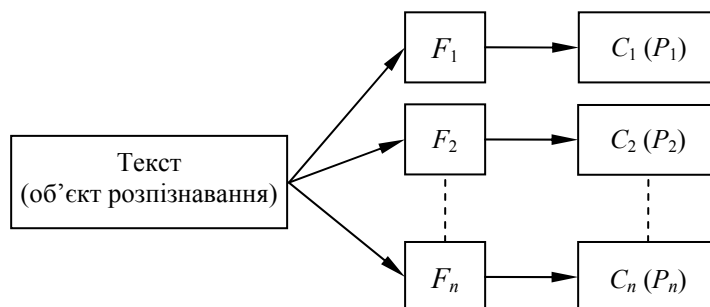


Рис. 1. Узагальнена схема порівняння тексту з наявними в базі даних фрагментами з погляду теорії розпізнавання образів

Схема, показана на рис. 1, повністю відповідає традиційному підходу до побудови систем перевірки на унікальність текстової інформації. Відповідно до неї для врахування можливих трансформацій тексту, що подається для аналізу, в систему вводяться функції перетворення  $F_1 - F_n$ , які дають змогу порівняти різноманітні форми подання інформації з наявними у базі (з класами  $C_1 - C_n$ , що характеризуються образами  $P_1 - P_n$  відповідно). Наприклад, таке трансформування використовується для порівняння тексту з урахуванням можливих варіантів його перекладу іншими мовами.

Для уникнення трансформування тексту узагальнена схема, показана на рис. 1, перетворюється до варіанта використання комбінованої системи розпізнавання образів (рис. 2).

У комбінованій системі розпізнавання класи  $C_1 - C_n$  характеризуються множиною репрезентативних образів  $\{P_R\}$ , причому за кожним образом з цієї множини можна визначити для наданого для аналізу тексту відповідний клас. Відмінність між традиційною та запропонованою схемами організації бази даних систем перевірки тексту на унікальність проілюстровано на рис. 2.

Відмінності схеми організації порівняння тексту з використанням теорії комбінованих систем розпізнавання образів полягають у тому, що в базі даних кожний клас подається сукупністю репрезентативних образів, які відповідають можливим, апіорно заданим формам подання текстової інформації.

У процесі аналізу фрагмент тексту, що аналізується, порівнюється з кожним репрезентативним образом. Частка унікальності тексту визначається відповідно до міри відстані поданого для аналізу образу від репрезентативних образів. Міра відстані до  $i$ -го репрезентативного образу визначається як

$$D_i = \|P_i - P^R\| = \sqrt{(P_i - P^R)'(P_i - P^R)},$$

де  $D_i$  — характеристика відстані до  $i$ -го репрезентативного образу;  $P_i$  — образ, що надається для аналізу;  $P^R$  — репрезентативний образ.

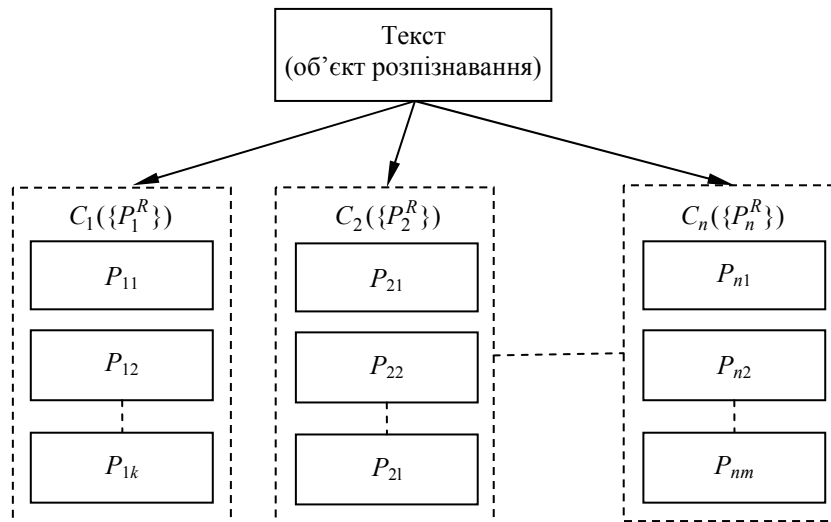


Рис. 2. Узагальнена схема порівняння тексту за наявними в базі даних фрагментами з погляду теорії комбінованих систем розпізнавання образів

Частка унікальності текстового фрагмента визначається пропорційно значенню відстані, тобто

$$D_i \rightarrow 0 \Rightarrow y_i \rightarrow 0,$$

де  $y_i$  — частка унікальності текстового фрагмента, %.

Перевірка запропонованого технічного рішення щодо підвищення достовірності визначення частки унікальності текстової інформації проводилася на прикладі двох з чотирьох раніше досліджених систем. На двох системах розробниками не передбачена можливість довільного формування бази даних за запропонованою схемою. Тому довелося повторно виконати дослід з аналізу тексту з очікуваною часткою унікальності 0% за умови його перекладу англійською і російською мовами. Результати дослідів зведено у табл. 4.

Аналіз даних, поданих у табл. 4, вказав на істотне збільшення достовірності визначення частки унікальності тексту. Порівняно з результатами дослідів, поданих у табл. 2 і 3, достовірність збільшилась у середньому на 54%. Це вказує на більш коректне порівняння та наявність позитивного ефекту від усунення попередньої трансформації текстових фрагментів, а також їх аналізу не мовою оригіналу.

**Таблиця 4.** Результати аналізу текстових фрагментів, перекладених з української мови на англійську і російську та з очікуваною часткою унікальності 0%

Параметр	Система 1	Система 2	Система 1	Система 2
	Англійська мова		Російська мова	
Середнє значення частки унікальності тексту $\overline{y}_i$	6,84	7,12	5,21	6,84
Середня дисперсія значення частки унікальності тексту $\overline{s}_i^2$	5,16	3,07	4,18	2,72
Значення коефіцієнта Кохрена (за довірчого інтервалу 0,95)	0,35	0,31	0,33	0,30

## ВИСНОВКИ

У результаті виконаних досліджень отримано такі науково-технічні результати.

1. Установлено, що в системах пошуку плагіату на достовірність визначення частки унікальності тексту істотно впливає форма подання матеріалу.

2. Для підвищення достовірності визначення частки унікальності тексту запропоновано побудову бази даних текстових фрагментів на основі комбінованої системи розпізнавання образів.

3. Використання запропонованих технічних рішень дало змогу підвищити достовірність визначення частки унікальності тексту в середньому на 54%.

4. Незважаючи на запропоновану можливість підвищення достовірності визначення частки унікальності текстів, існує безліч способів штучного збільшення цього показника, а спроби врахувати можливі варіанти трансформування текстів значно ускладнюють базу даних текстових фрагментів. Тому за напрям подальших досліджень можна вибрати створення систем не синтаксичної, а смислової перевірки та експертної оцінки наявності запозиченої інформації. Але це потребує створення високорозвиненої системи штучного інтелекту.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Сичивиця О. Авторство і псевдоавторство в науці. Стаття друга. Плагіат і плагіатори / О. Сичивиця, В.К. Жданкин // Соціогуманітарні проблеми людини. — 2008. — № 3. — С. 39–47.
2. Ліннік І. Програмне забезпечення для виявлення плагіату: практичний аспект / І. Ліннік // Науковий блог НаУ «Острозька Академія». — 2013. — Режим доступу: <http://naub.oa.edu.ua/2013/prohramne-zabezpechennya-dlya-vuyavlennya-plahiatu-praktychnyj-aspekt>
3. Михайловський Ю.Б. Система Anti-Plagiarism як інструмент запобігання плагіату в навчальній та науковій діяльності / Ю.Б. Михайловський,

- Н.А. Длугунович // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. Технічні науки. — 2013. — № 3. — С. 162–168.
4. *Шарапова Е.В.* Универсальная система проверки текстов на плагиат «Автор.net» / Е.В. Шарапова, Р.В. Шарапов // Информатика и её применения — 2012. — № 3 (6). — С. 52–58.
  5. *Hariharan Sh.* Automatic Plagiarism Detection Using Similarity Analysis / Sh. Hariharan // The International Arab Journal of Information Technology. — 2012. — N 4 (9). — P. 322–326. — Available at: <http://www.ccis2k.org/iajit/PDF/vol.9,no.4/2796-4.pdf>.
  6. *Kharat R.* Semantically Detecting Plagiarism for Research Papers / R. Kharat, P.M. Chavan, V. Jadhav, K. Rakibe // International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA). — 2013. — N 3 (3). — P. 077–080. — Available at: [http://www.ijera.com/papers/Vol3\\_issue3/P33077080.pdf](http://www.ijera.com/papers/Vol3_issue3/P33077080.pdf)
  7. *Shenoy M.* Automatic Plagiarism Detection Using Similarity Analysis [online] / M. Shenoy, K.C. Shet, U.D. Acharya // Advanced Computing: An International Journal (ACIJ). — 2012. — N 3 (3). — P. 59–62. — Available at: <http://airccse.org/journal/acij/papers/0512acij06.pdf>
  8. *Singh R.* Duplicity Detection System for Digital Documents / R. Singh, C. Dutta // International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE). — 2012. — N 5 (2). — P. 24–28. — Available at: [http://www.iaeng.org/publication/IMECS2011/IMECS2011\\_pp272-277.pdf](http://www.iaeng.org/publication/IMECS2011/IMECS2011_pp272-277.pdf)
  9. *Tschuggnall M.* Detecting Plagiarism in Text Documents through Grammar-Analysis of Authors / M. Tschuggnall, G. Specht // 15th GI-Symposium Database Systems for Business, Technology and Web, 11th March-15th March, 2013. — P. 241–259. — Available at: <http://www.btw-2013.de/proceedings/Detecting%20Plagiarism%20in%20Text%20Documents%20through%20GrammarAnalysis%20of%20Authors.pdf>
  10. *Румишский Л.З.* Математическая обработка результатов эксперимента: справочное руководство. — М.: Изд-во «Наука». — 1971. — 192 с.
  11. *Довгий С.О.* Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів / П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук. — К.: Логос, 2014. — 419 с.
  12. *Рябенський В.М.* Комбіновані системи розпізнавання образів / В.М. Рябенський, О.І. Захожай // Проблеми інформаційних технологій. — Херсон: ХНТУ. — 2011. — № 01 (009). — С. 156–160.
  13. *Захожай О.І.* Екстенціонально-інтенціональний підхід до синтезу інформаційних технологій автоматизованої обробки інформації і управління на базі багатопараметричних комбінованих систем розпізнавання образів / О.І. Захожай // Проблеми інформаційних технологій. — Херсон: ХНТУ, 2015. — № 02 (018). — С.106–111.
  14. *Меняйленко О.С.* Комбіновані системи розпізнавання образів при аналізі просторового розподілу температури коксового пирога / О.С. Меняйленко, О.І. Захожай // Електротехнічні та комп'ютерні системи. — 2013. — № 12(88). — С. 147–154.

Надійшла 18.07.2017

## ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

**Б.М. ПОПОВИЧ**

**Аннотация.** Разработана система поддержки принятия решений по исследованию и построению математических моделей, описывающих процессы в экономике и финансах; оценивание прогнозов для выполнения вычислительных экспериментов. Создана информационная аналитическая система для моделирования и прогнозирования процессов в экономике и финансах на базе регрессионных моделей со скользящим средним. Представлены результаты прогнозирования выбранных цен активов с помощью как собственно созданного программного продукта, так и уже существующих продуктов для статистической обработки данных. Для анализа результатов использованы критерии качества для оценки построенных моделей и качества оценок прогнозов. Спроектировано и разработано программное обеспечение для реализации поставленных задач. Проведены анализ, моделирование и прогнозирование цены золота, акций компаний «Укрнафта» и «Мотор Сич».

**Ключевые слова:** система поддержки принятия решений, нелинейные процессы, нестационарные процессы, гетероскедастические процессы, модель авторегрессии скользящего среднего.

### ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях общей экономической нестабильности, когда в мире происходят финансово-экономические кризисы, возникает необходимость совершенствования мировой финансовой системы, а также методов и технологий управления финансовыми рисками. Актуальной задачей является выполнение углубленных научных исследований в направлении математического моделирования и прогнозирования финансовых процессов. Это касается, безусловно, и украинского финансового рынка, на котором финансовый риск-менеджмент находится на ранней стадии своего становления.

Стремление разработать систему поддержки принятия решений (СППР), которая наиболее точно отражала реальное поведение финансовых рынков и необходимость повышения качества прогнозов ведут к появлению новых классов моделей и к модификациям и адаптации уже существующих. Таким образом, проектирование системы поддержки принятия решений, которая позволяет строить и адаптировать математические модели, адекватно описывающие динамику таких финансовых инструментов, как акции, облигации, опционы, котировки валют и других, является актуальным направлением современных исследований. В этом направлении строятся и адаптируются математические модели и вычисляются краткосрочные прогнозы на их основе [1, 2]. Прогнозирование — важнейший этап в процессе разработки стратегий, который позволяет предсказать наиболее вероятное развитие событий, а также определить, какие действия приведут к тем или иным результатам. Поэтому стратегии действий в экономике и финансах,

принятые сегодня, должны опираться на достоверные оценки возможной динамики показателей в будущем [3, 4].

Создание современных компьютеров, удобных и эффективных программных продуктов, делает прогнозирование более эффективным и достаточно мощным механизмом анализа.

Исследование посвящено разработке и реализации СППР, что позволяет исследовать и строить математические модели, проводить анализ нестационарных гетероскедастических процессов в финансах, повышать качество оценок параметров нелинейных моделей нестационарных процессов, описывающих поведение рынка.

В пределах поставленной задачи необходимо выполнить следующие задания:

- собрать статистические данные о состоянии активов некоторых компаний на финансовом рынке для выполнения вычислительных экспериментов;
- выбрать типы математических моделей для описания нестационарных процессов и адаптировать их к проблеме, которая рассматривается;
- разработать и реализовать программный продукт для моделирования и прогнозирования нелинейных нестационарных процессов в экономике и финансах;
- применить разработанный программный продукт к анализу динамики финансового рынка;
- вычислить оценки краткосрочных прогнозов и статистические параметры качества.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРИЕМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОГНОЗОВ НА ИХ ОСНОВЕ**

Приведем некоторые уже известные математические модели.

### **Полиномиальная регрессия**

Одним из самых распространенных методов описания процессов с трендом является полиномиальная регрессия такого типа:

$$y(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \dots + a_mk^m + \varepsilon(k), \quad (1)$$

где  $y(k)$  — основная (зависимая) переменная процесса;  $k = 0, 1, 2, \dots$  — дискретное время, которое связано с реальным непрерывным временем  $t$  через период дискретизации измерений  $T_s : t = kT_s$ ;  $a_i, i = 0, \dots, m$  — коэффициенты (параметры) модели;  $m$  — порядок полинома, определяющийся количеством производных, которые можно вычислить на основе адекватной полиномиальной модели процесса;  $\varepsilon(k)$  — случайная переменная, характеризующая интегрированное влияние на основную переменную случайных возмущений, не учитываемых (или излишних) регрессоров и погрешности вычислений. Выражение (1) довольно часто используется на практике благодаря простоте определения структуры модели и возможности использования метода наименьших квадратов (МНК) для оценки ее параметров [5].

*Авторегрессия с трендовой составляющей*

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^m b_j k^j + \varepsilon(k).$$

*Авторегрессия с интегрированным скользящим средним*

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j v(k-j) + \varepsilon(k)$$

описывает тренд и колебания, которые накладываются на него, если среди корней характеристического уравнения, записанного для авторегрессионной (АР)-части, есть хотя бы один единичный [6].

Поскольку такие процессы являются достаточно характерными для производственных технологий, экономики, финансов, экологии и других отраслей, то им необходимо уделить значительное внимание. Нестационарные процессы такого типа особенно часто встречаются в переходной экономике и соответствующей финансовой деятельности, для которых свойственна высокая нестационарная динамика развития.

### **Сплайны для описания квадратических, кубических и трендов высших порядков**

Линейный сплайн — это сплайн, состоящий из полиномов первого порядка, т. е. из отрезков прямых линий. Точность интерполяции линейными сплайнами невысока. Однако в некоторых случаях кусочно-линейная аппроксимация функции может оказаться лучше, чем аппроксимация более высокого порядка [7]. Сплайном первого порядка называется непрерывная на отрезке  $[a, b]$  линейная на каждом частичном отрезке  $f(x)$  функция. Его обозначение:  $S_1(x)$ . Интерполяционным для данной функции  $f(x)$  называется сплайн, удовлетворяющий условиям  $S_1(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ . График линейного интерполяционного сплайна  $S_1(x)$  — это ломаная, проходящая через заданные точки. Пусть  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , выражение для сплайна  $S_1(x)$  на таком промежутке:

$$S_1(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i},$$

где  $S_1(x)$  — сплайн первого порядка;  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  — заданные значения;  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

Для аппроксимации данных часто используют сплайн Эрмита — это сплайн третьего порядка, производная которого принимает в узлах сплайна заданные значения. В каждом узле сплайна Эрмита задано не только значение функции, а и значение ее первой производной. Сплайн Эрмита имеет непрерывную производную, но вторая производная у него разрывная. Точность интерполяции значительно лучше, чем у линейного сплайна.

**Кубический сплайн.** Некоторая функция  $f(x)$  задается на промежутке  $[a, b]$ , разбитом на части  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Кубическим сплайном называется функция  $S(x)$ , которая на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$



является многочленом не выше третьего порядка; имеет непрерывную первую и вторую производные на всем отрезке  $[a, b]$ ; в точках  $x_i$  выполняется равенство  $S(x_i) = f(x_i)$ .

Такая функция имеет вид

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

где  $S_i(x)$  — кубический сплайн;  $a_i = f(x_i)$ ;  $b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(2c_i + c_{i-1})}{6}$ ;

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}.$$

### Использование экспонентов

Экспоненциальным трендом называют тренд, который выражается следующим уравнением:

$$y(k) = ap^k + \varepsilon(k), \quad (2)$$

где  $y(k)$  — основная переменная процесса;  $a$  — свободный член экспоненты, который равен значению тренда в период времени, принятому за начало отсчета времени ( $k = 0$ );  $p$  — основной параметр экспоненциального тренда, характеризующий темп изменения уровня. Значение  $p > 1$  соответствует положительному тренду с нарастающим ускорением. Если  $p < 1$ , то такой тренд отражает тенденцию постоянного падения амплитуды переменной. При этом замедление непрерывно усиливается [7]. Экспонента не имеет экстремума и при  $k \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности при  $p > 1$  или до 0 при  $p < 1$ . Экспоненциальный тренд характерен для процессов, развивающихся в среде, которая не создает никаких ограничений для роста уровня. Из этого следует, что на практике он может развиваться только на ограниченном промежутке времени, поскольку любая среда рано или поздно создает ограничения, и любые ресурсы исчерпываются со временем. Выражение (2) часто используют в преобразованном виде:

$$y(k) = \exp(\ln(a) + \ln(pk)) + \varepsilon(k).$$

**Комбинация периодических функций.** При наличии периодических процессов тренд описывают комбинацией тригонометрических функций:

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y(k-1) + \sum_{j=1}^q b_j \cos(\omega_j - \varphi_j) + \varepsilon(k),$$

где  $y_n(k)$  — основная переменная процесса;  $a_0, \{a_i, b_i\} \ i = 1, \dots, n$  — коэффициенты (параметры) модели;  $a_n, b_n$  — старшие коэффициенты модели;  $n$  — порядок модели.

Для описания тренда можно использовать любую детерминированную функцию, которая соответствует характеру изменения тренда во времени.

## АРХИТЕКТУРА И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ СППР

Для моделирования и прогнозирования процессов в экономике и финансах был спроектирован и реализован программный продукт с удобным для пользования интерфейсом. Система реализована на базе платформы NetFramework 4.5 с использованием языка программирования C#, приведены примеры применения программы для прогнозирования реальных цен акций. Структурная схема СППР показана на рис. 1.

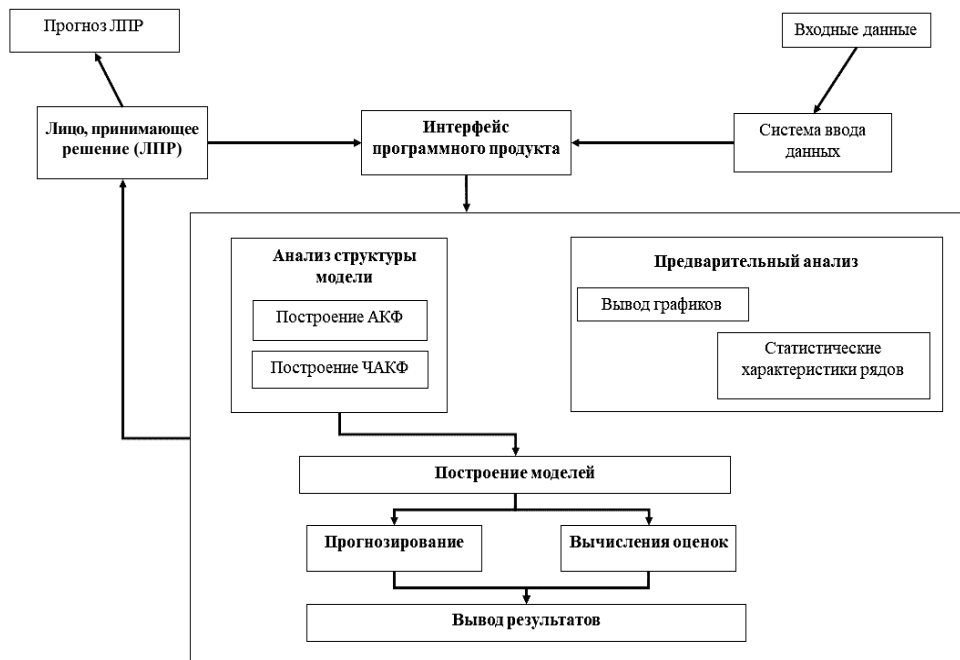


Рис. 1. Структурная схема разработанной СППР: АКФ — автокорреляционная функция; ЛПР — лицо, принимающие решение; ЧАФ — частичная автокорреляционная функция

Архитектура созданной СППР, приведена в виде структурной схемы, имеет следующие уровни:

- загрузка и обработка данных;
- анализ данных;
- построение и выбор лучшей модели;
- прогнозирование.

## ИССЛЕДОВАНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦЕН АКЦИЙ КОМПАНИИ «УКРНАФТА»

Применим разработанную СППР для анализа и моделирования цен акций компании «Укрнафта». Для сравнения результатов проведем аналогичные расчеты в программном пакете Eviews. График цен акций «Укрнафты» показан на рис. 2.

Построим ЧАКФ для процесса, изображенного на рис. 2 (рис. 3).

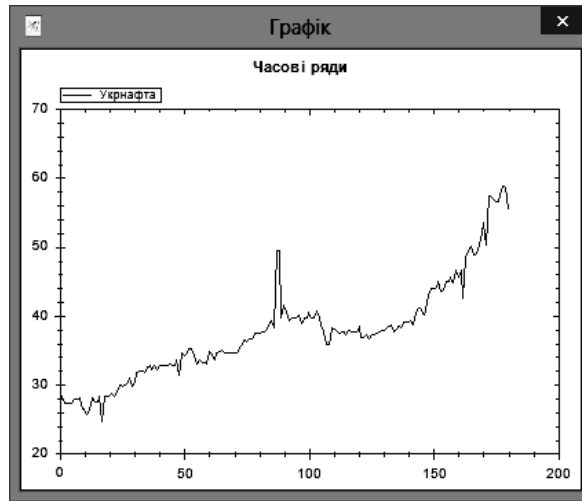
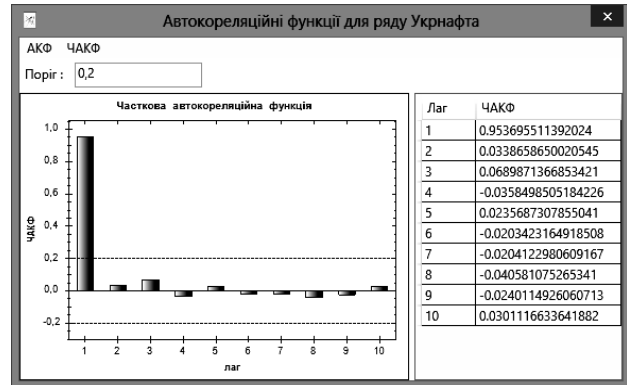
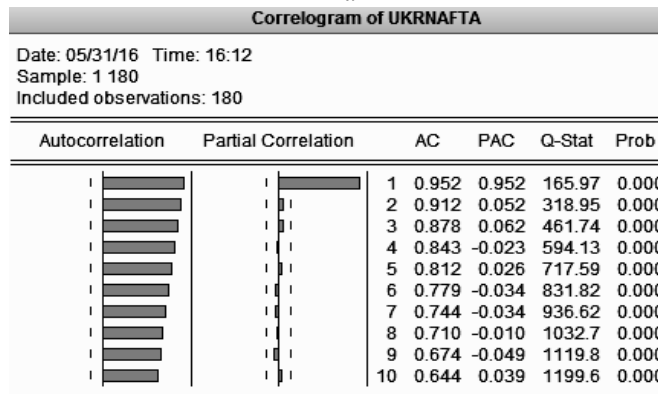


Рис. 2. Распределение по выборке цен акций компании «Укрнафта»



*a*



*b*

Рис. 3. ЧАКФ для цен акций компании «Укрнафта»: *a* — разработанная СППР; *b* — Eviews 1

Как можно видеть, разработана СППР (рис. 3, *a*) и Eviews (рис. 3, *b*) дают почти одинаковые результаты. Судя по ЧАКФ целесообразно построить модель AP (1), которую описывает формула

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1).$$

Оценим коэффициенты уравнения с помощью МНК и рекурсивного метода наименьших квадратов (РМНК) в разработанной СППР и Eviews (рис. 4).

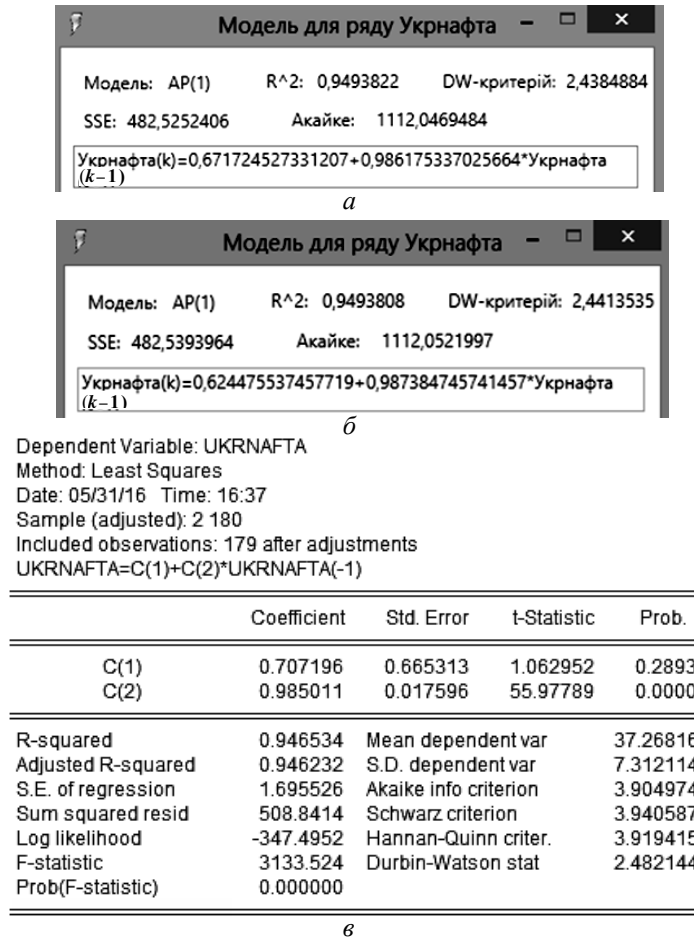


Рис. 4. Характеристика модели AP (1), оценена для цен акций компании «Укрнафта»: а — МНК разработанная СППР; б — РМНК, разработанная СППР; в — Eviews

Лучший результат оценивания с помощью разработанной СППР (как с помощью МНК (рис. 4, а), так и с помощью РМНК (рис. 4, б)), чем Eviews (рис. 4, в). Лучший результат дал МНК в разработанной СППР. Для удобства результаты всех оценок сведены в табл. 1.

Таблица 1. Оценки параметров модели AP (1) для цен акций компании «Укрнафта»

Коэффициент	Оценка в СППР по методу МНК	Оценка в СППР по методу РМНК	Оценка в Eviews
$a_0$	0,6717245	0,624475	0,707196
$a_1$	0,986175	0,987384	0,985010

Для всех трех случаев имеем достаточно высокий показатель адекватности (коэффициент детерминации выше 0,94). Поэтому нет необходимости улучшать модель.

Попробуем спрогнозировать (статическим методом) пять последних измерений цен акций (рис. 5).

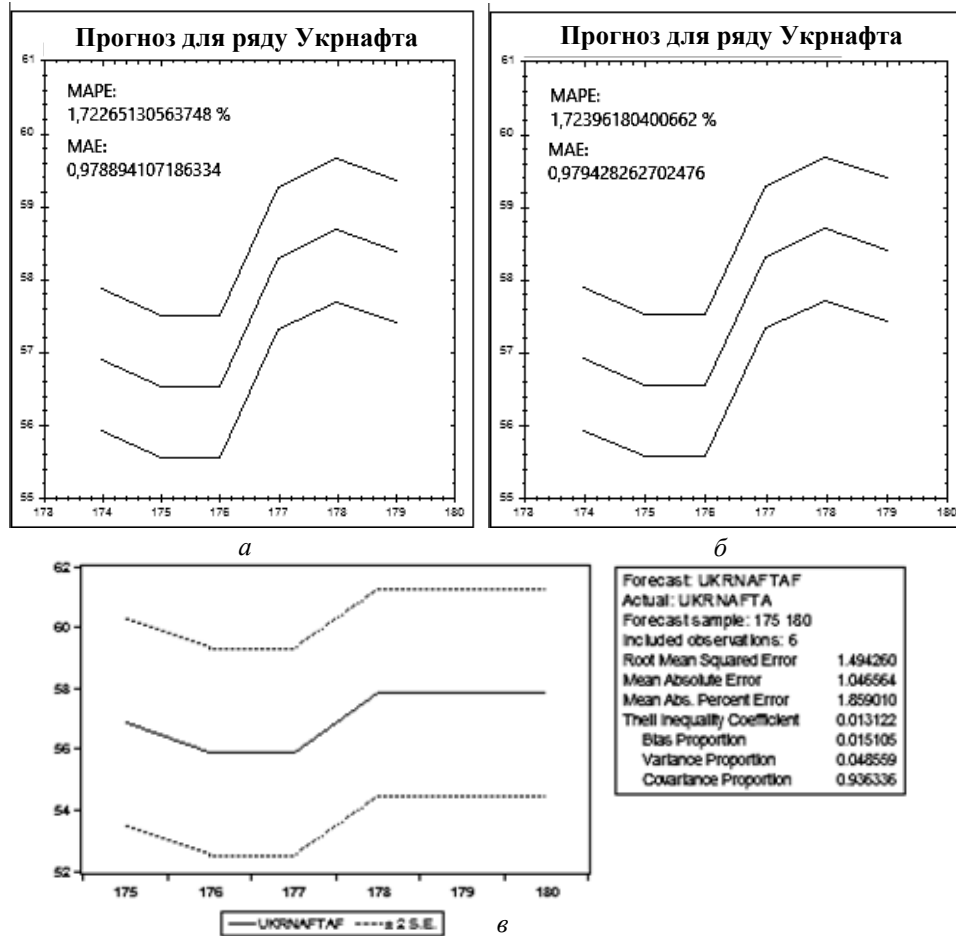


Рис. 5. Прогноз для цен акций компании «Укрнафта» на основе модели AP (1): а — МНК разработанная СППР; б — РМНК разработанная СППР; в — Eviews

Как видим и прогнозы на основе модели AP (1), оцененной с помощью как МНК (рис. 5, а) и РМНК (рис. 5, б) в разработанной СППР, так и Eviews (рис. 5, в) дали схожие результаты. Конкретные значения прогноза приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты прогнозирования цен акций компании «Укрнафта» на основе модели AP (1)

Номер измерения	Реальное значение	Разработанная СППР				Eviews	
		МНК		РМНК		Прогноз	Погрешность
		Прогноз	Погрешность	Прогноз	Погрешность		
175	56,63	56,8837	0,2537	56,9054	0,2754	56,853	0,2228
176	56,63	56,5188	0,1112	56,5400	0,0899	55,868	0,7622
177	58,42	56,5188	1,9012	56,5400	1,8799	55,868	2,5522
178	58,81	58,2840	0,5259	58,3074	0,5025	57,838	0,9722
179	58,52	58,6686	0,1487	58,6925	0,1726	57,838	0,6822
180	55,45	58,3827	2,9327	58,4062	2,9562	57,838	ы2,3878
Средняя погрешность	—	—	0,9789	—	0,9794	—	1,2632

## ИССЛЕДОВАНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦЕН АКЦИЙ КОМПАНИИ «МОТОР СИЧ»

Последующим исследованием, осуществленным с помощью, разработанной СППР, будет анализ и моделирование цен акций компании «Мотор Сич». График цен акций компании «Мотор Сич» приведен на рис. 6.

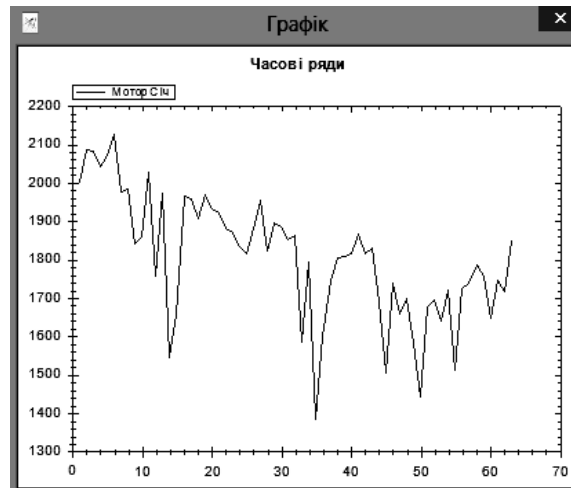


Рис. 6. Графическое представление цен акций компании «Мотор Сич»

Будем строить модель авторегрессии со скользящим средним (АРСС) (порядок скользящего среднего (СС) определяется по ЧАКФ скользящего среднего).

Построим ЧАКФ для процесса, изображенного на рис. 7.

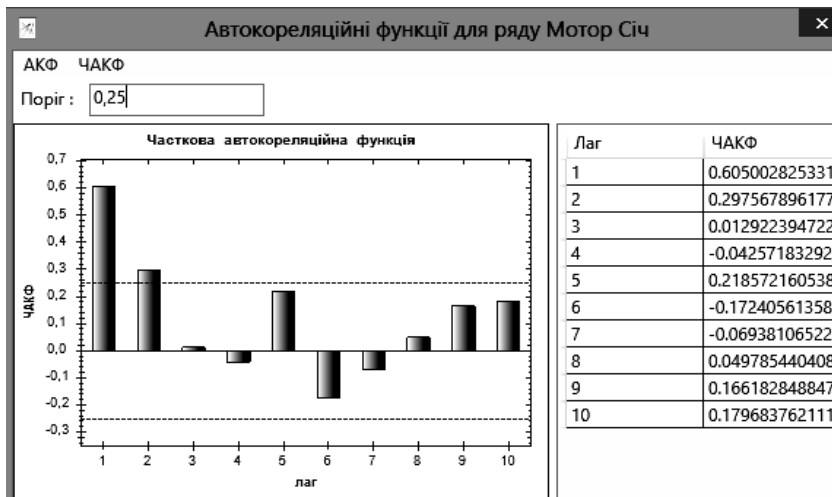


Рис. 7. ЧАКФ для цен акций компании «Мотор Сич»

Исходя из результатов построения ЧАКФ, целесообразно использовать модель АР (2), которая описывается формулой

$$y(k) = a_0 + a_1y(k-1) + a_2y(k-2). \quad (3)$$

Оценим коэффициенты уравнения (3) с помощью МНК и РМНК в разработанной СППР (рис. 8).

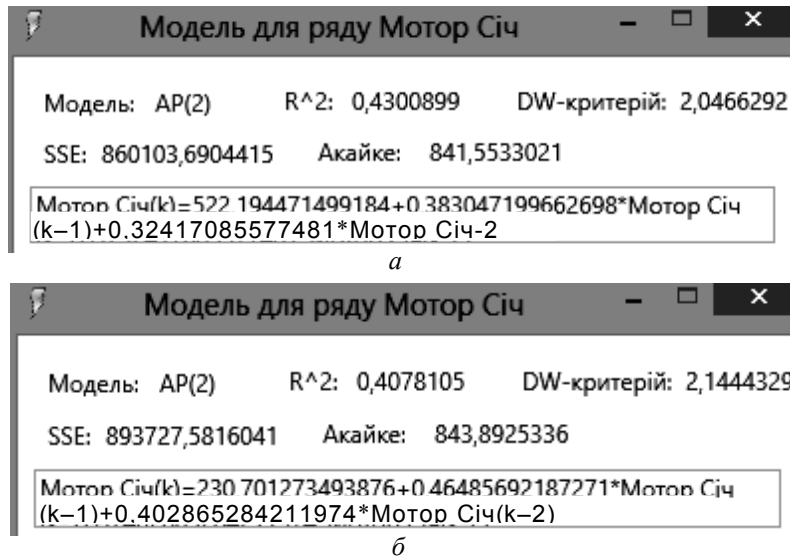


Рис. 8. Характеристика модели AP (2), оценена для цен акций компании «Мотор Сич»: а — МНК разработанная СППР; б — РМНК разработанная СППР

Лучший результат оценивания получен с помощью МНК (рис. 8, а). Будем строить АРСС, поскольку показатели АР-моделей неудовлетворительные. График экспоненциального СС для цен акций «Мотор Сич» показан на рис. 9.

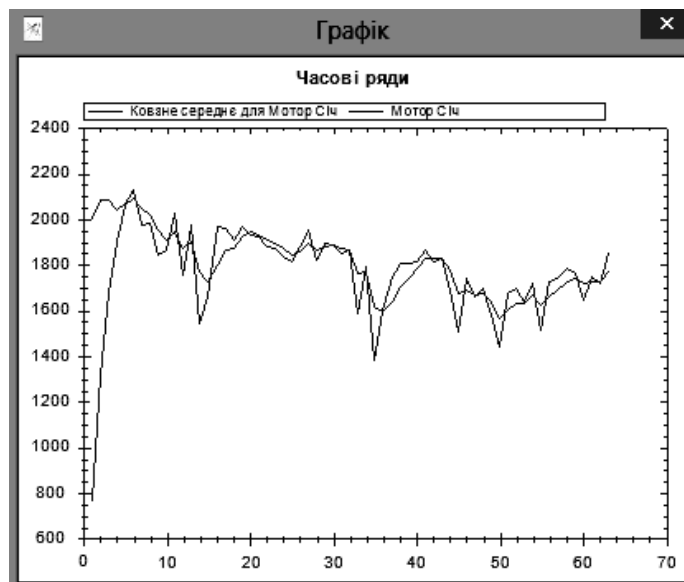


Рис. 9. График ряда цен акций компании «Мотор Сич» и его экспоненциального СС

Теперь оценим ЧАКФ для экспоненциального СС цен акций «Мотор Сич». Результат приведен на рис. 10.

