

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 1

2018

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, чл.-кор. НАН України

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Т.Л. СААТІ, проф., США

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal.iasa@gmail.com

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу**

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних та соціальних системах**

• **Теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримання прийняття рішень**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 1

2018

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Correspondent
member of NASU

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU
A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU
E.A. FEINBERG, Prof., USA
A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,
Russia
P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine
V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU
A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine
T.L. SAATY, Prof., USA
L. SAKALAUŠKAS, Prof., Lithuania
A.M. SALEM, Prof., Egypt
I.V. SERGIENKO, Academician of NASU
H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania
G.W. WEBER, Prof., Turkey
Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal.iasa@gmail.com
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

- **Theoretical and applied problems and methods of system analysis**
- **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**
- **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**
- **Theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support**
- **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНТІ РАН, РІНЦ.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**
Редактор **Р.М. Шульженко**
Молодший редактор **Л.О. Тарин**
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 20.03.2018. Формат 70x108/16.
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 13804–2778 ПР від 17.03.2008 р.

Видавництво «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
Тел. (044) 204-81-78
Наклад 120 пр. Зам. № 16-163

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

«SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES».

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

1 • 2018

ЗМІСТ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ	
<i>Недашківська Н.І.</i> Системний підхід до підтримання прийняття рішень на основі ієрархічних та мережових моделей	7
ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ	
<i>Кисленко Ю.І., Хіміч А.В.</i> Структурно-функціональний рівень організації лінгвістичного процесора	19
<i>Махорт А.П.</i> Алгоритм визначення станів рівноваги за умови залежності структури споживання від обсягів випуску	36
<i>Лавренюк М.С., Новіков О.М.</i> Огляд методів машинного навчання для класифікації великих обсягів супутникових даних	52
<i>Chapaliuk V.V., Zaychenko Yu.P.</i> Medical image segmentation methods overview	72
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Кангун Г.І., Бідюк П.І., Жиров О.Л.</i> Моделювання військових конфліктів з використанням байєсових мереж	82
<i>Смирнов С.А., Терещенко І.М.</i> Моделювання внутрішньої валюти в рефлексивних іграх з багатокритеріальними функціями виграшу	93
ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	
<i>Місько В.М.</i> Прискорення методу квадратичного решета на основі використання умовно B -гладких чисел	99
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	
<i>Matsuki Yoshio, Bidiuk P.I.</i> Empirical analysis of moon's gravitational wave and earth's global warming	107
<i>Назарага І.М.</i> Прогнозування макроекономічних показників на основі матричної множинної регресії: приклади	119
<i>Потапенко А.Ю.</i> Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями	132
Реферати	141
Відомості про авторів	148

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

1 • 2018

CONTENTS

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND METHODS OF SYSTEM ANALYSIS	
<i>Nedashkovskaya N.I.</i> A system approach to decision support on basis of hierarchical and network models	7
PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Kyslenko Yu.I., Khimich A.V.</i> Structural and functional level of the organization of the linguistic processor	19
<i>Makhort A.Ph.</i> The algorithm for determining the states of equilibrium subject to the dependence of the consumption structure on the volumes of production	36
<i>Lavreniuk M.S., Novikov O.M.</i> Review of machine learning methods for Big satellite Data classification	52
<i>Chapaliuk B.V., Zaychenko Yu.P.</i> Medical image segmentation methods overview ...	72
DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS	
<i>Kanhun H.I., Bidyuk P.I., Jirov O.L.</i> Military conflicts modeling by making use of Bayesian networks	82
<i>Smirnov S.A., Tereshchenko I.M.</i> Modeling of inner currency in reflexive games with multi-criteria payoff functions	93
THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING SUPPORT	
<i>Misko V.M.</i> Acceleration of the quadratic sieve method based on the additional search of B -smooth numbers	99
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Matsuki Yoshio, Bidyuk P.I.</i> Empirical analysis of moon's gravitational wave and earth's global warming	107
<i>Nazaraha I.M.</i> Predictions of macroeconomic indicators based on matrix multiple regression: examples	119
<i>Potapenko O.Yu.</i> Boundary value problem, associated with diffeomorphism between Riemannian manifolds	132
References	141
Information about the authors	148

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ІЄРАРХІЧНИХ ТА МЕРЕЖЕВИХ МОДЕЛЕЙ

Н.І. НЕДАШКІВСЬКА

Анотація. Запропоновано методологію та системний підхід до підтримання прийняття рішень (ППР) на основі ієрархічних та мережових моделей, який включає методи оцінювання і підвищення узгодженості матриць парних порівнянь (МПП) загального виду, розрахунку нечітких локальних ваг елементів моделі на основі нечітких МПП, обчислення інтервалів довіри для локальних ваг, знаходження агрегованих ваг та функцій довіри до елементів моделі, оцінювання чутливості результатів, а також засоби аналізу ефективності методів, систему моделювання експертного оцінювання та інструментарій у вигляді системи ППР. Пропонована методологія дозволяє підвищувати достовірність розв'язків практичних слабо структурованих задач ППР за рахунок використання більш ефективних методів на кожному з етапів розв'язання задачі. Достовірність результатів застосування методології під час розв'язання практичної задачі ППР може бути оцінена засобами аналізу чутливості на основі індексів стійкості знайдених локальних та глобального ранжувань альтернатив рішень.

Ключові слова: експертні оцінки, нечітка матриця парних порівнянь, неузгодженість, довірчі інтервали, чутливість, стійкість ранжування, система підтримання прийняття рішень, достовірність у методі аналізу ієрархій.

ВСТУП

Роботу присвячено удосконаленню методів аналізу ієрархій та мереж [1, 2], які використовуються для розв'язання слабо структурованих і неструктурованих задач вибору, багатокритеріального та багатоцільового оцінювання альтернатив рішень, розподілу ресурсів, пошуку суттєвих для прийняття рішень факторів, а також оцінювання ризиків та сценаріїв розвитку, передбачення, планування тощо. Методи аналізу ієрархій та мереж застосовуються в багатьох прикладних галузях, зокрема в медицині й охороні здоров'я [3], для оцінювання ефективності функціонування підприємств [4], аналізу проєктів [5], планування випуску нової продукції, у фінансах та банківській справі.

Натепер існують модифікації та узагальнення методів аналізу ієрархій і мереж, спрямовані на подолання обмежень та розширення галузі застосу-

вання таких методів [6–9]. Метод аналізу ієрархій або його складові реалізовано в сучасних комерційних системах підтримання прийняття рішень (СППР) Super Decisions [10], Decision Lens [11], Make It Rational [12] і Logical Decisions [13]. Проте деякі питання залишилися невирішеними. Так, недостатніми виявились: обґрунтованість рівня узгодженості чітких та нечітких експертних оцінок; вивчення та реалізованість у СППР питань щодо оцінювання і підвищення узгодженості нечітких експертних оцінок без участі експерта; формалізованість та реалізованість у СППР методів знаходження локальних і агрегованих ваг на основі нечітких експертних оцінок; урахування в розрахунку локальних ваг невизначеності, що спричинена шкалою та особистими якостями експерта; аналіз чутливості та стійкості результуючого ранжування до змін в оцінках експертів.

Мета роботи — розроблення системного підходу та побудова на його основі СППР, які дозволять підвищити достовірність розв’язків задач підтримання прийняття рішень (ППР) у слабко структурованих і неструктурованих складних системах на основі ієрархічних та мережевих моделей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано мережеву модель задачі ППР у вигляді напрямленого графу $S = \{V, L, E, PCM\}$, де V — множина вершин графу, $V = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$, $C_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$, $i = 1, \dots, N$ — кластери з елементами задачі ППР, такими як критерії, альтернативи рішень, цілі, політики акторів, сценарії та ін.; L — множина напрямлених ребер графу; E — множина оцінок елементів графу, наданих експертом у шкалі, особисті якості експерта: реаліст, песиміст/оптиміст; PCM — множина обернено симетричних матриць парних порівнянь (ММП) елементів графу.

Необхідно:

- оцінити і підвищити узгодженість МПП загального виду, знайти найбільш неузгоджені експертні оцінки, підвищити узгодженість МПП без участі експерта;
- розрахувати локальні ваги елементів моделі на основі чітких та нечітких МПП;
- розрахувати інтервали довіри для локальних ваг елементів моделі;
- розрахувати агреговані ваги та комбіновані довіри до елементів моделі;
- оцінити чутливість локального та глобального ранжувань елементів моделі.

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для розв’язання поставленої задачі розроблено методологію ППР. Вона охоплює всі етапи оцінювання ієрархічних та мережевих моделей ППР від отримання і аналізу вхідної експертної інформації у вигляді обернено симетричних МПП елементів моделі до розрахунку локальних і глобальних ваг елементів моделі та аналізу чутливості отриманих результатів. У межах запропонованої методології розроблено системний підхід до ППР на основі ієрархічних та мережевих моделей (рис. 1).



Рис. 1. Структурна схема системного підходу до ППР на основі ієрархічних та мережевих моделей

Метод оцінювання і підвищення узгодженості експертних оцінок.

На першому етапі аналізується якість вхідної експертної інформації для елементів мережевої моделі, заданої у вигляді обернено симетричних МПП. У роботі пропонується метод оцінювання і підвищення узгодженості МПП загального виду. Нехай X — відкритий інтервал R ; $G = (X, \otimes, \leq)$ — абелева лінійно впорядкована група; e — одиниця у групі G ; $x^{(-1)}$ — елемент, симетричний до $x \in X$ відносно операції \otimes , $D = \{(d_{ij}) \mid i, j = 1, \dots, n\}$ — \otimes -обернено симетрична МПП над групою G . Особливості пропонованого методу оцінювання і підвищення узгодженості \otimes -обернено симетричної МПП D полягають у дослідженні властивості \otimes -слабкої узгодженості та використанні більш ефективних методів пошуку найбільш неузгодженого елемента цієї матриці. Відповідно до методу спочатку перевіряється наявність циклів у МПП. Якщо МПП \otimes -слабко неузгоджена і має цикл, пропонується шукати її найбільш неузгоджений елемент, повернути його експерту для перегляду, або виконати його коригування без участі експерта. Коригування без участі експерта полягає у пошуку нового значення шкали для найбільш неузгодженого елемента $d_{i^*j^*}$, яке забезпечує мінімальне значення показника неузгодженості всієї матриці:

$$d_{i^*j^*} := x^*, d_{j^*i^*} := (x^*)^{-1}, x^* \in Scale;$$

$$x^* = \underset{x \in Scale}{\operatorname{argmin}} \operatorname{ConsInd}(D^{cor}, x),$$

де $\operatorname{ConsInd}(D^{cor}, x)$ — індекс неузгодженості для скоригованої МПП D^{cor} , у якій $d_{ij}^{cor} = d_{ij} \forall i, j$, крім $d_{i^*j^*}^{cor} = x$, $d_{j^*i^*}^{cor} = (x)^{-1}$, $Scale = \{1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 8, 9\}$.

Після коригування МПП повертається на етап перевірки наявності циклів. Якщо МПП \otimes -слабко узгоджена і не має циклів, розраховується значення показника узгодженості МПП і перевіряється критерій \otimes -допустимої неузгодженості. Задоволення цього критерію свідчить про прийнятність якості МПП. Інакше здійснюється перехід на етап коригування, і елементи \otimes -слабко узгодженої МПП ітераційно перераховуються до досягнення матрицею критерію \otimes -допустимої неузгодженості. Далі оцінюється ефективність коригування на основі значень норм відхилень скоригованої МПП від початково заданої експертом МПП.

Метод оцінювання і підвищення узгодженості, що пропонується, може застосовуватися до оцінювання і підвищення узгодженості МПП різних видів залежно від конкретної групи G , зокрема мультиплікативних, адитивних та інших МПП. В окремому випадку мультиплікативної групи G аналітично доведено дві теореми, які показують, що з використанням пропонованих методів коригування рівень неузгодженості скоригованої МПП не перевищує рівня неузгодженості МПП перед коригуванням [14]. Застосування методу оцінювання і підвищення узгодженості дозволяє для всіх елементів мережевої моделі отримати МПП прийнятної якості, які можна використовувати на наступному етапі для знаходження локальних ваг елементів моделі.