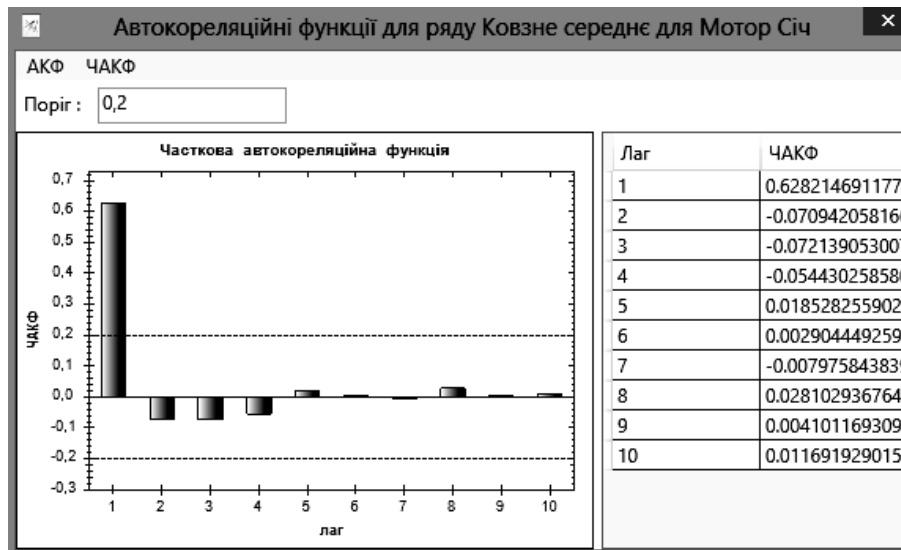
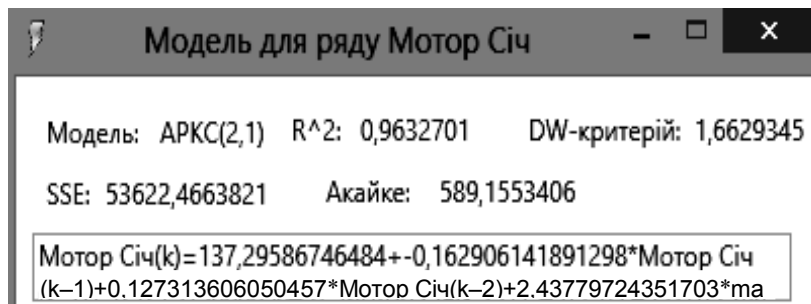


Рис. 10. ЧАКФ експоненціального СС цен акцій компанії «Мотор Січ»

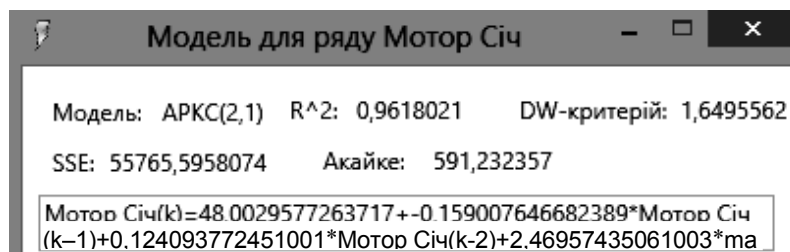
Таким образом, на основе анализа ЧАКФ построим модель АРСС (2,1), которая описывается уравнением

$$y(k) = a_0 + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + b_0\epsilon(k) + b_1\epsilon(k-1). \quad (4)$$

Оценим коэффициенты уравнения (4) с помощью МНК и РМНК в разработанной СППР (рис. 11).



а



б

Рис. 11. Характеристика модели АРСС (2,1), оценена для цен акцій компанії «Мотор Січ»: а — МНК в разработанной СППР; б — РМНК в разработанной СППР

Результаты обеих оценок сведены в табл. 3.

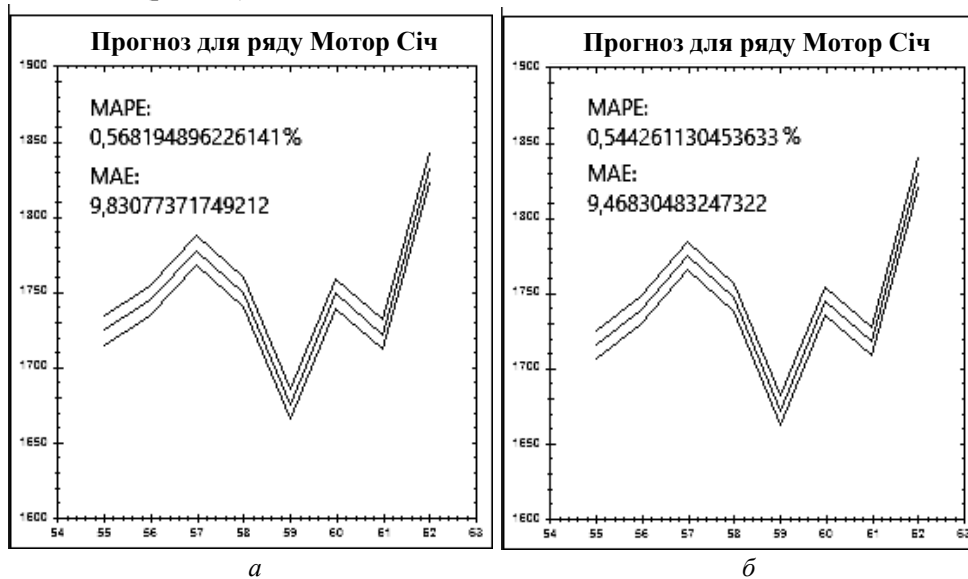


**Таблица 3.** Оценки параметров модели АРСС (2,1) для цен акций компании «Мотор Сич»

Коэффициент	Оценка в СППР по методу МНК	Оценка в СППР по методу РМНК
$a_1$	-0,1629	-0,1590
$a_2$	-0,1273	-0,1240
$b_0$	2,4377	2,4695
$b_1$	-1,2256	-1,2153

Для обоих методов имеем высокий показатель адекватности (коэффициент детерминации выше 0,96).

Спрогнозируем (динамическим методом) восемь последних измерений цен акций (рис. 12).



*Рис. 12.* Прогноз для цен акций компании «Мотор Сич» на основе модели АРСС (2,1): *а* — МНК в разработанной СППР; *б* — РМНК в разработанной СППР

Как можно видеть, оба метода дали схожие результаты. Конкретные значения прогноза приведены в табл. 4.

**Таблица 4.** Результаты прогнозирования цен акций компании «Мотор Сич» на основе модели АРСС (2,1)

Номер измерения	Реальное значение	Разработанная СППР			
		МНК		РМНК	
		Прогноз	Погрешность	Прогноз	Погрешность
56	1722	1724,326525	2,3665	1715,753768	6,2062
57	1738,9	1744,362984	5,443	1738,625902	0,2941
58	1786,3	1777,104529	9,2255	1774,33762	11,992
59	1758,2	1749,305671	8,9343	1746,716092	11,524
60	1646,4	1675,37533	29,005	1671,740661	25,371
61	1745,7	1748,50207	2,7821	1744,746591	0,9734
62	1716,9	1721,493947	4,5939	1717,913988	1,014
63	1848	1831,654466	16,296	1829,578236	18,372
Средняя погрешность	—	—	9,8308	—	9,4683

## ИССЛЕДОВАНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦЕН НА ЗОЛОТО

Последним исследованием, проведенным с помощью разработанной СППР, будет анализ и моделирование цены золота. Данные представлены на сайте Лондонского рынка. Выбор этого показателя именно для золота обусловлен тем, что золото само по себе достаточно стабильная валюта. Это одно из условий построения адекватной модели этого процесса и дальнейшего прогнозирования.

График цен акций золота изображен на рис. 13.

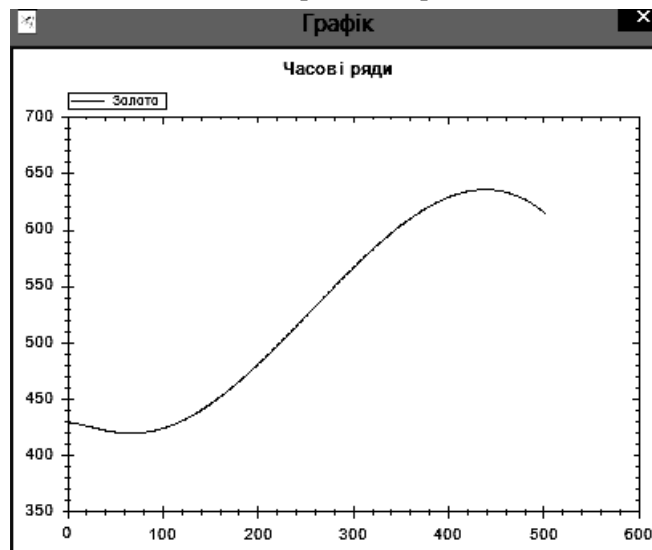


Рис. 13. Графическое представление цен золота

Будем считать, что это интегрированный процесс (на основе визуального анализа). Поэтому будем строить модель АРИСС.

Построим ЧАКФ для данного процесса (рис. 14).



Рис. 14. ЧАКФ для цен золота

Исходя из результатов построения ЧАКФ целесообразно использовать модель авторегрессии с интегрированным скользящим средним (АРИСС) (1,1,0) (не добавляя СС), которая описывается формулой

$$\Delta^d y(k) = a_0 + a_1 \Delta^d y(k-1). \quad (5)$$

Оценим коэффициенты уравнения (5) с помощью МНК и РМНК в разработанной СППР (рис. 15).

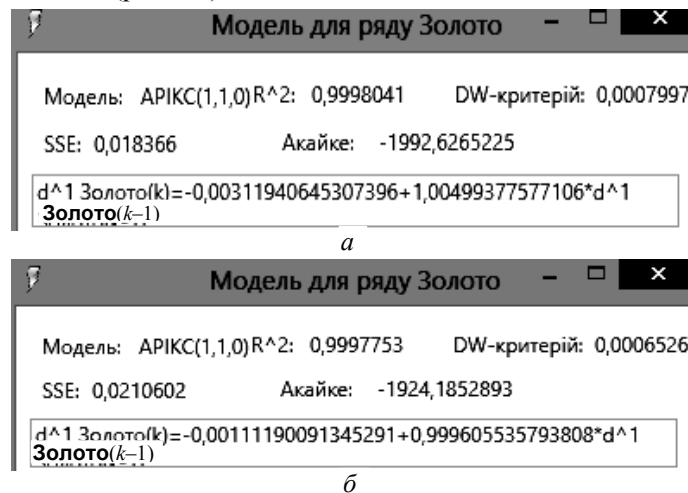


Рис. 15. Характеристика модели АРСС (1,1,0), оценена для цен золота: а — МНК в разработанной СППР; б — РМНК в разработанной СППР

Лучший результат оценивания получен по МНК (рис. 15, а). Поскольку модель имеет удовлетворительное качество, то вводить скользящее среднее не будем.

Для обоих случаев имеем очень высокий показатель адекватности (коэффициент детерминации выше 0,99). Поэтому к модели не добавляем скользящее среднее.

Спрогнозируем (динамическим методом) шесть последних измерений цен акций (рис. 16).

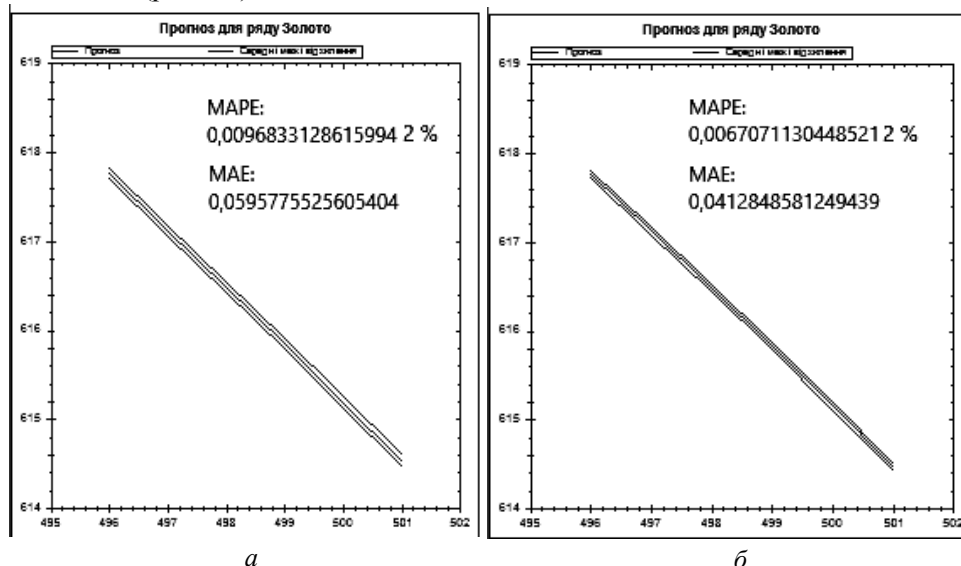


Рис. 16. Прогноз для цен золота на основе модели АРИСС (1,1,0): а — МНК в разработанной СППР; б — РМНК в разработанной СППР

Оба метода дали схожие результаты. Конкретные значения прогноза приведены в табл. 5.

**Таблица 5.** Результаты прогнозирования цен золота на основе модели АРИСС (1,1,0)

Номер измерения	Реальное значение	Разработанная СППР			
		МНК		РМНК	
		Прогноз	Погрешность	Прогноз	Погрешность
497	617,754863	617,761219	0,0064	617,766563	0,01169991
498	617,110592	617,129683	0,0191	617,134049	0,02345727
499	616,453648	616,491873	0,0382	616,48892	0,03527211
500	615,783979	615,847759	0,0638	615,831123	0,04714425
501	615,101533	615,197309	0,0958	615,160607	0,05907421
502	614,406256	614,540492	0,1342	614,477318	0,07106141
Средняя погрешность	–	–	0,0596	–	0,04128486

Как показывает табл. 5, оба варианта оценки модели АРИСС (2,1) дают хорошие результаты прогнозирования.

## ВЫВОДЫ

Разработанную СППР применено к ряду, описывающему цену акций компании «Укрнафта»; полученные результаты сравнены с аналогичными вычислениями в системе Eviews 7.0. В результате сравнения очевидно, что по качеству вычислений реализованный программный продукт не уступает уже существующим коммерческим, которые требуют значительных финансовых затрат.

Выполнен анализ и моделирование процессов ценообразования акций компаний «Укрнафта», «Мотор Сич» и цен золота. Были использованы методы идентификации модели (на основе автокорреляционной функций), а также построены модели процессов.

Для акций компании «Укрнафта» лучшей оказалась модель AP(1). Наилучшее оценивание параметров (построение наилучшей модели и лучшие показатели при прогнозировании) показал МНК в разработанной СППР, однако различия с РМНК и пакетом Eviews не являются существенными.

При оценке процесса ценообразования акций компании «Мотор Сич» лучшие результаты показала модель APCC (2,1). Лучшая модель получена при оценке по МНК, при этом модель, полученная по РМНК, давала лучший прогноз.

При оценке процесса ценообразования золота лучшие результаты показала модель АРИСС (1,1,0). Лучшая модель получена при оценке по МНК, однако по модели РМНК получен лучший прогноз.

Следует отметить, что две (последние) из трех моделей имели лучшие показатели, полученные при оценке по МНК, но лучшие прогнозы были показаны моделями, полученными при оценке по РМНК.

Разработанная СППР может использоваться как самостоятельный программный продукт и быть встроенной в любую аналитическую или статистическую систему.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Бидюк П.И.* Анализ и моделирование экономических процессов переходного периода / П.И. Бидюк, О.В. Половцев. — К.: НТУ «КПИ», 1999. — 230 с.
2. *Бидюк П.И.* Эконометрический анализ временных рядов: конспект лекций / П.И. Бидюк. — К.: НТУУ «КПИ», 2007. — 250 с.
3. *Бидюк П.И.* Система поддержки принятия решений для прогнозирования нестационарных процессов / П.И. Бидюк, Е.О. Демкивський // Научные работы Николаев. гос. технич. ун-та. — 2008. — Вып. 77. — С. 137–159.
4. *Бидюк П.И.* Проектирование компьютерных информационных систем поддержки принятия решений: учеб. пособие / П.И. Бидюк, Л.О. Коршевнюк. — К.: ННК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2010. — 340 с.
5. *Hosmer David W.* Applied logistic regression / David W. Hosmer. Jr. Stanley Lemeshow. — Hoboken: John Wiley & Sons Ltd., 2008. — 396 p.
6. *Бидюк П.И.* Временные ряды: моделирование и прогнозирование / П.И. Бидюк, О.И. Савенков, И.В. Баклан. — К.: ЕКМО, 2003. — 141 с.
7. *Экспоненциальный тренд и его свойства.* — Режим доступа: <http://um.co.ua/9/9-15/9-158069.html>

*Поступила 02.10.2017*

## ПРОГНОЗНІ ОЦІНКИ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ЗА НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

О.Г. НАКОНЕЧНИЙ, П.М. ЗІНЬКО, Ю.М. ШЕВЧУК

**Анотація.** Розглянуто моделі поширення довільної кількості видів інформації, які подано у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь зі стаціонарними параметрами. Проаналізовано різні способи подання спостережень. Наведено алгоритми отримання усередненої оптимальної середньоквадратичної прогновної оцінки та гарантованої прогновної оцінки. Наведено приклад знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної оцінки для випадку поширення одного виду інформації та алгоритм знаходження гарантованих прогнозних оцінок для окремого випадку подання множини можливих похибок спостережень. Подано результати числового експерименту для задачі пошуку гарантованих прогнозних оцінок для систем з двома джерелами інформації.

**Ключові слова:** моделі поширення інформації, прогнозні оцінки, невизначеність, середньоквадратичні оцінки.

### ВСТУП

Розглядається деяка соціальна група чисельністю  $L$ , на яку спрямовується інформаційна дія (атака, вплив) по  $N$  каналах, причому кількість суб'єктів, що сприйняли інформацію  $k$ -го типу залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Позначимо через  $x_k(t)$  кількість суб'єктів, що сприйняли інформацію  $k$ -го типу в момент часу  $t$ ; через  $\beta_k(t)$  — інтенсивність спілкування;  $u_k(t)$  — зовнішні дії. Тоді зміну в часі величини  $x_k(t)$  можна описати системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = \beta_k(t)x_k(t) \left( L - \sum_{j=1}^N x_j(t) \right) + u_k(t), \quad x_k(0) = L_{0k}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1)$$

У працях [1–4] виконано аналіз рівнянь (1) за постійних параметрів і спеціального вибору функцій  $u_k(t)$ . Властивості розв'язків системи (1) за спеціального вибору  $u_k(t)$  проаналізовано у праці [5]. Постановки задач про гарантоване оцінювання параметрів за результатами спостережень та методи їх розв'язання розглядалися у працях [6, 7].

## ПОБУДОВА ПРОГНОЗНИХ ОЦІНОК

Нехай в точках  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ,  $t_i \in (0, \overline{T})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , спостерігаються за невідомих параметрів  $\theta_k = (\alpha_k, \beta_k)$  величини  $x_k(t_j)$  і  $y_{kj} = \dot{x}_k(t_j) + v_{kj}$ , де функції  $x_k(t)$  є розв'язками системи рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = (\alpha_k + \beta_k x_k(t)) \left( L - \sum_{j=1}^N x_j(t) \right), \quad x_k(0) = L_{0k}, \quad k = \overline{1, N} \quad (2)$$

(тут  $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{km})^T$  — вектор похибок спостережень).

Відомо також, що невідомі похибки спостережень та невідомі параметри  $\theta_k$  належать відповідно заданим множинам  $V_k \subset R^m$  і  $\Theta_k, k = \overline{1, N}$ .

**Означення 1.** Прогнозними оцінками величин  $x_k(t_{m+1}), k = \overline{1, N}$ , де  $t_{m+1} > t_m$ , назвемо

$$\hat{x}_k(t_{m+1}) = g_k(y, x)$$

(тут  $y = (y_1, \dots, y_N)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$ ,  $y_k = (y_{k1}, \dots, y_{km})$ ,  $x_k = (x_k(t_1), \dots, x_k(t_m))$ , а  $g_k, k = \overline{1, m}$  — деякі функції векторних аргументів).

Проблема, яка досліджується в роботі, полягає в знаходженні оптимальних у деякому сенсі прогнозних оцінок.

Позначимо через  $G_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , множини

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k)) \in V_k\} \cap \Theta_k, \quad k = \overline{1, N},$$

де

$$f_k(\theta_k) = (f_{k1}(\theta_k), \dots, f_{km}(\theta_k)); f_{kj}(\theta_k) = \alpha_k \varphi_j + \beta_k \psi_{kj};$$

$$\varphi_j = L - \sum_{s=1}^N x_s(t_j); \psi_{kj} = x_k(t_j) \varphi_j, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, m}.$$

**Твердження 1.** Нехай множини  $V_k, k = \overline{1, N}$ , — обмежені, а вектори  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  і  $\psi(k) = (\psi_{k1}, \dots, \psi_{km})$  є лінійно незалежними за кожного  $k$ . Тоді множини  $G_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , обмежені в  $R^2$ .

**Доведення.** Оскільки множини  $V_k, k = \overline{1, N}$ , — обмежені, то за деякого  $q^2$  справедливе включення  $V_k \subseteq S_q(k), k = \overline{1, N}$ , де

$$S_q(k) = \{v_k : (v_k, v_k) \leq q^2\}, \quad k = \overline{1, m},$$

а отже,  $G_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , будуть включатись в множини  $G_k^+(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , де

$$\begin{aligned} G_k^+(x, y) &= \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k), y_k - f_k(\theta_k)) \leq q^2\} \cap \Theta_k = \\ &= G_k^{(1)}(x, y) \cap \Theta_k, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки  $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$  точки мінімуму функцій  $\Phi_k(\theta_k)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , то  $\Phi'_k(\hat{\theta}_k) = 0$ .

Розкладемо функції  $\Phi_k(\theta_k), k = \overline{1, N}$  в ряд Тейлора у відповідних точках  $\hat{\theta}_k$  і дістанемо

$$\Phi_k(\theta_k) \cong \Phi_k(\hat{\theta}_k) + \frac{1}{2}(\Phi_k''(\hat{\theta}_k)(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), \quad k = \overline{1, N},$$

де  $\Phi_k''(\hat{\theta}_k)$  — матриці других похідних, які дорівнюють  $2P_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Звідси отримаємо, що множини  $G_k^{(1)}(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , мають вигляд

$$G_k^{(1)}(x, y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq q^2 - \Phi_k(\hat{\theta}_k)\},$$

де  $\Phi_k(\hat{\theta}_k) = (y_k - f_k(\hat{\theta}_k), y_k - f_k(\hat{\theta}_k))$ ;  $P_k$  — матриці вигляду

$$P_k = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) \end{pmatrix};$$

$$P_{11}(k) = (\varphi, \varphi), P_{22}(k) = (\psi(k), \psi(k)), P_{12}(k) = P_{21}(k) = (\varphi, \psi(k)),$$

$$\hat{\theta}_k \in \text{Arg min } \Phi_k(\theta_k).$$

Оскільки множини  $G_k^{(1)}(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , обмежені, то обмеженими є і множини  $G_k^+(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , а отже, і множини  $G_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Позначимо:

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N), \theta_1 \in G_1(x, y), \dots, \theta_N \in G_N(x, y).$$

Уведемо множину прогнозних оцінок вектора

$$x(t_{m+1}, \theta) = (x_1(t_{m+1}, \theta), \dots, x_N(t_{m+1}, \theta)),$$

яка визначається так:

$$X = \{x(t_{m+1}, \theta)\}.$$

Уведемо також на вимірних підмножинах множин  $G_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , імовірнісні міри  $\mu_k(\cdot)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , такі, що  $\mu_k(G_k(x, y)) = 1$ .

Якщо  $\hat{x}(\theta) = \hat{x}(t_{m+1}, \theta)$  — деяка прогнозна оцінка, то визначимо середньоквадратичну похибку такої оцінки у вигляді:

$$\sigma(\hat{x}) = \left\{ \int_{G(x, y)} |\hat{x}(\theta) - x(\theta)|^2 \mu(d\theta) \right\}^{1/2},$$

де  $G(x, y) = \prod_{k=1}^N G_k(x, y)$ ;  $\mu(d\theta) = \prod_{k=1}^N \mu_k(d\theta)$ .

**Означення 2.** Величину  $\tilde{x}$ , що визначається з умови

$$\tilde{x} \in \text{Arg min}_{\hat{x} \in X} \sigma(\hat{x}),$$

назвемо *усередненою оптимальною середньоквадратичною прогнозною оцінкою* (УОСКП-оцінка) величини  $x(t_{m+1}, \theta)$ , а величину  $\sigma(\tilde{x})$  — *середньоквадратичною похибкою такої оцінки*.

**Твердження 2.** УОСКП-оцінка має вигляд



$$\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta), \quad (4)$$

де рівність виконується майже скрізь за мірою  $\mu(\cdot)$ ; при цьому

$$\sigma(\tilde{x}) = \int_{G(x,y)} |x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2.$$

**Доведення.** Оскільки

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{x}) &= \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta) + \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) \geq \\ &\geq \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta), \end{aligned}$$

то

$$\min_{\hat{x} \in X} \sigma^2(\hat{x}) = \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) = \int_{G(x,y)} |x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2,$$

і мінімум досягається на такому векторі  $\hat{x}(\theta)$ , для якого виконується рівність

$$\int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta) = 0,$$

тому майже скрізь за мірою  $\mu$  виконується рівність  $\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta)$ ,

що і потрібно було довести.

Нехай далі вектори  $v_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , належать відповідним множинам  $V_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , вигляду

$$V_k = \{v_k : (Q_k v_k, v_k) \leq 1\},$$

а вектор  $\theta$  належить простору  $R^2$ ;  $Q_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , — додатно визначені матриці.

**Твердження 3.** Нехай вектори  $\varphi, \psi(k)$ ,  $k = \overline{1, N}$  — лінійно незалежні. Тоді множини  $G_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , матимуть вигляд

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq \gamma^2\}, \quad k = \overline{1, N},$$

де  $P_k$ ,  $k = \overline{1, N}$  — матриці з елементами  $P_{ij}(k)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $k = \overline{1, N}$ :

$$P_{11}(k) = (Q_k \varphi, \varphi), \quad P_{22}(k) = (Q_k \psi(k), \psi(k)), \quad P_{12}(k) = P_{21}(k) = (Q_k \varphi, \psi(k)),$$

а вектори  $\hat{\theta}_k = (\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} P_{11}(k)\alpha_k + P_{12}(k)\beta_k = (Q_k y_k, \varphi); \\ P_{21}(k)\alpha_k + P_{22}(k)\beta_k = (Q_k y_k, \psi(k)) \end{cases} \quad (5)$$

і параметри  $\gamma_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , такі:

$$\gamma_k = 1 - \Phi_k(\hat{\theta}_k);$$

$$\Phi_k(\theta_k) = (Q_k(y_k - \alpha_k \varphi - \beta_k \psi(k)), y_k - \alpha_k \varphi - \beta_k \psi(k)), \quad k = \overline{1, N}.$$

**Доведення.** Зауважимо спочатку, що

$$\min_{\theta} \Phi_k(\theta_k) = \Phi_k(\hat{\theta}_k),$$

де  $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$ , визначають із системи рівнянь (5).

Із формули Тейлора будемо мати рівності

$$\Phi_k(\theta_k) = \Phi_k(\hat{\theta}_k) + (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), \quad k = \overline{1, N},$$

з яких отримуємо

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq 1 - \Phi_k(\hat{\theta}_k)\},$$

що і треба було довести.

**Наслідок.** Візьмемо міри  $\mu_k(\cdot), k = \overline{1, N}$ , у вигляді  $\mu_k(d\theta) = d\theta / S(G_k(x, y))$ , де  $S(G_k(x, y))$  — площа еліпса  $G_k(x, y)$ . Тоді справедлива рівність:

$$\tilde{x} = \pi^{-N} \prod_{k=1}^N \left( \frac{\lambda_1(k)\lambda_2(k)}{\gamma_k} \right)^{1/2} \int_{\bar{G}(x, y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}) d\theta,$$

де  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N)$ ,

$$\bar{G}(x, y) = \prod_{k=1}^N \bar{G}_k(x, y), \bar{G}_k(x, y) = \{\theta_k : (P_k\theta_k, \theta_k) \leq \gamma_k\};$$

$\lambda_1(k)$  і  $\lambda_2(k)$  — власні значення матриць  $P_k, k = \overline{1, N}$ .

Розглянемо далі гарантовані прогнози оцінки величин  $x_k(t_{m+1}, \theta), k = \overline{1, N}$ . Припускаємо, що вектори  $\theta_k, k = \overline{1, N}$ , належать заданим множинам  $\Theta_k \subset R^m, k = \overline{1, N}$ .

**Означення 3.** Гарантованою прогнозою оцінкою величин  $x_k(t_{m+1}, \theta), k = \overline{1, N}$ , назвемо вектори  $z_k, k = \overline{1, N}$ , які визначаються з умов:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_i, i=1, N} \max_{\theta_i, i=1, N} |x_k(t_{m+1}, \gamma_1, \dots, \gamma_N) - x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N)| = \\ = \max_{\theta_i, i=1, N} |z_k - x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N)| = \sigma_{1k}, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

(тут  $\gamma_1 \in G_1(x, y), \dots, \gamma_N \in G_N(x, y), \theta_1 \in G_1(x, y), \dots, \theta_N \in G_N(x, y)$ ), а  $\sigma_{1k}, k = \overline{1, N}$ , назвемо гарантованими похибками оцінок  $z_k, k = \overline{1, N}$ .

**Твердження 4.** Нехай множини  $G_k(x, y), k = \overline{1, N}$ , — обмежені та замкнені. Гарантовані прогнози оцінки  $z_k, k = \overline{1, N}$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} z_k = \frac{1}{2} \left( \max_{\theta_i, i=1, N} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) + \min_{\theta_i, i=1, N} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) \right), \\ \theta_1 \in G_1(x, y), \dots, \theta_N \in G_N(x, y), \end{aligned}$$

при цьому

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{2} \left( \max_{\theta_i, i=1, N} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) - \min_{\theta_i, i=1, N} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) \right);$$

$$\theta_1 \in G_1(x, y), \dots, \theta_N \in G_N(x, y).$$

**Доведення.** Зауважимо, що величини  $x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , належать до відповідних відрізків  $[x_k^-, x_k^+]$ ,  $k = \overline{1, N}$ , де

$$x_k^- = \min_{\theta_i, i=1, N} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N), x_k^+ = \max_{\theta_i, i=1, N} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N);$$

$$\theta_1 \in G_1(x, y), \dots, \theta_N \in G_N(x, y).$$

Тоді справджується:

$$\begin{aligned} & \max_{\theta_i, i=1, N} |x_k(t_{m+1}, \gamma_1, \dots, \gamma_N) - x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N)| = \\ & = \left| x_k(t_{m+1}, \gamma_1, \dots, \gamma_N) - \frac{1}{2}(x_k^- + x_k^+) \right| + \sigma_{1k} \geq \sigma_{1k}, \theta_i \in G_i(x, y), k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

а отже, нижня границя досягається на значеннях, які дорівнюють векторам  $z_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , що і потрібно було довести.

Розглянемо тепер випадок, коли в точках  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ,  $t_i \in (0, \overline{T})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , спостерігають вектори:

$$y_k = H_k(t_k, \theta) + v_k, k = \overline{1, m},$$

де  $H_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , — матриці розмірності  $n \times N$ ,  $x(t_k) = (x_1(t_k), \dots, x_N(t_k))^T$ ,  $k = \overline{1, m}$ ;  $v_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , — похибки спостережень;  $x(t_k, \theta)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , — розв'язок системи рівнянь (2) за деяких значень параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ .

Будемо припускати, що вектор  $v = (v_1, \dots, v_m)$  і параметр  $\theta$  належать відповідно  $V$  і  $\Theta$ .

Уведемо множину

$$\Theta_y = \{\theta : (y_1 - H_1 x(t_1, \theta), \dots, y_m - H_m x(t_m, \theta)) \in V\} \cap \Theta.$$

Припустімо, що множина  $\Theta_y$  — обмежена. Через  $\text{co} \Theta_y$  позначимо найменшу замкнену опуклу множину, що містить множину  $\Theta_y$ . На множині  $\Theta_y$  розглянемо гарантовані прогнозні оцінки величин  $x_k(t_{m+1}, \theta)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , які знаходимо з умов:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\theta} \in \text{co} \Theta_y} \max_{\theta \in \text{co} \Theta_y} |x_x(t_{m+1}, \hat{\theta}) - x_k(t_{m+1}, \theta)| = \\ & = \max_{\theta \in \text{co} \Theta_y} |\hat{x}_k - x_k(t_{m+1}, \theta)| = \sigma_{2k}, k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Аналогічно тому, як це зроблено у твердженні 4, можна показати, що

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ + \hat{x}_k^-), \sigma_{2k} = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^-), k = \overline{1, N},$$

де  $\hat{x}_k^+ = \max_{\theta \in \text{co} \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ ,  $\hat{x}_k^- = \min_{\theta \in \text{co} \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Для прикладу розглянемо випадок, коли множина  $V$  має вигляд

$$V = \left\{ v : \sum_{k=1}^m (Q_k v_k, v_k) \leq 1 \right\},$$

де  $Q_k$  — додатно визначена матриця,  $\Theta = R^{2N}$ .

Згідно з формулою (3) множина  $\Theta_y$  задається у вигляді

$$\Theta_y = \left\{ \theta : \sum_{k=1}^m (Q_k (y_k - H_k x(t_k, \theta)), y_k - H_k x(t_k, \theta)) \leq 1 \right\},$$

і задачі знаходження гарантованих оцінок та похибок прогнозу зведуться до проблеми знаходження значень  $\min_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$  і  $\max_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,

на множині

$$\Theta_y = \left\{ \theta : \sum_{k=1}^m (Q_k (y_k - H_k x(t_k, \theta)), y_k - H_k x(t_k, \theta)) \leq 1 \right\}.$$

### ПРИКЛАД ЗНАХОДЖЕННЯ УОСКП-ОЦІНКИ

Розглянемо приклад інформаційного потоку (коли немає зовнішніх впливів, тобто  $\alpha = 0$ , а параметр інтенсивності міжособистісного спілкування  $\beta$  невідомий) за спостережень:

$$y_j = \dot{x}(t_j) + v_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^m v_j^2 \leq \delta_m^2.$$

Потрібно знайти прогнозу оцінку кількості осіб, що сприйняли дану інформацію. Математична модель у такому випадку буде мати вигляд

$$\dot{x}(t) = \beta x(t)(L - x(t)), \quad x(0) = L_0.$$

Уважатимемо, що обмежень на параметр  $\beta$  немає (тобто  $\beta \in R$ ). Використаємо усереднений метод знаходження прогнозних оцінок.

Тоді згідно з формулою (3) отримуємо

$$G(x, y) = \left\{ \beta : \sum_{j=1}^m (y_j - \beta x(t_j)(L - x(t_j)))^2 \leq \delta_m^2 \right\}.$$

Нерівність

$$\sum_{j=1}^m (y_j - \beta x(t_j)(L - x(t_j)))^2 \leq \delta_m^2$$

можна подати у вигляді

$$\beta^2 \sum_{j=1}^m [x(t_j)(L - x(t_j))]^2 - \beta \sum_{j=1}^m 2y_j x(t_j)(L - x(t_j)) + \sum_{j=1}^m y_j^2 - \delta_m^2 \leq 0.$$

Звідси маємо:

$$(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2) \leq 0, \tag{6}$$

$$\text{де } \beta_{1,2} = \frac{\sum_{j=1}^m y_j x(t_j)(L - x(t_j)) \pm \sqrt{D}}{2 \sum_{j=1}^m [x(t_j)(L - x(t_j))]^2};$$

$$\begin{aligned} D &= \left[ 2 \sum_{j=1}^m y_j x(t_j)(L - x(t_j)) \right]^2 + 4 \left( \delta_m^2 - \sum_{l=1}^m y_l^2 \right) \sum_{j=1}^m [x(t_j)(L - x(t_j))]^2 = \\ &= 4 \delta_m^2 \sum_{j=1}^m [x(t_j)(L - x(t_j))]^2 + \\ &+ 4 \sum_{j=1}^m \sum_{l=1, l \neq j}^m y_j x(t_l)(L - x(t_l)) [y_l x(t_j)(L - x(t_j)) - y_j x(t_l)(L - x(t_l))]. \end{aligned}$$

Тоді розв'язок нерівності (6) буде таким:

$$G(x, y) = [\beta_1, \beta_2].$$

Для того, щоб знайти УОСКП-оцінку ( $\mu$  — усереднену оптимальну прогнозу оцінку, де  $\mu(\cdot)$  — нормована міра Лебега), розв'яжемо рівняння Рікатті:

$$\dot{x}(t) = \beta L x(t) - \beta x^2(t).$$

Виконавши заміну

$$z(t) = \frac{1}{x(t)}, \quad \dot{z}(t) = -\frac{1}{x^2(t)} \dot{x}(t),$$

отримаємо диференціальне рівняння та відповідну йому початкову умову:

$$\dot{z}(t) = \beta - \beta L z(t), \quad z(0) = 1/L_0.$$

Користуючись формулою Коші, отримаємо:

$$z(t) = z(0) \exp\left(-\int_0^t \beta L ds\right) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^t \beta L ds\right) \beta dt = \frac{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta L t}}{L L_0}.$$

Звідси

$$x(t) = \frac{L L_0}{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta L t}}.$$

Тоді із формули (4) справджується

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \beta) \mu(d\beta) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} x(t_{m+1}, \beta) d\beta = \\ &= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{L L_0 d\beta}{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta L_{m+1}}}. \end{aligned}$$

Виконавши заміну

$$p = e^{-\beta L t_{m+1}}, dp = -L t_{m+1} e^{-\beta L t_{m+1}} d\beta,$$

знайдемо прогноз  $\tilde{x}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{-L_0}{(\beta_2 - \beta_1)t_{m+1}} \int_{e^{-\beta_1 L t_{m+1}}}^{e^{-\beta_2 L t_{m+1}}} \frac{dp}{p(L_0 + (L - L_0)p)} = \\ &= L - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)t_{m+1}} \ln \left| \frac{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta_1 L t_{m+1}}}{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta_2 L t_{m+1}}} \right|. \end{aligned}$$

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Наведемо результати комп'ютерного моделювання динаміки кількості прихильників певних інформаційних повідомлень.

Нехай є певна спільнота чисельністю  $L = 100$  осіб, що підлягає впливу повідомлень з двох джерел інформації. Тоді в момент часу  $t \in (0, \bar{T}]$  ту частину спільноти, на яку впливає перше джерело, позначимо через  $x_1(t)$ ; ту частину спільноти, на яку впливає друге джерело, — через  $x_2(t)$ ; частину спільноти, яка ще не визначилась зі своїм ставленням до трансльованої інформації (не сприйняла повідомлення жодного виду), визначимо як  $(L - x_1(t) - x_2(t))$ . Припускається, що інформація поширюється по двох інформаційних каналах:

1. *Міжособове спілкування членів спільноти.* Кожен, хто засвоїв інформаційне повідомлення, починає впливати на неохоплених членів. Суттєвим тут є те, як часто він ділиться своєю інформацією і наскільки вона є правдоподібною. Виразимо цей вплив через параметри  $\beta_1$  і  $\beta_2$ .

2. *Зовнішній інформаційний вплив на спільноту.* Його характеристиками є частота транслювання повідомлення, наскільки воно правдоподібне та резонансне. Подамо цей вплив через параметри  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ .

Тоді процес поширення інформації в соціумі можна виразити системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i(t) = (\alpha_i - \beta_i x_i(t))(L - x_1(t) - x_2(t)), \quad x_i(0) = L_{0i}, \quad i = 1, 2.$$

Зведемо цю систему до безрозмірного вигляду, використовуючи заміну  $\bar{x}_i(t) = x_i(t)/L$ ,  $i = 1, 2$ . Отримаємо:

$$\bar{x}'(t) = (\alpha_i - L\beta_i \bar{x}_i(t))(1 - \bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)), \quad \bar{x}_i(0) = L_{0i}/L, \quad i = 1, 2.$$

Нехай  $\alpha_1 = 0,4$ ,  $\alpha_2 = 0,7$ ,  $\beta_1 = 0,002$  та  $\beta_2 = 0,004$  і на момент часу  $t = 0$  в спільноті  $L_{01} = 20$ ,  $L_{02} = 10$  прихильників відповідних інформаційних дій. Процес поширення інформації за такими даними можна змоделювати за допомогою системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \bar{x}'_1 &= (0.4 - 100 \cdot 0.002 \bar{x}_1(t))(1 - \bar{x}_1(t)) - \bar{x}_2(t), \quad \bar{x}_1(0) = 0.2; \\ \bar{x}'_2 &= (0.7 - 100 \cdot 0.004 \bar{x}_2(t))(1 - \bar{x}_1(t)) - \bar{x}_2(t), \quad \bar{x}_2(0) = 0.1. \end{aligned} \quad (7)$$

Припускаємо, що в точках  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ,  $t_i \in (0, 10]$ ,  $i = \overline{1, 50}$ , проводяться спостереження за  $\bar{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , з похибками

$$\sum_{k=1}^{50} (v_k, v_k) < 0.85.$$

Тоді отримуємо динаміку системи, показану на рис. 1.

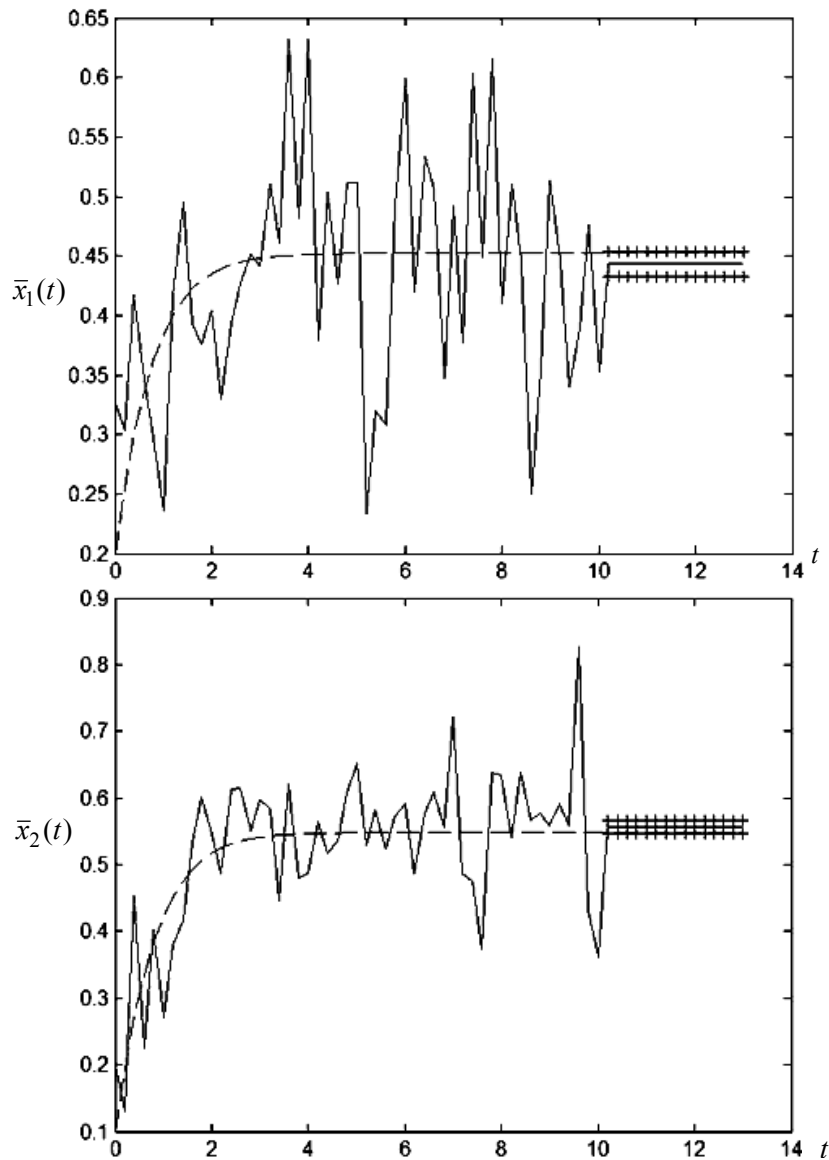


Рис. 1. Динаміка системи (7) за спостереженнями за кількістю прихильників обох інформаційних джерел, де пунктирною лінією зображено  $\bar{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ ; суцільною — спостереження за  $\bar{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , на  $(0, 10]$ , а на проміжку  $(10, 13]$  — гарантована прогнозна оцінка разом з діапазоном похибки гарантованої прогновної оцінки

Тепер припускаємо, що в точках  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ,  $t_i \in (0, 10]$ ,  $i = \overline{1, 50}$ , проводяться спостереження тільки за кількістю прихильників лише одного джерела інформації  $\bar{x}_1(t)$  з похибками

$$\sum_{k=1}^{50} (v_k, v_k) < 0,57.$$

Тоді отримуємо такі прогнози оцінки, як показано на рис. 2.

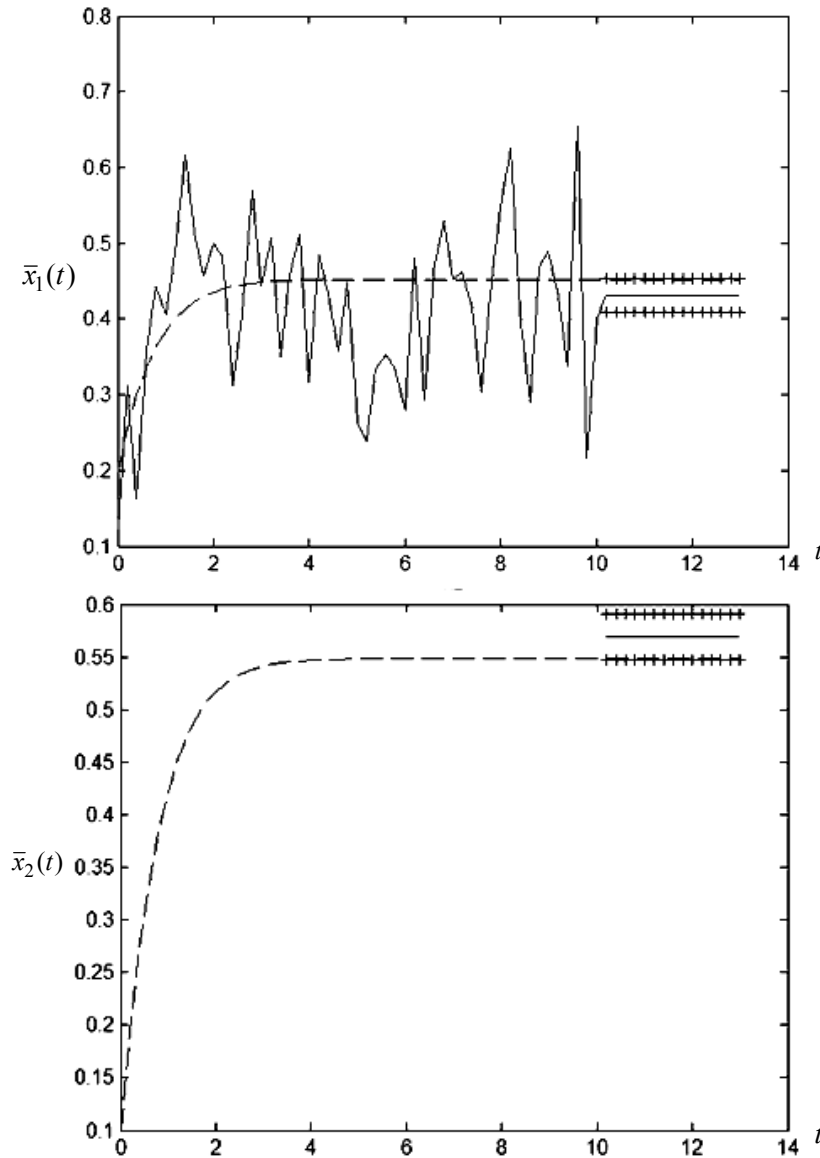


Рис. 2. Динаміка системи (7) за спостереженнями за кількістю прихильників першого інформаційного джерела, де пунктирною лінією зображено  $\bar{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , суцільною — спостереження за  $\bar{x}_1(t)$  на  $(0, 10]$ , а на проміжку  $(10, 13]$  — гарантована прогнозна оцінка разом з діапазоном похибки гарантованої прогнозовної оцінки



## **ВИСНОВКИ**

Для моделей поширення інформації зі спеціальним вибором функції зовнішньої дії та стаціонарними параметрами наведено алгоритми знаходження прогнозних оцінок: усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки та гарантованої прогнозної оцінки. Подано приклад знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки для випадку поширення одного виду інформації. Результати числового експерименту дозволяють зробити висновок про практичну значущість запропонованого підходу. Отже, можна стверджувати про корисність використання підходу до окремих випадків загальної моделі інформаційного протистояння, які враховують забування та двоетапне засвоєння інформації.

## **ЛІТЕРАТУРА**

1. *Mikhailov A.P.* Models of Information Warfare / A.P. Mikhailov, N.A. Marevtseva // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — Vol. 4, N 3. — 2012. — P. 251–259.
2. *Mikhailov A.P.* Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society / A.P. Mikhailov, A.P. Petrov, O.G. Proncheva, N.A. Marevtseva // *Mediterranean Journal of Social Sciences*. — Vol. 6, N 5. — 2015. — P. 27–35.
3. *Михайлов А.П.* Развитие модели распространения информации в социуме / А.П. Михайло, А.П. Петров, Н.А. Маревцева, И.В. Третьякова // *Математическое моделирование*. — 2014. — № 3 (26). — С. 65–74.
4. *Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца* / О.Г. Наконечний, П.М. Зінко // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2015. — № 3 (120). — С. 50–60.
5. *Наконечний О.Г.* Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами / О.Г. Наконечний, Ю.М. Шевчук // *Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. — 2016. — № 3. — С. 98–105.
6. *Nakonechnyi O.G.* Best-mean estimates in models of information confrontation / O.G. Nakonechnyi // *Abstracts XXIV International Conference “Problem of decision making under uncertainties”*. — Cesky Rudolec, Czech Republic, 2014. — P. 114–115.
7. *Nakonechnyi O.G.* Estimates of unsteady parameters in model of information confrontation / O.G. Nakonechnyi, P.M. Zinko // *Abstracts XXVIII International Conference “Problem of decision making under uncertainties”*. — Brno, Czech Republic, 2016. — P. 82–83.

*Надійшла 05.10.2017*

## НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ВЗВЕШЕННОГО ПОТОКА В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Е.Ю. ЗАЙЧЕНКО, Ю.П. ЗАЙЧЕНКО, ОВИ НАФАС АГАИ АГ ГАМИШ

**Аннотация.** Рассмотрена проблема отыскания максимального взвешенного потока (МВП) в компьютерных сетях нового поколения. Принципиальные отличия этой проблемы от классической постановки состоят в том, что рассматривается несколько классов потоков, сообщения от которых передаются одновременно и вводятся нелинейные ограничения на показатели качества обслуживания потоков разных классов (*Quality of Service (QoS)*). Доказана теорема о максимальном потоке и получены условия оптимальности взвешенного потока при ограничениях на показатели качества обслуживания. Разработан алгоритм отыскания МВП при ограничениях на показатели качества (*QoS*) для различных классов потоков в сетях, базирующийся на свойствах максимального потока. Предложенный алгоритм может быть использован для оценки показателей живучести коммуникационных сетей с перспективными технологиями.

**Ключевые слова:** максимальный взвешенный поток, условия оптимальности, показатели качества обслуживания.

### ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей, решение которой используется при анализе живучести компьютерных сетей, является задача о максимальном потоке [2]. Алгоритм решения этой задачи для распределенных коммуникационных сетей был предложен в работе [1]. В последние годы в связи с резким увеличением интенсивности информационных потоков, передаваемых в сети, и возрастающими требованиями к качеству сервиса при обслуживании различных классов пользователей сетей возникла новая технология — сети нового поколения (New Generation Networks (NGN)) [4]. Их отличительными особенностями является наличие различных классов пользователей, Class of Service (CoS), введение показателей качества обслуживания (Quality of Service (QoS)), а именно средней задержки пакетов, вариации задержки и доли потерянных пакетов. При этом каждый класс сервиса выдвигает свои требования к показателям качества. Необходимость учета специфики технологии NGN при анализе показателей живучести приводит к новой постановке задачи о максимальном потоке с учетом весов различных классов пользователей (CoS) и соответствующих требований к их качеству обслуживания (QoS) [3].

**Цель работы** — разработка модели и алгоритма задачи о взвешенном максимальном потоке применительно к сетям нового поколения.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ВЗВЕШЕННОМ ПОТОКЕ**

Пусть имеется сеть MPLS, которая описывается оргграфом  $G = (X, E)$ , где  $X = \{x_j\}_{j=1, \overline{n}}$  — множество узлов сети;  $E = \{(r, s)\}$  — множество каналов связи (КС);  $\mu_{rs}$  — пропускные способности КС.

Допустим, что в сети передается  $K$  классов потоков ( $k = \overline{1, K}$ ) (CoS) в соответствии с матрицами требований  $H(k) = \|h_{i,j}(k)\| \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}$  (Мбит/с). Для каждого класса  $k$  введен показатель качества (QoS) в виде величины средней задержки  $T_{cp,k}$ , которая оценивается следующим выражением:

$$T_{cp,k} = \frac{1}{H_{\Sigma}^{(k)}} \sum_{(r,s) \in E} \frac{f_{rs}^{(k)} \sum_{i=1}^k f_{rs}^{(i)}}{\left( \mu_{rs} - \sum_{i=1}^{k-1} f_{rs}^{(i)} \right) \left( \mu_{rs} - \sum_{i=1}^k f_{rs}^{(i)} \right)},$$

где  $H_{\Sigma}^{(k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}^{(k)}$ ,  $\mu_{rs}$  — пропускная способность КС  $(r, s)$ ;  $f_{rs}^{(k)}$  — величина потока  $k$ -го класса в канале  $(r, s)$ .

Пусть в сети  $G = (X, E)$  с известными пропускными способностями КС  $(r, s)$   $\mu_{rs}$  и заданными матрицами требований  $H(k) = \|h_{i,j}(k)\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , произошел отказ (выход из строя) КС  $(r, s)$ .

Естественно, что при этом общая пропускная способность (ОПС) сети уменьшилась. Требуется найти такое распределение потоков всех классов при отказе  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , при которых максимизируется величина передаваемого потока через сеть

$$H_{\Sigma}^{(k)} = \sum h_{ij} \rightarrow \max \tag{1}$$

при ограничениях на установленные задержки  $T_{зад}$  по всем классам:

$$T_{cp}^{(k)}(F_k | F_1, F_2, \dots, F_{k-1}) \leq T_{зад,k}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{2}$$

где

$$T_{cp,k} = \frac{1}{H_{\Sigma}^{(k)}} \sum_{(r,s) \in E} \frac{f_{rs}^{(k)} \sum_{i=1}^k f_{rs}^{(i)}}{\left( \mu_{rs} - \sum_{i=1}^{k-1} f_{rs}^{(i)} \right) \left( \mu_{rs} - \sum_{i=1}^k f_{rs}^{(i)} \right)}. \tag{3}$$

Поскольку в данной задаче рассматриваются потоки  $K$  классов, то здесь требуется максимизировать вектор:

$$H_{\Sigma}(k) \rightarrow \max, \quad k = \overline{1, K}.$$

Такая задача в общей постановке сложна и поэтому требуется перейти к однокритериальной постановке задачи нахождения максимального потока (НМП) путем свертывания векторного критерия. Здесь возможны следующие варианты.

Использование взвешенного аддитивного критерия

$$H_{\Sigma} = \sum_{k=1}^k w_k H_k(k),$$

где  $w_k$  — вес  $k$ -го потока. Учитывая приоритетность потоков, необходимо чтобы выполнялось соотношение

$$w_1 > w_2 > \dots > w_k > w_{k+1}.$$

Необходимо также, чтобы для всех классов потоков выполнялось ограничение (2). Выбирать веса можно, используя следующие подходы.

**Подход на основе теории полезности Фишберна.** Пусть имеется  $K$  потоков, приоритеты которых убывают согласно номеру класса:

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_k. \text{ Тогда } w_1 > w_2 > \dots > w_k \text{ и } \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Выбираем:

$$w_1 = \frac{2k}{k(k+1)}, w_2 = \frac{2(k-1)}{k(k+1)}, w_i = \frac{2(k+1-i)}{k(k+1)}, \dots, w_k = \frac{2}{k(k+1)}.$$

**Подход на основе метода парных сравнений Саати.** Метод базируется на применении экспертных оценок [5]. Поскольку между классами потоков установлены приоритеты в обслуживании  $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_k > \dots > \rho_K$  и согласно формуле (3) на величину задержки  $k$ -го класса  $T_{\text{ср}}^{(k)}$  почти не влияет распределение потоков более низких приоритетов  $i > k$ , то задачу НМП при векторном критерии можно свести к последовательности задач с одним критерием, а именно на 1-м этапе находим решение задачи НМП для потока с максимальным приоритетом ( $k=1$ ) и соответствующее распределение потока  $F^{(1)} = [f_{rs}^{(1)}]$  при ограничении  $T_{\text{ср}}^{(1)}(F^{(1)}) \leq T_{\text{зад},1}$ .

Зафиксировав распределение  $F^{(1)}$ , на резервных пропускных способностях  $\mu_{rs}^{(1)} = \mu_{rs} - f_{rs}^{(1)}$  решаем задачу НМП для потока класса  $k=2$  по критерию

$$H_{\Sigma}^{(2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}^{(2)} \rightarrow \max$$

при ограничениях  $T_{\text{ср}}^{(2)}(F^{(2)}) \leq T_{\text{зад},2}$ .

Предлагаемый алгоритм нахождения максимального взвешенного потока (НМВП) базируется на свойствах максимального потока.

## СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНОГО ВЗВЕШЕННОГО ПОТОКА

Математическая модель задачи о нахождении максимального (многопродуктового) потока (НМП) (1)–(3) принципиально отличается от известной из литературы соответствующей задачи НМП такими особенностями:

- введены дополнительные нелинейные ограничения на показатели качества (2), которые отсутствуют в классической постановке;
- рассматривается многополосная сеть, в которой каждый узел является одновременно как источником, так и потребителем информации в отличие от двухголосной сети в классической постановке.

Рассматриваемый поток является многопродуктовым, так как потоки требований  $(i, j)$  и  $(l, t)$  различны и не взаимозаменяемы.

Указанные особенности не позволяют использовать для решения данной задачи известные методы, в частности метод Форда–Фалкерсона, и обусловили необходимость разработки принципиально нового метода.

Прежде всего исследуем свойства оптимального потока. Справедливы такие утверждения, в которых устанавливаются свойства максимального потока.

**Теорема 1.** Пусть  $F^*(k)$  — оптимальный поток, при котором жестким является ограничение  $T_{cp}(F^*(k)) = T_{зад,k}$  согласно (2). Тогда этот поток по кратчайшим путям в такой условной метрике

$$I_{rs}^{(k)} = \frac{\partial T_k}{\partial f_{rs}} \Big|_{(F_k = F_k^*)}. \quad (4)$$

Доказательство этой теоремы приводится в работе [6].

**Теорема 2.** Требование  $(i, j)$  доминирует требование  $(l, t)$  при передаче (т.е. передается в первую очередь), если

$$\frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}} < \frac{l(\pi_{lt}^{\min})}{w_{lt}}, \quad (5)$$

где  $l(\pi_{ij}^{\min})$ ;  $l(\pi_{lt}^{\min})$  — длины кратчайших путей между  $(i, j)$  и  $(l, t)$  в метрике  $I_{rs}$  (4).

**Следствие 2.** Из теоремы 2 вытекает следующее важное следствие [6].

Требование  $(i_1, j_1)$  доминирует требование  $(i_2, j_2)$ ;  $(i_2, j_2)$  доминирует требование  $(i_3, j_3)$  и так далее, т.е.  $(i_1, j_1) \succ (i_2, j_2) \succ \dots \succ (i_k, j_k) \succ (i_{k+1}, j_{k+1}) \succ \dots$ , если

$$\frac{l(\pi_{i_1 j_1}^{\min})}{w_{i_1 j_1}} \leq \frac{l(\pi_{i_2 j_2}^{\min})}{w_{i_2 j_2}} \leq \dots \leq \frac{l(\pi_{i_n j_n}^{\min})}{w_{i_n j_n}}. \quad (6)$$

**Доказательство.** Рассмотрим поток  $F^* = [f_{rs}^*]$ , в котором

$$\frac{l(\pi_{i_1 j_1}^{\min})}{w_{i_1 j_1}} \leq \frac{l(\pi_{i_2 j_2}^{\min})}{w_{i_2 j_2}} \leq \dots \leq \frac{l(\pi_{i_n j_n}^{\min})}{w_{i_n j_n}}.$$

Допустим, что требование  $(l, t)$  передается полностью в текущем распределении потоков, а  $(i, j)$  не передается, т.е.  $h_{ij}^{(k)} < h_{ij}$  и  $h_{lt}^{(k)} = h_{lt}$ . Покажем, что в этом случае поток  $F^*$  может быть улучшен.

Действительно, пусть при потоке  $F^*$  выполняется равенство  $T_{cp}(F^*) = T_{зад}$ . Рассмотрим вариацию потока  $F_1 = F^* + \Delta F$ , где поток  $\Delta F$  получен следующим образом:

- а) изменим величину требования  $(l, t)$  до значения  $h_{lt}^{(H)} = h_{lt} - \frac{\Delta h}{w_{lt}}$ , а величину требования  $(i, j)$  увеличим до значения  $h_{ij}^{(H)} = h_{ij} + \frac{\Delta h}{w_{ij}}$ ;
- б) положим величину  $\Delta h$  остаточной малой. Таким образом:

$$\Delta f_{rs} = \begin{cases} -\frac{\Delta h}{w_{lt}}, & \text{если } (r, s) \in \pi_{lt}^{\min} \wedge (r, s) \notin \pi_{ij}^{\min}; \\ +\frac{\Delta h}{w_{ij}}, & \text{если } (r, s) \notin \pi_{lt}^{\min} \wedge (r, s) \in \pi_{ij}^{\min}; \\ \Delta h \left( \frac{1}{w_{ij}} - \frac{1}{w_{lt}} \right), & \text{если } (r, s) \in \pi_{lt}^{\min} \wedge (r, s) \in \pi_{ij}^{\min}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим вариацию ограничения:  $\delta T_{cp} = T_{cp}(F^* + \Delta F) - T_{cp}(F^*)$ . Разлагаем  $T_{cp}(F^* + \Delta F)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $F^*$ , ограничиваясь только членами 1-го порядка малости. Тогда

$$\delta T_{cp} \cong \sum_{(r,s)} \frac{\partial T_{cp}}{\partial f_{rs}} \Delta f_{rs}; \quad (8)$$

подставляя  $\Delta f_{rs}$  из соотношений (7) в условие (8), получаем

$$\sum_{(r,s) \in E} \frac{\partial T}{\partial f_{rs}} \Delta f_{rs} = \frac{\Delta h}{w_{ij}} \sum_{(r,s) \in \pi_{ij}^{\min}} \frac{\partial T_{cp}}{\partial f_{rs}} - \frac{\Delta h}{w_{lt}} \sum_{(r,s) \in \pi_{lt}^{\min}} \frac{\partial T_{cp}}{\partial f_{rs}} = \Delta h \left( \frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}} - \frac{l(\pi_{lt}^{\min})}{w_{lt}} \right).$$

Вследствие (5) имеем  $\frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}} < \frac{l(\pi_{lt}^{\min})}{w_{lt}}$  и тогда

$$\delta T_{cp}(\Delta F) < 0. \quad (9)$$

Заметим, что при этой вариации потока величина критерия ВМП не изменилась, поскольку

$$w_{ij} h_{ij}^{(H)} + w_{lt} h_{lt}^{(H)} = w_{ij} h_{ij} + \Delta h + w_{lt} h_{lt} - \Delta h = w_{ij} h_{ij} + w_{lt} h_{lt}.$$

Но из условия (9) следует, что поскольку при указанной вариации потока  $\Delta F$  общая задержка уменьшилась, то поток  $F^*$  не может быть макси-

мальным, так как появляется дополнительный резерв по пропускной способности сети и можно передать дополнительный поток по сети. Следовательно, условия (6) являются необходимыми условиями оптимальности потока в задаче НМВП.

Можно показать, что эти условия будут также и достаточными условиями (аналогично доказательству теоремы 2). Указанные свойства оптимальности ВМП позволяют сформулировать соответствующий алгоритм.

## ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ВМП

0. Полагаем  $F(0) = 0$ ,  $H_{\Sigma}(0)$ .

1. Находим начальную условную метрику:

$$l_{rs}^{(1)} = \left. \frac{\partial T_{\text{ср}}}{\partial f_{rs}} \right|_{f_{rs}=0} = \frac{1}{H_{\Sigma}} \frac{\mu}{(\mu_{rs} - f_{rs}(0))} = \frac{1}{H_{\Sigma} \mu_{rs}}.$$

2. Находим кратчайшие пути в метрике  $l_{rs}^{(1)} - \pi_{ij}^{\min}$  их длины  $l(\pi_{ij}^{\min})$ .

3. Выбираем требование  $(i_1, j_1)$  такое, что

$$\frac{l(\pi_{i_1 j_1}^{\min})}{w_{i_1 j_1}} = \min_{(i, h)} \frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}}.$$

4. Определяем пропускную способность пути  $\pi_{i_1 j_1}^{\min}$ :

$$Q(\pi_{i_1 j_1}^{\min}) = \min_{(r, s) \in \pi_{i_1 j_1}^{\min}} (\mu_{rs} - \varepsilon).$$

5. Полагаем  $h_{i_1 j_1}^a = \min(h_{i_1 j_1}; Q_{\text{рез}}(\pi_{i_1 j_1}^{\min}))$ .

6. Распределяем поток от требования  $(i_1, j_1)$  величиной  $h_{i_1 j_1}^a$  по пути  $\pi_{i_1 j_1}^{\min}(k)$  и находим распределение потока  $F(1)$ :

$$f_{rs}(1) = \begin{cases} f_{rs}(0) + h_{i_1 j_1}^a, & \text{если } (r, s) \in \pi_{i_1 j_1}^{\min}; \\ f_{rs}(0) = 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

7. Проверка условия:

$$T_{\text{ср}}(F(1)) < T_{\text{зад}}. \quad (10)$$

Если условие (10) выполняется, то переходим на шаг 8, иначе — на шаг 9.

8. Вычисляем величину потока:

$$H_{\Sigma}(1) = H_{\Sigma}(0) + h_{i_1 j_1}^a w_{i_1 j_1}$$

и переходим к следующей итерации.

9. Если  $T_{\text{ср}}(F(1)) = T_{\text{зад}}$ , то вычисляем  $H_{\Sigma}(1) = H_{\Sigma}(0) + h_{i_1 j_1}^a w_{i_1 j_1} = H_{\text{max}}$  и конец работы алгоритма, иначе переходим на шаг 10.

10. Если  $T_{\text{cp}}(F(1)) > T_{\text{зад}}$ , то уменьшаем значение  $h_{i_1 j_1}$  до величины  $h_{i_1 j_1}^*$  такой, что

$$T_{\text{cp}}(F(1)) = T_{\text{зад}}.$$

При этом величина ВМП будет равна  $H_{\Sigma}(1) = h_{i_1 j_1}^a w_{i_1 j_1}$  и конец работы алгоритма.

*t-я итерация.* Пусть проведено  $(t-1)$  итераций и найдены поток  $F(t-1)$  и  $H_{\Sigma}(t-1) = \sum_{k=1}^{t-1} w_{i_k j_k} h_{i_k j_k}$  и при этом выполняется ограничение на задержку:  $T_{\text{cp}}(F(t-1)) = T_{\text{зад}}$ .

1. Находим условную метрику:

$$l_{rs}^{(t)} = \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial f_{rs}} \Big|_{f_{rs} = f_{rs}(t-1)}.$$

2. Находим кратчайшие пути в данной метрике  $\pi_{ij}^{\min}(k)$  и их длины  $l(\pi_{ij}^{\min})$ .

3. Ищем такое требование  $(i_t, j_t)$  из передаваемых требований, для которого

$$\frac{l_t(\pi_{i_t j_t}^{\min})}{w_{i_t j_t}} = \min_{(i,j)} \frac{l(\pi_{ij}^{\min})}{w_{ij}}.$$

4. Находим резерв по пропускной способности маршрута  $\pi_{i_t j_t}^{\min}$ :

$$Q(\pi_{i_t j_t}^{\min}) = \min_{(r,s) \in \pi_{i_t j_t}^{\min}} (\mu_{rs} - f_{rs}(t-1)) - \varepsilon.$$

5. Вычисляем  $h_{i_t j_t}^a = \min(h_{i_t j_t}; Q_{\text{рез}}(\pi_{i_t j_t}^{\min}))$ .

6. Распределяем поток от требования  $(i_t, j_t)$  величиной по пути  $\pi_{i_t j_t}^{\min}(k)$  и находим распределение потока  $F(t)$ :

$$f_{rs}^{(0)}(k) = \begin{cases} f_{rs}^{(0)}(k) + h_{i_t j_t}^a, & \text{если } (r,s) \in \pi_{i_t j_t}^{\min}; \\ f_{rs}^{(0)}(k) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

7. Проверка условия:

$$T_{\text{cp}}(F(t)) = T_{\text{зад}}. \quad (12)$$

Если условие (12) выполняется, то полагаем  $H_{\Sigma}(t) = H_{\Sigma}(t-1) + w_{i_t j_t} h_{i_t j_t}^a$  и конец  $t$  итерации, иначе переходим на шаг 8.

8. Если  $T_{\text{cp}}(F(t)) = T_{\text{зад}}$ , то вычисляем:  $H_{\Sigma}(t) = H_{\Sigma}(t-1) + h_{i_t j_t}^a w_{i_t j_t} = \max$  и конец работы алгоритма, иначе переходим на шаг 9.

Вычисляем величину потока



$$H_{\Sigma}^{(1)}(k) = H_{\Sigma}^{(0)}(k) + h_{i_k j_k}^a$$

и переходим на шаг 1 следующей итерации.

9. Если  $T_{\text{cp}}(F(t)) > T_{\text{зад}}$ , то уменьшаем величину  $h_{i_t j_t}$  до величины  $h_{i_t j_t}^*$  такой, что ограничение  $T_{\text{cp}}(F^H(t)) = T_{\text{зад}}$ , где  $F^{(H)}(t)$  — определяется из (11) при значении  $h_{i_t j_t} = h_{i_t j_t}^*$ .

Тогда величина взвешенного максимального потока

$$H_{\Sigma}(t) = H_{\Sigma}(t-1) + h_{i_t j_t}^* w_{i_t j_t}.$$

Конец работы алгоритма.

Оптимальность полученного взвешенного потока базируется на доказанной теореме 2 о свойствах МВП.

## ВЫВОДЫ

1. Сформулирована задача о нахождении МВП при ограничениях на средние задержки для различных классов потоков в компьютерных сетях нового поколения.
2. Исследованы свойства максимального потока в сетях с потоками различных классов.
3. Предложен алгоритм нахождения МВП при ограничениях на среднюю задержку для различных классов потоков на основе свойств МВП.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зайченко О.Ю. Знаходження максимального потоку в мережах з режимом асинхронної передачі інформації / О.Ю. Зайченко, Ю.П. Зайченко // Відбір і обробка інформації. — Вип. 17(93). — 2002. — С. 59–64.
2. Зайченко Ю.П. Нахождение максимального потока и анализ показателей живучести при отказах / Ю.П. Зайченко, Е.Ю. Зайченко // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 6. — С. 102–113.
3. Зайченко Ю.П. Анализ показателей живучести компьютерной сети с технологией MPLS / Ю.П. Зайченко, Мохаммадреза Моссавари // Информатика, управління та обчислювальна техніка. — 2005. — Вип. 43. — С. 73–80.
4. Гольдштейн А.Б. Технология и протоколы MPLS / А.Б. Гольдштейн, Б.С. Гольдштейн. — СПб.: БХВ, 2005. — С. 304.
5. Саати Т. Принятие решений: метод анализа иерархий / Т. Саати. — М.: Радио и связь, 1993.
6. Зайченко Е.Ю. Сети ATM: Моделирование, анализ и оптимизация / Е.Ю. Зайченко. — К.: ЗАТ «ВИПОЛ», 2003. — 224 с.

Поступила 29.08.2017

## ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОБЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК СО ЗНАКОМ

О.С. ПИЧУГИНА

**Аннотация.** Введено общее множество перестановок со знаком и рассмотрены подходы к оптимизации на нем, основанные на погружении в арифметическое евклидово пространство. В рамках исследования изучены свойства этого евклидового комбинаторного множества и его выпуклой оболочки (общего многогранника перестановок со знаком), такие как мощность множества, несводимое  $N$ -представление многогранника, его размерность, критерии и смежности вершин, а также количество комбинаторно неэквивалентных многогранников фиксированной размерности. Исследованы особенности поведения нескольких классов функций на общем множестве перестановок со знаком. Построен ряд функционально-аналитических представлений этого множества, включая полиэдрально-суперсферическое и строгое суперсферическое. Приведены явные решения линейной задачи и задачи проектирования на множество перестановок со знаком. Проведенное исследование позволяет применять непрерывные методы к оптимизации на дискретном множестве и получать как точные, так и приближенные решения оптимизационных задач с оценкой точности.

**Ключевые слова:** комбинаторная оптимизация, полиэдрально-сферическое множество, перестановки со знаком, общее множество перестановок, бинарное множество, суперсфера, полиэдрально-поверхностный метод, метод условного градиента.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи дискретной оптимизации на векторах евклидова пространства часто возникают в практических и теоретических предметных областях. Так, среди приложений задачи оптимизации на  $0-1$ -векторах (*безусловной булевой задачи*) теория графов, экономика, финансы, менеджмент, логистика, машинное обучение, компьютерная архитектура, задачи размещения, упаковка и раскрой [1, 2]. Оптимизационные задачи на векторах перестановок применяются в таких областях, как упаковка и раскрой, задачи балансировки, дизайн микросхем, загрузка суден, оснащение самолетов, геометрический дизайн, задачи размещения, логистика и т.п. [2–4]. По сравнению с задачами оптимизации, моделируемыми и решаемыми в метрических пространствах, возможность погружения комбинаторного множества в арифметическое евклидово пространство дает множество преимуществ, таких как возможность учета геометрических особенностей допустимой области, наличие нормы, скалярного произведения и т.п. Дискретные множества, позволяющие такое погружение, называют *евклидовыми комбинаторными множествами* [5], а научное направление по исследованию свойств погружений и применению их в оптимизационных методах — *евклидовой комбинаторной оптимизацией* [3, 4]. В этом направлении исследуются как свойства евклидовых комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек, так и особенности поведения функций на этих множествах. Свойства мно-

жеств, как правило, ложатся в основу комбинаторных оптимизационных методов типа ветвей и границ, отсечений и т.п. [6] Свойства же функций обычно составляют основу непрерывных подходов к решению дискретных задач. Это могут быть релаксационные методы, методы, использующие переформулировки, и др. [7]

Предлагаемый нами подход к решению задач евклидовой комбинаторной оптимизации состоит в комплексном исследовании свойств допустимых областей и функций с последующей разработкой методов оптимизации на их основе [2, 8–11].

Работа посвящена исследованию нового евклидова комбинаторного множества — общего множества перестановок со знаком — и поведения некоторых классов функций. Это позволит расширить область применения оптимизационных методов, приведенных в работах [2–4, 8–13], на новый, достаточно широкий класс задач оптимизации, включающий, в частности, безусловные булевы задачи.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x \in E_{nk}^{\pm}(G), \quad (2)$$

где  $E_{nk}^{\pm}(G)$  — комбинаторное множество  $n$ -векторов, сформированных из мультимножества  $G$ ;

$$G = \{g_1, \dots, g_n\} = \{e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}\}:$$

$$0 \leq g_i \leq g_{i+1}, \quad i \in J_{n-1}; \quad 0 \leq e_i < e_{i+1}, \quad i \in J_{k-1}; \quad e_k > 0, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n, \quad (3)$$

и бинарного множества  $B_n' = \{-1, 1\}^n$  следующим образом:

$$E_{nk}^{\pm}(G) = \{z \in R^n : z = (z_i)_{i \in J_n}, \quad z_i = x_i y_i, \quad i \in J_n\}, \quad (4)$$

$$x = (x_i)_{i \in J_n} \in E_{nk}(G), \quad y = (y_i)_{i \in J_n} \in B_n', \quad (5)$$

где  $E_{nk}(G)$  — общее евклидово комбинаторное множество перестановок [4, 14] из формулы (3), т.е. множество упорядоченных  $n$ -выборок из  $G$ , рассматриваемое как множество векторов евклидового арифметического пространства,  $J_n = \{1, \dots, n\}$ .

Помимо мультимножества (3) используем представление мультимножества  $G$  при помощи основы  $S(G)$ , т.е. множества его элементов, упорядоченных по возрастанию, а также *первичной спецификации*  $[G]$  — вектора кратностей элементов основы [4]:  $S(G) = \{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $[G] = (n_1, \dots, n_k)$ .

Множество  $E_{nk}^{\pm}(G)$  назовем общим евклидовым комбинаторным множеством перестановок со знаком или просто *общим множеством перестановок со знаком*. Как видно из (4), (5),  $E_{nk}^{\pm}(G)$  представляет собой отра-

жение общего множества перестановок  $E_{nk}(G)$ , индуцированного неотрицательным мультимножеством  $G$ , относительно всех координатных плоскостей. По аналогии с классификацией множеств класса  $E_{nk}(G)$  [4] введем в рассмотрение такие подклассы  $E_{nk}^{\pm}(G)$ :

а) если  $n = k$ , т.е.  $G$  — неотрицательное множество, будем использовать сокращенное обозначение  $E_n^{\pm}(G)$  и называть его *множеством перестановок со знаком* из  $G$ ;

б) если к тому же  $G = J_n$ , для такого множества будем использовать сокращенную запись  $E_n^{\pm}$  и называть его просто множеством перестановок со знаком. Отметим, что  $E_n^{\pm}$  представляет собой погружение в евклидово арифметическое пространство группы перестановок со знаком [15], образованной из группы перестановок первых  $n$  натуральных чисел.

Поскольку при исследовании множества  $E_{nk}(G)$  всегда можно предполагать, что  $G \geq 0$ , т.е. мультимножество (3) выполнено, то множество  $E_{nk}^{\pm}(G)$  представляет собой обобщение как общего перестановочного множества, так и множества  $E_n^{\pm}$ . Еще два известные комбинаторные множества, входящие в класс (4), — это множество размещений с повторениями с центром симметрии в начале координат:  $\bar{E}_2^n(\{-e_1^n, e_1^n\}) = E_n^{\pm}(\{e_1^n\})$  (сюда же относится  $B'_n$  и соответствует  $e_1 = 1$ ), а также множество

$$CE_n(e_1) = \{(\pm e_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm e_1)\} \quad (6)$$

вершин *гипероктаэдра* [15]

$$CP_n(e_1) = \text{conv } CE_n(e_1) = \{x \in R^n : \|x\|_1 \leq e_1\}, \quad (7)$$

образующееся при  $G = \{0^{n-1}, e_1\}$ , частным случаем которого являются  $CP_n = CP_n(1)$  — *единичный гипероктаэдр* и множество его вершин  $CE_n = CE_n(1)$ .

Введем в рассмотрение выпуклую оболочку множества (4)

$$\Pi_{nk}^{\pm}(G) = \text{conv } E_{nk}^{\pm}(G),$$

и назовем *общим многогранником перестановок со знаком*. В частности,  $\Pi_n^{\pm}(G) = \text{conv } E_n^{\pm}(G)$  будем называть *многогранниками перестановок со знаком* из  $G$ , а  $\Pi_n^{\pm} = \text{conv } E_n^{\pm}$  — просто многогранником перестановок со знаком.