Методи розрахунку локальних ваг елементів моделі. В основу методу розрахунку довірчих інтервалів для локальних ваг покладено твердження, що оцінки експерта лише деякою мірою відображають реальні співвідношення між вагами елементів моделі і містять невизначеність незалежно від рівня їх узгодженості [15]. Припускається, що невизначеність оцінок експерта зумовлюється шкалою, у якій експерт виконує оцінювання, і такими особистими його якостями, як реалізм, песимізм та оптимізм. Реалістом називаємо експерта, який надає найближчі до реальних ваг оцінки в шкалі. Оптимістом та песимістом називаємо експертів, оцінки яких незначно (на одну поділку шкали) завищені або занижені порівняно з реальними значеннями. Метод використовує апарат теорії довіри (свідчень) Демпстера–Шейфера і результати комп'ютерного моделювання суджень експерта. Показник невизначеності m_{Θ} оцінок експерта — це значення базової довіри до гіпотези, що всі альтернативи нерозрізнені або мають однакову значущість для експерта.

Відповідно до методу розрахунку довірчих інтервалів для локальних ваг у випадку мультиплікативної МПП $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ спочатку треба розрахувати ненормовані локальні ваги $v_i > 0$ на основі D одним з відомих методів: головного власного вектора, геометричної середньої або іншим і розрахувати показник узгодженості CI МПП D . Після цього задати значення параметра $k_1 \in (0, 1)$ залежно від шкали та особистих якостей експерта, таких як реалізм, песимізм або оптимізм; параметра $k_2 > 0$ — вагового коефіцієнта врахування рівня неузгодженості МПП. Довірчий інтервал для локальної ваги альтернативи a_i дорівнює $[Bel_i, Pls_i] = [m_i, m_i + m_{\Theta}]$, де

$$m_i = v_i / \left((1 + k_1(1 + k_2 CI)) \sum_{j=1}^n v_j \right) — \text{значення повної довіри до альтернативи}$$

a_i , яке в цьому випадку збігається зі значенням базової довіри до a_i , $i = 1, \dots, n$; $m_{\ominus} = k_1(1 + k_2CI)/(1 + k_1(1 + k_2CI))$ — значення нормованого показника рівня невизначеності оцінок експерта.

Комп'ютерне моделювання дозволило за деяких умов отримати кількісні оцінки невизначеності суджень експерта — реаліста, песиміста і оптиміста — в задачі обчислення ваг методом парних порівнянь у шкалі Сааті. У результаті на основі розв'язання великої кількості тестових задач різної розмірності побудовано таблиці оцінок параметрів методу для мультиплікативних МПП залежно від кількості порівнюваних елементів [16].

Доведено, що локальна вага альтернативи a_i , розрахована відомим методом аналізу ієрархій [1], міститься у побудованому довірчому інтервалі $[Bel_i, Pls_i] = [m_i, m_i + m_{\ominus}]$, $i = 1, \dots, n$. Результати моделювання показують, що пропонувані довірчі інтервали більш достовірно відображають реальні ваги порівняно з точковими вагами, що отримуються відомим методом аналізу ієрархій, а також нечіткими вагами за методом нечіткої геометричної середньої.

Використання описаного методу знаходження інтервалів довіри до локальних ваг потребує знання вказаних вище якостей експерта. Під час розв'язання практичної задачі пропонується оцінити ці якості експерта, вибрати профіль експерта з множини варіантів на основі ієрархічної моделі, зображеної на рис. 2. До апріорних або евристичних методів оцінювання якості експерта належать методи самооцінювання та взаємного оцінювання (кожний експерт дає оцінку іншим експертам). Апостеріорний метод ґрунтується на використанні інформації про судження експерта в експертизах, проведених з його участю. Розраховується відношення кількості випадків виданих експертом рекомендацій, прийнятність яких підтверджена практикою, до загальної кількості випадків участі експерта у наданні рекомендацій. Вибираючи профіль експерта, також можна аналізувати результати розв'язаних ним тестових задач, відповіді до яких відомі. Наприклад, розглядаються тестові задачі оцінювання експертом площ геометричних фігур, енергетичної цінності продуктів харчування та ін.[17].

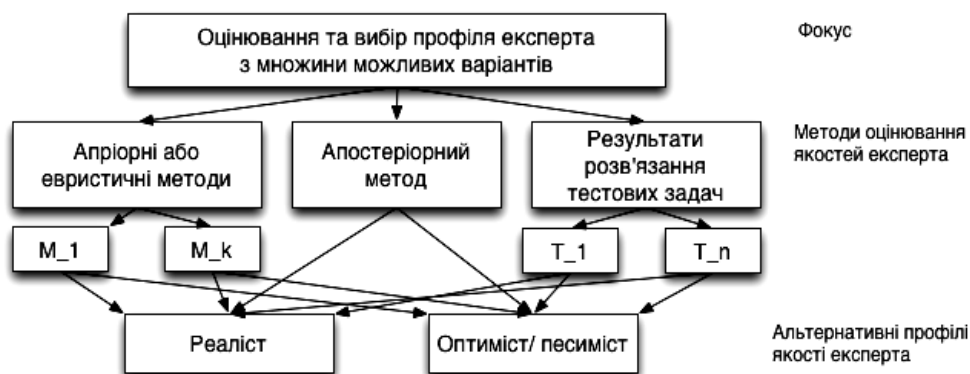


Рис. 2. Базова ієрархічна модель оцінювання якостей експерта

Інший метод полягає у знаходженні нечітких локальних ваг на основі нечітких МПП (НМПП). Він містить етапи оцінювання і підвищення узгодженості НМПП та враховує властивості слабкого і сильного збереження

порядку на множині знайдених нечітких ваг. Пропонований метод, на відміну від існуючих, дозволяє визначити слабку узгодженість НМПП, оцінити допустимість неузгодженості НМПП для обчислення локальних ваг, а також, на відміну від відомих, знаходити найбільш неузгоджені елементи НМПП, використовуючи апарат, розроблений для чітких МПП. Під час використання пропонованого методу не виникає суперечностей, пов'язаних з результатами за чіткою і фазифікованою МПП, на відміну від відомих, які використовують розширені бінарні арифметичні операції. Метод можна застосовувати для оцінювання НМПП із функціями належності будь-якого виду (трапецієподібними, гаусівськими), а також дискретними функціями належності. Властивості слабого і сильного збереження порядку дозволяють в основному виявити цикли і найбільш неузгоджені елементи в слабо неузгоджених НМПП. Коригування цих елементів виключає порушення порядку у результуючих нечітких вагах і тим самим підвищує достовірність отриманих результатів.

Методи оцінювання чутливості результатів. Після розрахунку локальних ваг елементів моделі оцінюється чутливість ранжувань, побудованих на основі цих ваг, до збурень в елементах МПП. Для фіксованого елемента МПП (оцінки експерта) пропонується інтервал стійкості як перетин таких двох: інтервалу, в межах якого може змінюватися цей елемент так, щоб результуюче ранжування залишалось незмінним, та інтервалу, в межах якого може змінюватися цей елемент так, щоб неузгодженість усієї МПП (множини оцінок експерта) залишалася допустимою; вводиться індекс стійкості елемента МПП [18].

Метод розрахунку інтервалів та індексів стійкості для збереження узгодженості та найкращої альтернативи в ранжуванні альтернатив $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$, коли для розрахунку ваг на основі мультиплікативної МПП використовується метод геометричної середньої, складається з декількох етапів. На першому етапі розраховуються інтервали стійкості $RSInt_{1j} = (\underline{d}_{1j}, \overline{d}_{1j}]$ для оцінки експерта d_{1j} , $j \neq 1$, і $RSInt_{ij} = (\underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij})$ для оцінки експерта d_{ij} , $i \neq j \neq 1$, що зберігають найкращу альтернативу у вказаному ранжуванні, де $\underline{d}_{1j} = \max(L_j^1, L_j^2)$, $\overline{d}_{1j} = 9$, $L_j^1 = d_{1j} \left(\frac{v_j}{v_1} \right)^{n/2}$,

$$L_j^2 = \max_{k \neq j \neq 1} \left(d_{1j} \left(\frac{v_k}{v_1} \right)^n \right), \underline{d}_{ij} = d_{ij} \left(\frac{v_j}{v_1} \right)^n, \overline{d}_{ij} = d_{ij} \left(\frac{v_1}{v_i} \right)^n.$$

Після цього розраховуються інтервали стійкості $CSInt_{ij} = (\underline{\delta}_{ij}(\Delta), \overline{\delta}_{ij}(\Delta)) \forall i, j$, що зберігають узгодженість МПП [19], Визначаються інтервали стійкості $SInt_{ij} = RSInt_{ij} \cap CSInt_{ij} = (\underline{s}_{ij}, \overline{s}_{ij})$ та індекси стійкості $I_{ij} = \min((\underline{s}_{ij})^{-1}, \overline{s}_{ij}) \forall i, j$.

Метод розрахунку інтервалів та індексів стійкості для збереження всього ранжування альтернатив аналогічний до попереднього, за винятком першого етапу, на якому розраховуються інтервали стійкості $(\underline{d}_{kj}, \overline{d}_{kj})$ для оцінок експерта d_{kj} , $k < j$, за яких ранжування альтернатив $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$

залишається незмінним [18]. Результуючі індекси стійкості дозволяють знайти найбільш чутливі до зміни ранжування та зміни рівня узгодженості експертні оцінки. Комплексний метод оцінювання чутливості агрегованого розв'язку задачі ППР на основі ієрархічної моделі удосконалено шляхом урахування результатів оцінювання чутливості локального ранжування елементів цієї моделі [20].

Розрахунок агрегованих ваг елементів ієрархічної моделі ППР на основі множини взаємозалежних критеріїв рішень. Для цього розроблено модифікацію гібридного методу, запропонованого у праці [21]. Вхідними даними для оцінювання елементів моделі є чіткі та нечіткі експертні оцінки парних порівнянь. Гібридний метод включає методи теорії прийняття рішень, нечітких множин, математичного програмування і статистики, які адаптуються на різних етапах багатокритеріального прийняття рішень залежно від задачі та якості вхідних даних. Модифікація полягає у використанні розроблених більш ефективних методів оцінювання і підвищення узгодженості чітких та нечітких оцінок експерта, а також методу розрахунку нечітких локальних ваг на основі нечітких МПП.

Агреговані за множиною критеріїв функції довіри до локальних ваг альтернатив рішень розраховано за відомими правилами комбінування функцій довіри: Демпстера, Ягера, Жанга, Дюбуа і Прада, правилами дисконтованого та зваженого середнього значення. Проведено оцінювання чутливості результатів, отриманих з використанням вказаних правил комбінування, до змін у множині альтернатив рішень [22]. Досліджено різні види реверсу рангів у випадку додавання або вилучення неоптимальної альтернативи, яка домінується однією або декількома існуючими альтернативами. Визначено дві умови зміни ранжування (реверсу рангів): у першій умові розглядаються зміни ранжувань на основі значень функцій агрегованої повної довіри до груп альтернатив; у другій умові досліджується зміна ранжування між групами альтернатив, спричинена зміною їх довірчих інтервалів.

Аналіз ефективності методів та система моделювання експертного оцінювання. Побудовано систему моделювання експертного оцінювання та використано її для аналізу ефективності пропонуваніх і відомих методів оцінювання та підвищення узгодженості МПП без участі експерта, розрахунку інтервалів довіри до локальних ваг, розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП, а також методів парних порівнянь типу трикутник і лінія.

У підсистемі оцінювання ефективності методу пошуку найбільш неузгодженого елемента МПП [23] спочатку генеруються тестові множини МПП D^* у шкалі Сааті з властивостями слабкої узгодженості і допустимої неузгодженості за показником CR . Далі в кожну МПП D^* уводиться збурення так, щоб результат збурення — МПП D^{dstrb} — була більш неузгоджена і мала цикл. Елемент d_{ij} — найбільш неузгоджений (ННЕ) в D^{dstrb} за побудовою. Із використанням методу, шукається ННЕ $d_{i^*j^*}$ у D^{dstrb} . Після цього МПП D^{dstrb} коригується, змінюючи елемент $d_{i^*j^*}$, знайдений на попередньому кроці, та $d_{j^*i^*}$. Оцінюється ефективність методу, що використовувався на етапі знаходження ННЕ.

Метод називається ефективним, якщо вектор ваг w^{cor} на основі скоригованої МПП D^{dstrb} є ближчим до вектора ваг w^* ніж вектор ваг w^{dstrb} на основі початкової МПП D^{dstrb} до коригування:

$$dist(w^{cor}, w^*) < dist(w^{dstrb}, w^*),$$

де w^* — вектор ваг, близький до вектора реальних ваг, генерується на етапі ініціалізації; $dist$ — функція відстані. Наприклад, функція кутової відстані

може використовуватися для аналізу МПП: $dist(x, y) = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} - \frac{y}{\|y\|_2} \right\|_2$.

Оцінки ефективності [23] методів пошуку ННЕ МПП свідчать про те, що пропонувані методи *Transitiv* і *MOutflow* приводять до більш достовірних результатів порівняно з іншими відомими методами *CI*, *Corr* [24] і *Outflow* [25].