По способу построения  $E_{nk}^{\pm}(G)$  видно, что это множество будет наследовать свойства обоих множеств  $E_{nk}(G)$  и  $B'_n$ , а также их выпуклых оболочек

$$\Pi_{nk}(G) = \text{conv } E_{nk}(G), \quad PB'_n = \text{conv } B'_n$$

общего перестановочного многогранника и гиперкуба соответственно. Эти два класса комбинаторных множеств и многогранников достаточно хорошо изучены в работах [3–5, 14, 16]. Отметим лишь два из них, которые используем в  $E_{nk}^{\pm}(G)$  — это нейтральность по отношению к знакам и порядку следования координат элементов. Также свойства  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$  должны объединить воедино свойства гиперкуба и гипероктаэдра. Как известно [15], эти два многогранника являются двойственными, в частности количество вершин  $PB'_n$  и соответственно гиперграней  $CP_n$ , равно  $2^n$ , т.е. экспоненциально зависит от  $n$ . В свою очередь, число вершин  $CP_n$ , следовательно и количество гиперграней  $PB'_n$ , зависят от  $n$  полиномиально:

$$|\text{vert } PB'_n| = |B'_n| = |\text{faces } CP_n| = 2^n; \quad (8)$$

$$|\text{vert } CP_n| = |CE_n| = |\text{faces } PB'_n| = 2n. \quad (9)$$

Данная работа посвящена исследованию свойств задачи (1), (2) с целью адаптации комбинаторных и непрерывных подходов, приведенных в работах [2–4, 8–13], к ее решению. Под исследованием свойств задачи оптимизации подразумеваем комплексное исследование алгебро-топологических свойств допустимой области

$$E = E_{nk}^{\pm}(G) \quad (10)$$

и свойств функций на данной области, в частности формирование аналитических функциональных представлений  $E$ . Далее будет обозначено как выявленные особенности задачи (1), (2), применимы к ее решению.

## 1. АЛГЕБРО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $E_{nk}^{\pm}(G), \Pi_{nk}^{\pm}(G)$

Исследуем свойства общих множества и многогранника перестановок со знаком. В качестве иллюстрации справедливости результатов будут использованы  $B'_n, CE_n$  и  $E_{nk}^+(G), G > 0$ , а также соответствующие многогранники.

Главным фактором, на наш взгляд, отличия характеристик множеств класса (10) и многогранников

$$P = \Pi_{nk}^{\pm}(G) \quad (11)$$

является кратность нулевого элемента в мультимножестве  $G$ , поэтому далее вместо (3) будем использовать обозначение

$$G = \{0^{n_0}, e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}\} : \sum_{i=0}^k n_i = n, \quad e_1 > 0, \quad n_0 \geq 0, \quad n_i > 0, \quad i \in J_k.$$

**Мощность множества  $E$ .** В первую очередь рассмотрим мощность  $E_{nk}^{\pm}(G)$ .

**Теорема 1.** Мощность множества (10) исчисляется по формуле

$$\left| E_{nk}^{\pm}(G) \right| = C_n^{n_0} \frac{(n - n_0)!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \cdot 2^{n - n_0}. \quad (12)$$

**Доказательство.** Введем в рассмотрение общее множество перестановок из  $G$ :

$$E^+ = E_{nk}^\pm(G) \cap R_+^n = \begin{cases} E_{nk}(G), & \text{если } n_0 = 0; \\ E_{n,k+1}(G), & \text{если } n_0 > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Выделим три этапа в формировании  $E_{nk}^\pm(G)$ , обозначив количество способов их осуществить  $N_1, N_2, N_3$  соответственно:

На *первом этапе* фиксируются позиции нулевых элементов  $x \in E_{nk}^\pm(G)$ , что возможно сделать  $N_1 = C_n^{n_0}$  способами.

На *втором этапе* оставшиеся  $n - n_0$  положительные элементы  $\{e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}\}$  переставляются и это осуществимо  $N_2 = \frac{(n - n_0)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$  способами.

Наконец, на *третьем этапе* осуществляется отражение каждого элемента  $x$  образованного множества (13) относительно  $n - n_0$  координатных плоскостей, соответствующих ненулевым координатам  $x$ , в результате чего каждой точке  $x \in E^+$  будет отвечать  $2^{n-n_0}$  точек  $E$ . В целом множество  $E^+$  увеличится в  $N_3 = 2^{n-n_0}$  раз.

По правилу умножения общее количество способов образования элементов  $E$  —  $N = N_1 N_2 N_3$ , откуда следует формула (12).

**Пример 1.** Формула (12) справедлива для упомянутых частных случаев  $E_{nk}^\pm(G)$  —  $B'_n, CE_n$ . Поскольку

$$CE_n = E_{n2}^\pm(\{0^{n-1}, 1\}), \quad (14)$$

подстановка  $n_0 = n - 1$  в формулу (12) дает в точности (9):  $|CE_n| = C_n^{n-1} \cdot 2^1 = 2n$ . Для  $B'_n$  учтем, что

$$B'_n = E_n^\pm(\{1^n\}), \quad (15)$$

т.е.  $n_0 = 0$ . В данном случае формула (12) обращается в  $|B'_n| = C_n^0 \frac{n!}{n!} \cdot 2^n = 2^n$  и отвечает выражению (8).

Рассмотрим еще один частный случай  $G > 0$ , когда мощность  $E_{nk}^\pm(G)$  также легко найти. В формуле (13) это соответствует

$$E^+ = E_{nk}(G). \quad (16)$$

В данном случае  $|E^+| = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ , а поскольку  $n_0 = 0$ , то при отражениях

относительно всех координатных осей формируется  $2^n$  взаимно непересекающихся образов  $E^+$ , т.е.

$$|E| = 2^n |E^+| = 2^n \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}. \quad (17)$$

Такое же выражение дает формула (12).

Наконец, в качестве последнего примера рассмотрим частный случай (10) — множество перестановок со знаком  $E_n^\pm(G)$  из  $G > 0$ . Для него за счет отсутствия кратных элементов  $G$  величина (17) принимает максимальное возможное значение  $|E_n^\pm(G)| = 2^n n!$ .

Отсюда видно, что  $|E_{nk}^\pm(G)| \in [2n, 2^n n!]$ , причем предельные случаи соответствуют максимальной кратности нулевого элемента ( $n_0 = n - 1$ ) и минимальной кратности нулевого ( $n_0 = 0$ ) и некратным ненулевым элементам. В данном классе есть множества с количеством элементов, зависящим от размерности пространства как полиномиально, так и экспоненциально, причем в первую группу попадает единственное множество (6), мощность которого линейно зависит от  $n$ .

**$H$ -представление многогранника  $P$ .** Учитывая структуру  $E$ , его симметрию относительно начала координат и способ построения, удастся решить не только задачу построения системы ограничений многогранника  $E_{nk}^\pm(G)$ , иначе говоря  $H$ -представления, но и сформировать несводимое такое представление.

Для того чтобы сформулировать теорему о несводимом  $H$ -представлении многогранника  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ , воспользуемся таким представлением *общего многогранника размещений* [4], а также тем фактом, что  $\Pi_{nk}^\pm(G)$  представим объединением  $2^n$  многогранников, комбинаторно эквивалентных некоторому многограннику размещений.

Напомним, что *общим евклидовым комбинаторным множеством  $n$ -размещений*  $E_{\eta k}^n(\bar{G})$  из мультимножества

$$\bar{G} = \{\bar{g}_i\}_{i \in J_\eta} : k = |S(\bar{G})|, \bar{g}_i \leq \bar{g}_{i+1}, i \in J_{\eta-1}, \quad (18)$$

называется результат погружения в  $R^n$  множества упорядоченных  $n$ -выборок из мультимножества  $\bar{G}$ , где  $n < \eta$ , а его выпуклая оболочка  $\Pi_{\eta k}^n(\bar{G})$  — это общий многогранник  $n$ -размещений, индуцируемый  $\bar{G}$  [4].

**Теорема 2** (несводимая система  $\Pi_{\eta k}^n(G)$ ) [11]. Несводимое  $H$ -представление многогранника  $\Pi_{\eta k}^n(G)$  имеет вид:

$$\sum_{j \in \omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j, \quad \omega \subseteq J_n, |\omega| \notin \overline{2, n_1} \cup \overline{\eta - n_k, n - 1}; \quad (19)$$

$$\sum_{j \in \omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n, |\omega| \notin \overline{2, n_k} \cup \overline{\eta - n_1, n - 1}. \quad (20)$$

**Теорема 3 (несводимая система  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ ).** Многогранник (11) задается несводимой системой неравенств:

$$\sum_{j \in \omega} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n, \quad |\omega| \notin I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n-n_0, n-1}. \quad (21)$$

**Доказательство.** Сформируем мультимножество (18), дополнив  $G$  нулями так, чтобы кратность нулевого элемента достигла  $n$ :

$$\overline{G} = G \cup \{0\}^{n-n_0} = \{0^n, g_{n-n_0+1}, \dots, g_n\} = \{0^n, e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}\}. \quad (22)$$

Рассмотрим вспомогательное множество  $E'$  — общее множество  $n$ -размещений из  $\overline{G}$ . Его параметры —  $\eta = |\overline{G}| = 2n - n_0$ ,  $|S(\overline{G})| = k + 1$ , соответственно  $E' = E_{\eta, k+1}^n(\overline{G})$ .

Запишем систему ограничений многогранника

$$P' = \Pi_{\eta, k+1}^n(\overline{G}). \quad (23)$$

По построению одной из его вершин будет начало координат. Адаптируя (19) и (20) к (22), (23), получаем несводимую систему ограничений  $P'$ :

$$x \geq 0; \quad (24)$$

$$\sum_{j \in \omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n, \quad |\omega| \notin I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n-n_0, n-1}. \quad (25)$$

Действительно, учитывая (22), ограничения подсистемы (20) приобретают вид  $\sum_{j \in \omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}$ . Согласно теореме 2 избыточными являются:

а) неравенства (19) союзов  $|\omega| \in \overline{2, n}$ , в результате чего остается только союз (24); б) неравенства (20) союзов  $|\omega| \in \overline{2, n_k}$  и  $|\omega| \in \overline{2, n_k} \cup \overline{\eta - n, n - 1} = \overline{2, n_k} \cup \overline{n - n_0, n - 1}$ . Итак, (24), (25) — несводимая линейная система многогранника  $P'$ .

Перейдем к многограннику  $P$ . Подобно множеству  $E_{nk}^{\pm}(G) \subset R_+^n$  он образуется из многогранника  $P' \subset R_+^n$  его отражением относительно всех координатных плоскостей, в результате чего подсистема (25) преобразуется в модульное ограничение (21), а (24) исчезает. При этом система (21) по-прежнему не содержит ни одного избыточного ограничения, поскольку в противном случае за счет симметрии это бы означало наличие избыточных ограничений в системе (25).

Теорема доказана.

**Пример 2.** Продемонстрируем результат теоремы 3 на примере тех же множеств, что и в примере 1. Для  $B'_n$  множество  $I$  в системе (21) имеет вид:  $I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n - n_0, n - 1} = \overline{2, n} \cup \overline{n - 0, n - 1} = \overline{2, n}$ , соответственно (21) приоб-



ретаает форму  $|x_j| \leq 1, j \in J_n$ , а задает гиперкуб со стороной 2 — это в точности  $PB'_n$ .

Для  $CE_n$  множество  $I$  упрощается до  $I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n - n_0, n - 1}$ , а система (21) приобретает вид  $\sum_{j=1}^n |x_j| \leq 1$ , что соответствует (7) и задает многогранник

$PE_n$ . Третье множество —  $E_{nk}^\pm(G)$ ,  $G > 0$ . В данном случае имеем  $I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n - 0, n - 1} = \overline{2, n_k}$ . Соответственно набор гиперграней многогранника определяется кратностью элемента  $e_k$ . Так, если  $n_k = 1$ , то  $I = \emptyset$  и система (21) приобретает вид:

$$\sum_{j \in \omega} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n; \quad \overline{2, 1} \cup \overline{n - n + 1, n - 1} = \overline{1, n - 1}. \quad (26)$$

В частности  $\Pi_n^\pm(G)$  задается несводимой системой (26). Если же  $e_k$  — кратный, т.е.  $n_k > 1$ , несводимая система  $\Pi_n^\pm(G)$ :

$$\sum_{j \in \omega} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1}, \quad \omega \subseteq J_n, \quad |\omega| \in \{1\} \cup \overline{n_k + 1, n}.$$

### Размерность $P$ .

**Лемма 1.** Многогранник  $\Pi_{nk}^\pm(G)$  *полномерный*, т.е.

$$\dim \Pi_{nk}^\pm(G) = n. \quad (27)$$

**Доказательство.** Рассмотрим гиперкуб  $\overline{\Pi}_2^n(\{-a^n, a^n\})$ , где  $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i$ .

По условию (3) он не вырожден в точку, следовательно является полномерным, как и любой другой гиперкуб. Поскольку  $\Pi_n^\pm(G) \supseteq \overline{\Pi}_2^n(\{-a^n, a^n\})$ , многогранник  $\Pi_{nk}^\pm(G)$  также полномерный и условие (27) выполнено.

**Сферическая расположенность  $E$ .** *Сферически расположенным* называем произвольное множество, вписанное в сферу [8]:  $E \subseteq S_r(a)$ , где  $S_r(a)$  — гиперсфера радиуса  $r$  с центром в точке  $a \in R^n$ .

**Лемма 2.** Множество  $E_{nk}^\pm(G)$  — сферически расположенное:

$$E_{nk}^\pm(G) \subset S_r(\mathbf{0}), \quad r = \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{1/2}, \quad (28)$$

при этом описанная сфера — единственная (здесь точка  $\mathbf{0}$  — начало координат).

**Доказательство.** Каждая точка  $E_{nk}^\pm(G)$  имеет координаты, модули которых образуют мультимножество  $G$ , т.е.

$$\forall m \in R_+ \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^m = \sum_{i=1}^n |g_i|^m. \quad (29)$$

В частности, при  $m = 2$  имеем:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n g_i^2, \quad (30)$$

т.е. точки  $E$  равноудалены от начала координат на расстояние  $r$ , заданное формулой (28), т.е.  $E$  лежит на  $S_r(0)$ , следовательно является сферически расположенным. Эта описанная вокруг  $E$  сфера единственна вследствие леммы 1, поскольку  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$  — полномерный.

**$E$ -полиэдрально-сферическое множество.** Конечное множество называется *полиэдрально-сферическим* [8], если оно образуется в результате пересечения некоторых гиперсферы  $S$  и многогранника  $P$ :

$$E = P \cap S. \quad (31)$$

*Полиэдрально-сферическим представлением* множества  $E$  называется система его ограничений, включающая  $H$ -представление многогранника  $P$  и уравнение гиперсферы  $S$  [10]. Такое представление  $E$  *неизбыточно*, если в нем участвует несводимое  $H$ -представление многогранника  $P$  [10].

Для множества (10) условие (31) очевидно выполнено, при этом  $S$  задается (30), а  $P$  — многогранник (11). При этом, поскольку теоремой 3 устанавливается несводимое  $H$ -представление многогранника  $P$ , справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** Множество  $E_{nk}^{\pm}(G)$  — полиэдрально-сферическое и его избыточное полиэдрально-сферическое представление задается системой ограничений (21) и (31).

**Критерий вершины  $P$ .** Из условия  $|E| < \infty$  и (31) следует, что  $E \subseteq \text{vert } P$ , т.е. некоторые вершины  $P$  могут лежать вне сферы  $S$ . Однако в случае, если  $P$  представляет собой выпуклую оболочку конечного сферически расположенного множества, будет, очевидно, выполнено и обратное включение  $E \supseteq \text{vert } P$ . Соответственно

$$E = \text{vert } P = \text{vert conv } E. \quad (32)$$

Множества вида (32) называются *вершинно расположенными* [9, 12]. Это довольно широкий класс комбинаторных множеств, в частности, вершинно расположенными являются  $B'_n$ ,  $E_{nk}(G)$ ,  $E_{n+1,k}^n(G)$ ,  $E_{n2}^n(G)$  и другие комбинаторные множества [11]. Для таких множеств критерием вершины является условие принадлежности этому множеству. Установить вершинную расположенность, как правило, достаточно сложно [4, 16]. Однако для полиэдрально-сферических множеств эта задача легко разрешима, поскольку сфера является множеством крайних точек соответствующего шара, т.е. ни одна из точек сферы не может быть выражена выпуклой линейной комбинацией других точек сферы. Это же справедливо и для любого подмножества точек на сфере, в частности, для произвольного полиэдрально-

сферического множества  $E$ . Таким образом  $E$  является множеством крайних точек своей выпуклой оболочки, представляющим собой многогранник, т.е. множеством его вершин.

Таким образом, для  $E_{nk}^{\pm}(G)$  в силу леммы 3 справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4 (критерий вершины  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ ).** Множество  $E_{nk}^{\pm}(G)$  является вершинно расположенным, т.е.  $E_{nk}^{\pm}(G) = \text{vert } \Pi_{nk}^{\pm}(G)$ .

**Критерий смежности вершин  $P$ .** Прежде чем перейти к исследованию вопроса о смежности вершин  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ , выделим два случая в соответствии с множеством (13):

*Случай 1*, когда все элементы  $G$  положительны, т.е.  $n_0 = 0$  и выполнено условие (16). Соответственно основа  $G$  имеет вид:

$$S(G) = \{e_i\}_{i \in J_k}. \quad (33)$$

*Случай 2*, когда среди элементов  $G$  есть нулевые, соответственно  $n_0 > 0$ , т.е.

$$E^+ = E_{n+1,k}(G); \quad (34)$$

$$S(G) = \{0, e_1, \dots, e_k\} = \{e_i\}_{i \in J_k^0}, \quad \text{где } e_0 = 0, \quad J_k^0 = J_k \cup \{\emptyset\}. \quad (35)$$

Будем рассматривать их последовательно и сформулируем критерий смежности вершин в зависимости от рассматриваемого случая. Одновременно установим и степень регулярности  $d$  вершины  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ , т.е. количество вершин, смежных с ней.

**Теорема 4 (критерий смежности вершин  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$  и степень их регулярности).** Если выполнено (16),  $\forall x \in E_{nk}^{\pm}(G)$  смежные к ней вершины  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$  образуются из  $x$  заменой максимум двух переменных: заменой в  $x$  двух координат  $x_i, x_j$ , абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы  $G$ , значениями  $\text{sgn } x_i \cdot |x_j|, \text{sgn } x_j \cdot |x_i|$  (*способ 1*) либо сменой на противоположный знак координаты  $x$ , равной по модулю  $e_1$  (*способ 2*).

При выполнении (34) смежные к  $x \in E_{nk}^{\pm}(G)$  вершины  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$  отличаются от  $x$  не более чем двумя координатами и формируются из нее либо способом 1, либо транспозицией нулевой координаты и координаты с абсолютным значением  $e_1$  с последующей сменой знака ненулевой координаты на противоположный (*способ 3*).

В случае 1 степень регулярности произвольной вершины  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$  задается формулой

$$d = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}; \quad (36)$$

в случае 2:

$$d = 2n_0n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \quad (37)$$

**Доказательство.** Сначала сформируем множество смежных вершин многогранника  $\Pi_{nk}^\pm(G)$  для точек  $E^+$ , затем распространим результат на все множество  $E_{nk}^\pm(G)$ .

Введем обозначение для множества смежных вершин некоторого многогранника  $\Pi$  и их числа среди точек  $M \subseteq \text{vert } \Pi$ :  $N_{M,\Pi}(x) = \left\{ y \in M : y \overset{\Pi}{\leftrightarrow} x \right\}$ ,  $d_{M,\Pi}(x) = |N_{M,\Pi}(x)|$ . Так, например,  $N_{E,P}(x)$ ,  $d_{E,P}(x)$  соответствует искомым множеству и степени вершины  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ ,  $N_{E^+,P}(x)$  включает только смежные вершины  $P$  среди точек  $E^+$  и т. п.

Введем также в рассмотрение многогранник  $P^+ = \text{conv } E^+$ , представляющий собой общий перестановочный многогранник.

*Случай 1.* Рассмотрим произвольную точку  $x \in E^+$ . Во множестве  $N_{E,P}(x)$  выделим две части:

$$N_{E,P}(x) = N_{E^+,P^+}(x) \cup N_{E \setminus E^+,P}(x). \quad (38)$$

Первая часть — это множество вершин многогранника  $P^+$ , смежных с  $x$  —  $N_{E^+,P^+}(x) = N_{E^+,P^+}(x)$ , вторая — оставшиеся смежные вершины. В соответствии с критерием смежности вершин общего перестановочного многогранника [16],  $N_{E^+,P^+}(x)$  будет включать перестановки, образованные из  $x$  транспозицией последовательных элементов основы  $S(G)$  вида (33), т.е.  $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$ -транспозицией ( $i \in J_{k-1}$ ). Их количество определяется по формуле [4]

$$d_{E^+,P^+}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \quad (39)$$

Для формирования  $N_{E \setminus E^+,P}(x)$  воспользуемся критерием вершины общего многогранника размещений [4], учитывая тот факт, что  $x$  является не только вершиной  $P^+$ , но и многогранника  $P'$  вида (23). В  $N_{E^+,P^+}(x)$  выделим также две части:

$$N_{E^+,P^+}(x) = N_{E^+,P^+}(x) \cup N_{E \setminus E^+,P^+}(x), \quad (40)$$

последняя из которых содержит точки, образованные из  $x$  заменой наименьшей координаты  $e_1$  - нулем. Количество таких смежных вершин будет равно кратности  $e_1$ :  $d_{E \setminus E^+,P^+}(x) = n_1$ . Продлив ребра  $[x, y], y \in N_{E \setminus E^+,P^+}(x)$  симметрично точке  $y$ , из  $x$  будет сформировано  $n_1$  точек  $E$  путем смены знака одной координаты  $e_1$ . Это и будет искомое множество  $N_{E \setminus E^+,P}(x)$ .

Соответственно

$$d_{E \setminus E^+, P}(x) = n_1. \quad (41)$$

Объединяя эти результаты, получаем, что в случае 1:  $\forall x \in E^+$  множество  $N_{E, P}(x)$  образуется из  $x$  транспозицией соседних элементов основы  $G$  либо заменой знака минимальной координаты на противоположный.

Из выражения (40) следует:

$$d_{E', P'}(x) = d_{E^+, P^+}(x) + d_{E \setminus E^+, P'}(x). \quad (42)$$

Соответственно подстановка (39), (41) приводит к тому, что степень регулярности вершины  $x$  равна  $d_{E, P}(x) = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}$ . Это также справедливо для оставшихся точек  $E^+$ , т.е. в этом случае формула (36) верна.

Пусть теперь  $x$  — произвольная точка  $E$ . Помимо абсолютных значений координат  $x$  при построении  $N_{E, P}(x)$  будут учитываться и знаки координат  $x$ . Для  $x$  и смежных с ней вершин эти знаки будут совпадать, за исключением максимум одной координаты, равной по модулю  $e_1$ .

Итак в случае 1, учитывая симметрию  $E$ , для вершины  $x$  многогранника  $P$  критерий смежности выглядит следующим образом:  $\forall x \in E$  множество  $N_{E, P}(x)$  включает точки, образованные из  $x$  одним из двух способов: а) способом 1, т.е. заменой в  $x$  двух координат  $x_i, x_j, i \neq j$ , абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы  $G$  вида (33), значениями  $\operatorname{sgn} x_i \cdot |x_j|, \operatorname{sgn} x_j \cdot |x_i|$  соответственно; б) способом 2, т.е. сменой знака координаты, равной по модулю  $e_1$ , на противоположный. При этом степень регулярности произвольной вершины  $P$  определяется по формуле (36).

*Случай 2.* Снова рассмотрим точку  $x \in E^+$ . Множество смежных к ней вершин также представим в виде (38). Однако в отличие от случая 1 в силу (34) формула (39) преобразуется к виду

$$d_{E, P^+}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i n_{i+1}. \quad (43)$$

Что касается  $N_{E \setminus E^+, P}(x)$ , то поскольку минимальная координата  $x$  равна нулю,  $\forall y \in N_{E^+, P'}(x)$  ребра  $[x, y]$  вырождаются в точку  $x$ , от которой расходятся ребра как в область  $R_+^n$ , так и в области

$$R_{\leq 0}^{n, i} = \{x' \in R^n : x'_j \leq 0, x'_j \geq 0, j \neq i\}, i \in I^x = \{i \in J_n : x_i = 0\}. \quad (44)$$

Количество таких ребер  $\forall i \in I^x$ , идущих в  $R_{\leq 0}^{n, i}$ , будет  $n_1$  и будут образовываться из  $x \leftrightarrow e_1$ -транспозицией  $x_i, x_j$ -координат, где  $j \notin I^x$ , с последующей сменой знака  $x_i$  на противоположный. Поскольку, в соответ-

ствии с кратностью нулевого элемента количество областей вида (44) —  $n_0$ , общее количество образованных вершин в смежных к  $R_+^n$  областях:

$$d_{E \setminus E^+, P}(x) = n_0 n_1. \quad (45)$$

Подставляя (43), (45) в формулу (42), получаем  $d_{E, P}(x) = n_0 n_1 + \sum_{i=0}^{k-1} n_i n_{i+1}$ , т.е.  $\forall x \in E^+$  верна формула (37). Вследствие симметрии  $E$  и  $P$  формула (37) будет верна для всех точек  $E$ , при этом в случае 2  $\forall x \in E$  критерий смежности вершин многогранника  $P$  излагается следующим образом: множество  $N_{E, P}(x)$  включает точки, образованные из  $x$  одним из двух способов: а) заменой в  $x$  двух координат  $x_i, x_j, i \neq j$ , абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы  $G$  вида (35), значениями  $\operatorname{sgn} x_i \cdot |x_j|, \operatorname{sgn} x_j \cdot |x_i|$  соответственно, т.е. при помощи способа 1; б) способом 3, т.е. транспозицией нулевой координаты и координаты, равной по модулю  $e_1$ , с последующей сменой знака ненулевой координаты на противоположный:  $\forall x_i, x_j : x_i = 0, |x_j| = e_1$ ; новые значения этих координат  $x_i = -\operatorname{sgn}(x_j) e_1, x_j = 0$ . Степень регулярности вершин  $P$  определяется по формуле (37).

Теорема доказана.

**Пример 3.** Проиллюстрируем теорему 3 на примере тех же множеств, что и в примерах 1, 2.

Множества  $B_n'$  и  $E_{nk}^\pm(G), E_n^\pm(G)$  для  $G > 0$  соответствуют случаю 1. В частности, для  $PB_n'$ , учитывая (15),  $G = \{1^n\}$ , следовательно формула (36) обращается в  $d = n_1 = n$ . Поскольку  $E^+$  вырождено в точку, смежных вершин, образованных перестановкой координат, не будет и все смежные вершины будут формироваться только способом 2, соответствующим смене знака одной координаты на противоположный. Для  $E_n^\pm(G)$  формула (36) преобразуется в  $d = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n$ , а критерий смежности остается без измене-

ний. Как и ожидалось, многогранники  $PB_n', \Pi_n^\pm(G)$  — простые, т.е. степень регулярности их вершин совпадает с размерностью многогранников.

Наконец, множество  $CE_n$  соответствует случаю 2. Учитывая (14), в данном случае  $G = \{0^{n-1}, 1\}$ , в соответствии с формулой (37) имеем:  $d = 2n_0 n_1 = 2(n-1)$ .

Так, например, для  $n = 3$   $d = 2(3-1) = 4$  и в соответствии с критерием смежности вершин, например, для вершины  $x = (-1, 0, 0)$  половина смежных вершин —  $x^1 = (0, -1, 0), x^2 = (0, -1, 0)$  будет сформирована способом 1, оставшаяся половина —  $x^3 = (0, 1, 0), x^4 = (0, 0, 1)$  — способом 3 из предыдущих двух точек.

Полученные результаты подтверждают известные свойства  $PB'_n$ ,  $CP_n$ , в частности, что вершины гиперкуба имеют  $n$  смежных, а для вершины гипероктаэдра все оставшиеся вершины — смежные с нею, за исключением диаметрально противоположной.

**Число комбинаторно неэквивалентных многогранников  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ .** Прежде чем перейти к исследованию вопроса о комбинаторной эквивалентности многогранников класса  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ , приведем некоторые определения [16].

*Графом  $H$  многогранника  $\Pi$ ,  $H = H(\Pi)$ , называется граф, образованный вершинами и ребрами  $\Pi : H = (V_H, E_H) = (\text{vert } \Pi, \text{edges } \Pi)$ .*

Графы  $H = (V_H, E_H)$  и  $H' = (V_{H'}, E_{H'})$  *изоморфны*, если существует биекция между  $V_H, V_{H'} : V_H \xrightarrow{\phi} V_{H'}$  такая, что произвольные две вершины графа  $H$  — смежные тогда и только тогда, когда соответствующие две вершины графа  $H'$  — смежные:

$$\forall v_1, v_2 \in V_H : v_1 \leftrightarrow v_2 \Leftrightarrow v'_1 = \phi(v_1), v'_2 = \phi(v_2) : v'_1, v'_2 \in V_{H'}, v'_1 \leftrightarrow v'_2.$$

Многогранники называются *комбинаторно эквивалентными*, если их графы изоморфны.

Введем обозначение  $M_n$  для числа комбинаторно неэквивалентных многогранников  $\Pi_{nk}^\pm(G)$  размерности  $n$ . Произведем предварительную оценку числа  $M_n$ . Так, из системы неравенств (24) видно, что число гиперграней  $P$  определяется комбинациями чисел  $n_0, n_k$ . Учитывая, что  $n_0 + n_k \leq n, n_0 \in Z_+, n_k \in Z_{>0}$ , получаем

$$M_n \geq M'_n = C_{n+1}^2. \quad (46)$$

Точное значение  $M_n$  определим, учитывая то, что количество смежных вершин  $x$  и множество смежных вершин определяются первичной спецификацией  $G$ .

Итак, докажем следующую теорему.

**Теорема 5** (число комбинаторно неэквивалентных общих многогранников перестановок со знаком). Для фиксированного  $n$  число  $M_n$  комбинаторно неэквивалентных многогранников  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ :

$$M_n = 2^n - 1. \quad (47)$$

**Доказательство.** Случаи 1, 2 рассмотрим по отдельности, обозначив соответствующие числа комбинаторно неэквивалентных многогранников размерности  $n$  —  $M_n^1, M_n^2$ .

Начнем со случая 1: число различных векторов первичных спецификаций вида  $[G] = (n_1, \dots, n_k)$ , удовлетворяющих  $\sum_{i=1}^k n_i = n, k \leq n$ , равно числу композиций числа  $n$ , следовательно  $M_n^1 = 2^{n-1}$ .

Для случая 2:

$$[G] = (n_0, n_1, \dots, n_k), \tag{48}$$

$\sum_{i=0}^k n_i = n$ ,  $n_0, k \geq 1$ . Поскольку каждой композиции длины  $k+1$  ставится в соответствие первичная спецификация (48), все компоненты которой ненулевые, условие  $n_0 \geq 1$  будет выполнено всегда. Для определения  $M_n^2$  из числа композиций числа  $n$  достаточно отнять единицу, поскольку в случае  $[G] = (n)$  не выполняется  $k \geq 1$ . Итак,  $M_n^2 = 2^{n-1} - 1$ . Учитывая, что  $M_n = M_n^1 + M_n^2$ , окончательно имеем формулу (47).

Теорема доказана.

**Пример 4.** Для  $n = 3$  оценка (46)  $M_3 \geq M_3' = C_4^2 = 6$  близка к точному значению (47) —  $M_3 = 2^3 - 1 = 7$ . Для иллюстрации теоремы 4 в таблице приведены различные 3-мультимножества, соответствующие семи возможным векторам первичной спецификации, а также кратности минимального и максимального элементов и степени вершин многогранников. Как видно, первые 4 мультимножества соответствуют случаю 1, остальные 3 — случаю 2. Как было отмечено, первым признаком комбинаторной неэквивалентности является различие комбинаций  $n_0, n_k$ . Нетрудно видеть, что эти параметры совпадают только у пары  $G_1, G_3$ , т.е. в точности  $M_3' = 6$  комбинаций  $n_0, n_k$  выявлено. Смотрим второй признак — степень регулярности вершин: для  $G_1$   $d = 3$ , в то время, как для  $G_3$   $d = 4$ . Таким образом, даже вот такой беглый анализ показывает, что все многогранники  $\Pi_{3k}^\pm(G_i)$ ,  $i \in J_7$  — не комбинаторно эквивалентны.

Многогранники  $\Pi_{3k}^\pm(G_i)$

Мультимножество	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$n_0$	$n_k$	$r$
$G_1$	1	2	3	0	1	3
$G_2$	1	2	2	0	2	3
$G_3$	1	1	2	0	1	4
$G_4$	1	1	1	0	3	3
$G_5$	0	1	2	1	1	3
$G_6$	0	1	1	1	2	4
$G_7$	0	0	1	2	1	4

Все семь трехмерных многогранников данного класса показаны на рис. 1–7. Видно, что некоторые из них формируются из гиперкуба отсечениями его вершин, остальные — вершин и ребер, в результате чего образуются вершины со степенью регулярности 3 и 4. Простыми многогранниками в данном семействе являются, помимо упомянутых  $\Pi_3^\pm, B_3'$ , еще два —  $\Pi_{32}^\pm(G_2)$ ,  $\Pi_3^\pm(G_5)$ .



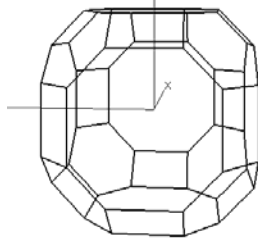


Рис. 1.  $\Pi_3^\pm(G_1) = \Pi_3^\pm$

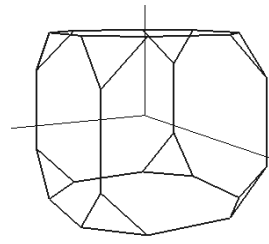


Рис. 2.  $\Pi_{32}^\pm(G_2)$

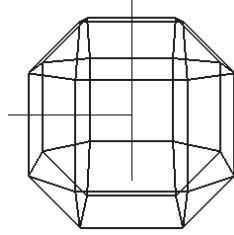


Рис. 3.  $\Pi_{32}^\pm(G_3)$

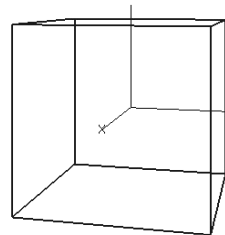


Рис. 4.  $\Pi_{31}^\pm(G_4) = PB_3'$

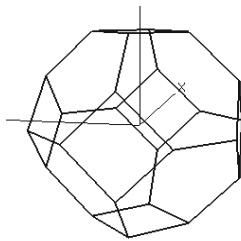


Рис. 5.  $\Pi_{32}^\pm(G_5)$

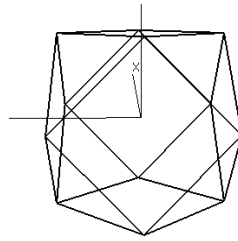


Рис. 6.  $\Pi_{32}^\pm(G_6)$

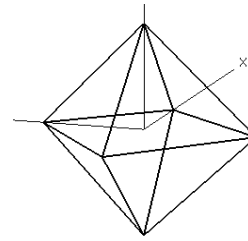


Рис. 7.  $\Pi_{32}^\pm(G_7) = CP_3$

**Пример 5.** Для  $n = 4$  формула (46) дает оценку  $M_4' = C_5^2 = 10$  числа некомбинаторно эквивалентных многогранников среди общих многогранников перестановок со знаком размерности 4, в то время, как точное их количество согласно (47), в полтора раза больше:  $M_4 = 2^4 - 1 = 15$ .

## 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ НА $E_{nk}^\pm(G)$ , $\Pi_{nk}^\pm(G)$

Свойства линейных и некоторых нелинейных функций на множестве  $E$  вида (10) и многограннике  $P$  вида (11) рассматривались в разделе 1. Так  $H$ -представление  $P$ , приведенное в теореме 3, описывает поведение линейных функций как на  $P$ , так и на  $E$ . В то же время это линейное аналитическое (или функциональное в терминах [9–11]) представление  $E$  в компактной форме (21) также демонстрирует поведение на  $E$  и  $P$  нелинейных функций, представляющих собой суммы модулей некоторых координат и показывает пределы изменения их значений.

Уравнение (30) также указывает, что квадратичная функция  $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$

принимает постоянное значение на  $E$ , а (29) демонстрирует выполнение этого же свойства для целого семейства функций

$$h_m(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^m, \quad m \in R_{>0}. \quad (49)$$

Поверхность  $S_m = \left\{ x \in R^n : h_m(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^m \right\}$  задает в пространстве так называемую суперсферу [17]. В этих обозначениях (29) представляется в виде

$$E \subset S_m, \quad m \in R_{>0}, \quad (50)$$

и свидетельствует о том, что  $E$  вписано не только в сферу, но и лежит на целом семействе (50) суперсфер. В зависимости от параметра деформации  $\frac{m}{2}$  суперсферы могут быть как выпуклые ( $m \geq 1$ ), так и невыпуклые ( $m \in (0, 1)$ ); как гладкие при  $m \in [2, \infty)$ , так и негладкие в противном случае. Значениям  $m = 1, \infty$  соответствуют кусочно-линейные поверхности гипероктаэдра  $CP_n \left( \sum_{i=1}^n g_i \right)$  и гиперкуба  $\bar{\Pi}_2^n(\{-g_k^n, g_k^n\}) = \text{conv } \bar{E}_2^n(\{-g_k^n, g_k^n\})$ . Соответственно можем судить о поведении целого класса функций (49) на  $E$ .

Отметим также, что при  $m \in [2, \infty)$  функция  $h_m(x)$  сильно выпуклая, при  $m \in [1, 2)$ ,  $m = \infty$  — строго выпуклая.

Справедливо следующее обобщение представления (21), (30).

**Лемма 5.**  $\forall m \in (1, \infty)$  множество  $E_{nk}^\pm(G)$  задается несводимым функциональным представлением (21),

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^m = \sum_{i=1}^n |g_i|^m. \quad (51)$$

Представление (21), (51) — гладкое при  $\forall m \in [2, \infty)$  и принимает форму (21),

$$\sum_{i=1}^n (x_i^{m/2})^2 = \sum_{i=1}^n |g_i|^m. \quad (52)$$

Как видно, найдено множество полиномиальных функциональных представлений множества  $E$ , включающих систему ограничений  $P$ , число которых неполиномиально. Возникает вопрос, существуют ли функциональные представления  $E$  с меньшим числом компонент. Ответ на этот вопрос положительный и основан на следующей теореме.

**Теорема 6** [18]. Система полиномиальных уравнений

$$\sum_{i=1}^n x_i^j = \sum_{i=1}^n g_i^j, \quad j \in J_n, \quad (53)$$

является функциональным представлением общего множества перестановок, индуцированного мультимножеством  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ .

Аналитические представления в виде систем уравнений, таких как (53), называем *строгими* функциональными представлениями множеств. Геомет-

рически они представляют множество как пересечение некоторых поверхностей.

На основании теоремы 6 сформируем строгое представление  $E$ , применяя ее к мультимножеству (3).

**Лемма 6.** Система уравнений

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^j = \sum_{i=1}^n g_i^j, \quad j \in J_n \quad (54)$$

задает строгое функциональное представление общего множества перестановок со знаком из мультимножества вида (3).

**Доказательство.** В данном случае система (53) задает общее множество перестановок  $E^+$  вида (13). Поскольку  $E$  образуется отражениями  $E^+$  относительно всевозможных координатных плоскостей, в пересечении суперсфер (54) образуется  $E$  и только оно.

Еще одно представление  $E$  легко получить из теоремы 6, применяя ее к  $E^+$  и осуществляя затем замену переменных  $x_i \rightarrow x_i^2$ ,  $g_i \rightarrow g_i^2$ ,  $i \in J_n$ .

**Лемма 7.** Система полиномиальных уравнений

$$\sum_{i=1}^n x_i^{2j} = \sum_{i=1}^n g_i^{2j}, \quad j \in J_n, \quad (55)$$

является строгим функциональным представлением множества  $E_{nk}^\pm(G)$ , индуцированного мультимножеством (3).

Преимуществом представления (55) по сравнению с (54) является гладкость, отсутствие модулей в записи и тот факт, что она включает сильно выпуклые функции.

Важным свойством общего множества перестановок является тот факт, что произвольная перестановка координат его элементов не выводит за пределы этого множества, вследствие чего все симметричные функции принимают постоянное значение на  $E_{nk}(G)$ . Нетрудно заметить, что это свойство сохраняется при переходе от  $E_{nk}(G)$  к  $E_{nk}^\pm(G)$ . Кроме этого, смена знаков произвольного количества переменных элементов  $E_{nk}^\pm(G)$  приводит к формированию точки этого же множества. Итак, имеем следующее утверждение.