Результати аналізу показують, що використання відомих показників узгодженості *CR* [1], *HCR* [26], *CI^{tr}* [27] і k_y [28], а також методів оцінювання узгодженості [1, 28] має декілька обмежень. Зокрема, вказані показники та методи оцінювання узгодженості можуть привести до різних висновків щодо допустимої неузгодженості МПП. Установлено, що допустимість неузгодженості МПП на основі відомих методів не гарантує збіжності ранжувань альтернатив, отриманих різними методами парних порівнянь. Тому ранжування може залишатися невизначеним.

Істотне обмеження відомих методів оцінювання узгодженості [1, 28] полягає в тому, що вони не ідентифікують порушення порядкової транзитивності або цикл у МПП. Наявність циклу в МПП означає, що не існує ранжування елементів, яке задовольняє всі елементи цієї матриці. Проте для ряду тестових задач отримано, що методи [1, 28] визнають МПП з циклом допустимо неузгодженими і придатними для надійного розрахунку локальних ваг на їх основі. Пропонуваний метод оцінювання і підвищення узгодженості виявляє та коригує цикл у МПП і тому більш ефективний порівняно з відомими [1, 28].

Ефективність пропонуваних методів підвищення узгодженості МПП залежить від відсотка помилкових елементів МПП, які є значними збуреннями реальних значень [29]. Цей відсоток можна оцінити, використовуючи розроблений метод *Transitiv*.

Результати моделювання показують, що в абсолютній більшості тестових задач ранжування альтернатив, отримані різними методами на основі МПП, неузгодженість яких оцінена і скоригована пропонуваним методом, збігаються. Це підтверджує достовірність ранжувань, отриманих на основі МПП.

Система підтримання прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей. На базі розроблених моделей і методів побудовано інструментарій у вигляді СППР (рис. 3, 4).

Функціональні можливості системи включають: задання моделей різноманітної структури; редагування моделі в зручному графічному режимі; використання як статистичних і експертних оцінок парних порівнянь вхідних даних та безпосередньо у вигляді числових значень; введення даних як вручну, так і їх завантаження із зовнішніх джерел, використання шаблонів моделей; отримання результатів на основі чітких і нечітких оцінок експер-

тів, а також неповної множини експертних оцінок; визначення найбільш неузгоджених або суперечливих оцінок експертів, циклів у множині оцінок, їх коригування з участю і без участі експерта; використання різних методів обчислення локальних ваг елементів моделі; урахування факторів ризику в оцінюванні альтернатив рішень; оброблення оцінок групи експертів з урахуванням їх компетентності; використання різних методів обчислення агрегованих ваг елементів моделі; оцінювання чутливості та стійкості отриманих результатів.

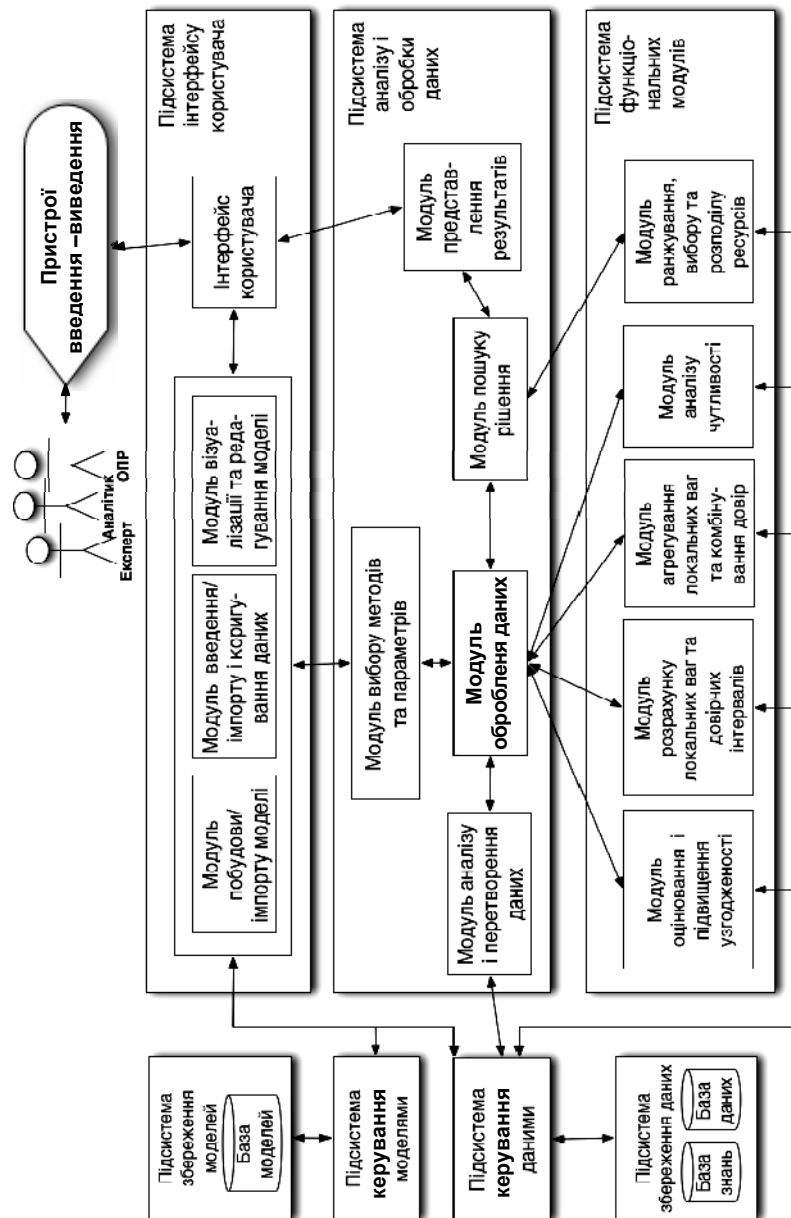


Рис. 3. Архітектура СПСР: ОПР — особа, яка приймає рішення

Підсистема інтерфейсу користувача містить декілька модулів уведення даних, дозволяє створити, зобразити, редагувати у графічному інтерфейсі користувача та імпортувати з файлу модель задачі. Доступні такі шаблони моделей: повна або неповна ієрархія, повна або неповна ієрархія з петлями

та мережева структура. У модулі введення даних для побудованої моделі вводяться статистичні дані — характеристики альтернатив рішень за кількісними критеріями/цілям, та якісні дані у вигляді експертних оцінок елементів моделі. Дані вводяться як у графічному інтерфейсі користувача, так і за допомогою імпорту з файлів.

У підсистемі аналізу і оброблення даних виконується розрахунок побудованої моделі відповідно до розробленої методології та системного підходу до ППР (рис. 1, 4). Для реалізації окремих етапів ППР застосовуються відповідні модулі, які входять до складу підсистеми функціональних модулів. Достатність обсягу введених даних для оброблення моделі та коректність цих даних перевіряються в модулі попереднього аналізу і трансформації, у якому відбувається також перетворення даних для використання окремими методами оброблення. Відокремлення підсистем керування даними та моделями від підсистем збереження даних і моделей дозволяє побудувати систему, незалежну від архітектури зберігання даних, та виконувати ефективний обмін даними між усіма елементами СППР [30].

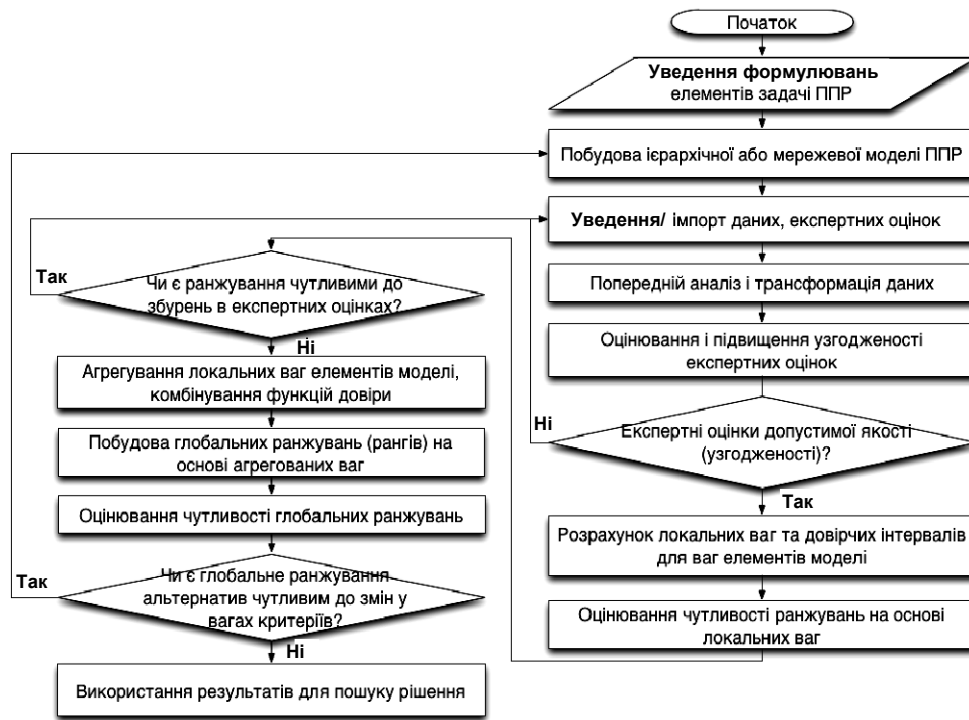


Рис. 4. Функціональна схема СППР

Підсистеми аналізу, оброблення даних та функціональних модулів СППР реалізовані в середовищі Python 3. Характеристики і переваги цього інструментарію: крос-платформеність, відносна простота використання, наявність великої кількості бібліотек з реалізованими математичними функціями роботи з матрицями та розв’язання задач оптимізації, сучасний рівень побудови інформаційної системи, програмне забезпечення з відкритим кодом (opensource). Для збереження моделей розроблено власний формат даних .ahr на основі відомого текстового формату обміну даними JavaScript Object Notation. Формат JSON вважається більш лаконічним порівняно з XML і більш придатними для серіалізації складних структур.

Побудований інструментарій використано для розв'язання декількох практичних задач на замовлення Міністерств і відомств України.

ВИСНОВОК

У роботі розроблено системний підхід, методологію ППР, а також систему підтримання прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей, які дають змогу підвищити достовірність розв'язків задач підтримання прийняття рішень у слабо структурованих і неструктурованих складних системах. Пропоновані системний підхід та методологія включають такі методи, розроблені автором: оцінювання і підвищення узгодженості експертних оцінок, розрахунок інтервалів довіри до локальних ваг та нечітких локальних ваг елементів моделі на основі нечітких експертних оцінок, знаходження агрегованих ваг та агрегованих функцій довіри до елементів моделі, а також метод комплексного аналізу чутливості отриманих результатів. Розроблено систему моделювання експертного оцінювання, за її допомогою отримано оцінки ефективності пропонованих та відомих методів. Побудований інструментарій у вигляді СППР може використовуватися для розв'язання практичних задач вибору, розподілу ресурсів, оцінювання ризиків, сценаріїв розвитку, передбачення, планування тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Т.Л. Саати. — 2-е изд. — М.: Книжн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 360 с.
2. Панкратова Н.Д. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: навч. посіб. / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська. — К: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2010. — 371 с.
3. Vidaletal L.-A. Applying AHP to select drugs to be produced by anticipation in a chemotherapy compounding unit / L.-A. Vidaletal // Expert Systems with Applications. — Vol. 37. — 2010. — P. 1528–1534.
4. Kumar A. Analyzing customer preference and measuring relative efficiency in telecom sector: A hybrid fuzzy AHP/DEA study / A. Kumar, R. Shankar, R.M. Debnath // Telematics and Informatics. — Vol. 32, Issue 3. — 2015. — P. 447–462.
5. Garbuzova-Schlifter M. AHP-based risk analysis of energy performance contracting projects in Russia / Maria Garbuzova-Schlifter, Reinhard Madlener // Energy Policy. — Vol. 97. — 2016. — P. 559–581.
6. Krejčí Jana. Fuzzy eigenvector method for obtaining normalized fuzzy weights from fuzzy pairwise comparison matrices / Jana Krejčí // Fuzzy Sets and Systems. — Vol. 315. — 2017. — P. 26–43.
7. Koczkodaj W.W. Pairwise comparisons simplified / W.W. Koczkodaj, J. Szybowski // Applied Mathematics and Computation. — Vol. 253. — 2015. — P. 387–394.
8. Bozóki S. An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players / Sándor Bozóki. // European Journal of Operational Research. — Vol. 248, Issue 1. — 2016. — P. 211–218.
9. Benítez J. Improving consistency in AHP decision-making processes / J. Benítez et al. // Applied Mathematics and Computation. — Vol. 219, Issue 5. — 2012. — P. 2432–2441.
10. Система підтримання прийняття рішень SuperDecisions. — Available at: <http://www.superdecisions.com>
11. Система підтримання прийняття рішень DecisionLens. — Available at: <http://www.decisionlens.com>
12. Система підтримання прийняття рішень MakeItRational. — Available at: <http://makeitrational.com/>, <http://www.transparentchoice.com/>

13. Система підтримання прийняття рішень LogicalDecisions. — Available at: <http://www.logicaldecisions.com/>
14. Недашківська Н.І. Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм / Н.І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — №4. — С. 67–79.
15. Nedashkovskaya N.I. Method for Evaluation of the Uncertainty of the Paired Comparisons Expert Judgements when Calculating the Decision Alternatives Weights / I. Nedashkovskaya // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, Issue 10. — P.69–82.
16. Недашківська Н.І. Построение доверительных интервалов для весов альтернатив решений на основе экспертных парных сравнений / Н.І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — №3. — С. 121–130.
17. Saaty Thomas L. On the invalidity of fuzzifying numerical judgments in the Analytic Hierarchy Process / Thomas L. Saaty, Liem T. Tran // Mathematical and Computer Modelling. — Vol. 46, Issues 7–8. — 2007. — P. 962–975.
18. Недашківська Н.І. Оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь / Н.І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — №4. — С. 14–22.
19. Aguarón J. Consistency stability intervals for a judgement in AHP decision support systems / Juan Aguarón, María Teresa Escobar, José María Moreno-Jiménez // European J. of Operational Research. — Vol. 145, Issue 2. — 2003. — P. 382–393.
20. Pankratova N. Sensitivity analysis of a decision-making problem using the Analytic Hierarchy Process / N. Pankratova, N. Nedashkovskaya // International Journal «Information Theories and Applications». — 2016. — Vol. 23, N 3. — P. 232–251.
21. Pankratova N.D. Hybrid Method of Multicriteria Evaluation of Decision Alternatives / N.D. Pankratova and N.I. Nedashkovskaya // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50 (5). — P. 701–711.
22. Pankratova N. Estimation of Sensitivity of the DS/AHP Method While Solving Foresight Problems with Incomplete Data / N. Pankratova, N. Nedashkovskaya // Intelligent Control and Automation. — 2013. — Vol. 4, N 1. — P. 80–86.
23. Nedashkovskaya N. Investigation of methods for improving consistency of a pairwise comparison matrix / N. Nedashkovskaya // Journal of the Operational Research Society. — Published online: 02 Feb 2018.
24. Lipovetsky S. Robust estimation of priorities in the AHP / S. Lipovetsky, W.M. Conklin // European Journal of Operational Research. — Vol. 137 (1). — 2002. — P. 110–122.
25. Siraj S. A heuristic method to rectify intransitive judgments in pairwise comparison matrices / S. Siraj, L. Mikhailov, J. Keane // European Journal of Operational Research. — Vol. 216 (2). — 2012. — P. 420–428.
26. Stein William E. The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process / William E. Stein, Philip J. Mizzi // European Journal of Operational Research. — Volume 177, Issue 1. — 2007. — P. 488–497.
27. Peláez J.I. A new measure of consistency for positive reciprocal matrices / J.I. Peláez, M.T. Lamata // Computer and Mathematics with Applications. — Vol. 46 (12). — 2003. — P. 1839–1845.
28. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект / В.Г. Тоценко. — К.: Наук. думка, 2002. — 381 с.
29. Pankratova N. Methods of evaluation and improvement of consistency of expert pairwise comparison judgements / N. Pankratova, N. Nedashkovskaya // International Journal «Information Theories and Applications». — 2015. — Vol. 22, N 3. — P.203–223.
30. Бідюк П.І. Проектування комп'ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень: навч. посіб. / П.І. Бідюк, Л.О. Коршевніюк. — К.: ННК «ІІСА» НТУУ «КПІ», 2010. — 340 с.

Надійшла 16.01.2018

СТРУКТУРНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ РІВЕНЬ ОРГАНІЗАЦІЇ ЛІНГВІСТИЧНОГО ПРОЦЕСОРА

Ю.І. КИСЛЕНКО, А.В. ХІМІЧ

Анотація. Мовленнєва діяльність людини актуалізується індивідуальною мовною системою, яка (за Л. Щербою) визначається взаємодією лінгвістичного процесора, відповідального за структурний рівень організації мовленнєвої діяльності, та природно-мовної бази знань, де зберігається весь поточний когнітивний потенціал як символічного, так і образного рівня. Із позицій урахування інтеграційного підходу до аналізу мовленнєвої діяльності презентовано структурно-функціональний рівень організації лінгвістичного процесора для опрацювання повідомлень моно/поліпредикатних рівнів. Такий підхід, що поєднує особливості формування та взаємодії лінгвістичного процесора з базою знань, є плідною основою моделювання індивідуальної мовної системи для вирішення важливих проблем інформаційних технологій

Ключові слова: лінгвістичний процесор, індивідуальна мовна система, базова семантико-синтаксична структура, квант знань, ситуація, інформаційні природно-мовні технології, інформаційна база лінгвістичного процесора.

ІНТЕГРАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ТЕКСТОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Моделювання мовленнєвої діяльності постає натеper однією з найбільш актуальних і затребуваних у різних сферах наукових та прикладних досліджень проблем сьогодення, починаючи від перспектив розвитку Інтернет (семантичний Web і формування узагальненої моделі знань) і закінчуючи аналізом складних проблем когнітивно-комунікативних процесів з виходом на якісний перекилад. Усі ці питання пов'язані з аналізом, розумінням та моделюванням мовленнєвої діяльності людини, найбільш адекватним проявом та відтворенням якої зрештою є її здатність до аналізу та синтезу текстової інформації. Мовленнєва діяльність особистості актуалізується *індивідуальною мовною системою* (ІМС). У науковий обіг поняття ІМС уведено нашим співвітчизником Л. Щербою [1] ще в тридцятих роках минулого століття як сукупності лінгвістичного процесора (ЛП), відповідального за структурний рівень мовної організації та бази знань (БЗ), де постійно нагромаджується когнітивний потенціал людини. У загальному випадку структуру ІМС, що охоплює не лише інформацію мовного, а й образного (сенсорного) рівня, зображено на рис. 1.

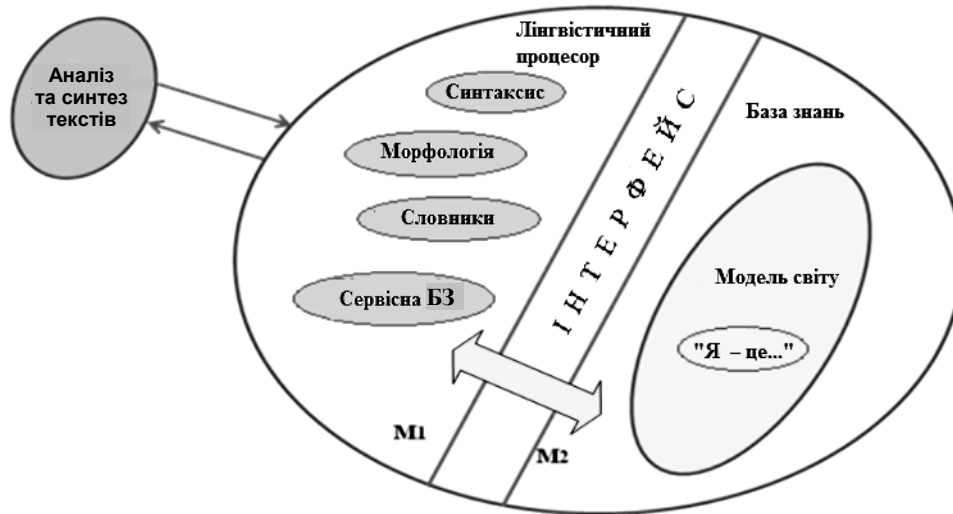


Рис. 1. Індивідуальна мовна система: лінгвістичний процесор — відповідальний за структурний рівень організації повідомлення; база знань — когнітивний потенціал суб'єкта

Лінгвістичний процесор охоплює всі знання про структурний рівень мовної організації, що забезпечують процедури синтезу/аналізу повідомлення. **База знань** нагромаджує сукупні знання як символічного (мовного), так і сенсорного рівня. **Інтерфейс** — схема взаємодії ЛП–БЗ. Важливо враховувати, що складові ЛП і БЗ диференціюють знання про структурне та змістовне навантаження БЗ, хоча обидві складові актуалізовані в єдиній нейросубстанції.

У загальному випадку ІМС спирається як на знання про структурно-функціональний рівень мовної організації, що акумульовані в сучасних підручниках та академічних виданнях (рівень ЛП), так і на весь нагромаджений натеper когнітивний потенціал окремого індивіда, отриманий через сприйняття інформації як образного (сенсорного), так і символічного рівня та збережений в пам'яті людини.

Структурно-функціональний рівень організації ЛП визначається структурним рівнем мовної організації. Ретельно ця проблема висвітлена автором у праці «Back to Basics of Speech Activity» [2], де з позицій інтегрування різнопланових напрямів сучасних досліджень мовленнєвої діяльності з боку біологів, нейрофізіологів, психологів, філософів, кібернетиків і, звісно ж, лінгвістів сформований узагальнений інтеграційний підхід до аналізу мовленнєвої діяльності.

У цій праці подано також аксіоматику мовленнєвої діяльності, до висновків окремих положень якої будемо постійно звертатися. Одним з найважливіших положень постає думка Б.Ю. Городецького, що «багато недоречностей в мовознавстві пов'язані з фактом, що до цього часу мова все ще вважається схемою відтворення думки, а не способом організації та подання знань» [3]. Це важливий дороговказ на шляху вирішення заявленої проблематики.

Фрагментарно головні висновки інтеграційного підходу зводяться до такого: чітко визначено поняття **ситуації** як окремого кванта знань образного рівня, що сприймається зоровим трактом. **Ситуація** — це фрагмент

зорової складової докільця, що потрапляє на центральну ямку сітківки та опрацьовується за повною програмою. А що це за повна програма, відповідь знаходимо у Семіра Зекі [4], який узагальнив результати багаторічних досліджень зорового тракту нейрофізіологами. **На третьому рівні сітківки вирішується проблема «фон-фігура» — визначаються об'єкти/суб'єкти, на четвертому/п'ятому — ідентифікується динаміка рухомих об'єктів, а далі (в зоровій ділянці головного мозку) визначаються всі ознаки знайдених складових та міра цих ознак.** Ці функції власне і визначають повну програму опрацювання конкретної ситуації, які надалі на образному рівні передаються в глибинні структури мозку. Якщо окрема ситуація докільця визначається **триєдністю категорій часу, простору та дії** (філософська концепція), то і її відбиток у нейромережі також визначається пов'язаною множиною відповідних елементів нейросубстанції.

Коли ж у людини далі виникає комунікативна інтенція стосовно трансляції цих знань з образного на мовний рівень, то для адекватного відтворення окремої ситуації лишається тільки єдина можливість — «наклеїти» на визначені складові окремої ситуації (Obj, Subj, Mov), їх ознаки Attr(Obj), Attr(Subj), Attr(Mov) та ще й міри всіх ознак Attr (Attr) мовні ярлички — слова та пов'язати їх між собою відповідним чином для відтворення триєдності їх множини у часі, просторі та дії. Саме функціональне навантаження зорового аналізатора і визначає диференціацію частин мови, що сформувалася на довгому еволюційному шляху розвитку людини. Коли ж згадати ще й тезу лінгвістів, що будь-яка ситуація зовнішнього світу може бути презентована лише чотирма частинами мови, то чітко бачимо, що **мовна презентація ситуації є похідною від структурно-функціонального рівня нейроорганізації зорового тракту.** Цей висновок презентується табл. 1.

Таблиця 1. Співвідношення між системами опрацювання образної та мовної інформації

№ з/п	Функціональне навантаження зорового аналізатора	Відповідні мовні категорії (частини мови)
1	Obj / Subj	Іменник
2	Attr(Obj/Subj)	Прикметник
3	Attr(Attr)	Прислівник
4	Mov	Дієслово
5	Attr(Mov)	Прислівник
6	Attr(Attr)	Прислівник

Вербалізація (трансляція на мовний рівень) окремої ситуації актуалізується у вигляді окремої **базової семантико-синтаксичної структури** (БССС), яка є основою формування будь-якого тексту. **Базова семантико-синтаксична структура — це двоскладова монопредикатна схема опису довільної ситуації реального або віртуального світу, всі складові якої актуалізовані на атрибутивному рівні.** Структурний рівень організації БССС зображено на рис. 2.