**Лемма 8.** Произвольная функция  $f: E_{nk}^\pm(G) \rightarrow R_+$  такая, что: а)  $f(x)$  — симметричная; б)  $f(x)$  не изменяет значения при замене знаков произвольного числа координат, принимает на  $E_{nk}^\pm(G)$  постоянное значение  $A(G)$ , определяемое элементами  $G: f(x) \Big|_{E_{nk}^\pm(G)} = A(G)$ .

**Замечание 1.** Из леммы 8 следует, что  $\forall j \in J_n \quad \sum_{i=1}^n (\ln(|x_i|+1))^j \Big|_{E_{nk}^\pm(G)} = \sum_{i=1}^n (\ln(g_i+1))^j$ , или, например,  $\prod_{i=1}^n |\sin x_i|^j \Big|_{E_{nk}^\pm(G)} = \prod_{i=1}^n |\sin g_i|^j$ .

Однако вопрос, задает ли семейство  $\sum_{i=1}^n (\ln(|x_i|+1))^j = \sum_{E_{nk}^{\pm}(G)} (\ln(g_i+1))^j$ ,

$j \in J_n$  или  $\prod_{i=1}^n |\sin x_i|^j = \prod_{E_{nk}^{\pm}(G)} |\sin g_i|^j$ ,  $j \in J_n$  множество  $E_{nk}^{\pm}(G)$ , требует

отдельного изучения. Если он решен положительно, т.е. когда решена задача построения функционального представления множества, возникают новые задачи — о избыточности функциональных представлений, об оптимальном выборе такого представления при решении задачи (1), (2). Так например, представление (53), как правило, избыточное представление  $E_{nk}(G)$ . В то же время, в работе [10] установлено, что оно избыточное, поскольку для некоторых  $G$ , например,  $E_{n2}(\{0^{n-1}, 1\})$  полностью определяется двумя последовательными компонентами (53). Переходя к представлениям рассматриваемого множества  $E_{nk}^{\pm}(G)$ , можно сказать, что как (54), так и (55) — в отдельных случаях сводимы, поскольку  $E_{n2}(\{0^{n-1}, 1\})$  будет соответствовать  $E_{n2}(\{0^{n-1}, 1\}) = CE_n(1)$ , определяемое любыми двумя компонентами этих представлений [10]. То же касается множества  $E_{n2}^{\pm}(\{1^n\}) = B_n'$  [8, 10].

Отметим еще одну особенность  $E$  — простоту решения линейной задачи и, как следствие, проектирования на  $E$ .

Итак, множество  $E$  называется *хорошо описанным* (a well described set) [19], если линейная задача  $LP(E, c) : x^{lin, E} = \underset{E}{\operatorname{argmin}} c^T x$  эффективно разрешима.

Структура  $E_{nk}^{\pm}(G)$  позволяет легко записать решение этой задачи.

**Лемма 9.** Если  $(i_j)_{j \in J_n} : \{i_j\}_{j \in J_n} = J_n$ ,  $|c_{i_j}| \geq |c_{i_{j+1}}|$ ,  $j \in J_{n-1}$ , то

$$x_{i_j}^{lin, E_{nk}^{\pm}(G)} = \operatorname{sgn}(c_{i_j}) g_j, \quad j \in J_n. \quad (56)$$

Как видно, решение  $LP(E_{nk}^{\pm}(G), c)$  сводится к простому упорядочиванию коэффициентов целевой функции и присваиванию (56), т.е.  $E_{nk}^{\pm}(G)$  — хорошо описанное.

**Теорема 7** [2]. Если  $E$  — хорошо описанное полиэдрально-сферическое множество, то задача поиска проекции произвольной  $y \in R^n$  на  $E$  эффективно разрешима и сводится к  $LP(E, a - y)$ , где  $a$  — центр описанной вокруг  $E$  сферы.

Применяя теорему 7 к (10) и учитывая формулу (28), получаем

$$x^P = \operatorname{Pr}_E y, \quad (57)$$

т.е. решение задачи  $LP(E, \mathbf{0} - y) = LP(E, -y)$  — это решение задачи  $\operatorname{argmax}_E c^T x$ . Адаптируем лемму 9 к этому случаю.

**Лемма 10.** Решение задачи (57) на  $E_{nk}^{\pm}(G)$  для произвольной  $y \in R^n$

$$x_{i_j}^P = \text{sgn}(y_{i_j})g_j, \quad j \in J_n,$$

где  $(i_j)_{j \in J_n} : \{i_j\}_{j \in J_n} = J_n$ ,  $|y_{i_j}| \leq |y_{i_{j+1}}|$ ,  $j \in J_{n-1}$ .

Наконец, последнее свойство, которое приводим, — это возможность упрощенной проверки произвольной точки  $x \in R^n$  на принадлежность  $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ . Оно основано на лемме 9 и свойствах функций  $\sum_{j \in \omega} |x_j|$ ,  $\omega \subseteq J_n$  на этом многограннике.

**Лемма 11.** Точка  $x \in \Pi_{nk}^{\pm}(G)$  тогда и только, когда она удовлетворяет системе ограничений:

$$\sum_{j'=1}^j |x_{n-i_{j'+1}}| \leq \sum_{j'=1}^j g_{n-j'+1}, \quad j \in J_n \setminus \{\overline{2, n_k} \cup \overline{n-n_0, n-1}\}.$$

### 3. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ (1), (2)

Решение задачи поиска функционального представления дискретного множества  $E$  позволяет эквивалентно переформулировать (1), (2) в виде непрерывной задачи (1) с дополнительными ограничениями

$$f_i(x) = 0, \quad i \in J_k; \tag{58}$$

$$f_i \leq 0, \quad i \in J_{k'} \setminus J_k, \tag{59}$$

где  $f_i(x) = 0$ ,  $i \in J_{k'}$  — компоненты функционального представления  $E$ . В частности, строгие *суперсферические представления* (54) и (55) позволяют свести к классической задаче (1), (58) на условный экстремум.

Вершинная расположенность  $E$  позволяет свести исходную задачу к оптимизации выпуклой функции, а именно к задаче

$$F(x) \rightarrow \min, \tag{60}$$

$$F(x) \text{ — выпуклая на выпуклом компакте } K \supseteq E, \tag{61}$$

при ограничениях (58), (59). Эквивалентность задач (58)–(61) и исходной обеспечивается тем, что  $F(x) \stackrel{E}{=} f(x)$ , т.е.  $F(x)$  — выпуклое продолжение

$F(x)$  с  $E$  на  $K$  [9, 12]. При этом  $F(x)$  часто может быть найдена с помощью компонент строгих представлений  $E$  в форме  $F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x)$ ,  $\lambda_i \in R$ ,  $i \in J_k$  [2, 9, 10].

Суперсферические представления  $E$  позволяют также применять к (1), (2) метод множителей Лагранжа, штрафные методы и их комбинации [20]. При этом выпуклость  $F(x)$  позволяет давать и уточнять нижние оценки,

а проектирование на множество  $E$  в ходе всего итерационного процесса — получать и последовательно уточнять верхние оценки.

Использование в качестве ограничений (58), (59) полиэдрально-суперсферических представлений (21), (52) позволяет комбинировать различные релаксации исходной задач, в том числе и выпуклые, — полиэдральную —  $F(x) \rightarrow \min_P$ , суперсферическую  $F(x) \rightarrow \min_{S_m}$  и супершаровую

$F(x) \rightarrow \min_{C_m}$ , где  $S_m$  — строго выпуклая суперсфера,  $C_m = \text{conv } S_m$ . Таким

образом, к (1), (2) применимы точные и приближенные (с оценкой точности) полиэдрально-поверхностные методы [2].

Способ задания  $E$  через  $E_{nk}(G)$ ,  $B'_n$  позволяет легко генерировать его элементы и предложить различные эвристические подходы к решению (1), (2), в том числе генетические алгоритмы [21]. Для последних полезным является простота проектирования на  $E$  точек, образованных в результате скрещивания. Критерий смежности вершин  $P$  позволяет использовать схемы спуска [22] и комбинировать с случайным поиском в метаэвристиках. Оценку точности результата и здесь при желании можно получить с помощью полиэдральной или супершаровой релаксаций.

В заключение несколько слов об упомянутых выпуклых релаксациях. Несводимая система  $P$  позволяет точно определить, полиномиальным или неполиномиальным числом ограничений задается многогранник. В последнем случае оперирование всей системой многогранника невозможно при решении реальных задач, поэтому для решения полиэдральной релаксации используются специальные приемы типа метода последовательного подсоединения ограничений [4], основанные на применении леммы 11 и позволяющие использовать незначительную часть ограничений  $P$ . В то же время тот факт, что  $E$  хорошо описанное, позволяет эффективно решать полиэдральную релаксацию модифицированным методом условного градиента [2].

## ВЫВОДЫ

Проведено исследование свойств общих множества и многогранника перестановок со знаком, в частности установлены: мощность множества  $E_{nk}^\pm(G)$  и порядок несводимого  $H$ -представления многогранника  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ , размерность, критерии вершин и смежности вершин  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ , а также количество комбинаторно неэквивалентных многогранников фиксированной размерности. Представлена иллюстрация многогранников  $\Pi_{3k}^\pm(G)$  всевозможных форм. Для множества  $E_{nk}^\pm(G)$  приведен ряд функциональных представлений, включая полиэдрально-суперсферическое и строгое суперсферическое, а также приведены явные решения линейной задачи и задачи проектирования на это множество. Перечислены оптимизационные методы, применимость которых стала возможной в результате исследованных свойств  $E_{nk}^\pm(G)$  и  $\Pi_{nk}^\pm(G)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kochenberger G. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey / G. Kochenberger, J.-K. Hao, F. Glover etc // Journal of Combinatorial Optimization. — 2014. — N 1. — P. 58-81. DOI: 10.1007/s10878-014-9734-0.
2. Pichugina O. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. — 2016. — Vol. 4(2) . — P. 129–152. DOI: 10.1166/jcsmd.2016.1103
3. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. — К. : Наук. думка, 1986. — 268 с.
4. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. — 188 с.
5. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств (Препринт АН УССР/Институт проблем машиностр.; 85) / Ю.Г. Стоян. — Харьков, 1980. — 22 с.
6. Taha H. A. Integer Programming: Theory, Applications, and Computations. Edited by J. William Schmidt / H.A. Taha. — New York: Academic Press, 2014. — 392 p.
7. Sherali H.D. A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems / H.D. Sherali, W.P. Adams, P.M. Pardalos (eds.).— Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 518 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-4388-3.
8. Pichugina O. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems / O. Pichugina, S. Yakovlev // Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. — Springer, Switzerland. — 2016. — P. 689–700. DOI: 10.1007/978-3-319-30379-6\_62.
9. Pichugina O.S. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization / O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — Vol. 52, N 6. — P. 921–930. DOI: 10.1007/s10559-016-9894-2.
10. Pichugina O. Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization / O. Pichugina, S. Yakovlev // IOSR Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 13, N 2, Ver.V. — P. 12–25. DOI: 10.9790/5728-1302051225.
11. Pichugina O. Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON) . — 2017. — P. 1167–1174. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100436.
12. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников / С. В. Яковлев // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1994. — 34, № 7. — С. 1112–1119.
13. Яковлев С.В. О некоторых классах задач оптимизации на комбинаторных множествах размещений / С.В. Яковлев, И.В. Гребенник // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1991. — №11. — С. 26 – 30.
14. Postnikov A. Permutohedra, associahedra, and beyond / A. Postnikov // IMRN: International Mathematics Research Notices. — 2009. — N 6. — P. 1026-1106. DOI: 10.1093/imrn/rnn153.
15. Weisstein E.W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition / E.W. Weisstein. — Boca Raton: CRC Press, 2002. — 3242 p.
16. Емеличев В.А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. — М.: Наука. Гл. ред. физико-мат. лит-ры, 1981. — 344 с.

17. *Onaka S.* Superspheres: intermediate shapes between spheres and polyhedra / S. Onaka // *Symmetry*. — 2012. — Vol.4, N 3. — P. 336–343. DOI: 10.3390/sym4030336.
18. *Пичугина О.С.* Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества / О.С. Пичугина, С.В. Яковлев // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologie*. — 2016. — № 1 — С. 101–126. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550.
19. *Berstein Y.* Parametric nonlinear discrete optimization over well-described sets and matroid intersections / Y. Berstein, J. Lee, S. Onn, R. Weismantel // *Mathematical Programming*. — 2010. — Vol. 124, N 1/2 — P. 233–253. DOI: 10.1007/s10107-010-0358-6.
20. *Bertsekas D.P.* *Nonlinear Programming*, 2nd edn. / D.P. Bertsekas. — Belmont: Athena Scientific, 1999. — 708 p.
21. *Гуляницький Л.Ф.* Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навчальний посібник / Л.Ф. Гуляницький, О.Ю. Мулеса. — К: Видавничо-поліграф. центр "Київський університет", 2016. — 142 с.
22. *Sergienko I.V.* *Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity* / I.V. Sergienko. — New York: Springer, 2012. — 226 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-4211-0.

Поступила 16.06.2017



## ИНТЕГРАЦИЯ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ И МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Л.С. КОРЯШКИНА, А.П. ЧЕРЕВАТЕНКО, Е.О. КОРЯШКИНА

**Аннотация.** Представлен обзор программного обеспечения и технологий геоинформационных систем в контексте применения их к решению практических задач территориальной сегментации рынка услуг, математические постановки которых сводятся к непрерывным задачам оптимального мультиплексного разбиения множеств. Под моделями зон обслуживания понимаются основанные на геометрии процедуры создания теоретических зон обслуживания с использованием характеристик сервисного центра и предположений о поведении клиента. Описаны основные требования к наборам данных, используемых в разработанном программном обеспечении, включающем методы решения задач мультиплексного разбиения и ГИС-технологии. Приведены результаты сегментации территории города на зоны обслуживания несколькими центрами услуг с учетом возможности перекрытия зон. Предложен подход к решению задач оптимального размещения сервисных центров в ограниченной невыпуклой несвязной области с одновременной сегментацией рынка услуг.

**Ключевые слова:** непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств, геоинформационные системы, ГИС-технологии, территориальная сегментация рынка услуг.

### ВВЕДЕНИЕ

Непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств (ОМРМ) состоят в разбиении ограниченного множества из пространства  $E_n$  на такие подмножества точек, каждое из которых отвечает (в соответствии с определенным критерием) одному и тому же набору  $k$  точек из  $N$  существующих, называемых центрами ( $k < N$ ) [1, 2]. Как отмечено в работе [2], выбор критерия оптимальности мультиплексного разбиения определяется спецификой самих центров. Чаще всего это или минимизация суммарного взвешенного расстояния от центров до всех точек, им соответствующих, или оптимизация наихудшего варианта, когда минимизируется максимальное расстояние от центров до самой отдаленной точки соответствующего им подмножества. Вопросам, связанным с теоретическим обоснованием методов решения непрерывных линейных задач ОМРМ в различных постановках, а также исследованию свойств решений и практических приложений таких задач, посвящены работы [3–6].

В работах [5, 6] показано, что при  $\Omega \subset E_2$  непрерывные задачи ОМРМ могут выступать в качестве математических моделей задач территориальной сегментации рынка услуг, в особенности когда зоны могут перекрываться. При этом необходимо учитывать такие факторы, как спрос и предложение на рынке услуг, количество и расположение уже существующих сервисных

центров, неохваченные предложением территории, места наибольшей концентрации потенциальных клиентов. Кроме того, планирование размещения новых сервисных центров предполагает учет и других факторов, таких как наличие коммуникаций в местах предполагаемого размещения центров, возможные дополнительные расходы на строительство собственных коммуникаций, налог на землю и т.п. При моделировании реальных задач сегментации возникают также вопросы, связанные с описанием границ сегментируемых территорий, вычислением фактических расстояний между сервисными центрами и их клиентами.

Приведенные выше данные, а также развитые средства автоматизации процесса поиска кратчайшего пути между конкретными объектами (точками на карте) предоставляют современные геоинформационные системы (ГИС) и технологии. Данная работа посвящена вопросам, связанным с расширением функциональных возможностей компьютерной программы «Optimal Multiplex-Partitioning of Sets» (OMPS-2015) [7] за счет ее интеграции с современными ГИС-технологиями. Некоторые аспекты применения ГИС при решении задач ОМРМ затронуты в работах [8, 9].

#### **ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ В КОНТЕКСТЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОМРМ**

Всеобщий интерес к использованию геоинформационных систем в различных областях практической деятельности вызвало такое их преимущество перед другими информационными системами, как возможность объединения разнородных данных на основе географической информации. В настоящее время ГИС широко используются для решения задач корпоративных пользователей, например, в градостроительной деятельности, природопользовании и многих других областях, предоставляя пользователям возможности решения задач пространственного анализа, планирования и прогнозирования. Геоинформационные системы нередко выступают как инструмент интеграции разнородных информационных систем предприятия, поэтому программное обеспечение ГИС часто является интегрированным сегментом корпоративной информационной среды [10].

Интернет-услуги в области геоданных постоянно расширяются и технологически совершенствуются, затрагивая все более глубокие пласты геоинформационной деятельности: производство и распространение цифровых геоданных, их стандартизацию и классификацию, создание ГИС с возможностями удаленного доступа для широкого круга пользователей посредством «открытых» сетей, осуществление комплексных научно-исследовательских ГИС-проектов. Дальнейшее совершенствование развития ГИС-индустрии связано с созданием специализированных ГИС-технологий. Уже в настоящее время предлагаемые и реализованные технологические решения достаточно разнообразны. Это разнообразие диктуется желанием учесть, по возможности, широкий спектр функциональных и пользовательских требований, предъявляемых к интернетовским ГИС-приложениям, таким как скорость формирования, передачи и выполнения запросов, набор геоинформационных услуг, предоставляемых сервером, возможность доступа и обработки больших массивов географической информации и т.д. Формируется новое

технологическое направление работы с геопространственными данными в сетевом режиме, получившее название WebGIS-системы. Разрабатываемые интегрированные информационно-технологические решения называют WebGIS-технологиями. Главное их достоинство заключается в том, что эта технология «связывает» между собой и делает доступными для широкого и совместного использования геоданные, рассредоточенные по различным точкам земного шара. Важнейшим свойством разрабатываемых в настоящее время WebGIS-технологий является то, что, применяя их, пользователи Интернет получают возможность активной работы с геоданными (вплоть до реализации собственных ГИС-проектов), не приобретая для этого геоинформационные программные средства (ГИС-оболочки). Основным инструментом работы остаются только интернет-навигаторы/браузеры, оснащенные некоторыми стандартными или специализированными программными приложениями, распространяемыми, как правило, в сети Интернет бесплатно. Таким образом, WebGIS-технологии позволяют добавить геоинформационные функции к широкому спектру приложений, основанных на сетевом доступе и используемых в бизнесе, управлении, образовании.

Далее рассмотрим вопросы совместного использования ГИС-технологий и методов решения задач оптимального мультиплексного разбиения множеств для территориальной сегментации рынка услуг, т.е. моделирования зон сервисного обслуживания на заданной территории. По аналогии с работами [11–13], где были введены понятия торговых зон Вороного, под моделями зон обслуживания будем понимать основанные на геометрии процедуры создания теоретических зон обслуживания с использованием характеристик сервисного центра и предположений о поведении клиента. Выделение таких зон наиболее полезно в случаях, если подробные данные о предпочтениях клиентов отсутствуют либо считаются слишком дорогостоящими, или требуется большое количество времени для их получения. Такие модели могут быть использованы не только для описания, но и для прогнозирования зон обслуживания, для определения потенциальных мест расположения новых сервисных центров, оценивания воздействия этих и других изменений на существующем множестве центров.

Приведем кратко математическую постановку непрерывной линейной задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств евклидова пространства  $E_2$  на подмножества  $k$ -го порядка с неизвестными заранее координатами центров, программную реализацию алгоритма решения которой будем расширять возможностями ГИС.

## НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ И ИДЕЯ МЕТОДА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Пусть  $\Omega$  — ограниченное, измеримое по Лебегу, замкнутое множество из пространства  $E_2$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$ , для всех  $i = \overline{1, N}$  — некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых неизвестны заранее и подлежат определению,  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ .

Будем использовать следующие обозначения:  $N = \{1, 2, \dots, N\}$  — набор всех индексов центров;  $M(N, k)$  — множество всех  $k$ -элементных под-

множеств множества  $N$ ,  $|M(N, k)| = C_N^k = L$ ;  $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ ,  $l = \overline{1, L}$ , — элементы из  $M(N, k)$ .

С каждым элементом  $\sigma_l$  множества  $M(N, k)$  будем ассоциировать подмножество  $\Omega_{\sigma_l}$  точек из  $\Omega$ , а с подмножеством  $\Omega_{\sigma_l}$  связывать набор центров  $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$ ,  $l = \overline{1, L}$ .

Пусть  $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$  — класс всех возможных разбиений  $k$ -го порядка множества  $\Omega$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ :

$$\Sigma_{\Omega}^{N, k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0; \right. \\ \left. \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множества  $\Omega \subset E_2$  при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [3, 4].

**Задача А.** Найти, минимизировав функционал

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N, k}; \\ \tau^N \in \Omega^N}}$$

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx, \quad (1)$$

где  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$ ;  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  — ограниченные, определенные на декартовом произведении  $\Omega \times \Omega$  функции, измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном векторе  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ . Функция  $\rho(x)$  — ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве  $\Omega$ ;  $w_i > 0$ ,  $a_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , — заданные числа.

Оптимальным решением задачи А2- $k$  называется пара  $(\bar{\omega}^*, \tau^{N*})$ , при которой достигается минимальное значение функционала  $F$ .

Метод решения задачи А2- $k$  предполагает переход к эквивалентной задаче, сформулированной относительно характеристических вектор-функций подмножеств  $\Omega_{\sigma_l}$ ,  $l = \overline{1, L}$ , составляющих разбиение  $k$ -го порядка множества  $\Omega$ , обозначаемых  $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$ ,  $l = \overline{1, L}$ , определенных на множестве  $\Omega$ , с координатами, вычисляемыми по следующей формуле  $\forall x \in \Omega_{\sigma_l}$ :

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l} \text{ \& } i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L},$$

**Задача Б.** Найти  $\lambda(\cdot)$ ,  $\tau^N$ , которые обеспечивают

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_0^k \times \Omega^N} \int \sum_{l=1}^L \left( \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)) : \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L}, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, \quad l = \overline{1, L}, \quad \text{почти везде для } x \in \Omega \right\}.$$

В работах [3, 4] показано, что оптимальное решение задачи **B2-k** имеет следующий вид: для  $i = \overline{1, N}$ ,  $l = \overline{1, L}$  и почти всех  $x \in \Omega$

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j, \\ & i \in \sigma_l, \quad j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau) \rightarrow \min_{\tau^N \in \Omega^N}, \quad (2)$$

где

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l=1, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx. \quad (3)$$

Решение непрерывной задачи ОМРМ сводится к решению конечномерной задачи (2) с недифференцируемой функцией (3) любым известным методом негладкой оптимизации [14].

## ИНТЕГРАЦИЯ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Геоинформационная система хранит информацию о реальном мире в виде набора тематических слоев, которые объединены на основе географического положения. Этот простой, но очень гибкий подход доказал свое преимущество при решении разнообразных реальных задач. Электронные карты, как правило, содержат полную информацию о протяженности дорог, их связности и условиях перемещения по ним (скоростные режимы, запрещенные съезды, наличие перевалочных пунктов и т.д.).

В процессе исследования возможности применения ГИС-технологий при решении непрерывных задач ОМРМ выбор платформы ГИС был ориентирован на наличие функционала поиска кратчайшего пути и расчета его длины. Данный функционал является базовым в программных продуктах семейства ArcGIS. Однако ArcGIS является платным и для его использования следует приобрести лицензию. Альтернативой платному программному обеспечению является свободная кроссплатформенная геоинформационная система QGIS с открытым кодом, которая предоставляет возможность использовать инструменты анализа, выборки, геопроецирования, управления

геометрией и базами данных. Система QGIS включает в себя и функционал поиска кратчайшего пути, необходимый при решении практических задач оптимального мультиплексного разбиения множеств.

Возможны два варианта использования геоинформационных технологий при решении задач ОМРМ. В первом варианте на этапе расчета длины пути между точками на карте и выделенными центрами предполагается вызов внешней программы — ГИС. В другом варианте можно расширить функционал уже существующей ГИС-системы, реализовав в нем методы решения непрерывных задач ОМРМ. В обоих вариантах требуется провести некоторый подготовительный этап, который заключается в процессе поиска и загрузки электронных карт из базы OSM в выбранную ГИС-систему. OSM (Open Street Map) — ресурс для получения бесплатных данных с открытой лицензией. База данных OSM содержит информацию о дорогах, улицах, кафе, вокзалах и многих других объектах по всему миру. Получение доступа к данным OSM в ГИС-формате интегрировано в QGIS.

Несмотря на широкую функциональность упомянутых выше систем выяснилось, что они позволяют определить путь лишь между точками, которые принадлежат сети дорог. Для расчета расстояний между двумя произвольными точками на карте требуется дополнительная возможность ГИС-подпрограммы поиска ближайшей дороги для любой точки. Такой функциональностью обладает сервис Google Maps AP, используемый в миллионах web-сайтов и приложений для расширения возможностей работы с местоположениями. Сервисы Google Maps API распределены по категориям в зависимости от платформы: web, Android и iOS. В частности, Google Maps Distance Matrix API — служба, которая предоставляет информацию о длине маршрута между начальной и конечной точками. Эти точки могут быть заданы как словесно (в виде адреса), так и географическими координатами. При отправке адреса в виде строки служба выполнит геокодирование строки и преобразует ее в координаты широты/долготы для расчета расстояний. Возвращаемая информация основывается на рекомендованном (минимальном) маршруте в соответствии с расчетами Google Maps API. Кроме того, Google Maps Distance Matrix API позволяет учитывать дополнительные параметры, такие как способ передвижения, ограничения (объекты, которых следует избегать) и др.

Google Maps API предоставляются бесплатно для широкого спектра использования, хотя и имеют ограничения на использование API и фиксированную плату за превышение этих ограничений. Для получения возможности использования API Карт необходим ключ, который можно получить, имея аккаунт Google. Приведенные выше доводы и обусловили выбор библиотеки Google Maps Distance Matrix API в качестве инструментария, используемого для интеграции ГИС-технологий и программы, реализующей алгоритмы решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств [7]. При этом ГИС используется для поиска кратчайшего пути между любыми двумя точками региона, учитывая дорожный граф.

Не рассматривая детально численный алгоритм решения непрерывных задач ОМРМ, остановимся лишь на особенностях его реализации совместно с ГИС-технологиями, возникающих при этом трудностях и способах их преодоления.

1. Подготовительный этап обработки электронных карт состоит в удалении с рисунка карты рек и суши, не принадлежащих территории региона. Это осуществляется с помощью любого графического редактора. Полученная допустимая область  $\Omega$  вписывается в прямоугольник  $\Pi$ , который, в свою очередь, покрывается прямоугольной сеткой. В каждой точке сетки определяется функция плотности:

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in \Omega; \\ 0, & \Pi \setminus \Omega. \end{cases}$$

2. Ключевой составляющей программы решения непрерывной задачи оптимального мультиплексного разбиения множества с размещением центров является  $r$ -алгоритм Шора, который, как известно, разработан для решения задач безусловной недифференцируемой оптимизации. Так как практические задачи территориальной сегментации предполагают размещение сервисных центров в ограниченной области, зачастую невыпуклой, а иногда и несвязной, имеющей запретные территории (например, при наличии в области водоемов, промышленных зон, рек и т.п.), то приходится решать вопросы, связанные с тем, чтобы не допустить размещения центра на недопустимой территории. Для учета «невыхода» за пределы допустимой (разбиваемой) области размещаемых центров предлагается следующий подход: на каждой итерации  $r$ -алгоритма Шора проверять принадлежность текущих координат центров допустимой области. В случае, если какой-либо центр попадает в запретную зону — находить его «псевдопроекцию» на разбиваемое множество. Под псевдопроекцией точки  $z \in E_2$  на замкнутое множество  $\Omega \subset E_2$  будем понимать точку  $v \in \Omega \cap D(z)$ , такую что  $\text{dist}(z, v) = \min_{x \in \Omega \cap D(z)} \text{dist}(z, x)$ , где множество  $D(z) = \{v = z + \gamma w, \gamma \in R, w \in \{e_1, e_2\}\}$ ;  $e_1, e_2$  — орты осей координат,  $\text{dist}(z, v)$  — расстояние между двумя точками.

3. С целью сокращения количества обращений к библиотеке Google Maps Distance Matrix API, а, следовательно, и количества задействованных вычислительных ресурсов – объема оперативной памяти и времени, требуемого на выполнение как одного запроса, так и в целом всех запросов, решение задачи ОМРМ с размещением центров производится в два этапа. На первом этапе решается задача  $A2-k$ , в которой в качестве функций  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , выступает одна из известных метрик – манхэттенская, евклидова, Минковского, Чебышева. При этом выбор метрики осуществляется путем предварительного сравнения результатов мультиплексного разбиения конкретного региона на основе расстояний между точками, вычисляемых теоретически и с помощью ГИС. На втором этапе подключением ГИС для поиска фактического расстояния между найденными центрами и точками региона определяется оптимальное разбиение  $k$ -го порядка заданного региона.

## ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОМРМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИС-ТЕХНОЛОГИЙ

Приведем результаты работы разработанного программного продукта с использованием ГИС для решения модельной задачи территориальной сегмен-

тации рынка услуг на примере города Днепра. В качестве сервисных центров выбраны существующие отделения грузоперевозок «Новой почты». На рис. 1, *а* показано триплексное разбиение города на зоны обслуживания в предположении, что клиент для того, чтобы воспользоваться почтовыми услугами, полагает  $k$  ближайших центров одинаково привлекательными (а это означает, что в функционале (1) центры  $\tau_i$  — фиксированы,  $w_i = 1$ ,  $a_i = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ). Расстояния от центров до точек города определены с помощью ГИС. Для сравнения на рис. 1, *б*, *в*, *г* приведены результаты разбиения 3-го порядка той же территории, но полученные на основе теоретических расстояний между двумя точками на карте города (разбиение с использованием на рис. 1, *б* манхэттенской метрики, на рис. 1, *в* — евклидовой метрики и на рис. 1, *г* — метрики Минковского,  $p = 10$ ).

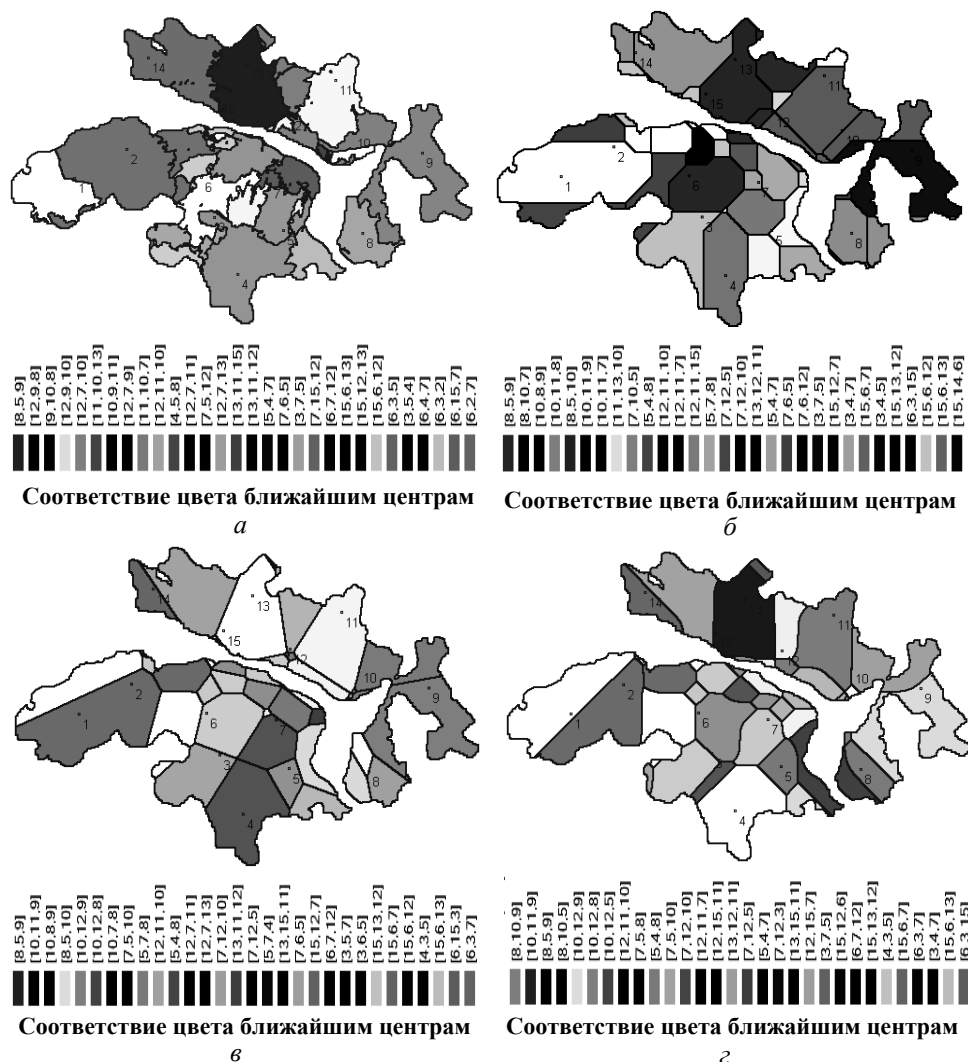


Рис. 1. Оптимальное триплексное разбиение города Днепра для 15 сервисных центров, полученное с использованием: *а* — ГИС-технологий, *б* — манхэттенской метрики, *в* — евклидовой метрики, *г* — метрики Минковского ( $p=10$ )



При анализе результатов этих и других вычислительных экспериментов был сделан вывод о том, что адекватнее всего расстояние между двумя точками на карте города описывает манхэттенская метрика. Поэтому в дальнейшем при решении задачи ОМРМ с размещением центров использовалась именно эта метрика.

На рис. 2 показаны результаты решения модельной задачи дуплексного разбиения ( $k = 2$ ) города с размещением сервисных центров на его территории: рис. 2, *a* — оптимальное размещение центров и разбиение на основе манхэттенской метрики, рис. 2, *б* — оптимальное разбиение второго порядка для тех же центров с учетом фактического расстояния между точками города).

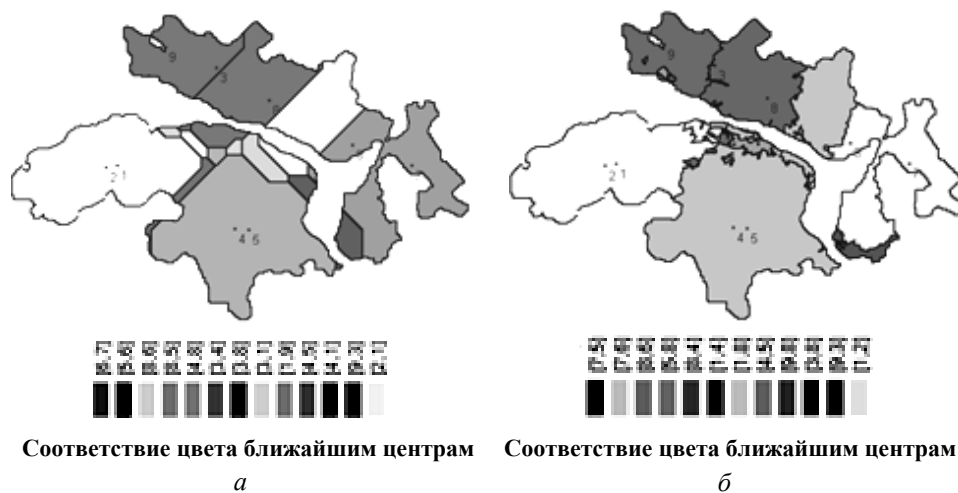


Рис. 2. Оптимальное дуплексное разбиение города Днепра с размещением девяти центров: *a* — оптимальное размещение центров и разбиение на основе манхэттенской метрики; *б* — оптимальное разбиение для тех же центров с учетом фактического расстояния между точками города

Отметим, что представленные модели мультиплексного разбиения множеств позволяют получить перекрытие сервисных зон. Так, на рис. 3, 4 показаны зоны обслуживания для конкретных центров при разбиении 2-го и 3-го порядков. Полученные в результате сервисные зоны не являются взаимоисключающими и в большей степени соответствуют реальности, например, по сравнению с моделями, которые приводят к разбиению первого порядка и определяют сервисные зоны как пространственные монополии.

Как видно на рис. 3, *д*, *з*, а также на рис. 4, *е*, зоны влияния определенных центров могут представлять собой несвязные подмножества разбиваемого множества. Этот факт является еще одной характерной особенностью применения методов решения задач мультиплексного разбиения несвязного множества совместно с ГИС-технологиями и показывает, насколько важно при оптимальной сегментации рынка услуг на конкретной территории учитывать реальные транспортные развязки и подъездные пути для каждой точки рассматриваемой области.

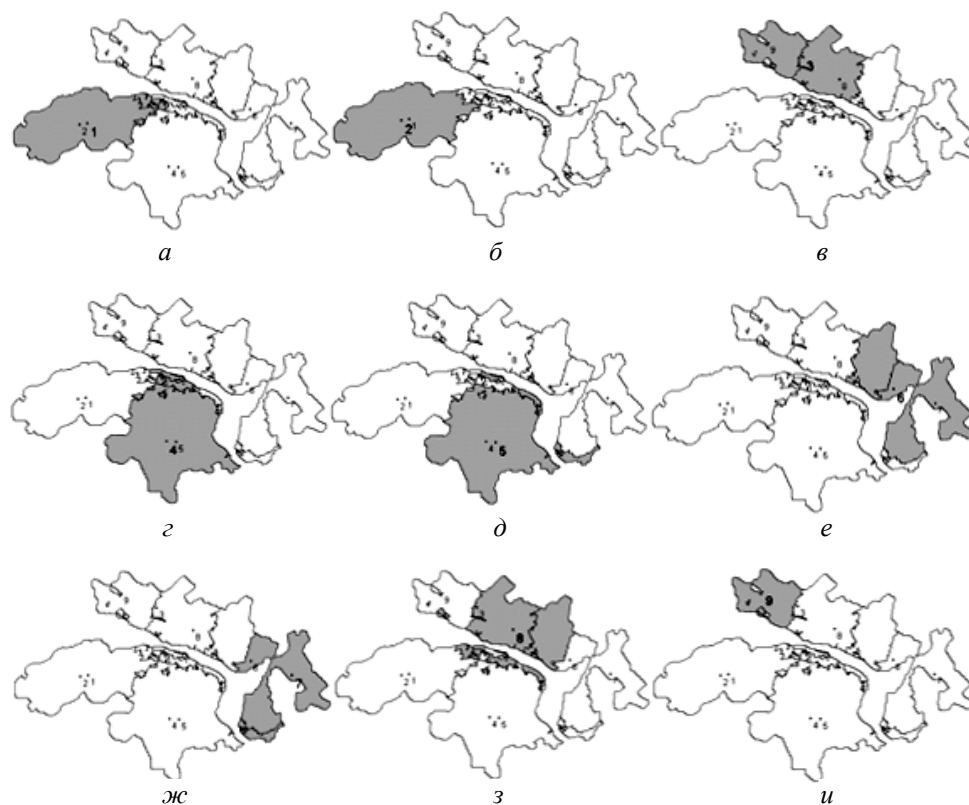


Рис. 3. Дуплексное разбиение. Зоны обслуживания сервисных центров: *а* — первого, *б* — второго, *в* — третьего, *г* — четвертого, *д* — пятого, *е* — шестого, *ж* — седьмого, *з* — восьмого, *и* — девятого

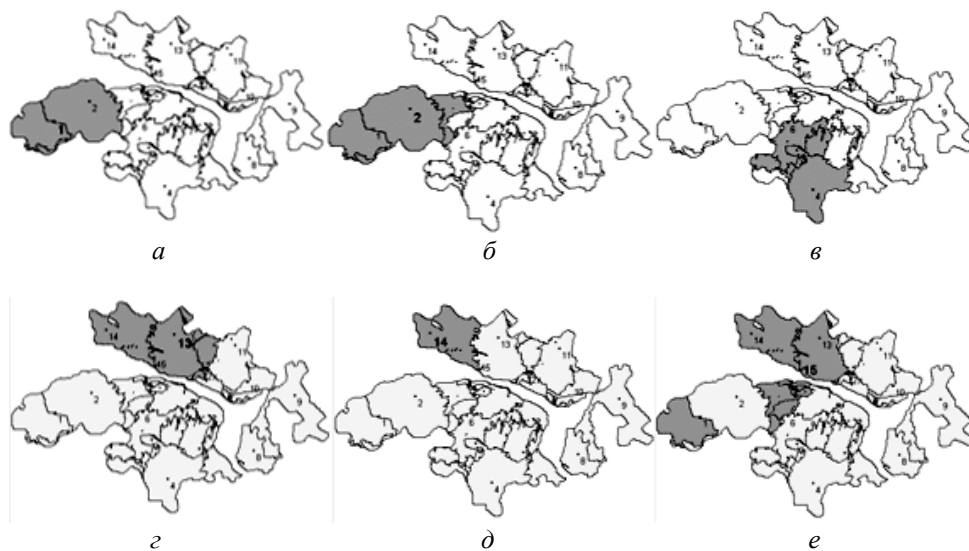


Рис. 4. Разбиение 3-го порядка. Зоны обслуживания сервисных центров: *а* — первого, *б* — второго, *в* — третьего, *г* — тринадцатого, *д* — четырнадцатого, *е* — пятнадцатого

## ВИВОДИ

В роботі продемонстрована можливість застосування ГІС-технологій при розв'язанні неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Представлений в роботі підхід до територіальної сегментації регіону забезпечує розумні наближення реальних зон обслуговування сервісних центрів швидко і без великих витрат, а також без необхідності проведення детальної експертизи зон впливу центрів зі сторони аналітика.