Важливо, що з посиланням на О.М. Гвоздева [5] уже матимемо основні етапи становлення мовленнєвого ладу дитини, що тривають близько трьох

(2,5 – 3) років. У цьому віці дитина вже опановує схему транслявання окремої ситуації з образного рівня на символічний — мовний. Це головний етап становлення мовленнєвої організації людини: з одного боку, дитина вже опанувала загальну схему вербалізації довільної ситуації, а з другого — вона вже може користуватися і проміжними (неповними) структурами, починаючи від одно-, дво-, трискладових конструкцій і закінчуючи повідомленнями з обмеженням (сім плюс-мінус дві) складових, що визначається структурно-функціональною організацією сітківки. Цей період визначає можливість опанування структур монопредикатного рівня.

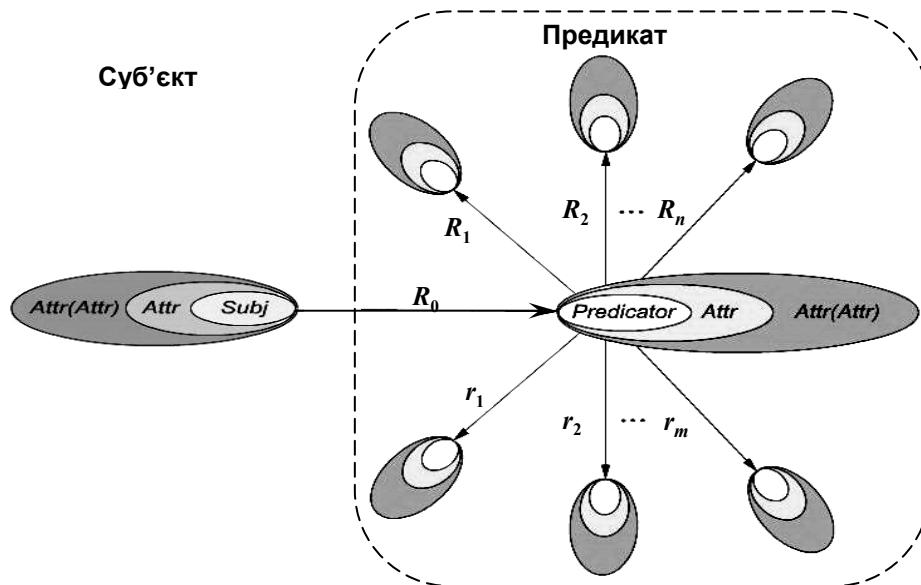


Рис. 2. Базова семантико-синтаксична структура. **Subj** — суб'єкт БССС; **Pred** — предикат як узагальнена характеристика дії; **Predicator** — ядро предиката; $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ — ситуаційні відношення; R_1, R_2, \dots, R_n — предикативні відношення, що формують модель керування дієслова

Наступний рівень опанування мовної організації характеризується здатністю формування та використання повідомлень поліпредикатного рівня, де в одному повідомленні поєднується множина структур монопредикатного рівня. Це відкриває шлях до схем сурядного та підрядного поєднань багатьох структур БССС, виходячи згодом на рівень рекурсивної організації повідомлення. Отже, у структурному сенсі організації текстової інформації (за ідеологією ВІСА-14 [2]) виходимо на дослідження структурного рівня організації повідомлення за дихотомією моно/поліпредикатної схеми організації повідомлення.

Висновок інтеграційного підходу досить радикальний і настільки ж продуктивний: всі ми володіємо мовою, не знаючи часто-густо як вона організована лише за однієї умови — будь-який текст, як і мовна організація загалом визначаються лише однією стандартною структурою опису довільної ситуації, яку вона опановує у віці двох – трьох років.

У загальному випадку довільний текст виражається множиною однотипних структур, організованих на моно/поліпредикатному рівні. Коли дитина/людина опанувала структурний рівень мовної організації, виходячи на рекурсивний рівень організації повідомлення, це означає, що вона, сприй-

маючи довільне текстове/мовне повідомлення, абсолютно вільно (хоча може і підсвідомо) виконує його декомпозицію за окремими квантами знань, кожен з яких окреслюється стандартною структурою БССС. Завдання ж лінгвістичного процесора — перевести на формалізований рівень процедуру декомпозиції довільного повідомлення за стандартними однотипними структурами БССС з ідентифікацією як усіх складових кожної структури, так і відношень між ними.

Тож, коли намагаємось перекласти на комп'ютер функції лінгвістичного процесора як складової ІМС, маємо послідовно реалізувати дві функції: *по-перше, виконати декомпозицію повідомлення за окремими квантами знань у вигляді структур БССС, по-друге, проаналізувати структурний рівень організації кожного кванта знань з визначенням його складових Obj, Subj, Mov з урахуванням їх атрибутивного оточення, а також ідентифікувати відношення ситуаційного та предикативного рівнів для кожного предиката.* Останнє зауваження визначається принциповим етапом моделювання процесу розуміння повідомлення. Якщо знову звернутися до структури БССС, презентованої рис. 2, то чітко вбачаємо цю відмінність — *людина, сприймаючи таке повідомлення, стикається виключно лише з лексичною її презентацією, тоді як система відношень R_0 , ситуаційні відношення $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ та предикативні відношення R_1, R_2, \dots, R_n , що формують модель керування дієслова, ідентифікуються лише за рахунок мовної компетенції, сформованої людиною ще у процесі опанування мови, яка зберігається в пам'яті БЗ і не потребує словесної сатисфакції.*

Результати аналізу кожного повідомлення потрібно запам'ятовувати, імплементававши їх до когнітивного потенціалу БЗ. Завдання, на перший погляд, виглядає невідомим або досить важким, проте матеріали інтеграційного підходу відкривають певні орієнтири для його вирішення. Проблема розбудови структурно-функціонального навантаження ЛП поділяється на етапи опрацювання структур моно/поліпредикатних рівнів.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ЛІНГВІСТИЧНОГО ПРОЦЕСОРА

Функціональне навантаження ЛП визначається головними етапами становлення мовленнєвої діяльності людини, презентованої матеріалами роботи ВІСА-14 [2]. При цьому *когнітивний потенціал ЛП (як здатність опрацьовувати тексти довільної складності) повинен поступово нарощуватися, починаючи від структур монопредикатного рівня (проходячи послідовно етапи від односкладного повідомлення до повної структури БССС) та виходячи згодом на рівень опрацювання рекурсивних схем організації повідомлень довільної складності.* Тож варто чітко диференціювати, власне, і етапи проектування ЛП, орієнтованих спочатку на опрацювання текстів монопредикатного рівня, а далі і поліпредикатного. Важливо завжди пам'ятати, що ЛП індивідуальної мовної системи кожного суб'єкта завжди спирається на когнітивний потенціал, презентований його БЗ, і нова інформація завжди опрацьовується з урахуванням поточного отриманого досвіду. *Як тільки нове повідомлення опрацьовано лінгвістичним процесором і передано у БЗ, воно відразу ж презентується вже як контекст до певного фрагмента нейромережі та поповнює когнітивний потенціал суб'єкта.*

Це принципова відмінність живої нейросубстанції від комп'ютерних моделей, де поки що індивідуальна мовна система задекларована на концептуальному рівні без реального наповнення складових ЛП та БЗ. Зауважимо, що на кафедрі технічної кібернетики НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» в межах розвитку інформаційних природно-мовних технологій принципово опрацьований структурно-функціональний рівень організації природно-мовної бази знань [6]; тож актуальною постає вже проблема розроблення лінгвістичного процесора як важливої іншої складової індивідуальної мовної системи. На часі тепер завдання — наповнити обидві складові потужним когнітивним потенціалом, здатним вирішувати нагальні проблеми сучасних інформаційних природно-мовних технологій. Проект орієнтований на опрацювання текстів флективних мов, складніших у структурному сенсі відносно аналітичних.

Структурно-функціональне навантаження ЛП монопредикатного рівня

Лінгвістичний процесор у загальному випадку визначає мовну компетенцію щодо структурно-функціонального рівня мовної організації, яка (згідно з працею О.М. Гвоздева [5]) формується поступово, починаючи від опанування структури БССС монопредикатного рівня (вік 2,5–3 роки) і закінчуючи у віці близько 10–12 років опануванням повідомлень поліпредикатного рівня, виходячи вже на рівень сприйняття рекурсивної організації повідомлення. Звісно, ці межі дуже залежні від умов виховання та навчання дитини, проте певним чином вони окреслюють інтервали становлення мовної компетенції у повному обсязі.

Як монопредикатні, так і поліпредикатні рівні спираються на однакову систему відношень — ситуаційних та предикативних, але, у першому випадку вони поєднують між собою лише складові структури БССС, що ідентифікуються окремими частинами мови, тоді як у другому — трансформуючись певним чином, поєднують між собою вже окремі структури БССС. Таке співвідношення моно/поліпредикатних структур і зумовлює особливості формування організації ЛП: на першому етапі проектування враховуються особливості презентації повідомлень монопредикатного рівня, тоді як на другому — ідентифікуються вже залежності формування структур поліпредикатного рівня.

Структура лінгвістичного процесора монопредикатного рівня (ЛП-моно) визначається однозначно структурною організацією БССС (рис. 2). Мабуть, розглядаючи це питання, потрібно певним чином враховувати особливості нейроорганізації зорового тракту, що опрацьовує довкілля поетапно — з дискретою в одну ситуацію, яка визначається окремим **квантом знань образного рівня**, з наступною її вербалізацією (коли виникає в цьому потреба) у вигляді структури БССС, яку вважатимемо **квантом знань символічного (мовного) рівня**.

Нагадаймо послідовність сприйняття довкілля зоровим трактом. Довкілля квантується очима окремими ситуаціями обсягом сім плюс/мінус дві складові Obj, Subj, що зумовлюється актуальним зоровим полем; серед них визначаються динамічні характеристики Mov (усіх або одного об'єкта); далі ця інформація надходить у зорову кору головного мозку, де визначаються всі ознаки складових ситуації Attr(Obj/Subj), Attr(Mov) та ще й міра

цих ознак у вигляді складових $Attr(Attr)$. Для кожної ситуації визначаються також просторово-часові характеристики, які порівнюються з попередніми їх оцінками. За такою схемою опрацьовується кожна ситуація, бо цей процес — отримання адекватної інформації про поточний стан довкілля — є надважливим для виживання людини у швидкоплинному динамічному середовищі.

Коли ж у людини виникає потреба транслювати отриману інформацію на мовний рівень, вона її послідовно транслює у вигляді множини структур БССС, пов'язаних відповідним чином. Мовне повідомлення аналізується поетапно з дискретою в одну ситуацію. Проаналізуємо цю процедуру: завданням для ЛП-моно постає процедура аналізу повідомлення, тобто однозначне визначення всіх складових ($Subj, Obj_1, \dots, Obj_n, Mov$), включаючи їх атрибутивне оточення $Attr(Obj/Subj), Attr(Mov)$, та міру цих ознак $Attr(Attr)$, а також ситуаційних відношень $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ (час, простір, причина, умова, наслідок тощо) та предикативних відношень (R_1, R_2, \dots, R_n), що формують модель керування дієслова.

Множина структур БССС, презентованих у межах окремого абзацу, є зв'язною сукупністю цих структур, триєдиних у часі, просторі та динаміці. Сучасні надбання класичної лінгвістики багато в чому дозволяють виконувати процедуру аналізу повідомлень монопредикатного рівня. Проте знову доводиться озвучувати тезу, що *індивідуальна мовна система завжди функціонує за рахунок плідної взаємодії ЛП, відповідального за аналіз структурного рівня мовної організації, і БЗ, де зберігається та нагромаджується весь когнітивний потенціал, на якому відбувається змістовна (семантична) інтерпретація кожного кванта знань у вигляді БССС.*

Можемо тепер окреслити поетапно окремі кроки на шляху сприйняття ЛП повідомлення у вигляді множини стандартних структур БССС. Важливо враховувати, що аналіз довільного повідомлення будь-якого рівня (моно/полі) потрібно починати обов'язково з ідентифікації комунікативних засобів, які принципово не входять до структури БССС. Перелік та класифікацію таких засобів можна знайти в монографії [7], які визначають окремі аспекти ставлення автора до конкретної інформації, презентованої поточним квантом знань.

Отже, аналіз окремого повідомлення монопредикатного рівня, окресленого окремою структурою БССС, поділяється на окремі етапи:

1. **Ідентифікація комунікативних засобів повідомлення** (звісно, коли вони там є), що визначають певне ставлення автора як до окремих складових, так і загалом до повідомлення, презентованого структурою БССС.