З урахуванням того, що неперервні задачі ОМРМ можуть виступати в якості математических моделей реальних задач територіальної сегментації (наприклад, при розділенні ринку послуг або при діагностиці конкурентної середовища, для сегментації карт і геопросторового інтелектуального аналізу даних), використання ГІС-технологій при розробці алгоритмів розв'язання таких задач представляє собою актуальне напрямлення наукових досліджень і потребує подальшого розвитку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Коряшкіна Л.С.* Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаськ. ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. — 2015. — № 18(351). — С.28–36.
2. *Коряшкіна Л.С.* О способах задания функционала качества в задачах мультиплексного разбиения множеств / Л.С. Коряшкіна // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матусика. — Брест: БрГУ, 2015. — С. 40–41.
3. *Koriashkina L.S.* Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. — 2015. — N 2 (119). — P. 15–32.
4. *Коряшкіна Л.С.* Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2015. — Вип. 28. — С. 77–91.
5. *Коряшкіна Л.С.* Об одном подходе к территориальной сегментации рынка услуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., 16–17 дек. 2015 г. — Дн-ск: ДНУЖТ ім. В.А. Лазаряна, 2015. — С. 81.
6. *Koriashkina L.* The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets / L. Koriashkina, A. Cherevatenko, O. Mykhalova // Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). — Taylor & Francis Group, London. — 2016. — P. 233–239.
7. *Коряшкіна Л.С.* Свідоцтво 64326 Україна про реєстрацію авторського права на твір «Комп'ютерна програма «Optimal Multiplex-Partitoning of Sets» (OMPS-2015) / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко (Україна). — № 64838; заявл. 31.12.15; зареєстровано 01.03.16 в Державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

8. Коряшкина Л.С. Использование ГИС-инструментария при решении практических задач мультиплексного разбиения множеств / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 21 окт. 2016 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. — Брест: БрГУ, 2016. — С. 63–64.
9. Коряшкина Л.С. О программной реализации алгоритмов оптимального мультиплексного разбиения множеств совместно с ГИС-технологиями при решении задач сегментации рынка услуг / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: тезисы X Междунар. науч.-практ. конф., Днепро, 14–15 дек. 2016 г. — Д.: ДИИТ, 2016. — С. 52.
10. Павлов С.В. Сервис-ориентированная архитектура программного обеспечения корпоративных геоинформационных систем / С.В. Павлов, Т.М. Усов, Р.А. Шкундина // Управление, вычислительная техника и информатика: вестн. УГАТУ. — Уфа: УГАТУ, 2010. — Т. 14, № 5 (40). — С. 163–169.
11. Lee I. Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms / I. Lee, C. Torpelund-Bruin, K. Lee // Expert Systems with Applications. — 2012. — Vol. 39, Issue 12. — P. 11135–11148.
12. Boots B. Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams / B. Boots, R. South. // Journal of Retailing 73(4). — 1997. — P. 519–536.
13. Okabe A. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. Chiu. — Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 2000. — 696 p.
14. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и  $r$ -алгоритмы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. — К.: Наук. думка, 2015. — 400 с.

Поступила 16.06.2017

## **АДАПТИВНА АПРОКСИМАЦІЯ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ**

**Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.Т. МАТВІЄНКО**

**Анотація.** Для розв'язання ряду важливих прикладних задач необхідно проводити апроксимацію експериментальних даних у реальному часі. Розглянуто задачу адаптивної апроксимації експериментальних даних. Запропоновано загальну ітераційну схему. Ця процедура має два цикли: зовнішній (передбачає зміну структури базисних функцій, їх нарощування у разі потреби) і внутрішній (уточнює параметри апроксимації у міру надходження експериментальних даних). Запропонована схема базується на формі подання псевдооберненого оператора. Наведено умови збіжності ітераційної схеми апроксимації сигналів, які ґрунтуються на теорії стійкості за Ляпуновим.

**Ключові слова:** адаптивна апроксимація, динамічна система, оптимізація, псевдоінверсія, ітераційна схема, збіжність.

### **ВСТУП**

Ефективним методом апроксимації вимірюваних сигналів є їх наближення лінійними комбінаціями систем базисних функцій [1–4]. Невідомі параметри можна визначати на основі методів псевдообернення, склавши відповідну систему лінійних алгебричних рівнянь, урахувавши таке:

- інформація про сигнал надходить у реальному часі;
- самі базисні функції та їх кількість, необхідні для апроксимації, невідомі.

Задача полягає в розробленні алгоритмів апроксимації експериментальних даних, за допомогою яких можна уточнювати параметри апроксимації, не переобчислюючи їх на кожному етапі в повному обсязі. Це дає змогу значно швидше розв'язувати складні задачі інформатики та прикладної математики.

У роботі для апроксимації експериментальних даних запропоновано загальну ітераційну схему. Така процедура являє собою динамічну систему різницевих рівнянь, записану для шуканих параметрів. Вона має два цикли: зовнішній (передбачає зміну структури базисних функцій і в разі потреби їх нарощування) та внутрішній (уточнює параметри апроксимації у міру надходження експериментальних даних). Скільки необхідно брати вимірів для

внутрішнього циклу і як довго нарощувати систему базисних функцій — це проблема, яку можна розв'язати під час розгляду конкретних задач, зокрема використовуючи підходи з теорії стійкості та чутливості. Наприклад, при розпізнаванні мовних сигналів наперед невідома структура базисних функцій та їх кількість, які оптимально апроксимують той чи інший звук. Варто звернути увагу на те, що для аналізу збіжності апроксимації можна використовувати методи практичної стійкості динамічних систем.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Припустімо, що вимірюється в деякі моменти

$$t_0 \leq t_{11} < t_{12} < \dots < t_{1n_1} < t_{21} < t_{22} < \dots < t_{2n_2} < t_{31} < \dots < t_{N1} < t_{N2} < \dots < t_{Nn_N} \leq T$$

скалярна величина  $x(t)$ , а отже, відомо

$$x_{11} = x(t_{11}), x_{12} = x(t_{12}), \dots, x_{1n_1} = x(t_{1n_1});$$

$$x_{21} = x(t_{21}), x_{22} = x(t_{22}), \dots, x_{2n_2} = x(t_{2n_2});$$

$$x_{31} = x(t_{31}), \dots, x_{N1} = x(t_{N1}), x_{N2} = x(t_{N2}), \dots, x_{Nn_N} = x(t_{Nn_N}). \quad (1)$$

Задача полягає в апроксимації із заданою наперед точністю  $\varepsilon$  в реальному часі сигналу за допомогою системи базисних функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t) \quad (2)$$

у вигляді лінійної комбінації

$$x(t) \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t). \quad (3)$$

При цьому  $n$  може змінюватись від 1 до  $M$ . Важливим є асимптотичне дослідження моделі ( $M \rightarrow \infty$ ).

Параметри апроксимації  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  будемо визначати з умови (3), урахувавши те, що кількість базисних функцій та величина вибірки невідомі для досягнутої точності. Для обчислення коефіцієнтів  $\alpha_i$  у виразі (3) розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t_{kj_k}) = x_{kj_k}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j_k = \overline{1, m_k}, \quad m_k \leq n_k, \quad (4)$$

де  $m_k$  може набувати значень від 1 до  $n_k$  з позначень (1) залежно від номера  $k$ . Тобто  $n_k$  — наперед задані обмеження кількості вимірів на  $k$ -й ітерації.

В описаній моделі, використовуючи базисні функції та виміри, отримаємо систему великої розмірності, що значно ускладнює обчислювальні процедури і є небажаним для розв'язання практичних задач, описаних вище. Тому для визначення параметрів моделі  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  запишемо різницеву систему.

Перепишемо систему (4) у векторно-матричній формі. Для цього введемо позначення:

$$A^{(n,m_k)} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_{k1}) & \varphi_2(t_{k1}) & \dots & \varphi_n(t_{k1}) \\ \varphi_1(t_{k2}) & \varphi_2(t_{k2}) & \dots & \varphi_n(t_{k2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_{km_k}) & \varphi_2(t_{km_k}) & \dots & \varphi_n(t_{km_k}) \end{pmatrix} \text{ — відома матриця розмірності}$$

$m_k \times n$ ;

$b^{(m_k)T} = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km_k})$  —  $m_k$ -вимірний вектор вимірюваних даних;

$\alpha_{m_k}^{(n)T} = (\alpha_{m_k 1}, \alpha_{m_k 2}, \dots, \alpha_{m_k n})$  — вектор невідомих параметрів розмірності  $n$ ;

тут і далі символом  $T$  будемо позначати операцію транспонування.

Тоді система (4) набуває вигляду

$$A^{(n,m_k)} \alpha_{m_k}^{(n)} = b^{(m_k)}. \quad (5)$$

Розв'язок системи (5) можна подати через псевдообернену матрицю  $A^{(n,m_k)+}$  розмірності  $n \times m_k$ :

$$\alpha_{m_k}^{(n)} = A^{(n,m_k)+} b^{(m_k)}.$$

Далі алгоритм адаптивної апроксимації передбачає розбиття на два етапи: зовнішній і внутрішній з відповідними індексами та змінними циклів  $k$  і  $j_k$ . На відповідних етапах циклів до системи базисних функцій або вимірів додаються функції з метою уточнення параметрів апроксимації. Робота алгоритму припиняється з виконанням однієї з декількох умов: досягнуто задану точність  $\varepsilon$ , неможливо додавати базисні функції або нарощувати експериментальні дані.

Припустімо, що за умовами задачі потрібно додавати функції на зовнішньому етапі циклу та виміри — на внутрішньому.

Тоді, розширивши систему завдяки ще одній точці експериментальних даних  $x_{k,m_k+1}$  на внутрішньому циклі, в системі (4) зросте кількість невідомих параметрів і система набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t_{kj_k}) = x_{kj_k}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j_k = \overline{1, m_k + 1}, \quad m_k + 1 \leq n_k. \quad (6)$$

Переписавши систему (6) у векторно-матричній формі, отримаємо

$$A^{(n,m_k+1)} \alpha_{m_k+1}^{(n)} = b^{(m_k+1)}, \quad (7)$$

де  $A^{(n,m_k+1)} = \begin{pmatrix} A^{(n,m_k)} \\ a_{m_k+1}^{(n)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(n,m_k)} \\ \varphi_1(t_{k,m_k+1}) \quad \varphi_2(t_{k,m_k+1}) \quad \varphi_n(t_{k,m_k+1}) \end{pmatrix}$  — матриця

розмірності  $n \times (m_k + 1)$ ;  $b^{(m_k+1)} = \begin{pmatrix} b^{(m_k)} \\ x_{k,m_k+1} \end{pmatrix}$  —  $m_k + 1$ -вимірний вектор віль-

них членів;  $\alpha_{m_k+1}^{(n)}$  — вектор шуканих параметрів розмірності  $n$  на  $(m_k + 1)$ -й ітерації.

Розв'язок системи (7) можна записати через псевдообернену матрицю  $A^{(m_k+1)+}$ :

$$\alpha_{m_k+1}^{(n)} = A^{(n, m_k+1)+} b^{(m_k+1)}. \quad (8)$$

Оскільки матрицю  $A^{(m+1)+}$  можна виразити через псевдообернені та проєкційні матриці на  $m_k$ -й ітерації, то для пошуку вектора шуканих параметрів запишемо ітераційну схему. Справедлива така теорема.

**Теорема 1.** Для коригування вектора невідомих параметрів послідовним нарощуванням вимірюваних даних виконується ітераційна схема

$$\alpha_{m_k+1}^{(n)} = L^{(n, m_k)} \alpha_{m_k}^{(n)} + \psi_{m_k}^{(n)}, \quad m_k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

з початковими умовами

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{b^{(1)} A^{(n, 1)T}}{A^{(n, 1)} A^{(n, 1)T}} = \frac{b^{(1)} a_1^{(n)T}}{a_1^{(n)} a_1^{(n)T}}.$$

Таким чином, для коригування параметрів записано лінійну різницеву схему (9). Доведення теореми полягає в тому, щоб подати матрицю  $A^{(n, m_k+1)+}$  через матрицю  $A^{(n, m_k)+}$ , проєкційні матриці  $Z(A^{(n, m_k)})$  і  $R(A^{(n, m_k)})$  на  $m$ -й ітерації і підставити в систему (8).

У роботі наведемо формули лише для обчислення матриці  $L^{(n, m_k)}$  та вибору  $\psi_{m_k}^{(n)}$  для двох випадків [5–6].

**Випадок 1.** Припустімо, що для матриці  $A^{(n, m_k)}$  виконується співвідношення

$$a_{m_k+1}^{(n)T} Z(A^{(n, m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)} > 0.$$

Тоді матриця  $L^{(n, m_k)}$  і вектор  $\psi_{m_k}^{(n)}$  розмірностей  $n \times n$  і  $n$  відповідно мають вигляд

$$L^{(n, m_k)} = \left( E_n - \frac{Z(A^{(n, m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)}}{a_{m_k+1}^{(n)T} Z(A^{(n, m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)}} a_{m_k+1}^{(n)T} \right);$$

$$\psi_{m_k}^{(n)} = \frac{Z(A^{(n, m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)}}{a_{m_k+1}^{(n)T} Z(A^{(n, m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)}} x_{k, m_k+1},$$

де  $E_n$  — одинична матриця розмірності  $n$ .

Для цього випадку проєкційні матриці  $Z(A^{(n, m_k+1)})$  і  $R(A^{(n, m_k+1)})$  обчислюються ітераційно за такими формулами:



$$\begin{aligned} Z(A^{(n, m_k+1)}) &= Z \begin{pmatrix} A^{(n, m_k)} \\ a_{m_k+1}^{(n)\Gamma} \end{pmatrix} = \\ &= Z(A^{(n, m_k)}) - \frac{Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})}{a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R(A^{(n, m_k+1)}) &= R \begin{pmatrix} A^{(n, m_k)} \\ a_{m_k+1}^{(n)\Gamma} \end{pmatrix} = R(A^{(n, m_k)}) - \frac{Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}R(A^{(n, m_k)})}{a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}} - \\ &- \frac{R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})}{a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}} + \frac{Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})}{(a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)})^2} \times \\ &\times (1 + a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}). \end{aligned} \quad (11)$$

**Випадок 2.** Якщо для матриці  $A^{(n, m_k)}$  виконується рівність

$$a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}Z(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)} = 0,$$

то матриця  $L^{(n, m_k)}$  і вектор  $\psi_{m_k}^{(n)}$  обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} L^{(n, m_k)} &= \left( E_n - \frac{R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}}{1 + a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}} \right); \\ \psi_{m_k}^{(n)} &= \frac{R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}{1 + a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}} x_{k, m_k+1}. \end{aligned}$$

Проекційні оператори в цьому випадку обчислюються таким чином:

$$Z(A^{(n, m_k+1)}) = Z \begin{pmatrix} A^{(n, m_k)} \\ a_{m_k+1}^{(n)\Gamma} \end{pmatrix} = Z(A^{(n, m_k)}); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R(A^{(n, m_k+1)}) &= R \begin{pmatrix} A^{(n, m_k)} \\ a_{m_k+1}^{(n)\Gamma} \end{pmatrix} = \\ &= R(A^{(n, m_k)}) - \frac{R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}R(A^{(n, m_k)})}{1 + a_{m_k+1}^{(n)\Gamma}R(A^{(n, m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

За означенням проекційні матриці  $Z(A)$  і  $R(A)$  для матриці  $A$  визначаються за формулами

$$Z(A) = E_n - A^+ A, \quad R(A) = A^+ A^{+\Gamma}. \quad (14)$$

Згідно з (14) для ітераційного обчислення матриць (10), (11) і (12), (13) необхідно спочатку визначити  $Z(A^{(n,1)})$  і  $R(A^{(n,1)})$  за формулами:

$$Z(A^{(n,1)}) = Z(a_1^{(n)T}) = E_n - \frac{A^{(n,1)T} A^{(n,1)}}{(A^{(n,1)} A^{(n,1)T})^2} = E_n - \frac{a_1^{(n)} a_1^{(n)T}}{(a_1^{(n)T} a_1^{(n)})^2};$$

$$R(A^{(n,1)}) = R(a_1^{(n)T}) = A^{(n,1)+} (A^{(n,1)+})^T = (a_1^{(n)T})^+ (a_1^{(n)T})^{+T} =$$

$$= \frac{A^{(n,1)E}}{A^{(n,1)} A^{(n,1)E}} \cdot \frac{A^{(n,1)}}{A^{(n,1)} A^{(n,1)T}} = \frac{a_1^{(n)}}{a_1^{(n)T} a_1^{(n)}} \cdot \frac{a_1^{(n)T}}{a_1^{(n)T} a_1^{(n)}} = \frac{a_1^{(n)} a_1^{(n)T}}{(a_1^{(n)T} a_1^{(n)})^2}.$$

Ітераційну схему (9) можна досліджувати на збіжність за допомогою аналога другого методу Ляпунова для різницевих рівнянь. Вважатимемо, що  $\bar{\alpha}$  — розв’язок задачі, тобто  $\alpha_{m_k}^{(n)} \rightarrow \bar{\alpha}$ , якщо  $m_k \rightarrow \infty$ . Тоді заміною

$$\alpha_{m_k}^{(n)} = y_{m_k}^{(n)} + \bar{\alpha}$$

систему (9) запишемо у нових змінних:

$$y_{m_k+1}^{(n)} = f_{m_k}^{(n)}(y_{m_k}^{(n)}), \quad m_k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Задача аналізу збіжності ітераційної процедури (9) буде еквівалентною дослідженню стійкості різницевої схеми (15). При цьому  $y_{m_k}^{(n)} = 0$ ,  $m_k = 1, 2, \dots$  називають незбуреним розв’язком.

**Означення 1.** Незбурений розв’язок системи (15) називають стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta(\varepsilon) > 0$ , що на розв’язках системи (15) виконується нерівність  $\|y_{m_k}^{(n)}\| < \varepsilon$ ,  $m_k = 1, 2, \dots$  за умови  $\|y_1^{(n)}\| < \delta$  (тут і далі під  $\|y_{m_k}^{(n)}\|$  будемо розуміти евклідову норму вектора  $y_{m_k}^{(n)}$ ).

Якщо, крім означення 1, на розв’язках системи (15) виконується умова  $\lim_{m_k \rightarrow \infty} y_{m_k}^{(n)} = 0$  при  $\|y_1^{(n)}\| < \delta$ , то незбурений рух системи (15) називають асимптотично стійким за Ляпуновим.

Справедливі такі теореми.

**Теорема 2.** Нехай в області

$$Y_\rho = \left\{ y_{m_k}^{(n)} : \|y_{m_k}^{(n)}\| < \rho \right\}$$

для системи різницевих рівнянь (15) можна вказати додатно визначену послідовність функцій Ляпунова  $V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)})$ ,  $m_k = 1, 2, \dots$ , а її перша різниця на розв’язках розглянутої системи буде недодатною, тобто

$$\Delta V_{m_k} = V_{m_k+1}(y_{m_k+1}^{(n)}) - V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)}) = V_{m_k+1}(f_{m_k}^{(n)}(y_{m_k}^{(n)})) - V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)}) \leq 0,$$

то незбурений розв'язок є стійким за Ляпуновим.

**Теорема 3.** Якщо за умов попередньої теореми щодо послідовності функцій Ляпунова  $V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)})$ ,  $m_k = 1, 2, \dots$  перша різниця  $\Delta V_{m_k}$ ,  $m_k = 1, 2, \dots$  на розв'язках системи (15) є від'ємно визначеною, то незбурений розв'язок системи (15) є асимптотично стійким.

Необхідно зазначити, що для випадку 2 послідовність функцій Ляпунова можна вибрати у вигляді

$$V_{m_k}^{(1)} = y_{m_k}^{(n)T} B^{(n, m_k)} y_{m_k}^{(n)}, \quad m_k = 1, 2, \dots,$$

де  $B_{m_k}^{(n)}$  — деякі додатно визначені матриці.

**Теорема 4.** Якщо  $\bar{\alpha}$  — розв'язок системи (4) для будь-якого  $m_k$ , то система різницевих рівнянь для збуреного руху, тобто відносно векторів  $y_{m_k}^{(n)}$ , буде мати вигляд

$$y_{m_k+1}^{(n)} = L^{(n, m_k)} y_{m_k}^{(n)}, \quad m_k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Таким чином, для цього випадку дослідження збіжності ітераційної процедури (9) за збурених початкових даних еквівалентне аналізу стійкості лінійної різницевої системи (16). Згідно з принципом стиснених відображень Банаха різницева система (16) буде асимптотично стійкою, якщо

$$\|L^{(m)} y^{(m)}\| < \|y^{(m)}\|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Розглянемо процедуру зовнішнього циклу запропонованого алгоритму, коли до системи базисних функцій (2) додаємо ще одну функцію  $\varphi_{n+1}(t)$ . Тоді в системі типу (4) змінюється кількість невідомих параметрів:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(t_{kj_k}) = x_{kj_k}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j_k = \overline{1, m_k}, \quad m_k \leq n_k. \quad (17)$$

Запишемо систему (17) у векторно-матричній формі

$$A^{(n+1, m_k)} \alpha_{m_k}^{(n+1)} = b^{(m_k)}, \quad (18)$$

де  $A^{(n+1, m_k)} = (A^{(n, m_k)}, a_{m_k}^{(n+1)})$  — матриця розмірності  $m_k \times (n+1)$ ;  $a_{m_k}^{(n+1)T} = (\varphi_{n+1}(t_{k1}), \varphi_{n+1}(t_{k2}), \dots, \varphi_{n+1}(t_{km_k}))$  — відомий вектор розмірності  $m_k$ ;  $\alpha_{m_k}^{(n+1)T} = (\alpha_{m_k}^{(n)T}, \alpha_{m_k, n+1})$  —  $(n+1)$ -вимірний вектор шуканих змінних на  $(n+1)$ -й ітерації.

Розв'язок системи (18) можна записати через псевдообернену матрицю  $A^{(n+1, m_k)+}$

$$\alpha_{m_k}^{(n+1)} = A^{(n+1, m_k)+} b^{(m_k)}.$$

Оскільки в цьому випадку псевдообернена матриця  $A^{(n+1, m_k)+}$  виражається через псевдообернену та проєкційні матриці на  $n$ -й ітерації, для по-

шуку вектора невідомих параметрів можна записати різницеву схему. Справедлива така теорема.

**Теорема 5.** Для коригування вектора невідомих параметрів за послідовного розширення системи базисних функцій і незмінних вимірів сигналу справедливою є ітераційна схема

$$\alpha_{m_k}^{(n+1)} = Q^{(n, m_k)} \alpha_{m_k}^{(n)} + u_{m_k}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

з початковими умовами для скалярної величини  $\alpha_{m_k}^{(1)}$  :

$$\alpha_{m_k}^{(1)} = \frac{A^{(1, m_k)T} b^{(m_k)}}{A^{(1, m_k)T} A^{(1, m_k)}}.$$

У випадку коли

$$a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)}) a_{m_k}^{(n+1)} > 0,$$

матриця  $Q^{(n, m_k)}$  і вектор  $u_{m_k}^{(n)}$  набувають вигляду

$$Q^{(n, m_k)} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{19}$$

$$u_{m_k}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{A^{(n, m_k)+} a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)T} Z^T (A^{(n, m_k)T}) b^{(m_k)}}{a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}} \\ \frac{a_{m_k}^{(n+1)T} Z^T (A^{(n, m_k)T}) b^{(m_k)}}{a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}} \end{pmatrix}.$$

Для цього випадку проекційні матриці  $Z(A^{(n+1, m_k)})$  і  $R(A^{(n+1, m_k)})$  обчислюються ітераційно за такими формулами:

$$\begin{aligned} Z(A^{(n+1, m_k)}) &= Z(A^{(n, m_k)} a_{m_k}^{(n+1)T}) = Z(A^{(n, m_k)T}) - \\ &- \frac{Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T})}{a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}}; \\ R(A^{(n, m_k)T}) &= R(A^{(n, m_k)} a_{m_k}^{(n+1)}) = \\ &= R(A^{(n, m_k)T}) - \frac{Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1, m_k)} a_{m_k}^{(n+1, m_k)T} R(A^{(n, m_k)T})}{a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}} - \\ &- \frac{R(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T})}{a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}} + \\ &+ \frac{Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T})}{(a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)})^2} (1 + a_{m_k}^{(n+1)T} R(A^{(n, m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}). \end{aligned}$$

У випадку, коли матриця  $A^{(n,m_k)}$  задовольняє умову

$$a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n,m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)} = 0,$$

матриця  $Q^{(n,m_k)}$  має вигляд (19):

$$u_{m_k}^{(n)} = \left( \begin{array}{c} A^{(n,m_k)} + a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)T} Z^T(A^{(n,m_k)T}) b^{(m_k)} \\ - \frac{1 + a_{m_k}^{(n+1)T} R(A^{(n,m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}}{a_{m_k}^{(n+1)T} R^T(A^{(n,m_k)T}) b^{(m_k)}} \\ \frac{1 + a_{m_k}^{(n+1)T} Z(A^{(n,m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}}{1 + a_{m_k}^{(n+1)T} R(A^{(n,m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}} \end{array} \right),$$

Проекційні матриці  $Z(A^{(n+1,m_k)})$  і  $R(A^{(n+1,m_k)})$  обчислюються таким чином:

$$Z(A^{(n+1,m_k)}) = Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_k}^{(n+1)} = Z(A^{(n,m_k)T})^T;$$

$$R(A^{(n+1,m_k)}) = R(A^{(n,m_k)}) a_{m_k}^{(n+1)} = R(A^{(n,m_k)T}) -$$

$$\frac{R(A^{(n,m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)T} R(A^{(n,m_k)T})}{1 + a_{m_k}^{(n+1)T} R(A^{(n,m_k)T}) a_{m_k}^{(n+1)}};$$

$$Z(A^{(1,m_k)T}) = Z(a_{m_k}^{(1)T}) = E_N - \frac{A^{(1,m_k)} A^{(1,m_k)T}}{(A^{(1,m_k)T} A^{(1,m_k)})^2} = E_{m_k} - \frac{a_{m_k}^{(1)} a_{m_k}^{(1)T}}{(a_{m_k}^{(1)T} a_{m_k}^{(1)})^2};$$

$$\begin{aligned} R(A^{(1,m_k)T}) &= R(a_{m_k}^{(1)T}) = \frac{A^{(1,m_k)}}{A^{(1,m_k)T} A^{(1,m_k)}} \cdot \frac{A^{(1,m_k)T}}{A^{(1,m_k)T} A^{(1,m_k)}} = \\ &= \frac{A^{(1,m_k)} A^{(1,m_k)T}}{(A^{(1,m_k)T} A^{(1,m_k)})^2} = \frac{a_{m_k}^{(1)} a_{m_k}^{(1)T}}{(a_{m_k}^{(1)T} a_{m_k}^{(1)})^2}. \end{aligned}$$

## ВИСНОВОК

Запропонований алгоритм адаптивної апроксимації даних ефективно застосовується для розв'язання прикладних задач. Наведені умови збіжності алгоритму апроксимації підтверджують ефективність процедури в реальному часі. Такий підхід до апроксимації даних дає змогу їх використовувати для розв'язання задач розпізнавання.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М. Наука, 1965. — 407 с.
2. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю.Г. Евтушенко. — М.: Наука, 1982. — 432 с.

3. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
4. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк. — К.: Наук. думка, 1972. — 246 с.
5. Гаращенко О.Ф. Об одном методе последовательного построения матриц ортогональных преобразований / О.Ф. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 1. — С. 75–87.
6. Гаращенко Ф.Г. Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 69–77.

*Надійшла 05.09.2017*

**ПРИГЛУШЕННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ  
ІМПУЛЬСНИХ ПРОЦЕСІВ У КОГНІТИВНИХ КАРТАХ  
ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ  $H_\infty$  ЗА НЕПОВНИХ ВИМІРЮВАНЬ  
КООРДИНАТ ВЕРШИН**

**В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МІЛЯВСЬКИЙ**

**Анотація.** Поставлено і розв'язано завдання керування імпульсним процесом когнітивної карти за умови, що частина координат не вимірюється. Припускається, що невимірювані координати обмежені, але їх імовірнісні характеристики невідомі. Алгоритм керування ґрунтується на адаптації теорії  $H_\infty$  до умов функціонування складної динамічної системи в режимі імпульсного процесу когнітивної карти. Для цього виконано декомпозицію системи на вимірювану і невимірювану частини, виділено цільовий вектор координат вершин, які необхідно стабілізувати, уведено рівняння вимірювання та сформульовано робастний критерій оптимальності керування. Запропонований метод апробовано на когнітивній карті управління персоналом ІТ-компанії, значна частина вершин якої є невимірюваними. На основі комп'ютерного моделювання продемонстровано доцільність та ефективність застосування розробленого методу керування.

**Ключові слова:** когнітивна карта, імпульсний процес, робастне керування, теорія  $H_\infty$ , неповні вимірювання координат, обмежені збурення.

## ВСТУП

Когнітивна карта (КК) — поширений засіб моделювання складних систем різної природи [1]. З математичної точки зору це орієнтований граф, вершини якого репрезентують основні поняття (концепти) складної системи, а ребра — взаємозв'язки в цій системі. Імпульсний процес у КК — це динамічний перехідний процес у системі, спричинений взаємозв'язками між вершинами КК унаслідок дії зовнішнього чи внутрішнього збурення (імпульсу) на одну або декілька з них. Для моделювання імпульсних процесів у системах, поданих КК, зазвичай застосовують рівняння [2]

$$\Delta \bar{x}(k+1) = A \Delta \bar{x}(k),$$

де  $\Delta \bar{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) - \bar{x}(k)$  — приріст значень вектора координат вершин КК  $\bar{x}$ ;  $A$  — транспонована матриця суміжності КК, що складається з вагових коефіцієнтів її ребер;  $\dim \bar{x} = n$  — розмірність КК.

У працях [3–6] розроблено ряд методів керування імпульсними процесами КК на основі методів теорії автоматичного керування. Для того щоб їх реалізувати, необхідно мати можливість безпосереднього впливу на деякі з вершин КК. Ці впливи (управлінські рішення) являють собою зовнішні керування. Отже, за цієї умови рівняння керованого імпульсного процесу КК набуває вигляду

$$\Delta \bar{x}(k+1) = A \Delta \bar{x}(k) + B \Delta \bar{u}(k), \quad (1)$$

де  $\Delta \bar{u}$  — вектор керування (у приростах);  $B$  — матриця керування, що зазвичай складається з нулів та одиниць.

Утім, для ефективного керування імпульсним процесом КК (1) необхідно, щоб усі координати вершин  $\bar{x}$  були вимірюваними. На практиці це трапляється рідко, частина координат залишається принципово невимірюваною. Тоді виконаємо декомпозицію системи на вимірювану і невимірювану підсистеми. Для цього розділимо вектор  $\bar{x}$  на вимірювану  $\bar{x}_1$  ( $\dim \bar{x}_1 = n_1 < n$ ) і невимірювану  $\bar{x}_2$  ( $\dim \bar{x}_2 = n_2 = n - n_1$ ) частини та введемо зовнішнє керування  $\bar{u}$  ( $\dim \bar{u} = m \leq n_1$ ), що може діяти лише на вимірювані координати:

$$\Delta \bar{x}_1(k+1) = A_{11} \Delta \bar{x}_1(k) + A_{12} \Delta \bar{x}_2(k) + B \Delta \bar{u}(k); \quad (2)$$

$$\Delta \bar{x}_2(k+1) = A_{21} \Delta \bar{x}_1(k) + A_{22} \Delta \bar{x}_2(k). \quad (3)$$

Точне знання коефіцієнтів матриць  $A_{21}$  і  $A_{22}$ , як буде видно з подальшого викладу, не потрібне для керування.

Будемо розглядати вплив невимірюваних координат  $\Delta \bar{x}_2(k)$  на вимірювані  $\Delta \bar{x}_1(k+1)$  у рівнянні (2) як вплив зовнішніх збурень. У більшості випадків нам невідомі ймовірнісні характеристики цих збурень, тому традиційні методи теорії керування у стохастичному середовищі не можна застосувати до підсистеми (2). У цьому разі слід застосовувати методи робастного керування, які гарантують потрібний результат за будь-яких зовнішніх збурень (за природної умови їх обмеженості). У праці [6] з цією метою застосовувався метод інваріантних еліпсоїдів. У цій роботі будемо спиратись на методи теорії  $H_\infty$  [7, 8].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Будемо розглядати нескінченні послідовності векторів  $v = (\bar{v}(0), \bar{v}(1), \dots, \bar{v}(k), \dots)$  у просторі  $l_2$ . Як відомо з праць [7, 8], у цьому просторі для послідовностей задано норму, визначену як

$$\|v\| = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^T(k) \bar{v}(k) \right)^{1/2}.$$

За означенням послідовність  $v$  належить простору  $l_2$  ( $v \in l_2$ ), якщо цей ряд збігається, тобто якщо  $\|v\| < \infty$ .

Нехай відомо, що невимірювані збурення  $\Delta \bar{x}_2$  у рівнянні (2) належать простору  $l_2$ . Нехай також на вимірювані координати діє шум вимірювання  $\bar{\xi}$  ( $\dim \bar{\xi} = n_1$ ), тобто результати вимірювання неточні, і відомо лише те, що цей шум також обмежений за нормою  $l_2$ . Уведемо рівняння вимірювання:

$$\Delta \bar{y}(k) = \Delta \bar{x}_1(k) + \bar{\xi}(k). \quad (4)$$



Нехай в першу чергу треба стабілізувати деякі (найважливіші) з координат  $\bar{x}_1$ , тобто звести їх прирости  $\Delta\bar{x}_1(k)$  до нуля. Припустимо, що кількість таких координат  $n_z \leq n_1$ , позначимо їх через  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_z}$ . Також уведемо обмеження, що керування не можуть бути надто великими за амплітудою. Для виконання цієї вимоги їх буде включено у критерій керування з деякими ваговими коефіцієнтами. Тоді розглянемо такий «керований» вектор розмірності  $n_z + m$ :

$$\Delta\bar{\Phi} = (\Delta x_{i1}, \Delta x_{i2}, \dots, \Delta x_{in_z}, w_1 \Delta u_1, w_2 \Delta u_2, \dots, w_m \Delta u_m)^T,$$

де  $w_i > 0$  — вибрані вагові коефіцієнти керувань. Запишемо рівняння для  $\bar{Z}$ :

$$\Delta\bar{\Phi}(k) = C_1 \Delta\bar{x}_1(k) + D_{12} \Delta\bar{u}(k), \quad (5)$$

де  $C_1$  — матриця розмірності  $(n_z + m) \times n_1$ , що складається з нулів і одиниць (її структуру буде проілюстровано на прикладі нижче);  $D_{12}$  — матриця розмірності  $(n_z + m) \times m$ , верхня половина якої нульова, а нижня — діагональна з елементами  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  на головній діагоналі.

У роботі буде розв'язано задачу мінімізації  $H_\infty$ -норми матричної дискретної передатної функції (МДПФ) системи по каналу « $\Delta\bar{g}(z) \rightarrow \Delta\bar{\Phi}(z)$ », де  $\Delta\bar{g}(z)$  — вектор усіх вхідних сигналів, що містить невимірювані координати  $\Delta\bar{x}_2$  і шум вимірювань  $\bar{\xi}$ , тобто  $\Delta\bar{g} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{x}_2 \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}$ ,  $\dim \Delta\bar{g} = n$ . Розв'язання цієї задачі гарантуватиме робастність замкненої системи керування, яка полягає в тому, що за будь-яких значень вхідної послідовності невимірюваних збурень  $\Delta\bar{g} \in l_2$  максимальна  $l_2$ -норма керованого вихідного сигналу  $\Delta\bar{\Phi}$  (що включає в себе вибрані координати вершин КК та зважений вектор керування) буде мінімізуватись.

## СИНТЕЗ РОБАСТНОГО КЕРУВАННЯ ІМПУЛЬСНИМ ПРОЦЕСОМ КК НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ $H_\infty$ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Натепер розроблено ряд методів  $H_\infty$ -оптимізації [8–13]. Модифікуємо один з них («2-Ріккати підхід») до поставленої задачі.

Запишемо імпульсний процес (2) з урахуванням рівнянь (4), (5) у просторі стану так:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x}_1(k+1) &= A_{11} \Delta\bar{x}_1(k) + \tilde{B}_1 \Delta\bar{g}(k) + B \Delta\bar{u}(k), \\ \Delta\bar{\Phi}(k) &= C_1 \Delta\bar{x}_1(k) + D_{11} \Delta\bar{g}(k) + D_{12} \Delta\bar{u}(k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Delta\bar{y}(k) = C_2 \Delta\bar{x}_1(k) + D_{21} \Delta\bar{g}(k),$$

де  $\Delta\bar{x}_1$  — вектор стану;  $\Delta\bar{g}$  — вхідний вектор збурень;  $\Delta\bar{u}$  — вектор керування;  $\Delta\bar{y}$  — вектор вимірювань;  $\Delta\bar{\Phi}$  — керований вектор,  $\tilde{B}_1 = (A_{12} \ 0)$ ,  $D_{21} = (0 \ I)$ ,  $C_2 = I$ ,  $D_{11} = 0$ ,  $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{diag}\{w_i\} \end{pmatrix}$ .

Сформулюємо критерій оптимальності керування:

$$J = \sup_{\Delta \bar{g} \in l_2} \frac{\|\Delta \bar{\Phi}\|}{\|\Delta \bar{g}\|} \rightarrow \min, \quad (7)$$

де  $\Delta \bar{g}$  — послідовність вхідних векторів  $\{\Delta \bar{g}(k), k = 0, 1, \dots\}$ ;  $\Delta \bar{\Phi}$  — послідовність цільових векторів  $\{\Delta \bar{\Phi}(k), k = 0, 1, \dots\}$ ; усі послідовності належать простору  $l_2$ . Мінімізація здійснюється шляхом вибору оптимальної послідовності векторів керування  $\Delta \bar{u} = \{\Delta \bar{u}(k), k = 0, 1, \dots\}$ , що впливають на значення  $\Delta \bar{\Phi}$ . Отже, необхідно розв'язати мінімаксну задачу, тобто мінімізувати (за допомогою вибору керування  $\Delta \bar{u}$ ) максимально можливе відношення  $l_2$ -норми послідовності вихідних (керованих) векторів до норми послідовності вхідних векторів за довільних обмежених за цією нормою послідовностей вхідних векторів.