2. **Ідентифікація складових БССС** з визначенням частин мови, їх характеристик (множина, одинина, відмінки, час тощо). На сучасному етапі розвитку інформаційних технологій існують і використовуються досить потужні словники, які багато в чому допомагають виконувати етапи визначення частин мови, їх характеристик та особливості використання. Це дозволяє успішно ідентифікувати усі складові з урахуванням їх атрибутивного оточення.

3. **Ідентифікація ситуаційних відношень кожної БССС** вбачається досить складним етапом. Дитина опановує їх у послідовності: дія, час, простір, причина, умова, наслідок тощо (О.М. Гвоздев [5]), постійно

аналізуючи співвідношення отриманої інформації з когнітивним її надбанням. Натепер нагромаджено багато досліджень з цього напрямку, що можуть використовуватися для реалізації ЛП. Можемо подати перелік праць з аналізу часових та просторових відношень (Д.О. Поспедов [8], Ю.І. Кисленко [7], Ю.І. Кисленко, О.С. Черевко [9], Ю.І. Кисленко, А.В. Хіміч [10]).

4. **Ідентифікація предикативних відношень R_1, R_2, \dots, R_n** (моделей керування окремого дієслова) досі вбачається досить проблематичним, оскільки натепер ще не формалізовані ці дані для комп'ютерних технологій. Проте проглядається можливість їх формування та використання в процесі нагромадження когнітивного потенціалу БЗ.

Структурно-функціональне навантаження ЛП поліпредикатного рівня

Згідно з матеріалами ВІСА-14 [2] після засвоєння дитиною (людиною) монопредикатного рівня організації повідомлення та якщо досить досконало опрацьована система відношень окремої структури БССС (як ситуаційного, так і предикативного рівня), то згодом мовець переходить уже до опрацювання та використання повідомлень поліпредикатного рівня. Це означає, що на «вакантне місце» кожної складової структури БССС ставиться вже не слово, а окрема ситуація, тобто виникає можливість опанування поліпредикатні схеми організації повідомлення, що, у свою чергу, уможливило опанування та використання (синтезу/аналізу) рекурсивних схем організації повідомлення. При цьому дещо змінюється схема інкорпорації однієї структури в іншу, і саме це — розуміння особливостей формування поліпредикатного рівня організації повідомлення — дозволяє впевнено користуватися рекурсивною схемою організації комунікативного процесу. Аналізуючи такі схеми формування та опрацювання подібних повідомлень, важливо диференціювати окремі схеми взаємодії множини структур БССС у межах цілісного поліпредикатного повідомлення. Особливості формування таких структур подамо у стислому вигляді, хоча частково їх презентовано у праці [7].

Схеми ускладнення предикатора. Існує ряд об'єктивно-суб'єктивних важелів відтворення ситуацій, коли неможливо адекватно ідентифікувати окрему ситуацію, не враховуючи цілий спектр характеристик або відношень самого суб'єкта до певної динамічної ситуації. Прикладом такої конструкції може бути ситуація: *«Хлопець бажає почати навчатись опанувати професію пілота»*. У загальному випадку таку ситуацію можна подати схемою, коли предикатор презентує не лише динамічні особливості складових ситуацій, але й охоплює значно ширший спектр динамічних характеристик як власне суб'єкта, так і дії, включаючи кілька предикатів, кожен з яких охоплює певні динамічні характеристики дії: *модальність виконання дії, стадійність процесу, можливість навчання, опанування фаху* тощо. Зауважимо, що такий ускладнений предикат підпорядкований лише одному суб'єкту та ще й визначається певною послідовністю актуалізації. Річ у тім, що в реальному середовищі та у складних схемах взаємодії людини з динамічним довкіллям дуже часто майже неможливо адекватно окреслити динамічну ситуацію лише одним конкретним предикатором, не враховуючи взаємодію з іншими. Такий ускладнений предикат презентується ієрархічною множиною окремих підпорядкованих предикатів, коли кожен з наступних

уточнює попередній. Така схема формування поліпредикатного повідомлення часто подається в реальних текстах і має також опрацьовуватися ЛП.

Схеми трансформування предикаторів. Ця схема має широкі можливості трансформування предикатора (дієслова) у різновиди атрибутивного рівня у формах дієприкметника, дієприслівника або номінативної функції субстантиву. Тоді маємо схему організації поліпредикатного повідомлення, де один предикатор у формі дієслова Mov трансформується за зовнішніми флективними ознаками в дієприкметник, виконуючи функцію атрибутивної складової (Attr (Obj/Subj)) будь-якого елемента кореневої структури, чи в дієприслівник, окреслюючи ознаки конкретного предикатора (Attr (Mov)), або в субстантив, актуалізований вже повним предикатом. Особливість таких схем трансформування в тому, що у кожному випадку **трансформується лише предикатор Mov у ту чи іншу схему, тоді як власне весь предикат (у сукупності множини ситуаційних та предикативних складових) лишається майже у незмінному вигляді.** Звісно, лінгвістичний процесор повинен ідентифікувати такі різновиди взаємодії двох структур, ураховуючи певні особливості їх актуалізації. Сфери використання схем трансформування структур БССС за вказаними напрямками можуть різнитися для різних мов. Особливо це потрібно враховувати у перекладі з однієї мови на іншу.

Поліпредикатна інтерпретація повідомлень з однорідними членами речень. До структур поліпредикатного рівня варто віднести і повідомлення з однорідними членами. Таке повідомлення реципієнтом сприймається як множина однотипних структур, що можуть відрізнятися одним елементом або їх множиною. Проте, коли завданням лінгвістичного процесора є аналіз структурно-функціонального рівня організації довільного повідомлення (**що особливо важливо як для адекватного сприйняття та «розуміння» повідомлення людиною, так і не менш важливим визначається для адекватного опрацювання повідомлень у сучасних системах інформаційних технологій**), то принципово важливим є питання врахування та опрацювання таких структур. Усі можливі схеми формування повідомлень з однорідними членами можуть бути формально презентовані двома структурами БССС — **«хмаринками» структур БССС, що довільним чином «наповзають» одна на одну.**

Формування структур поліпредикатних повідомлень за функціональним навантаженням елементів БССС. Чітке розуміння можливих схем організації повідомлення за схемами моно/поліпредикатних рівнів дає змогу значним чином поліпшити процедуру автоматичного опрацювання текстової інформації.

Якщо знову звернутися до витоків мовленнєвої діяльності та згадати, що структура БССС є похідною від структурно-функціонального рівня нейроорганізації зорового тракту з визначенням складових Obj/Subj на множині ознак Attr (Obj/Subj) та їх міри Attr(Attr), а також з ідентифікацією їх динамічних характеристик Mov в околі ознак Attr (Mov) та Attr(Attr) (див. рис. 2), то можемо презентувати ще одну можливість формування повідомлень поліпредикатного рівня.

Якщо звернутися знову до структури складових елементів БССС, то виходимо ще на один рівень формування структур поліпредикатного рівня.

Приклад формування таких повідомлень знаходимо у «Лісовій пісні» Л. Українки: «Той, що в скелі сидить», «Той, що греблю рве на волі». У загальному випадку — це поліпредикатні структури, де головне речення презентоване лише вказівним займенником «той», а підрядне визначає власне окрему ситуацію, презентовану предикатом «Той сидить в скелі». Це приклад використання поліпредикатної схеми, де підрядна конструкція ідентифікує суб'єкт (об'єкт) головного речення, презентований окремою структурою БССС.

Аналіз такої схеми організації повідомлення поліпредикатного рівня підштовхнув автора до цікавого узагальнення, пов'язаного з функціональним навантаженням займенників. Займенник — це однозначна частина мови, статус якої дуже розпорошений, невизначений та нечітко окреслений; однак функціонально він може ідентифікувати (замінювати) будь-яку частину мови. Подамо приблизну класифікацію займенників за їх функціональним навантаженням (табл. 2).

Таке розмаїття та багатофункціональне навантаження займенників відкриває ще пласт можливих схем формування структур поліпредикатного рівня, який покриває функціональне навантаження всіх складових БССС. Варто зауважити, що людина однозначно та безпомилково фіксує їх семантичне навантаження, тоді як для моделювання відповідних залежностей — це досить складна проблема. На монопредикатному рівні ці засоби виконують роль окремих складових БССС, тоді як на поліпредикатному рівні вони постають у парному варіанті, поєднуючи вже окремі структури БССС, одна з яких ідентифікується займенниками, а друга презентується вже цілою структурою.

Таблиця 2. Функціональне навантаження займенників відносно складових БССС (монопредикатний рівень)

Тип займенника	Семантичне навантаження	Функції БССС
Особові	я, ти, він, вона, воно, ми, ви, вони	Subj, Obj
Безособові	себе (не має ні роду, ні числа)	Subj
Присвійні	мій, твій, його, її, наш, ваш, їх, їхній	Attr(Obj/Subj)
Вказівні	цей, сей, той, та, те	Attr(Obj/Subj)
Означальні	весь, всякий, кожний, інший	Attr(Obj/Subj)
Питальні	хто, що, який, котрий	Attr(Obj/Subj), Obj
Заперечні	ніхто, ніщо	Subj, Obj
Неозначені	дехто, дещо, хто-небудь, що-небудь	Subj, Obj
Вказівні	такий, який, котрий	Attr(Attr)

Для формування структур поліпредикатного рівня найчастіше використовуються певні схеми, ідентифікаторами яких постають співвідношення елементів: «той, хто . . .», «... того, кого ...», «... тому, кому . . .» тощо. Аналогічна схема може використовуватися у випадку пояснення атрибутивного оточення (Attr (Obj/Subj)) певного елемента головного речення з використанням відповідних елементів «...такий, який ...», «...такому, що...», або ще і зв'язок може формуватися на рівні міри атрибутивного елемента Attr(Attr) — аналог системи «...так, як...». Як бачимо, маємо безмежну (але добре структуровану за канонами БССС) схему формування повідомлень поліпредикатного рівня. Варіанти таких схем взаємодії повідомлень поліпредикатного рівня можуть бути подані досить широко у вигляді табл. 3.

Таблиця 3. Схеми формування повідомлень поліпредикатного рівня

Ситуаційні відношення	Схеми формування структур поліпредикатного рівня	Приклади реалізації
Часові	Коли...БССС1..., то ... БССС2...	Коли ..., то ...
Просторові	Там...БССС1..., де ... БССС2...	Там ..., де....
Причини	Через...БССС1... буде ... БССС2	Через ... буде щось.
Умови	За умови БССС1... буде ... БССС2	За умови – буде щось
Наслідок	У результаті БССС1 буде ... БССС2	У результаті буде
Порівняння	БССС1 ..., оскільки БССС2...	Зроблено так, як ...

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ ЛІНГВІСТИЧНОГО ПРОЦЕСОРА

Вище проаналізовано досить ретельно особливості організації та використання мовних засобів формування повідомлень як монопредикатного рівня, що використовуються в засобах вербалізації окремої ситуації, так і поліпредикатного, які визначають особливості вербалізації вже окремого цілісного фрагмента дійсності, презентованого множиною окремих ситуацій, триєдиних у часі, просторі та дії. Інтеграційний підхід до аналізу мовленнєвої діяльності зумовлює чіткий системний погляд на структурний рівень мовної організації, що спирається на поняття окремого кванта знань, презентованого структурою БССС, і реалізується на моно/поліпредикатних рівнях.

Перш ніж окреслити перспективи моделювання ІМС, важливо визначити те підґрунтя і підстави, які забезпечують такий оптимізм. Знакова публікація автора у цьому напрямі — це праця «Back to basics of speech activity» [2], де з позицій інтеграційного підходу (із залученням досліджень нейрофізіологів, філософів, психологів, кібернетиків та ін.) чітко були визначені поняття ситуації як окремого кванта знань образного рівня та схема її вербалізації у вигляді структури БССС. Там чітко й аргументовано показано, що людина впевнено володіє мовою лише тому, що їй на всі випадки життя достатньо лише однієї стандартної структури. Професор Києво-Могилянської академії, доктор філологічних наук О.М. Демська після ретельного ознайомлення з цією працею чітко сформулила свій вердикт: *«Ця робота — вершина структуралізму»*, бо все розмаїття структурного рівня мовної організації спирається лише на одну-єдину структуру, що постає похідною від структурно-функціонального рівня нейроорганізації зорового тракту та використовується на моно/поліпредикатному рівні.