Можна показати, що величина  $J$  із критерію (7) дорівнює  $\|W(z)\|_\infty$ , де  $W(z)$  — МДПФ замкненої системи (6) по каналу « $\Delta \bar{g}(z) \rightarrow \Delta \bar{\Phi}(z)$ »,  $\Delta \bar{\Phi}(z) = W(z)\Delta \bar{g}(z)$ , а норма  $\|W(z)\|_\infty$  обчислюється у просторі  $H_\infty$  (просторі Харді комплексних матричних функцій, аналітичних в одиничному крузі  $|z| < 1$  і обмежених на колі  $|z| = 1$ , якому належать усі МДПФ стійких систем) і дорівнює максимальному сингулярному числу  $\sigma(W(z))$  за всіх  $|z| \leq 1$ . Дійсно, за теоремою Парсеваля норма в  $l_2$  (у часовій області) дорівнює нормі в  $L_2$  (у частотній області), тобто

$$\|v\| = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^T(k) v(k) \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{v}^*(e^{j\omega}) v(e^{j\omega}) d\omega \right)^{1/2} = \|v(e^{j\omega})\|_{L_2},$$

де  $v(e^{j\omega})$  — дискретне перетворення Фур'є від довільної дискретної часової послідовності  $v$ ;  $\bar{v}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}(k) z^k = \bar{v}(z)$ ,  $z = e^{j\omega}$ ,  $\bar{v}^*(e^{j\omega}) = \bar{v}^T(e^{-j\omega})$  — комплексно-спряжений вектор. Ураховуючи, що  $\Delta \bar{\Phi}(z) = W(z)\Delta \bar{g}(z)$  або  $\Delta \bar{\Phi}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})\Delta \bar{g}(e^{j\omega})$ , маємо

$$\begin{aligned} \|\Delta \bar{\Phi}\| &= \|\Delta \bar{\Phi}(e^{j\omega})\|_{L_2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{\Phi}^*(e^{j\omega}) \Delta \bar{\Phi}(e^{j\omega}) d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{g}^*(e^{j\omega}) W^*(e^{j\omega}) W(e^{j\omega}) \Delta \bar{g}(e^{j\omega}) d\omega \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(W(e^{j\omega})) \Delta \bar{g}^*(e^{j\omega}) \Delta \bar{g}(e^{j\omega}) d\omega \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\omega} \sigma(W(e^{j\omega})) \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{g}^*(e^{j\omega}) \Delta \bar{g}(e^{j\omega}) d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \|W(e^{j\omega})\|_{\infty} \|\Delta \bar{g}(e^{j\omega})\|_{L_2} = \|W(z)\|_{\infty} \|\Delta \bar{g}\|. \end{aligned}$$

Тоді  $J = \sup_{\Delta \bar{g} \in L_2} \frac{\|\Delta \bar{\Phi}\|}{\|\Delta \bar{g}\|} = \sup_{\Delta \bar{g}(e^{j\omega}) \in L_2} \frac{\|\Delta \bar{\Phi}(e^{j\omega})\|_{L_2}}{\|\Delta \bar{g}(e^{j\omega})\|_{L_2}} \leq \|W(z)\|_{\infty} =$

$$= \sup_{\omega} \sigma(W(e^{j\omega})) = \sup_{|z| \leq 1} \sigma(W(z)).$$

Можна показати [8], що насправді виконується навіть не нерівність, а рівність.

Отже, критерій (7) еквівалентний такому критерію:

$$J = \|W(z)\|_{\infty} = \sup_{|z| \leq 1} \sigma(W(z)) \rightarrow \min_{\Delta \bar{u}}.$$

Оскільки  $W(z)$  — МДПФ замкненої системи, вона залежить від закону керування, що формує  $\Delta \bar{u}$ , який і необхідно знайти. При цьому він повинен залежати не від вектора стану  $\Delta \bar{x}_1$ , який може бути невимірюваним, а від вектора вимірювань  $\Delta \bar{y}$ , тобто одночасно неявно має оцінитись вектор стану. У літературі [13] цю задачу розв'язують так.

**Теорема.** Нехай дано систему (6), причому виконуються такі обмеження:

- а) пара  $(A_{11}, B)$  має бути стабілізованою;
- б) пара  $(C_2, A_{11})$  має бути детектованою;
- в) матриці  $D_{12}$  і  $D_{21}$  повинні мати повний ранг.

Регулятор, що задовольняє умову стійкості замкненої системи та критерій  $J = \|W(z)\|_{\infty} < 1$ , існує у формі

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}(k) &= C_{\text{contr}} \Delta \bar{r}(k) + D_{\text{contr}} \Delta \bar{y}(k); \\ \Delta \bar{r}(k+1) &= A_{\text{contr}} \Delta \bar{r}(k) + B_{\text{contr}} \Delta \bar{y}(k); \\ \dim \bar{r} &= \dim \tilde{x} \end{aligned} \tag{8}$$

тоді і тільки тоді, коли існують невід'ємно визначені симетричні матриці  $P \geq 0$ ,  $Y \geq 0$  такі, що виконуються:

— перше рівняння Ріккати

$$P = A_{11}^T P A_{11} + C_1^T C_1 - \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^T P A_{11} + D_{12}^T C_1 \\ B^T P A_{11} + D_{11}^T C_1 \end{pmatrix}^T G(P)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^T P A_{11} + D_{12}^T C_1 \\ B^T P A_{11} + D_{11}^T C_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } G(P) = \begin{pmatrix} D_{12}^T D_{12} & D_{12}^T D_{11} \\ D_{11}^T D_{12} & D_{11}^T D_{11} - I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^T \\ B^T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & B \end{pmatrix};$$

— матриця замкненої системи за керуванням

$$A_{cp} = A_{11} - (\tilde{B}_1 \quad B)G(P)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^T P A_{11} + D_{12}^T C_1 \\ B^T P A_{11} + D_{11}^T C_1 \end{pmatrix} \text{ асимптотично стійка;}$$

— матриця  $V = \tilde{B}_1^T P \tilde{B}_1 + D_{12}^T D_{12} > 0$ ,

$$R = I - D_{11}^T D_{11} - B^T P B + (B^T P \tilde{B}_1 + D_{11}^T D_{12})V^{-1}(\tilde{B}_1^T P B + D_{12}^T D_{11}) > 0.$$

Якщо існує  $P$ , що задовольняє ці умови, визначимо такі допоміжні матриці:

$$L = B^T P A_{11} + D_{11}^T C_1 - (B^T P \tilde{B}_1 + D_{11}^T D_{12})V^{-1}(\tilde{B}_1^T P A_{11} + D_{12}^T C_1);$$

$$A_p = A_{11} + B R^{-1} L, \quad E_p = B R^{-1/2};$$

$$C_{1p} = V^{-1/2}(\tilde{B}_1^T P A_{11} + D_{12}^T C_1) + V^{-1/2}(\tilde{B}_1^T P B + D_{12}^T D_{11})R^{-1} L;$$

$$C_{2p} = C_2 + D_{21} R^{-1} L;$$

$$D_{21p} = D_{21} R^{-1/2}, \quad D_{12p} = V^{1/2}, \quad D_{11p} = V^{-1/2}(\tilde{B}_1^T P B + D_{12}^T D_{11})R^{-1/2}.$$

Матриця  $Y$  повинна задовольняти такі умови:

— друге рівняння Ріккати

$$Y = A_p Y A_p^T + E_p E_p^T - \begin{pmatrix} C_{2p} Y A_p^T + D_{21p} E_p^T \\ C_{1p} Y A_p^T + D_{11p} E_p^T \end{pmatrix}^T H(Y)^{-1} \begin{pmatrix} C_{2p} Y A_p^T + D_{21p} E_p^T \\ C_{1p} Y A_p^T + D_{11p} E_p^T \end{pmatrix},$$

$$\text{де } H(Y) = \begin{pmatrix} D_{21p} D_{21p}^T & D_{21p} D_{11p}^T \\ D_{11p} D_{21p}^T & D_{11p} D_{11p}^T - I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{2p} \\ C_{1p} \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} C_{2p}^T & C_{1p}^T \end{pmatrix},$$

— матриця замкненої системи за спостереженням

$$A_{cy} = A_p - \begin{pmatrix} C_{2p} Y A_p^T + D_{21p} E_p^T \\ C_{1p} Y A_p^T + D_{11p} E_p^T \end{pmatrix}^T H(Y)^{-1} \begin{pmatrix} C_{2p} \\ C_{1p} \end{pmatrix} \text{ — асимптотично стійка;}$$

— матриця  $M = D_{21p} D_{21p}^T + C_{2p} Y C_{2p}^T > 0$ ,

$$S = I - D_{11p} D_{11p}^T - C_{1p} Y C_{1p}^T +$$

$$+ (C_{1p} Y C_{2p}^T + D_{11p} D_{21p}^T) M^{-1} (C_{2p} Y C_{1p}^T + D_{21p} D_{11p}^T) > 0.$$

Якщо такі матриці  $P$ ,  $Y$  існують, то шуканий регулятор у формі (8) задається так:

$$D_{\text{contr}} = -D_{12p}^{-1} (C_{1p} Y C_{2p}^T + D_{11p} D_{21p}^T) M^{-1};$$

$$C_{\text{contr}} = -(D_{12p}^{-1} C_{1p} + D_{\text{contr}} C_{2p});$$

$$B_{\text{contr}} = \tilde{B}_1 D_{\text{contr}} + (A_p Y C_{2p}^T + E_p D_{21p}^T) M^{-1};$$



Отже, у попередніх позначеннях  $n = 16$ ,  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 6$ . Нехай можна запровадити  $m = 7$  керувань, що діятимуть безпосередньо на такі вершини: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10. Нехай стабілізувати необхідно у першу чергу такі вершини: 1, 4, 5, 8 (тобто  $n_z = 4$ ). Вага усіх керувань припускалась однаковою і дорівнювала 0,2, тоді  $\Delta\bar{\Phi} = (\Delta x_1, \Delta x_4, \Delta x_5, \Delta x_8, 0.2\Delta u_1, 0.2\Delta u_2, \dots, 0.2\Delta u_7)^T$ . Припустимо, що шум вимірювань — 10 незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на  $(-0,5; 0,5)$ . Тоді вектор зовнішніх впливів дорівнюватиме  $\Delta\bar{g} = (\Delta x_{11}, \dots, \Delta x_{16}, \xi_1, \dots, \xi_{10})^T$ .

Матриці у рівняннях (2), (3), (5) матимуть такий вигляд:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ -0,5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -0,3 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{12} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 7} \\ 0,2I_{7 \times 7} \end{pmatrix}, D_{21} = (0_{10 \times 6} \quad I_{10 \times 10}).$$

Усі вершини вимірюються за деякою умовною шкалою з початковими нульовими значеннями. Припустімо, що початковий імпульс — відтік інтелектуальних активів (вершина 12). Результати моделювання показано на рис. 2–4, де пунктирною лінією зображено динаміку системи без керування, а суцільною — з керуванням.

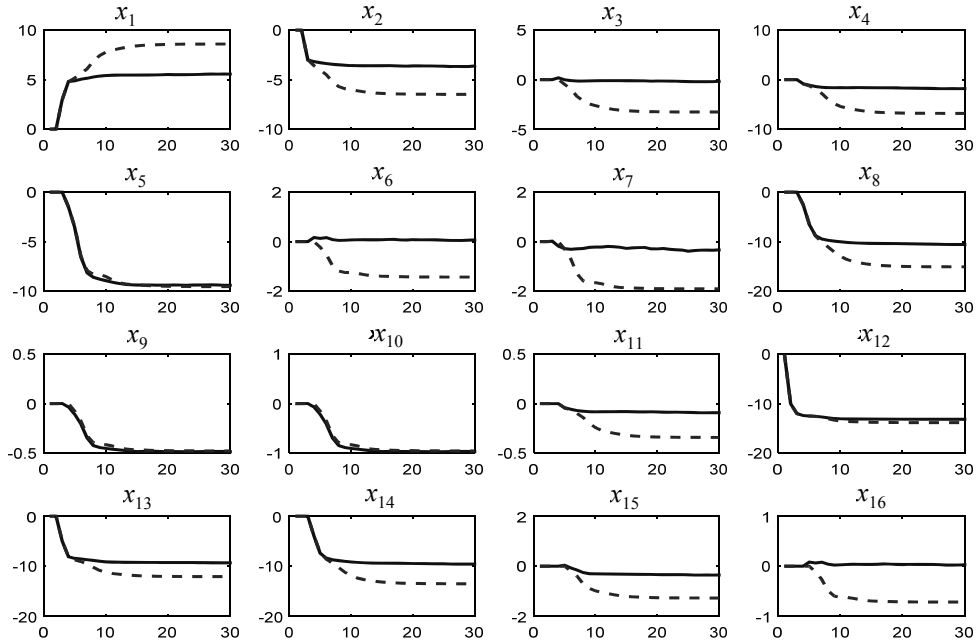


Рис. 2. Графіки координат вершин КК під час імпульсного процесу

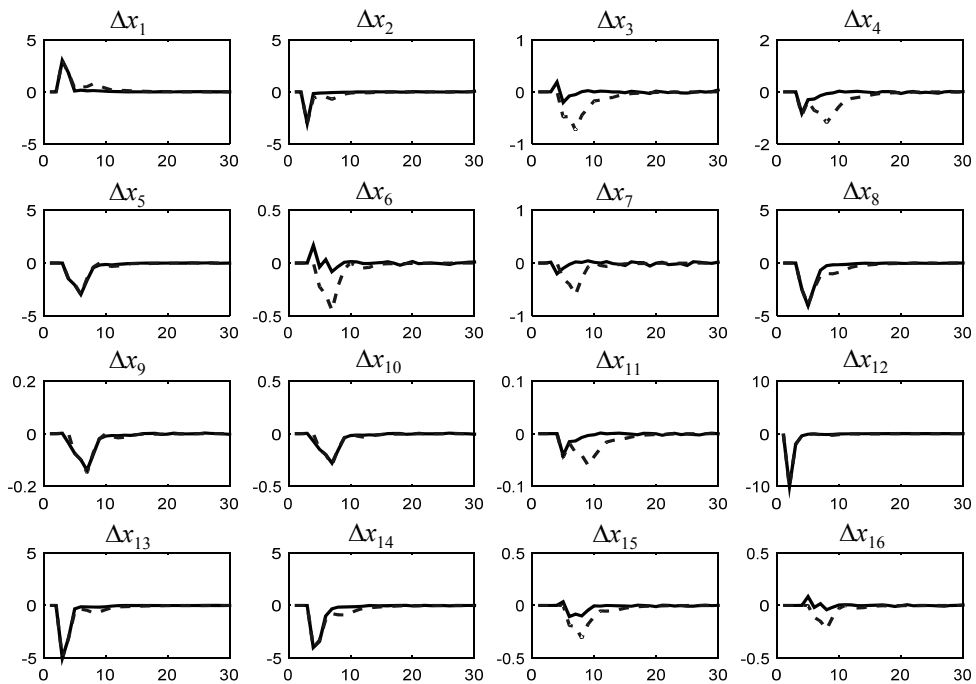


Рис. 3. Графіки зміни приростів координат вершин КК під час імпульсного процесу

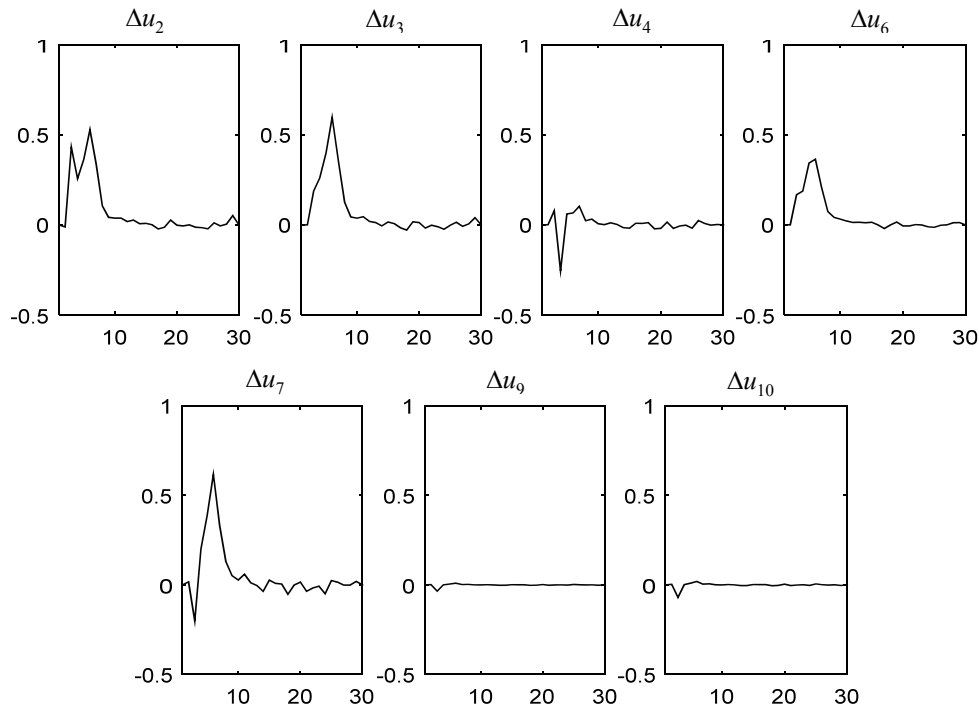


Рис. 4. Графіки керувань, генерованих на основі запропонованого методу

## ВИСНОВКИ

Дослідження присвячено керуванню імпульсними процесами в КК за допомогою методів теорії  $H_\infty$ . Розглядається досить загальний випадок, коли частина координат вершин КК є невимірюваною, а вимірювана частина вимірюється неточно внаслідок дії зовнішнього шуму. Не робиться ніяких припущень щодо ймовірнісних характеристик невимірюваних вершин та шумів вимірювань; єдине обмеження, що накладається на них в роботі, — обмеженість за  $l_2$ -нормою. Допускається, що імпульсний процес може бути нестійким. Зовнішні керування можуть діяти не на всі вершини КК (за умови, що система залишається стабілізованою). Критерій оптимальності керування полягає в мінімізації максимального відношення  $l_2$ -норми приростів координат вибраної підмножини вимірюваних вершин КК до  $l_2$ -норми приростів збурень (невимірюваних координат вершин та шумів вимірювань). Практична реалізованість алгоритму керування забезпечується введенням вагових коефіцієнтів у критерій оптимальності.

Задачу розв'язано за допомогою зведення її до задачі робастного керування дискретною динамічною системою у просторі  $H_\infty$ . Розроблений метод випробувано на моделі керування імпульсним процесом у системі управління персоналом ІТ-компанії.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Инновационное развитие социально-экономических систем на основе методологий предвидения и когнитивного моделирования* / Под ред. Г.В. Гореловой, Н.Д. Панкратовой. — К.: Наук. думка, 2015. — 464 с.



2. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам; пер. с англ. / Ф.С. Робертс. — М.: Наука, 1986. — 496 с.
3. Згуровский М.З. Принципы и методы управления импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем / М.З. Згуровский, В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Проблемы управления и информатики. — 2016. — Ч. 1, № 2. — С. 21–29.
4. Згуровский М.З. Принципы и методы управления импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем / М.З. Згуровский, В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Проблемы управления и информатики. — 2016. — Ч. 2, № 4. — С. 7–17.
5. Романенко В.Д. Синтез следящей системы управления неустойчивыми импульсными процессами в иерархических когнитивных картах сложных систем / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 7–13.
6. Романенко В.Д. Автоматизация управления импульсными процессами в когнитивных картах с подавлением ограниченных возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 2. — С. 29–40.
7. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: учеб. / Под ред. Н.Д. Егупова. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. — 744 с.
8. Toivonen H. Lecture notes on robust control by state-space methods. — Available at: [users.abo.fi/htoivone/courses/robust/hsem.pdf](http://users.abo.fi/htoivone/courses/robust/hsem.pdf)
9. Glover K. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity / K. Glover, J.C. Doyle // Systems & Control Letters. — 1988. — Vol. 11, N 8. — P.167–172.
10. Doyle J.C. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems / J.C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1989. — Vol. 34, N 8. — P. 831–847.
11. Safonov M.G. Simplifying the  $H_\infty$  Theory via Loop Shifting, Matrix Pencil and Descriptor Concepts / M.G. Safonov, D.J.N. Limebeer, R.Y. Chiang // Int. J. Contr. — 1989. — Vol. 50, N 6. — P. 2467–2488.
12. Iglesias P.A. State-Space Approach to Discrete-Time  $H_\infty$  Control / P. A. Iglesias, K. Glover // Int. J. Control, 54. — 1991. — P. 1031–1073.
13. Stoorvogel A.A. The  $H_\infty$  Control Problem: A State Space Approach / A.A. Stoorvogel. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2000. — 275 p.
14. Robust Control Toolbox. Documentation. Function hinfsyn. — Available at: <https://www.mathworks.com/help/robust/ref/hinfsyn.html>

*Надійшла 09.10.2017*

## КОНСТРУКЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ МІР НА ПОВЕРХНЯХ, УКЛАДЕНИХ У РІМАНОВІ БАГАТОВИДИ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

К.В. МОРАВЕЦЬКА

**Анотація.** Розглянуто скінченновимірний ріманів багатovid з рівномірною структурою і відповідна ріманова міра об'єму. Для вкладеної поверхні можна побудувати індуковану ріманову міру об'єму, що задається тензором, індукованим вкладенням. Запропоновано альтернативний підхід до побудови асоційованої поверхневої міри. Конструкція передбачає задання на багатovidі диференціальної форми, асоційованої з поверхнею, і строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, що попарно комутують. Під дією потоку векторних полів за близьких до нуля значень  $t$  множина на поверхні переходить в окіл багатovidу, і при граничному переході можна отримати значення поверхневої міри. Показано, що побудова поверхневої міри за допомогою вказаного альтернативного підходу дає якраз індуковану ріманову міру об'єму.

**Ключові слова:** ріманів багатovid, міра об'єму, векторне поле, поверхнева міра.

### ВСТУП

Побудова поверхневих мір на поверхнях, укладених у нескінченновимірний простір, є однією з ключових проблем нескінченновимірного аналізу. Розв'язуючи подібні задачі, важливо забезпечити узгодженість з класичними результатами скінченновимірного аналізу.

Існують різні підходи до побудови поверхневих мір. Зокрема, у працях [1, 2] розвинуто апарат поверхневого інтегрування у просторах Фреше. У праці [3] для побудови поверхневих мір на множинах рівня соболевських функцій в локально опуклих просторах використано соболевські ємності.

У працях [4, 5] запроваджено інший підхід до побудови асоційованої міри на гладкій межі області в нескінченновимірному просторі. Адекватність цього підходу підтверджено дослідженням крайових задач в областях гільбертового простору [6, 7]. Узагальнення на випадок поверхонь довільної скінченної корозмірності на банаховому багатovidі з рівномірною структурою запропоновано у працях [8, 9].

У праці [10] указаний підхід використано для скінченновимірного евклідового простору і показано його узгодженість з класичними формулами площі поверхні.

Роботу присвячено дослідженню адекватності запропонованого підходу до побудови поверхневої міри, асоційованої з мірою об'єму на рімановому багатovidі з рівномірною структурою.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано ріманів багатовид  $M$  з рівномірною структурою і вкладену в його компактну підмножину  $\bar{U}$  замкнену поверхню  $S$ . Тоді  $S$  також являє собою ріманів багатовид і відповідний ріманів тензор  $\tilde{T}$  може бути індукований тензором  $T$  на  $M$ :

$$\tilde{T} = i^* T,$$

де  $i: S \rightarrow M$  — вкладення  $S$  у  $M$ . При цьому на  $S$  коректно визначено ріманову міру об'єму  $\tilde{V}$ :

$$\tilde{V}(G) = \int_{\varphi(G)} \sqrt{\det(\tilde{T}_\varphi(\bar{x}))} dx^1 \dots dx^{m-k},$$

де  $\varphi$  — така карта на  $S$ , для якої множина  $G$  повністю належить області визначення (для множин, які повністю не лежать в області визначення однієї карти, значення міри задається адитивністю).

З іншого боку, за допомогою метричного тензора  $T$  можна задати міру об'єму  $V$  на багатовиді  $\bar{U}$  і, використовуючи підхід, описаний у працях [8, 9], побудувати на  $S$  поверхневу міру  $\hat{V}$ , асоційовану з  $V$ .

**Мета роботи** — показати еквівалентність поверхневої міри, асоційованої з мірою об'єму на багатовиді, та міри об'єму, що задається індукованим тензором на поверхні.

## ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У працях [8, 9] описано конструкцію поверхневих мір на банахових багатовидах з рівномірною структурою. Зокрема, цей підхід може бути використаний і для ріманових багатовидів. Коротко наведемо основні означення та схему побудови поверхневих мір.

Нехай  $M$  є дійсним скінченновимірним багатовидом класу  $C^2$  з модельним простором  $\mathbb{R}^m$  і атласом  $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ . Вважаємо, що  $M$  зв'язний і наділений обмеженою структурою, тобто для деякого атласу  $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  на  $M$  існує така додатна стала  $K$ , що для кожного відображення склейки  $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  умови  $\|F'_{\beta\alpha}(x)\| \leq C$ ,  $\|F''_{\beta\alpha}(x)\| \leq C$  виконані для всіх  $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Окрім того, вважаємо, що обмежена структура на  $M$  є рівномірною, тобто існує така стала  $r > 0$ , що для кожного  $x \in M$  існує така карта  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ , що  $x \in U_\alpha$  і  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \supset B_r(\varphi_\alpha(x))$  (тут і далі через  $B_r(z)$  позначатимемо відкриту кулю в модельному просторі  $\mathbb{R}^m$  радіуса  $r$  з центром у точці  $z$ ).

Нехай  $M$  і  $N$  — два багатовиди з обмеженими атласами  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  відповідно. Будемо вважати, що відображення  $f: M \rightarrow N$  належить до класу  $C_b^2(M)$  (або є обмеженим морфізмом класу  $C^2$ ), якщо для нього існує таке число  $C > 0$ , що для кожної пари карт  $(U, \varphi) \in \Omega_1$  і  $(V, \psi) \in \Omega_2$  функція

$f_{\phi\psi} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$  є двічі неперервно диференційовною і  $\|f'_{\phi\psi}(p)\| \leq C$  і  $\|f''_{\phi\psi}(p)\| \leq C$  для кожного  $p \in \phi(U)$ . Якщо при цьому відображення  $f$  є ізоморфізмом і  $f^{-1}$  також належить до класу  $C_b^2$ , тоді  $f$  називають обмеженим ізоморфізмом класу  $C_b^2$ . Неперервно диференційовне тензорне поле  $T$  називатимемо обмеженим (або полем класу  $C_b^1$ ), якщо для нього існує така стала  $L > 0$ , що для кожної карти  $(\phi, U) \in \Omega$  і кожного  $x \in U$ :  $\|T_\phi(x)\| \leq L$ ,  $\|T'_\phi(x)\| \leq L$ , де  $T_\phi$  — локальне зображення тензора в карті.

**Означення 1.** Замкнену підмножину  $S \subset M$  будемо називати вкладеною в  $M$  поверхнею корозмірності  $k$  ( $k < m$ ), якщо існує багатовид  $N$  з обмеженою структурою, моделлю якого є  $\mathbb{R}^{m-k}$ , відкритий окіл нуля  $D \subset \mathbb{R}^k$ , відкрита підмножина  $U$  в  $M$  і обмежений  $C_b^2$ -ізоморфізм  $g : N \times D \rightarrow U$ , для якого  $g(N \times \{\vec{0}\}) = S$ .

Позначатимемо через  $\pi : N \times D \rightarrow N$  на першу координату,  $P : N \times D \rightarrow D$  — на другу. Тоді для кожної точки вкладеної поверхні  $x \in S$  можна розглянути карту

$$(\tilde{\psi}, \tilde{W}) = (\psi \circ \pi \circ g^{-1}, g(W \times \{\vec{0}\})),$$

де  $(\psi, W)$  — карта на  $N$  в точці  $(\pi \circ g^{-1})(x)$  і таким чином  $S$  також наділена обмеженою структурою. Відповідна карта

$$(\hat{\psi}, \hat{W}) = ((\psi \times id) \circ g^{-1}, g(W \times D)), \quad (1)$$

на  $M$  узгоджується із заданою обмеженою структурою.

**Зауваження.** Для атласу  $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}$  на  $N$  можна побудувати підатлас  $\{(\psi_\alpha, G_\alpha)\}$  таким чином, щоб кожна множина  $G_\alpha$  лежала в  $W_\alpha$  разом з деяким оточенням і  $\psi_\alpha(G_\alpha) = B_{\epsilon_\alpha}$ . Тому можемо вважати, що кожна функція  $\psi$  визначена в деякому оточенні множини  $W$ , а образами  $W$  є кулі в  $\mathbb{R}^k$ .

**Означення 2.** Нехай  $S$  — вкладена в  $M$  поверхня корозмірності  $k$ ,  $g : N \times D \rightarrow U$  — відповідний ізоморфізм. Тоді диференціальну  $k$ -форму  $\omega$  класу  $C_b^1(U)$  називатимемо асоційованою формою поверхні  $S$ , якщо виконано дві умови:

- 1) для кожного  $x \in S$ :  $\{Y \in T_x M \mid i_Y \omega(x) = 0\} = T_x S$ ;
- 2) існує таке  $\delta > 0$ , що для всіх  $x \in S$  виконано нерівність  $\|\omega(x)\| > \delta$ .

**Означення 3.** набір векторних полів  $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ , що попарно комутують на  $U$ , називається строго трансверсальним до вкладеної поверхні  $S$  (корозмірності  $k$ ) з асоційованою формою  $\omega$ , якщо існує таке  $\delta > 0$ , що для кожного  $x \in S$  виконано нерівність  $|\omega(\vec{X})(x)| > \delta$ . Як показано у праці [8], таке означення є коректним, тобто не залежить від вибору асоційованої форми поверхні.

Через  $\Phi_t^X$  позначатимемо потік векторного поля  $X$  для набору векторних полів  $\vec{X}$ , що попарно комутують:  $\Phi_t^{\vec{X}} = \Phi_{t_1}^{X_1} \dots \Phi_{t_k}^{X_k}$ ,  $\Phi_W^{\vec{X}}(x) = \{\Phi_t^{\vec{X}}(x) \mid \vec{t} \in W\}$ .

Через  $\lambda_k$  будемо позначати міру Лебега на  $\mathbb{R}^k$ .

Нехай на багатовиді  $M$  з рівномірною структурою задано вкладену поверхню  $S$  корозмірності  $k$ , асоційовану з нею диференціальну форму  $\omega$  та строго трансверсальний до  $S$  набір векторних полів  $\vec{X}$ , що попарно комутують. Нехай на  $M$  також задано міру  $\mu$ . У випадку, якщо для кожної множини  $A \in \mathbf{B}(S)$  існує границя

$$\sigma_{\vec{X}}(A) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A))}{\lambda_k(B_r)}, \quad (2)$$

функція множин  $\sigma_{\vec{X}}$  є мірою на  $S$  і називається поверхневою мірою першого типу, породженою сім'єю векторних полів  $\vec{X}$ .

У випадку, коли на  $U$  задано два строго трансверсальних до  $S$  набори векторних полів  $\vec{X}$  та  $\vec{Y}$ , що попарно комутують, для яких  $|\omega(\vec{X})|_S = |\omega(\vec{Y})|_S$ , і при цьому обидві міри  $\sigma_{\vec{X}}$  і  $\sigma_{\vec{Y}}$  є коректно визначеними та скінченними на  $S$ , вказані поверхневі міри збігаються (теорема 3 та зауваження 3 [8]). Таким чином, забезпечується коректність такого означення.

**Означення 4.** Поверхневою мірою другого типу на  $S$ , індукованою мірою  $\mu$  і асоційованою формою  $\omega$ , називається міра  $\mu_\omega = \frac{1}{|\omega(\vec{X})|_S} \sigma_{\vec{X}}$ , де

$\vec{X}$  — строго трансверсальний до  $S$  набір векторних полів, що попарно комутують, для якого границя (2) існує для кожного  $A \in \mathbf{B}(S)$ .

Будемо вважати, що багатовид  $M$  є рімановим, тобто на  $M$  задано тензорне поле  $T$  типу  $(2,0)$  класу  $C^2$  таке, що для кожної точки  $p \in M$  білінійний функціонал  $T(p)$  і  $T_p M$  є симетричним і додатно визначеним. Таким чином, на  $T_p M$  визначено скалярний добуток:  $\langle u, v \rangle_T = T(p)(u, v)$  і відповідна норма:

$$\|u\|_T = \sqrt{T(p)(u, u)}.$$

#### Побудова міри об'єму на поверхні, вкладеній у ріманів багатовид

Нехай  $M$  — ріманів  $C^2$ -багатовид з рівномірною структурою,  $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  — рівномірний атлас на  $M$ ,  $T$  — відповідний ріманів тензор,  $K = \bar{U}$  — компактна підмножина в  $M$ . Тоді на  $K$  визначено міру об'єму  $V$ :

$$V(G) = \sum_i \int_{\varphi_{\alpha_i}(G_i)} \sqrt{\det(T_{\varphi_{\alpha_i}}(\vec{x}))} dx^1 \dots dx^m, \quad (3)$$

де  $G = \bigcup_i G_i$  — таке розбиття множини  $G \in \mathcal{B}(K)$  на скінченну кількість підмножин  $G_i$ , що попарно не перетинаються, за якого кожна  $G_i \subset U_{\alpha_i}$  для деякого  $\alpha_i$ . Легко бачити, що значення  $V(G)$  скінченне ( $V(G)$  рівномірно обмежена) і не залежить від способу розбиття, а тому формула (3) коректно задає скінченну міру.

Нехай замкнена поверхня  $S$  задана відповідно до означення 1, тобто  $S = g(N \times \{\vec{0}\})$ , де  $g: N \times D \rightarrow U \subset M$  —  $C_b^2$ -ізоморфізм;  $N$  — багатовид з обмеженою структурою, моделлю якого є  $\mathbb{R}^{m-k}$ ;  $D$  — відкритий окіл нуля в  $\mathbb{R}^k$ .

### Поверхнева міра, асоційована з мірою об'єму на багатовиді

Побудуємо на  $S$  поверхневу міру, використовуючи описаний вище підхід з праць [8, 9]. Оскільки  $P^*(dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k)$  — диференціальна  $k$ -форма на  $N \times D$ , асоційована з поверхнею  $N \times \{\vec{0}\}$ , за асоційовану форму поверхні  $S$  можна взяти форму  $v = (g^{-1})^* P^*(dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k)$  на  $U$ . При цьому для  $x \in U_\alpha \cap U$  і  $u_1, \dots, u_k \in T_x M$  маємо:

$$\begin{aligned} v(x)(u_1, \dots, u_k) &= (dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k)(T_x(P \circ g^{-1})u_1, \dots, T_x(P \circ g^{-1})u_k) = \\ &= \det((P \circ g^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1})'(u_1)_\alpha, \dots, (P \circ g^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1})'(u_k)_\alpha), \end{aligned}$$

де  $(u_i)_\alpha \in \mathbb{R}^m$  — зображення дотичного вектора  $u_i$  в карті  $\varphi_\alpha$ .

Для карти  $(\hat{\psi}, \hat{W})$  (див. вираз (1)) отримуємо

$$v(x)(u_1, \dots, u_k) = \det(P_2(u_1)_{\hat{\psi}}, \dots, P_2(u_k)_{\hat{\psi}}), \tag{4}$$

де  $P_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проекція на останні  $k$  координат.

Зафіксуємо деяку точку  $x = g(y, \vec{0}) \in S$ . Зображення тензора  $T(x)$  у карті  $\hat{\psi}$  має вигляд симетричної додатно визначеної блокової матриці:

$$T_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}(x)) = T_{\hat{\psi}}(\psi(y), \vec{0}) = T_x = \begin{pmatrix} A_x & F_x \\ F_x^T & C_x \end{pmatrix},$$

де  $A_x$  і  $C_x$  — симетричні матриці  $n-k \times n-k$  і  $k \times k$  відповідно;  $F_x$  — матриця  $n-k \times k$ .

**Лема.** Нехай  $x \in M$ , позначимо  $\|v(x)\|_T = \sup_{u_1, \dots, u_k \in T_x M} \frac{|v(x)(u_1, \dots, u_k)|}{\prod_{i=1}^k \|u_i\|_T}$ .

Тоді

$$\|v(x)\|_T = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det T_x}}.$$

**Доведення.** Оскільки матриця  $T_x$  є симетричною додатно визначеною, для неї можна застосувати розклад Холецького:  $T_x = L_x L_x^T$ , де  $L_x = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$  — нижня трикутна матриця з  $K_x K_x^T = A_x$ . І нехай  $L_x^{-1}$  має блоковий вигляд:  $L_x^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & B_x \\ \dots & H_x \end{pmatrix}$ , де  $K_x B_x = 0$ . При цьому за лемою 1 із праці [10] маємо рівність:

$$\begin{aligned} |\det L| \sqrt{\det \begin{pmatrix} B_x^T & H_x^T \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ H_x \end{pmatrix}} &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x^T & 0 \end{pmatrix}} = \\ &= \sqrt{\det(K_x K_x^T)} = \sqrt{\det A_x}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \|v(x)\|_T &= \sup_{u_1, \dots, u_k \in T_x M} \frac{|v(x)(u_1, \dots, u_k)|}{\prod_{i=1}^k \|u_i\|_T} = \left[ \begin{array}{l} \text{карта } \hat{\psi} \\ \text{рівність (4)} \end{array} \right] = \\ &= \sup_{u_1, \dots, u_k \in T_x M} \frac{|\det(P_2(u_1)_{\hat{\psi}}, \dots, P_2(u_k)_{\hat{\psi}})|}{\prod_{i=1}^k \sqrt{\langle L_x^T(u_i)_{\hat{\psi}}, L_x^T(u_i)_{\hat{\psi}} \rangle}} = \\ &= \left[ \begin{array}{l} v_i = L_x^T(u_i)_{\hat{\psi}} \\ V = [v_1 \dots v_k] \end{array} \right] = \sup_{v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m} \frac{|\det((B_x^T \ H_x^T)V)|}{\prod_{i=1}^k \|v_i\|}. \end{aligned}$$

За лемою 2 [10] маємо:

$$\begin{aligned} \|v(x)\|_T &= \sup_{v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m} \frac{|\det((B_x^T \ H_x^T)V)|}{\prod_{i=1}^k \|v_i\|} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} B_x^T & H_x^T \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ H_x \end{pmatrix}} = \\ &= \frac{\sqrt{\det A_x}}{|\det L|} = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det T_x}}. \end{aligned}$$

Лему доведено.