Ця робота стала поштовхом до моделювання індивідуальної мовної системи як пов'язаної сукупності ЛП та БЗ (див. рис. 1). Важливо, що такий комплексний підхід до моделювання мовленнєвої діяльності відкриває шлях до вирішення вузлових проблем інформаційних природно-мовних технологій, визначених інтернет-спільнотою як «Семантичний Web» та «Формування моделі світу», без вирішення яких не варто сподіватись на принципове трансформування якості пошуку.

Натепер роботи з моделювання індивідуальної мовленнєвої системи виконують аспіранти на кафедрі технічної кібернетики НТУУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського за двома напрямками: «Проектування природно-мовної бази знань» (Д.С. Сергеев) та «Формування лінгвістичного процесора» (А.В. Хіміч). Уже достатньо повно опрацьовано конструктивний підхід до структурно-функціонального рівня організації природно-мовної бази знань, презентований працею «*Cognitive architecture of speech activity and modeling thereof*» [6]; на часі також опрацювання структурно-функціонального рівня організації ЛП.

Функціональне навантаження лінгвістичного процесора для синтезу тексту монопредикатного рівня. Лінгвістичний процесор як невід’ємна складова ІМС може і повинен працювати в двох режимах — синтезу та аналізу мовного повідомлення. Послідовно проаналізуємо ці режими.

У контексті моделювання ЛП, орієнтованого на виконання функцій синтезу мовного матеріалу, цілком слушним буде посилання на попередню працю автора, виконану у співпраці з Г.А. Амплєвою [10] ще в 2000 р. Цей програмний продукт може сприйматися тепер уже в дещо іншій площині, а саме: у руслі моделювання роботи ЛП для синтезу тексту через послідовність структур БССС монопредикатного рівня.

Вхідні дані. Об’єкт дослідження — процес автоматичного формування опису сцени, синтезованої довільним чином на екрані монітора. У пам’яті комп’ютера синтезовано дві невеликі БЗ, що моделювали фрагмент візуального світу: перша — стосувалася візуалізації на сцені графічної інтерпретації просторових відношень типу *напрямку* та *відстані* (з ідентифікацією відношень «попереду», «позаду», «ліворуч», «праворуч», «далеко», «недалеко» тощо та їх можливою комбінацією), а друга — презентувала алгоритм розпізнавання об’єктів (багатокутників, чи фігур з елементами сталої кривизни). На моніторі випадковим чином синтезувалася сцена за рендомною реалізацією: об’єктів, їх розмірів, орієнтації, розташування, кольору тощо; знову випадковим чином на цій сцені розміщувався автономний робот, ідентифікований своїми координатами, габаритами та напрямом зору, а також своєю схемою семантичної інтерпретації просторових відношень.

Поставлено конкретне завдання: обстежити задану сцену, знайти всі фігури, розпізнати їх, виконавши процедуру ідентифікації з визначенням усіх параметрів кожного об’єкта (лінійні та кутові характеристики, площа, центр мас, кривизна відповідних фрагментів, колір тощо), провести їх класифікацію та визначити просторове положення кожної фігури відносно робота. **Після обстеження сцени отримані дані потрібно вербалізувати, тобто подати звіт у символічному (текстовому) вигляді.**

Звіт формується у двох варіантах: або в абсолютній системі відліку просторових відношень (відносно положення робота та його напрямку зору), або у відносній системі (відносно окремо вибраного об’єкта — у цьому випадку відносно об’єкта з мінімальною площею). Тут, власне, цікавитимуть лише певні аспекти цієї процедури у зв’язку з деякими *особливостями процедури вербалізації*, що реалізується ЛП. Текст формується у вигляді послідовності речень — структур БССС.

Програмний продукт моделює основні функції зорового тракту: визначає всі об'єкти Obj, обстежує їх контур, визначає всі ознаки Attr(Obj) кожного з них (лінійні та кутові розміри, площу, центр мас), фіксує також ступінь знайдених ознак Attr (Attr) (великий, малий, жовтий, рожевий тощо); окрім того, фіксує своє просторове положення, постійно відслідковує напрям зору. Процедура синтезу тексту визначається структурою БССС з ідентифікацією ситуаційних відношень для кожної ситуації.

Звісно, це дуже спрощена модель аналізу сцени з наступною процедурою презентації отриманих результатів у вигляді послідовності структур БССС. Проте це найважливіший інформаційний аспект мовленнєвої діяльності людини, пов'язаний з вербалізацією отриманої зоровим трактом інформації. Доречно тут послатися також на відгук Г. Осіпова (голови асоціації «Штучний інтелект» РАН) на конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень» (2005 р.) щодо оцінки згаданого програмного продукту: **на практиці добре відомі праці напряму текст–рисунок, а роботи напряму рисунок–текст ще не траплялися**. Це, мабуть, одна з перших спроб моделювання складної інтелектуальної функції людини у напрямі моделювання співвідношення «дійсність–текст».

Перспективи використання лінгвістичного процесора в інформаційних природно-мовних технологіях. Дійсно, проблема проектування ЛП у повному обсязі (з функціями аналізу/синтезу текстової інформації) видається досить складною, але тут вже досліджені головні особливості структурної організації повідомлення на як монопредикатному, так і поліпредикатному рівні, що притаманні всім мовам, бо окрема структура БССС постає схемою вербалізації окремої ситуації, яка, у свою чергу, є похідною від структурно-функціонального рівня нейроорганізації зорового тракту людини (Семір Зекі [4]).

Можемо поки що презентувати потужність запропонованої ідеології формування ЛП на засадах інтеграційного підходу на прикладі моделювання здатності такого ЛП стосовно можливості ідентифікації трансформування дієслова за схемами дієприкметника, дієприслівника та субстантиву. У праці Ю. Кисленка та А.В. Терентьєва [11] презентовані результати емуляції пошуку в Інтернеті конкретного запиту за умови можливості трансформування предикатора запиту від дієслівної форми до дієприкметника, дієприслівника та субстантиву. Результати експерименту підтверджують, що лише врахування можливості ідентифікувати в запиті похідні форми дієслова (що видається не надто складним) дозволяють значним чином підвищити релевантність пошуку.

Проаналізуємо отримані результати у зв'язку з моделюванням ЛП на інтеграційних засадах, головною функцією якого стає озвучена теза: **«довільний текст презентується множиною однотипних структур БССС, організованих на моно/поліпредикатному рівні»**. Результати експерименту та методика проведення пошуку презентується на рис. 3 за результатами праці [11]. Презентуватимемо суть такого експерименту за матеріалами цієї праці.

Експеримент. Суть віртуального експерименту модифікації інформаційного пошуку полягає у такому: вибирається довільний запит і опрацьовується у п'яти провідних пошукових системах; двадцять перших

документів видачі (презумпція упорядкування за релевантністю для кожного пошукача) вибираються як тестові масиви для реалізації «пошуку за знаннями», коли під «квантом знань» визначено окрему структуру БССС. Пошук на тестових масивах виконується вручну експертом, котрий для визначення релевантності та трансформування структур користується своїми знаннями. При цьому автори використовували для віртуального пошуку лише три з усього спектра трансформацій: вхідний запит з дієслівною формою предикатора трансформувалася послідовно в субстантивну, ад'єктивну та адвербіальну форми. У тестових масивах для кожної пошукової системи вручну проводився пошук одночасно за трьома трансформованими структурами і за певним критерієм визначалася релевантність документів видачі.

Об'єктом дослідження, таким чином, постає інтернет-система, точніше — технологія пошуку інформації. Мета віртуального експерименту — порівняти ефективність існуючих схем пошуку (пошук за ключовими словами) відносно запропонованої схеми структурованого пошуку (пошук за знаннями). Тестування проводилося для п'яти провідних систем: **Google** — найпопулярнішої пошукової системи ([http // www.google.com /](http://www.google.com/)); **Yahoo** — однієї з провідних американських пошукових систем ([http // yahoo.com /](http://yahoo.com/)); **Bing** — популярної системи корпорації Microsoft ([http // www.bing.com /](http://www.bing.com/)); **Yandex** — найвідомішої російської пошукової системи ([http // www.yandex.ru /](http://www.yandex.ru/)); **Мета** — української пошукової системи ([http // meta.ua /](http://meta.ua/)).

Як запит обрано фразу: «**Письменник, який отримав Пулітцерівську премію в 2009 році**». Для пошуку за ключовими словами ця інформаційна потреба подається у вигляді послідовності: $Q_1 = (\text{письменник} \wedge \text{отримав} \wedge \text{Пулiтцерiвськy} \wedge \text{премию} \wedge \text{«2009 рік»})$, де \wedge означає логічне «І». У такому вигляді запит опрацьовується на всіх пошукових системах; при цьому для кожної з них фіксується видача перших двадцяти документів, за якими надалі вручну виконується пошук «за знаннями».

Тут маємо структуру природно-мовного повідомлення, реалізовану на множині категорій «письменник», «отримав», «премію», «Пулiтцерiвськy», «2009 рік», пов'язаних певними відношеннями R_0, R_1, r_i . Саме сукупність категорій та функцій, що їх пов'язують, однозначно визначають зміст (семантику) повідомлення. Зазначена структура вже як повнотекстова на словому рівні вибирається як запит для віртуального пошуку на отриманих вибірках з двадцяти документів для кожної пошукової системи.

Окрім того, виходячи з авторського бачення структурної організації текстової інформації, семантично адекватними запитом будуть і повідомлення, фрагменти яких подано його трансформаціями. Таким чином, «пошук за знаннями» одночасно включає в себе пошук за всіма різновидами запиту:

Q_2 — Письменник, який отримав Пулітцерівську премію в 2009 році.

Q_{21} — Письменник, отримуючий Пулітцерівську премію в 2009 році.

Q_{22} — Отримання письменником Пулітцерівської премії в 2009 році.

Q_{23} — Письменник, отримуючи Пулітцерівську премію в 2009 році.

Важливо звернути увагу на крапки в кінці кожного різновиду запиту — це означає, що релевантними будуть документи, повідомлення яких містять щонайменше зазначені різновиди структур $Q_2, Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}$.

Для порівняння ефективності пошуку за різними стратегіями скористаємося оцінкою релевантності отриманих результатів. Для пошуку

за ключовими словами – запит – Q_1 – відповідність документа видачі інформаційній потребі користувача (його релевантність) оцінювалася таким чином. Якщо в документі видачі в одному повідомленні збіглися п'ять ключових слів, то виставлялася оцінка «п'ять», якщо «чотири», то оцінка «чотири» і т. д. до оцінки «одиниця». Отримані дані з фіксацією середніх значень у вигляді графіків для кожної пошукової системи показано на рис. 3.

У іншому випадку Q_2 — «пошук за знаннями» — порівнюються вже фрагменти структур (як сукупність категорій, пов'язаних певними відношеннями). Релевантна інформація потребує ідентифікації не тільки категорій, а і функцій, що їх пов'язують. Таким чином, якщо в документі (окремих його повідомленнях) є структура, що збігається цілком із структурою запиту з п'яти елементів з урахуванням їх функціональних зв'язків, то виставляється оцінка «п'ять», якщо збігаються чотири елементи спільно з їх функціональними зв'язками, то виставляється оцінка «чотири» і т. д. Результати «пошуку за знаннями» для всіх тестованих пошуковиків (оцінка релевантності) подано на рис. 3, б.

Під час порівняння результатів відразу стає очевидним значне підвищення релевантності видачі «пошуку за знаннями» для всіх пошукових систем: Google (+0,9), Yahoo (+1,55), Bing (+1,15), Yandex (+1,0), Meta (+1,5). Ці результати отримано на малих вибірках і, ймовірно, заздалегідь були прогнозовані. **Однак слід відзначити істотні обставини:**

- 1) трансформації, використовувані для пошуку «за знаннями», цілком доступні для реалізації в пошукових системах за формальними критеріями;
- 2) вирішується важливе принципове питання — отримується гарантія того, що після проведення пошуку в подібному режимі не випускаються цікаві релевантні документи;
- 3) можна більш точно в запиті формулювати інформаційну потребу, оскільки порівняння ведеться «за знаннями».

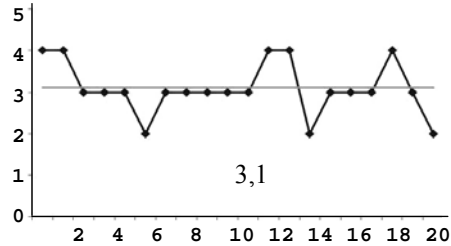
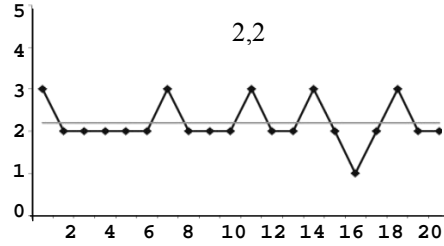
Таким чином, у результаті віртуального експерименту отримано порівняння машинного пошуку з пошуком інформації людиною. Пріоритет, звичайно ж, лишається за людиною, і такий результат можна було б передбачити заздалегідь, урахувавши, що машина:

- все ще не забезпечена знаннями про сферу пошуку;
- не має достатнього досвіду спілкування із середовищем;
- не володіє інтуїцією, передбаченням і багатьма іншими здібностями;
- не має тієї мовної компетенції, яка «спресована» в незчисленних лінгвістичних фоліантах і мало враховується в сучасних технологіях.