Оскільки нормування диференціальної форми зберігає її асоційованість з поверхнею, за асоційовану форму поверхні  $S$  можемо також взяти форму:

$$\omega(\vec{x}) = \frac{v(\vec{x})}{\|v(\vec{x})\|_T} = \frac{\sqrt{\det T_x}}{\sqrt{\det A_x}} \cdot v(\vec{x}).$$

Розглянемо набір векторних полів  $\vec{X} = \{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_k\}$  на  $N \times D$ , де

$$X_i(z) = \begin{pmatrix} \vec{0}_{T_z N} \\ \vec{0}_{i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix} \in T_z N \times \mathbb{R}^k \text{ — одиниця на } i\text{-й позиції в } \mathbb{R}^k. \text{ Очевидно, що}$$

поля з набору  $\vec{X}$  попарно комутують та утворюють строго трансверсальний до  $N \times \{\vec{0}\}$  набір векторних полів (оскільки  $(P^*(dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k))(\vec{X}(z)) = \det E_k = 1$ ). Тому набір  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_k)$  векторних полів на  $U$ ,  $g$ -пов'язаних з  $\vec{Y}$ , є строго трансверсальним до  $S$  набором векторних полів, що попарно комутують. Тоді зображення  $X_i$  у карті  $(\hat{\psi}, \hat{W})$  (див. рівність (1)) має вигляд

$$(X_i)_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}(x)) = (\hat{\psi} \circ g \circ (\psi \times id)^{-1})'(Y_i)_{\psi \times id}(g^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix},$$

а тому

$$v(\vec{x})(\vec{X}) = v_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}(x))(\vec{X}_{\hat{\psi}}) = \det(E_k) = 1.$$

Оскільки  $\Phi_t^{X_i} = g \circ \Phi_t^{Y_i} \circ g^{-1}$ , для всіх  $x \in S$  і  $t \in D$  маємо рівність

$$\Phi_t^{\vec{X}}(\vec{x}) = (g \circ \Phi_t^{\vec{Y}} \circ g^{-1})(\vec{x}) = g((\pi \circ g^{-1})(\vec{x}) \times \{\vec{t}\}).$$

Тоді при  $A \in \mathcal{B}(S)$  і  $r \in \mathbb{R}$ , для якого  $B_r \subset D$ , отримуємо рівність

$$\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A) = g((\pi \circ g^{-1})(A) \times B_r).$$

Візьмемо тепер борелівську підмножину  $G \subset S$ , що разом з деяким оточенням лежить у межах однієї карти  $(\hat{\psi}, \hat{W})$  на  $M$ . Тоді за малих  $r$

$$\begin{aligned} V(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(G)) &= \int_{\hat{\psi}(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(G))} \sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{x}))} dx^1 \dots dx^m = \int_{\tilde{\psi}(G) \times B_r} \sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{x}))} dx^1 \dots dx^m = \\ &= \int_{B_r} \int_{\tilde{\psi}(G)} \sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z}, \vec{t}))} d\vec{z} d\vec{t}. \end{aligned}$$

Урахувавши гладкість і обмеженість тензорного поля  $T_{\hat{\psi}}$  (на компактній множині  $\psi(\overline{W}) \times \overline{B}_R$ , див. зауваження), знайдемо границю (2) для міри  $V$ :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(G))}{\lambda_k(B_r)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} \int_{\tilde{\psi}(G)} \sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z}, \vec{t}))} d\vec{z} d\vec{t} = \\ &= \int_{\tilde{\psi}(G)} \sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z}, \vec{0}))} d\vec{z} = \left( \left( \sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\cdot, \vec{0}))} \cdot \lambda_{m-k} \right) \circ \tilde{\psi} \right)(G). \end{aligned}$$

Беручи до уваги компактність  $\overline{U}$  і зауваження, кожену множину  $G \in \mathcal{B}(S)$  можемо подати у вигляді скінченного об'єднання підмножин, що разом з далеким оточенням лежать у межах однієї карти. Отже, поверхнева міра  $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{X}}[V]$  визначена на  $\mathcal{B}(S)$  коректно і є образом міри  $\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z}, \vec{0}))} \cdot \lambda_{m-k}$  при відображенні  $\tilde{\psi}^{-1} : \psi(W) \rightarrow S$ .



Переходимо тепер до поверхневої міри другого типу, індукованої асоційованою формою  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\sigma_\omega(G) &= \left( \frac{1}{\|\omega(\bar{X})\|_S} \cdot \sigma_{\bar{X}} \right)(G) = \int_G \frac{1}{\|\omega(X)\|_S} d\sigma_{\bar{X}} = \\ &= \int_{\tilde{\psi}(G)} \left\| v(\tilde{\psi}^{-1}(\bar{z})) \right\|_T \sqrt{\det(T_{\tilde{\psi}}(\bar{z}, \bar{0}))} d\bar{z}.\end{aligned}$$

За лемою для  $x = g(\psi^{-1}(\bar{z}), \bar{0}) = \tilde{\psi}^{-1}(\bar{z})$  маємо рівність  $\left\| v(\tilde{\psi}^{-1}(\bar{z})) \right\|_T = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det(T_{\tilde{\psi}}(\bar{z}, \bar{0}))}}$ . Тому для кожного  $G \in \mathbf{B}(S)$ :

$$\hat{V}(G) := \sigma_\omega(G) = \int_{\tilde{\psi}(G)} \sqrt{\det A_{\tilde{\psi}^{-1}(\bar{z})}} d\bar{z} = \int_G \sqrt{\det A_x} dx.$$

### Поверхнева міра об'єму, задана індукованим на поверхні тензором

Укладення  $i: S \rightarrow M$  поверхні  $S$  у багатовид  $M$  індукує на  $S$  ріманів тензор  $\tilde{T} = i^* T$ , і, таким чином, поверхня  $S$  також являє собою ріманів багатовид. Тому на  $S$  визначено ріманову міру об'єму  $\tilde{V}$  аналогічно формулі (3):

$$\tilde{V}(G) = \sum_i \int_{\phi_{\alpha_i}(G_i)} \sqrt{\det(\tilde{T}_{\phi_{\alpha_i}}(\bar{x}))} dx^1 \dots dx^m,$$

де  $G = \bigcup_i G_i$  — таке розбиття множини  $G \in \mathbf{B}(M)$  на скінченну кількість підмножин  $G_i$ , що попарно не перетинаються, за якого кожна  $G_i$  лежить в області визначення деякої карти  $(U_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_i})$  багатовиду  $S$ .

Зафіксуємо карту  $(\psi, W)$  на  $N$  і відповідні карти  $(\tilde{\psi}, \tilde{W})$  і  $(\hat{\psi}, \hat{W})$  на  $S$  і  $M$ . Для  $x \in \tilde{W} \subset S$  зображення тензора  $\tilde{T}$  у карті  $(\tilde{\psi}, \tilde{W})$  має вигляд  $\tilde{T}_{\tilde{\psi}}(\bar{x}) = A_x$  (у позначеннях леми), оскільки

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\tilde{\psi}}(\bar{x})(\bar{u}, \bar{v}) &= T_{\hat{\psi}}(\bar{x})((\hat{\psi} \circ \tilde{\psi}^{-1})'(\tilde{\psi}(x))(\bar{u}), (\hat{\psi} \circ \tilde{\psi}^{-1})'(\tilde{\psi}(x))(\bar{v})) = \\ &= T_{\hat{\psi}}(\bar{x})\left(\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{0} \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Таким чином, для підмножини  $G \in \mathbf{B}(S)$ ,  $G \subset \tilde{W}$  маємо:

$$\tilde{V}(G) = \int_{\tilde{\psi}(G)} \sqrt{\det(\tilde{T}_{\tilde{\psi}}(\bar{x}))} d\bar{x} = \int_{\tilde{\psi}(G)} \sqrt{\det A_{\tilde{\psi}^{-1}(\bar{x})}} d\bar{x} = \hat{V}(G).$$

Урахувавши компактність  $S$ , отримуємо, що індукована міра  $\tilde{V}$  збігається з побудованою асоційованою мірою  $\hat{V}$ .

## ВИСНОВКИ

У роботі отримано поверхневі міри першого та другого типів, асоційовані з рімановою мірою об'єму на поверхні, вкладеній у ріманів багатovid з рівномірною структурою. Показано, що отримана міра збігається з мірою об'єму поверхні, що задається індукованим тензором. Таким чином, обґрунтовано адекватність використання вказаного підходу до побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах. Перспективним вбачається подальше дослідження поверхневих мір другого типу на поверхнях, укладених у нескінченновимірні банахові багатovidи.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Угланов А.В. Поверхностные интегралы в пространствах Фреше / А.В. Угланов // Математический сборник. — 1998. — Т. 189, № 11. — С. 139–157.
2. Uglanov A.V. Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications / A.V. Uglanov. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. — 262 p.
3. Пугачев О.В. Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах / О.В. Пугачев // Теория вероятностей и ее применения. — 2008. — 53, № 1. — С. 178–188.
4. Богданский Ю.В. Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса–Остроградского / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2012. — 64, № 10. — С. 1299–1313.
5. Богданский Ю.В. Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в  $L_2$ -версии / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2011. — 63, № 9. — С. 1169–1178.
6. Богданский Ю.В. Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве / Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // Укр. мат. журн. — 2014. — 66, № 6. — С. 733–739.
7. Богданский Ю.В. Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2015. — 67, № 11. — С. 1450–1460.
8. Богданский Ю.В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 8. — С. 1030–1048.
9. Богданский Ю.В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 10. — С. 1299–1309.
10. Моравецька К.В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом / К.В. Моравецька // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2017. — № 4. — С. 66–72.

Надійшла 12.10.2017

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,  
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ  
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,  
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 519.8:502.3

**Учет риска неиспользованных возможностей при обосновании оптимального сценария ввода новых агрегатов на гидроаккумулирующих электростанциях в Украине / Стефанишин Д.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 7–19.**

Рассмотрено задачу обоснования оптимального сценария ввода новых мощностей гидрогенерации на гидроаккумулирующих электростанциях (ГАЭС) в Украине в соответствии с принятой правительством Программой развития гидроэнергетики на период до 2026 г., в которой предусмотрено достройку и принятие в эксплуатацию очередных агрегатов на Днестровской и Ташлыкской ГАЭС, а также строительство Каневской ГАЭС. Предложено решение поставленной задачи на основе попарного сравнения альтернатив по критерию минимального совокупного риска с учетом риска неиспользованных возможностей, где в качестве расчетных характеристик, на основе которых формировались составляющие совокупных рисков альтернатив, принимались энергетические показатели различных вариантов ввода агрегатов и их стоимость. Показано принципиальную возможность выбора оптимального сценария ввода новых агрегатов на ГАЭС в Украине с меньшим совокупным риском в сравнении с другими возможными сценариями. Рис.: 4. Табл.: 10. Библ.: 20 наим.

UDC 519.8:502.3

**Considering the risk of unused opportunities when grounding the optimal scenario of commissioning of new units at pumped storage power plants in Ukraine / Stefanyshyn D.V. // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 7–19.**

The problem of grounding the optimal scenario of commissioning of new capacity of hydro generation at pumped storage power plants (PSPP) in Ukraine in accordance with its government program of hydropower development in the period up to 2026, which provides for the completion and commissioning of next power units at the Dniester and the Tashlyk PSPP and construction of the Kaniv PSPP, was examined. A solution to this problem was proposed based on pairwise comparison of alternatives by the criterion of the minimum total risk with taking into account the risk of unused opportunities, where as characteristics forming components of total risks of alternatives energy indicators and costs of commissioning of hydro aggregates were taken. The principal possibility of choosing the optimal scenario of commissioning of new power units on PSPP in Ukraine, which is burdened by lower total risk compared with other possible scenarios, was shown. Figs.: 4. Tables: 10. Refs: 20 titles.

УДК 004.932.2

**Реконструкція 3D моделі об'єкта з використанням монокулярної RGB камери / Ведмеденко О.В., Ніколаєв С.С., Тимошенко Ю.О. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 20–28.**

Щорічно межі між реальним і цифровим світом стають дедалі більш розмитими. Швидкий розвиток доповненої і віртуальної реальності створює нові можливості для більш продуктивної роботи і розваг; революція в технологіях 3D-друку породжує появу безлічі DIY спільнот і сприяє зростанню економіки. Усі ці фактори потребують нових технологій, які дозволять створювати 3D-моделі з об'єктів реального світу, а більшість з доступних рішень або дуже дорогі, або потребують

складних технічних знань, яких у більшості людей немає. Подано огляд і порівняно сучасні методи реконструкції 3D моделей реальних об'єктів у реальному часі, які можуть бути використані в сучасних мобільних рішеннях. Рис.: 6. Табл.: 1. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 004.932.2

**Реконструкция 3D модели объекта с использованием монокулярной RGB камеры / Ведмеденко О.В., Николаев С.С., Тимошенко Ю.А.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 20–28.

Ежегодно границы реального и цифрового мира становятся все более размытыми. Быстрое развитие дополненной и виртуальной реальности создает новые возможности для более продуктивной работы и развлечений; революция в технологиях 3D-печати порождает появление множества DIY сообществ и способствует росту экономики. Все эти факторы требуют новых технологий, которые позволят создавать либо очень дорогостоящие, либо требуют сложных технических знаний, которых у большинства людей нет. Представлено обзор и сравнены современные методы реконструкции 3D моделей реальных объектов в реальном времени, которые могут быть использованы в современных мобильных решениях. Рис.: 6. Табл.: 1. Библиогр.: 11 назв.

---

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І  
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,  
ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN  
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND  
SOCIAL SYSTEMS

УДК 004.931

**Повышение достоверности проверки уникальности текстов с использованием комбинированных систем распознавания образов / Меняйленко А.С., Захожай О.И., Бидюк П.И.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 29–37.

Кроме очевидных преимуществ поиска и использования информации с сети Интернет, в последнее время начала проявляться негативная тенденция – попытки пользователей сети распоряжаться накопленной информацией и представлять ее как продукт собственного творческого труда. Для повышения достоверности определения доли уникальности текста в работе предложено строить базу данных текстовых фрагментов на основе комбинированной системы распознавания образов. Использование предложенных технических решений дало возможность повысить достоверность определения доли уникальности текста в среднем на 54%. Рис.: 2. Табл.: 4. Библиогр.: 14 назв.

UDC 004.931

**Quality enhancement of testing texts uniqueness using combined image recognition system / Menyaylenko O.S., Zakhozhai O.I., Bidyuk P.I.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 29–37.

Besides explicit advantages regarding the search and usage of information from the Internet, the negative tendency recently came to being that some users tried to pass the information found on the Internet as their original work. To enhance substantially the percentage of the texts' uniqueness identification it is proposed to construct the database of the texts' fragments based on a combined image recognition system. The proposed technical solutions provided a possibility for enhancing the percentage of identification of the text uniqueness by approximately 54%. Fig.: 2. Tables: 4. Refs.: 14 titles.

---

УДК 519.766.4

**Прогнозування нелінійних нестационарних процесів в економіці та фінансах / Попович Б.М.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 38–53.

Розроблено систему прийняття рішень для дослідження та побудови математичних моделей, що описують процеси в економіці та фінансах; оцінювання прогнозів для виконання обчислювальних експериментів. Створено інформаційну аналітичну систему для моделювання і прогнозування процесів в економіці та фінансах на базі регресійних моделей з ковзним середнім. Подано результати прогнозування вибраних цін активів за допомогою як власно створеного програмного продукту, так і вже існуючих продуктів для статистичного оброблення даних. Для аналізу результатів використано критерії якості для оцінювання побудованих моделей та якості оцінок прогнозів. Спроековано та розроблено програмне забезпечення для реалізації поставлених завдань. Проведено аналіз, моделювання та прогнозування ціни золота, акцій компаній «Укрнафта» та «Мотор Січ». Рис.: 16. Табл.: 5. Бібліогр.: 7 назв.

UDC 519.766.4

**Forecasting non-linear non-stationary processes in economics and finances / Popovych B.M.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 38–53.

A decision-making support system for research and construction of mathematical models describing processes in economics and finance has been developed; for estimation of forecasts for performing computational experiments. An information analytical system for modeling and forecasting processes in economy and finance based on regression models with a moving average has been created. The results of forecasting prices for selected assets are presented with the help of both the developed software product and the existing products for statistical data processing. For the analysis of the results, the quality criteria for estimating the constructed models and the quality of the estimates of the forecasts were used. The software was designed and developed to implement the tasks. The analysis, modeling and forecasting of gold prices, shares of “Ukrnafta” and “Motor Sich” companies were carried out. Figs.: 16. Tables: 5. Refs: 7 titles.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ  
УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM  
CONTROL AND THEORY OF GAMES

УДК 517.9 : 519.87

**Прогнозные оценки в математических моделях распространения информации при неопределенностях / Наконечный А.Г., Зинько П.Н., Шевчук Ю.М.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 54–65.

Рассмотрены модели распространения произвольного количества видов информации, которые представлены в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений со стационарными параметрами. Проанализированы разные способы представления наблюдений. Приведены алгоритмы получения усредненной оптимальной среднеквадратической прогнозной оценки и гарантированной прогнозной оценки. Приведены также примеры нахождения усредненной оптимальной среднеквадратической прогнозной оценки для случая распространения информации одного вида и алгоритм нахождения гарантированных прогнозных оценок для частного случая представления множества возможных погрешностей наблюдения. Представлены результаты числового эксперимента для задачи поиска гарантированных прогнозных оценок с двумя источниками информации. Рис.: 2. Библиогр.: 7 назв.

UDC 517.9 : 519.87

**Predictive estimation of mathematical models of information spreading process under uncertainty / Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk Yu. M.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 54–65.

The mathematical model of spreading the information of an arbitrary number of types was considered. The model takes the form of a system of non-linear ordinary

differential equations with stationary parameters. Special cases of presenting observation errors are considered. The algorithms for building averaged optimal rms predictive estimation and guaranteed predictive estimation are offered. The algorithm for building averaged optimal rms predictive estimation for a case of spreading information of one type and the algorithm for finding guaranteed predictive estimation for a particular case of representing a set of possible observation errors are obtained. The results of a numerical experiment for the problem of building guaranteed predictive estimates for the system with two sources of information are considered. Figs.: 2. Refs: 7 titles.

---

УДК 681.324

**Знаходження максимального зваженого потоку в комп'ютерних мережах нового покоління / Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П., Ові Нафас Агаї аг Гаміш // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 66–73.**

Розглянуто проблему відшукування максимального зваженого потоку (МЗП) в комп'ютерних мережах нового покоління. Принципові відмінності цієї проблеми від класичної постановки полягають в тому, що розглядається декілька класів потоків, відомості від яких передаються одночасно і вводяться нелінійні обмеження на показники якості обслуговування потоків різних класів (Quality of Service (QoS)). Доведено теорему про максимальний потік і отримано умови оптимальності зваженого потоку за обмежень на показники якості обслуговування. Розроблено алгоритм відшукування МЗП за обмежень на показники якості (QoS) для різних класів потоків у мережах, що ґрунтується на властивостях максимального потоку. Запропонований алгоритм може бути використаний для оцінки живучості комунікаційних мереж з перспективними технологіями. Бібліогр.: 6 назв.

UDC 681.324

**Determination of maximal weighting flow in new generation networks / Zaychenko E. Yu., Zaychenko Yu.P., Ovi Nafas Aghaei agh Ghamish // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 66–73.**

The problem of finding maximal weighted flow (MWF) in new generation networks is considered. The principal differences of the considered problem from the classical one constitute therein that several classes of flows are transmitted in a network and non-linear constraints on Quality of Service (QoS) are introduced. The theorem about properties of a maximal weighted flow is proved and optimality conditions for a maximal weighted flow under constraints on QoS obtained. The algorithm of finding MWF under constraints on QoS for different classes of flows is developed. The algorithm may be applied for survivability estimation in communication networks with perspective technologies. Refs.: 6 titles.

---

УДК 519.85

**Оптимізація на загальній множині перестановок зі знаком / Пічугіна О.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 74–96.**

Уведено загальну множину перестановок зі знаком і розглянуто підходи до оптимізації на ній, що ґрунтуються на зануренні в арифметичний евклідов простір. У межах дослідження вивчено властивості евклідової комбінаторної множини та її опуклої оболонки (загального багатогранника перестановок зі знаком), такі як потужність множини, незвідне  $N$ -подання багатогранника, його вимірність, критерії вершин та суміжності вершин, а також кількість комбінаторно нееквівалентних багатогранників фіксованої вимірності. Досліджено особливості поведінки кількох класів функцій на загальній множині перестановок зі знаком. Побудовано ряд функціонально-аналітичних подань цієї множини, у тому числі поліедрально-суперсферичне і строге суперсферичне. Наведено явні розв'язки лінійної задачі та задачі проектування на множину перестановок зі знаком. Проведене дослідження дозволяє застосовувати неперервні методи до оптимізації на дискретній множині й

отримувати як точні, так і наближені розв'язки оптимізаційних задач з оцінкою точності. Рис.: 7. Табл.: 1. Бібліогр.: 22 назв.

UDC 519.85

**Optimization over the general signed permutation set of permutations / Pichugina O.S.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 74–96.

A general signed permutation set is introduced. Approaches to optimization on it that are based on its mapping into the Euclidean space are considered. In the scope of the study, properties of the Euclidean combinatorial set and its convex hull - the general signed permutohedron are derived. They include set's cardinality, an irreducible H-representation of the polyhedron, its dimension, the vertex and adjacency vertex criteria, and the number of combinatorially nonisomorphic polyhedra of a fixed dimension. The behavior of some classes of functions over the general signed permutation set is investigated. Functional-analytical representations of this set are constructed including polyhedral-superspherical and strict superspherical. Explicit solutions of a linear problem and a projection problem over the general signed permutation set are presented. The research allows applying continuous methods to optimization on the discrete set and obtaining both exact and approximate solutions with accuracy estimates. Figs.: 7. Tables: 1. Refs: 22 titles.

---

УДК 519.8

**Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин / Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П., Коряшкіна К.О.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 97–108.

Подано огляд програмного забезпечення та технологій геоінформаційних систем у контексті застосування їх до вирішення практичних проблем територіальної сегментації ринку послуг, математичні постановки яких зводяться до неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Під моделями зон обслуговування слід розуміти засновані на геометрії процедури створення теоретичних зон обслуговування з використанням характеристик сервісного центру і припущень про поведінку клієнта. Описано основні вимоги до наборів даних, що використовуються у розробленому програмному забезпеченні, до складу якого входять методи розв'язання задач мультиплексного розбиття і ГІС-технології. Наведено результати сегментації території міста на зони обслуговування декількома центрами послуг з урахуванням можливості перекриття зон. Запропоновано підхід до вирішення завдань оптимального розміщення сервісних центрів на обмеженій неопуклій незв'язній області з одночасною сегментацією ринку послуг. Рис.: 4. Бібліогр.: 14 назв.

UDC 519.8

**Integration of GIS technologies and methods of solving continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets / Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P., Koriashkina E.O.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 97–108.

The article presents a review of software and technologies of geographic information systems in the context of applying them to solve practical problems of the territorial segmentation, mathematical models of which are reduced to continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets. In this case, service zone models are understood as geometry-based procedures for creating theoretical service zones using characteristics of the service center and assumptions about the customer behavior. The basic requirements to the data used in developed software, that includes methods for solving problems of multiplex-partitioning of sets and GIS technologies, are described. The results of segmentation of the city area into zones that are served by several service centers are given, taking into account the possibility of zones overlapping. An approach to

solving problems of the optimal placement of service centers in a limited nonconvex incoherent region with a simultaneous segmentation is proposed. Figs.: 4. Refs: 14 titles.

---

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І  
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ  
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,  
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR  
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 621.391: 519.24

**Адаптивная аппроксимация сигналов с использованием методов псевдообращения / Гаращенко Ф.Г., Матвиенко В.Т.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 109–118.

При решении ряда важных прикладных задач необходимо проводить аппроксимацию экспериментальных данных в реальном времени. Рассмотрена задача адаптивной аппроксимации экспериментальных данных. Предложена общая итерационная схема. Эта процедура имеет два цикла: внешний (предусматривает изменение структуры базисных функций, их наращивание при необходимости) и внутренний (уточняет параметры аппроксимации по мере поступления экспериментальных данных). Предложенная схема базируется на форме представления псевдообратного оператора. Приводятся условия сходимости итерационной схемы аппроксимации сигналов, которые базируются на теории устойчивости по Ляпунову. Библиогр.: 8 назв.

UDC 621.391: 519.24

**Adaptive approximation of signals using pseudoinversion methods / Garashchenko F.G., Matvienko V.T.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 109–118.

In order to solve the important applied problems it is necessary to approximate the experimental data. In this paper, we consider the problem of adaptive data approximation and propose the general iterative scheme. This procedure has two cycles: internal and external. The external cycle provides changes to the basic functions structure, their extension if necessary. The internal cycle checks the approximation parameters during receiving the experimental data. The proposed scheme uses the representation of a pseudoinverse operator. Conditions for the convergence of the iterative scheme for approximating signals, which are based on Lyapunov stability theory are given. Refs: 8 titles.

---

УДК 62.50

**Подавление ограниченных возмущений импульсных процессов в когнитивных картах с помощью теории  $H_\infty$  при неполных измерениях координат вершин / Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 119–129.

Поставлена и решена задача управления импульсным процессом когнитивной карты при условии, что часть координат не измеряется. Предполагается, что неизмеряемые координаты ограничены, но их вероятностные характеристики неизвестны. Алгоритм управления базируется на адаптации теории к условиям функционирования сложной динамической системы в режиме импульсного процесса когнитивной карты. Для этого выполнена декомпозиция системы на измеряемую и неизмеряемую части, выделен целевой вектор координат вершин, которые необходимо стабилизировать, введено уравнение измерения и сформулирован робастный критерий оптимальности управления. Предложенный метод апробирован на когнитивной карте управления персоналом ИТ-компании, значительная часть вершин которой являются неизмеряемыми. На основе компьютерного моделирования продемонстрирована целесообразность и эффективность применения разработанного метода управления. Рис.: 4. Библиогр.: 14 назв.



UDC 62.50

**Constrained disturbances suppression in cognitive maps' impulse processes based on  $H_\infty$  theory under incomplete measurements of vertices coordinates / Romanenko V.D., Milyavsky Yu.L.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 119–129.

The problem of controlling an impulse process of a cognitive map, provided that some of the coordinates are not measured, is stated and solved in the paper. It is assumed that non-measurable coordinates are limited, but their probabilistic characteristics are unknown. The control algorithm is based on the adaptation of the  $H_\infty$ -theory to the conditions of a complex dynamic system in the impulse process mode of a cognitive map. For this purpose, the system is decomposed into measurable and non-measurable subsystems, a target vector of vertices coordinates to be stabilized is chosen, a measurement equation is introduced, and a robust optimality criterion of control is formulated. The method proposed in the paper is verified for the cognitive map of IT company HR management, which has a large number of non-measurable vertices. Based on the computer simulation, the suitability and effectiveness of applying the proposed control method was demonstrated. Figs.: 4. Refs: 14 titles.

---

УДК 517.98+515.165

**Конструкция поверхностных мер на поверхностях, вложенных в римановы многообразия с равномерной структурой / Моравецкая Е.В.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4. — С. 130–138.

Рассмотрены конечномерное риманово многообразие с равномерной структурой и соответствующая ему риманова мера объема. Для вложенной поверхности можно построить индуцированную риманову меру объема, которая задается тензором, индуцированным вложением. Предложен альтернативный подход к построению ассоциированной поверхностной меры. Конструкция предполагает задание на многообразии дифференциальной формы, ассоциированной с поверхностью, и строго трансверсального к поверхности набора попарно коммутирующих векторных полей. Под действием потока векторных полей при близких к нулю значениях  $t$  множество на поверхности переходит в окрестность многообразия, и в пределе можно получить значение поверхностной меры. Показано, что построение поверхностной меры с помощью указанного альтернативного подхода дает в точности индуцированную риманову меру объема. Библиогр.: 10 назв.

UDC 517.98+515.165

**Measure construction on surfaces embedded into Riemann manifolds with uniform structure / Moravetska K.V.** // System Research and Information Technologies. — 2017. — № 4. — P. 130–138.

A finite-dimensional Riemann manifold with a uniform structure and the corresponding Riemann measure of the volume were considered. For an embedded surface an induced Riemann volume measure can be constructed with the tensor induced by an embedding. An alternative approach to the construction of an associated surface measure is proposed. The construction assumes an assignment of the differential form associated with the surface and a set of pairwise commuting vector fields on the manifold, strictly transversal to the surface. Under the action of the flow of the vector fields with small values of  $t$ , the subset on the surface transforms into a neighborhood on the manifold, and by passing to the limit the value of the surface measure can be obtained. It is shown that the construction of a surface measure using the mentioned alternative approach yields an exactly induced Riemann measure of the volume. Refs.: 10 titles.

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Бідюк Петро Іванович,**

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Ведмеденко Олег Вячеславович,**

студент ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Гаращенко Федір Георгійович,**

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

**Зайченко Олена Юрївна,**

доктор технічних наук, професор ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Зайченко Юрїй Петрович,**

професор, доктор технічних наук, професор ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Захожай Олег Ігорович,**

доцент, кандидат технічних наук, доцент Донбаського державного технічного університету, Україна, Лисичанськ

**Зінько Петро Миколайович,**

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри системного аналізу і теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук і кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

**Коряшкіна Катерина Олегівна,**

студентка ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Коряшкіна Лариса Сергїївна,**

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри системного аналізу і управління Державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет», Україна, Дніпро

**Матвієнко Володимир Тихонович,**

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

**Меняйленко Олександр Сергїйович,**

професор, доктор технічних наук, проректор з науково-педагогічної роботи Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Старобельськ

**Мілявський Юрїй Леонїдович,**

кандидат технічних наук, старший викладач кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Моравецька Катерина Віталїївна,**

аспірантка КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Наконечний Олександр Григорович,**

професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри системного аналізу і теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук і кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

**Нїколаєв Сергїй Сергїйович,**

провідний інженер-дослідник ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Ові Нафас Агаї аг Гаміш,**

доктор філософії (PhD), науковий стажер КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Пічугіна Оксана Сергіївна,**

доцент, кандидат фізико-математичних наук, докторант кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, Україна, Харків

**Попович Богдан Миколайович,**

студент ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Романенко Віктор Демидович,**

професор, доктор технічних наук, заступник директора з науково-педагогічної роботи ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Стефанишин Дмитро Володимирович,**

доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ

**Тимошенко Юрій Олександрович,**

доцент, кандидат технічних наук, доцент ННК «ПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Череватенко Антоніна Павлівна,**

асистент кафедри системного аналізу і управління Державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет», Україна, Дніпро

**Шевчук Юлія Михайлівна,**

аспірантка кафедри системного аналізу і теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук і кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Зміст журналу  
**«Системні дослідження та інформаційні технології»**  
за 2017 р.

**ЗМІСТ № 1**

<i>Pankratova N.D., Slota M.R.</i> Model of assessment the level of danger situations in the tasks of functioning of complex objects .....	7
<i>Лазаренко І.С., Пишинограєв І.О.</i> Оцінювання рівня соціальної динаміки та перспектив розвитку суспільства, заснованого на знаннях .....	20
<i>Данилов В.Я., Жиров О.Л., Бідюк П.І.</i> Оцінювання кредитних ризиків методами інтелектуального аналізу даних .....	33
<i>Дубиніна С.В., Бідюк П.І.</i> Застосування методів інтелектуального аналізу даних до розв'язання задач актуарного моделювання та оцінювання фінансових ризиків .....	49
<i>Козуля Т.В., Білова М.О.</i> Інформаційно-методична основа визначення оцінки екологічності складних природно-техногенних об'єктів .....	65
<i>Zavertanuy V., Makarenko A.</i> Genotype dynamic for agent neuroevolution in artificial life model .....	75
<i>Зак Ю.А.</i> Fuzzy-регрессионные модели в условиях наличия в статистической выборке нечисловой информации .....	88
<i>Громов В.А.</i> Алгоритм построения бифуркационной картины нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана .....	97
<i>Гарт Л.Л.</i> Проекционно-итерационная реализация явных методов вариационного типа для решения некорректных операторных уравнений .....	114
<i>Shadura O., Petrenko A., Svistunov S.</i> Multivariate convergence-targeted operator for the genetic algorithm .....	126
Реферати .....	141
Відомості про авторів .....	148

**ЗМІСТ № 2**

<i>Данилов В.Я., Зінченко А.Ю., Данилов В.Я.</i> Системний підхід до розв'язання прямих і обернених задач в системах з хаосом .....	7
<i>Писарчук О.О., Гуменюк М.О., Тимчук С.В.</i> Математична модель ситуаційного синтезу автоматизованої системи збирання і оброблення інформації від технічних засобів моніторингу .....	19
<i>Романенко В.Д., Милявський Ю.Л.</i> Автоматизация управления импульсными процессами в когнитивных картах с подавлением ограниченных возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов .....	29
<i>Гаращенко Ф.Г., Кобзар А.Ю.</i> Технологія визначення ключових точок на основі стабільних меж об'єктів .....	40
<i>Шубенкова І.А., Петрова С.К., Бідюк П.І.</i> Системний підхід до моделювання та прогнозування на основі регресійних моделей і фільтра Калмана .....	52
<i>Matsuki Y., Bidiuk P.I.</i> Curvature coordinates to describe the explosion of Chernobyl's reactor core in april 1986, using the tensor equations .....	62
<i>Козуля Т.В., Смельянова Д.І.</i> Інформаційно-алгоритмічна підтримка комплексної оцінки екологічності системних об'єктів .....	68
<i>Махорт А.П.</i> Про динаміку відкритої економічної системи за наявності монополістів і фінансових зобов'язань .....	77
<i>Зайченко Ю.П., Гамидов Галиб И.</i> Каскадные нейро- нечеткие сети в задачах прогнозирования на рынках ценных бумаг .....	92
<i>Ясинський В.К., Юрченко І.В.</i> Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень .....	103
<i>Мікулін В.В.</i> Методика вибору математичної моделі екологічного процесу .....	115
<i>Осауленко В.М.</i> Двовимірна модель навчання в спайкових нейронних мережах з гомеостазом та навчанням з підкріпленням .....	130
Реферати .....	141
Відомості про авторів .....	148

### ЗМІСТ № 3

<i>Petrenko A., Kyslyi R., Pysmennyi I.</i> Blockchain as a service for medical records .....	7
<i>Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Юнькова О.О.</i> Про двокритеріальну оптимізацію портфеля акцій .....	12
<i>Льїн М.І., Новіков О.М.</i> Ідентифікація інтенсивності джерел забруднення атмосфери на базі гібридних обчислювальних систем .....	21
<i>Петренко О.О.</i> Особливості реалізації сервіс-орієнтованих додатків у хмарі .....	29
<i>Зак Ю.А.</i> Оценка компании на основе дисконтированных финансовых потоков и ее остаточной стоимости в условиях нечетких данных .....	43
<i>Мамедов Дж.Ф., Алиева А.Г.</i> Создание корпоративной сети для компоновочной схемы технологического парка высшего учебного заведения .....	57
<i>Козуля Т.В., Шаронова Н.В., Козуля М.М.</i> Формування знання-орієнтованого інформаційного забезпечення досліджень складних систем .....	63
<i>Горбачук В.М., Макаренко О.С.</i> Особливості прийняття рішень людиною для розв'язання складних міждисциплінарних проблем .....	73
<i>Вельбицкий И.В.</i> Интеллектуальная визуальная 3D+ полиглот-концепция программирования без языков программирования .....	88
<i>Стефанидин Д.В., Стефанишина-Гаврилюк Ю.Д.</i> Оптимізація структури інвестиційного портфеля у природокористуванні на підставі попарного порівняння альтернатив з урахуванням ризику невикористаних можливостей .....	107
<i>Кирилюк В.С., Левчук О.И., Гавриленко Е.В.</i> Математическое моделирование и анализ напряженного состояния в ортотропной пьезоэлектрической среде с круговой трещиной .....	117
<i>Nikolaiev S.</i> Metric and algorithm for similarity between two temporal event sequences calculation .....	127
Реферати .....	136
Відомості про авторів .....	145

### ЗМІСТ № 4

<i>Стефанишин Д.В.</i> Урахування ризику невикористаних можливостей під час обґрунтування оптимального сценарію введення нових агрегатів на гідроаккумуляторних електростанціях в Україні .....	7
<i>Vedmedenko O.V., Nikolaiev S.S., Tymoshenko Y.A.</i> 3D-Model reconstruction with use of monocular RGB camera .....	20
<i>Меняйленко О.С., Захожай О.І., Бідюк П.І.</i> Підвищення достовірності перевірки унікальності текстів з використанням комбінованих систем розпізнавання образів .....	29
<i>Попович Б.М.</i> Прогнозирование нелинейных нестационарных процессов в экономике и финансах .....	38
<i>Наконечный О.Г., Зінко П.М., Шевчук Ю.М.</i> Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації за невизначеностей .....	54
<i>Зайченко Е.Ю., Зайченко Ю.П., Ови Нафас Агаи аг Гамиш.</i> Нахождение максимального взвешенного потока в компьютерных сетях нового поколения .....	66
<i>Пичугина О.С.</i> Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком .....	74
<i>Коряшкина Л.С., Череватенко А.П., Коряшкина Е.О.</i> Интеграция ГИС-технологий и методов решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств .....	97
<i>Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т.</i> Адаптивна апроксимація сигналів з використанням методів псевдообернення .....	109
<i>Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л.</i> Приглушення обмежених збурень імпульсних процесів у когнітивних картах за допомогою теорії $H_\infty$ за неповних вимірювань координат вершин .....	119
<i>Моравецька К.В.</i> Конструкція поверхневих мір на поверхнях, укладених у ріманові багатовиди з рівномірною структурою .....	130
Реферати .....	139
Відомості про авторів .....	146
Зміст журналу «Системні дослідження та інформаційні технології» за 2017 р. ....	148
Автори статей за 2017 р. ....	150

## АВТОРИ СТАТЕЙ ЗА 2017 р.

Алієва Арзу Габіл гизи, № 3  
Бідюк Петро Іванович, № 1, 2, 4  
Білова Марія Олексіївна, № 1  
Ведмеденко Олег Вячеславович, № 4  
Вельбицький Ігор В'ячеславович, № 3  
Гавриленко Олена Валеріївна, № 3  
Гамідов Галіб І., № 2  
Гаращенко Федір Георгійович, № 2, 3, 4  
Гарт Людмила Лаврентіївна, № 1  
Горбачук Василь Михайлович, № 3  
Громов Василь Олександрович, № 1  
Гуменюк Максим Олексійович, № 2  
Данилов Валерій Якович, № 1, 2  
Данілов Володимир Якович, № 2  
Дубініна Світлана Віталіївна, № 1  
Ємельянова Дар'я Ігорівна, № 2  
Жиров Олександр Леонідович, № 1  
Завертаний Валентин Вікторович, № 1  
Зайченко Олена Юріївна, № 4  
Зайченко Юрій Петрович, № 2, 4  
Зак Юрій Олександрович, № 1, 3  
Захожай Олег Ігорович, № 4  
Зінченко Артем Юрійович, № 2  
Зінько Петро Миколайович, № 4  
Ільїн Микола Іванович, № 3  
Кирилук Віталій Семенович, № 3  
Кислий Роман Володимирович, № 3  
Кобзар Андрій Юрійович, № 2  
Козуля Марія Михайлівна, № 3  
Козуля Тетяна Володимирівна, № 1, 2, 3  
Коряшкіна Катерина Олегівна, № 4  
Коряшкіна Лариса Сергіївна, № 4  
Кулян Віктор Романович, № 3  
Лазаренко Ірина Сергіївна, № 1  
Левчук Ольга Іванівна, № 3  
Макаренко Олександр Сергійович, № 1, 3  
Мамедов Джаваншир Фірудін огли, № 3  
Матвієнко Володимир Тихонович, № 4  
Махорт Андрій Пилипович, № 2  
Мацукі Йошію, № 2  
Меняйленко Олександр Сергійович, № 4  
Мікулін Віктор Вікторович, № 2  
Мілявський Юрій Леонідович, № 2, 4  
Моравецька Катерина Віталіївна, № 4  
Наконечний Олександр Григорович, № 4  
Ніколаєв Сергій Сергійович, № 3, 4  
Новіков Олексій Миколайович, № 3  
Ові Нафас Агаї аг Гаміш, № 4  
Осауленко В'ячеслав Миколайович, № 2  
Панкратова Наталія Дмитрівна, № 1  
Петренко Анатолій Іванович, № 1, 3  
Петренко Олексій Олексійович, № 3  
Петрова Світлана Костянтинівна, № 2  
Писарчук Олексій Олександрович, № 2  
Письменний Ігор Олександрович, № 3  
Пишнограєв Іван Олександрович, № 1  
Пічугіна Оксана Сергіївна, № 4  
Попович Богдан Миколайович, № 4  
Романенко Віктор Демидович, № 2, 4  
Свістунов Сергій Якович, № 1  
Сльота Максим Русланович, № 1  
Стефанишин Дмитро Володимирович, № 3, 4  
Стефанишина-Гаврилук Юлія Дмитрівна, № 3  
Тимошенко Юрій Олександрович, № 4  
Тимчук Сергій Віталійович, № 2  
Череватенко Антоніна Павлівна, № 4  
Шадуря Оксана Віталіївна, № 1  
Шаронова Наталія Валеріївна, № 3  
Шевчук Юлія Михайлівна, № 4  
Шубенкова Ірина Анатоліївна, № 2  
Юнькова Олена Олександрівна, № 3  
Юрченко Ігор Валерійович, № 2  
Ясинський Володимир Кирилович, № 2