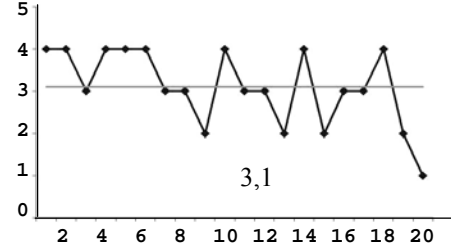
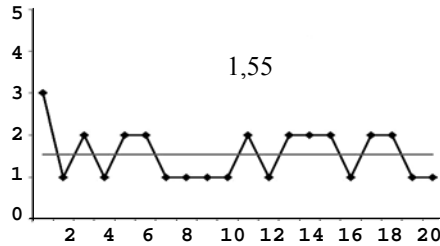
Можемо зробити певні висновки: досі маємо все ще приблизне уявлення про сам об'єкт дослідження — індивідуальну мовну систему людини, яка реалізовує мовленнєву діяльність у режимах синтезу / аналізу мовного повідомлення, і в сучасні інформаційні технології вкладається лише дуже незначна і несистемна децима знань про цю одну з найбільш складних інтелектуальних функцій людини. В експерименті враховано лише два складники мовної організації: окремі схеми трансформування повідомлення, доповнені ще й особливостями структурної організації мови, що розглядають довільний текст як множину однотипних синтаксичних структур. І перше, і друге потребують певних формалізованих процедур, що стосуються трансформацій як запиту, так і текстів документів. Однак натепер за сучас-

ного розвитку інформаційних технологій — це рутинні стандартні процедури, які без особливих зусиль можуть бути перекладені на комп'ютер.

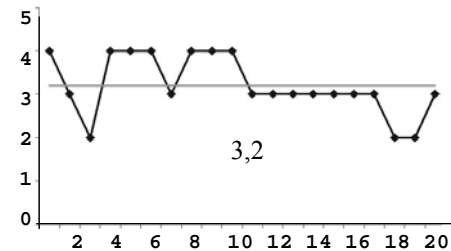
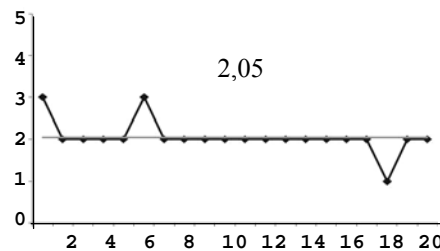
Google



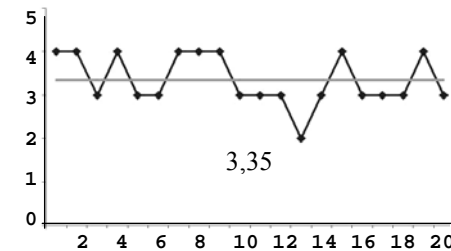
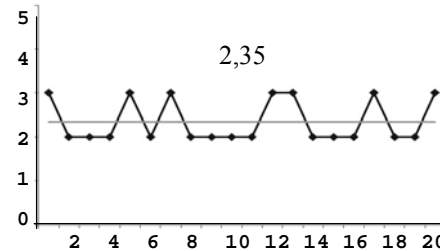
Yahoo



Bing



Yandex



Мета

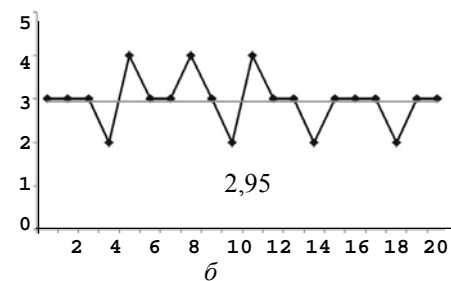
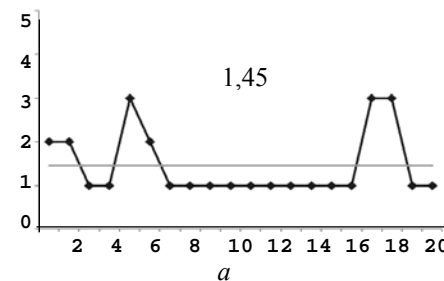


Рис. 3. Порівняльна характеристика оцінювання релевантності: а — оцінка релевантності за допомогою пошуку за ключовими словами; б — оцінка релевантності за допомогою пошуку за знаннями

ВИСНОВОК

Презентована робота присвячена аналізу індивідуальної мовної системи (як сукупності ЛП та БЗ), відповідальної у загальному випадку за актуалізацію мовленнєвої діяльності людини. Зокрема розглядається структурно-функціональний рівень організації ЛП, відповідального за структурний рівень формування повідомлення у процесі синтезу/аналізу мовного повідомлення.

Основою дослідження постає інтеграційний підхід до аналізу структурного рівня мовної організації, що охоплює результати сучасних досліджень мовленнєвої діяльності у багатьох помежованих напрямках. Такий підхід істотно відрізняється від класичної лінгвістики з огляду на формальне визначення базової семантико-синтаксичної структури як основи формування довільного повідомлення. Спочатку розглядаються особливості формування повідомлень на монопредикатному рівні, а потім і на поліпредикатному.

Заклучна частина присвячена як прикладним питанням використання підходу до синтезу мовного повідомлення (система автоматичного формування опису сцени), так і можливостям його застосування для пошукових систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Щерба Л.В. О тройком аспекте языковых явлений и эксперименте в языкознании: избр. тр. / Л.В. Щерба // Языковая система и речевая деятельность. — М.: Наука, 1974. — С. 24–39.
2. Kyslenko Yu.I. Back to basics of speech activity / Yu.I. Kyslenko // Biologically Inspired Cognitive Architectures (2014) 8. — P. 47–69.
3. Городецкий Б.Ю. Компьютерная лингвистика: моделирование языкового общения (вступ. статья) / Б.Ю. Городецкий // Сб. НЗЛ. — Вып. 24. — М.: «Прогресс», 1989. — С. 5–31.
4. Зеки Семир. Зрительный образ в сознании и мозге / Семир Зеки // В мире науки. — 1992. — № 11–12. — С. 33–41.
5. Гвоздев А.Н. Формирование у ребенка грамматического строя русского языка / А.Н. Гвоздев. — М.: Изд-во Академии пед. наук, 1949. — 192 с.
6. Kyslenko Yuri. Cognitive architecture of speech activity and modeling thereof / Yuri Kyslenko, Danylo Sergeiev // Biologically Inspired Cognitive Architectures (2015) 12. — P. 134–143.
7. Кисленко Ю.И. Архитектура мови (Лінгвістичне забезпечення інтелектуальних інтегрованих систем) / Ю.И. Кисленко. — К.: ІЗМН, 1998. — 344 с.
8. Кисленко Ю.И. Структурно-функціональний рівень організації лінгвістического процесора / Ю.И. Кисленко, О.С. Черевко // Искусственный интеллект. — Донецк. — 2012. — С. 143–150.
9. Кисленко Ю.И. Інформаційна база лінгвістичного процесора / Ю.И. Кисленко, А.В. Хіміч // Адаптивні системи автоматичного управління. — 2016. — № 1 (28). — С. 42–48.
10. Кисленко Ю.И. О моделировании соотношения «Действительность – Текст» / Ю.И. Кисленко, Г.А. Амплеева // Искусственный интеллект. — Донецк. — 2000. — № 3. — С. 475–487.
11. Кисленко Ю.И. Проблемы и перспективы развития поисковых систем / Ю.И. Кисленко, А.В. Терентьев // Искусственный интеллект. — 2011. — № 3.

Надійшла 19.11.2017

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ЗА УМОВИ ЗАЛЕЖНОСТІ СТРУКТУРИ СПОЖИВАННЯ ВІД ОБСЯГІВ ВИПУСКУ

А.П. МАХОРТ

Анотація. Доведено існування рівноваги в економічній системі з монополістами та споживчими уподобаннями, що формуються з урахуванням інформації про обсяги випуску товарів. Установлено умови на задані економічні характеристики, які гарантуватимуть розв'язність рівнянь рівноваги в заданій області значень. Указано алгоритми знаходження рівноважних характеристик. Розглянуто можливість оптимального вибору значень рівноважних характеристик. Оптимальність пов'язується з бажанням окремих суб'єктів економічної системи забезпечити якомога повніше задоволення своїх потреб. Знайдено граничні оцінки значень економічних характеристик, які дозволяють установити можливість досягнення станів рівноваги з вибраними властивостями.

Ключові слова: рівновага, попит, пропозиція, монополісти, ціноутворення.

ВСТУП

Дослідження економічних систем за допомогою рівноважних підходів дає змогу виявити інструменти і засоби впливу на них для реалізації сценаріїв функціонування із заданими властивостями. Зокрема, використання рівноваги вальрасового типу [1,2] дозволяє виявляти чинники, що призводять до порушення балансу між попитом і пропозицією товарів в економічній системі, та з'ясувати інтервали значень змінних характеристик економічної системи, які гарантуватимуть дотримання цього балансу. Дисбаланси пов'язані з розвитком процесів, що негативно діють на суб'єкти економічної системи. Поява таких процесів може бути наслідком взаємовідносин між суб'єктами економічної системи.

Формування споживчих уподобань суб'єктів економічної системи є одним з проявів взаємовідносин. На формування уподобань можуть впливати різні чинники, серед них і виробничі технології. З усіх складових виробничих технологій (в найширшому сенсі) тут йтиметься про обсяги товарів на ринку. Економічні обґрунтування вагомості цього чинника досить очевидні. Звернемо увагу лише на один із фактів, а саме: взаємозв'язок між певними типами товарів, використання яких відбувається в комплексі. Тому потреба у споживанні деяких типів товарів безпосередньо зумовлюється наявністю на ринку пов'язаних з ними товарів. Споживчі уподобання значною мірою впливають на умови встановлення рівноваги в економічній системі, а урахування того, чи іншого чинника може суттєво змінити характеристики станів рівноваги і процес ціноутворення в економічній системі.

Мета роботи — з'ясування впливу залежності коефіцієнтів споживання, що описують споживчі уподобання суб'єктів економічної системи, від

обсягів випуску продукції на умови встановлення рівноваги економічної системи, з урахуванням інших чинників впливу в економічній системі, таких як монополізм.

Будемо визначати ті характеристики станів рівноваги економічної системи, перебування в яких буде прийнятним за рівнем споживання для всіх суб'єктів економічної системи.

У раніше розглянутих спробах розв'язати поставлену задачу [3] виникли додаткові припущення про розміщення ненульових елементів матриці попиту, яка складається з коефіцієнтів споживання. У дослідженні використовуватимемо альтернативний підхід до розв'язання задачі, щоб уникнути таких припущень.

ОПИС МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ

Нехай економічна система утворена сукупністю l суб'єктів, кожен з яких є споживачем товарів. Усього $n < l$ різновидів товарів, а їх обсяг виробництва характеризує вектор випусків $x = \{x_i\}_{i=1}^n$. Споживчі уподобання суб'єктів економічної системи задаватиме матриця попиту $C(x) = \|c_{kj}(x)\|_{k=1, j=1}^{n, l}$ із залежними від обсягів випуску товарів елементами. Споживачів в економічній системі вважатимемо ненасичуваними (вони мають намір витратити весь свій прибуток на придбання нових товарів). Матричний елемент $c_{kj}(x)$ визначає кількість k -го товару, яку бажає придбати j -й споживач, якщо обсяг випуску товарів задають компоненти вектора x . Очевидно, для кожного ненасичуваного споживача існує мінімальний набір необхідних йому товарів. Потреба у нових товарах, як і прибуток суб'єктів економічної системи, не є необмеженими, тому є і верхня межа споживчих інтересів. Цілком слушно вважати, що для елементів матриці попиту $C(x)$ справедливі оцінки $c_{kj}^0 \geq c_{kj}(x) \geq c_{kj}^1$, а також $\forall k = \overline{1, n} \exists j \in [1, l]: c_{kj}^1 \neq 0$. Останнє означатиме, що мінімальний набір товарів не повинен бути нульовим (інакше споживач не буде ненасичуваним).

Вважатимемо, що в економічній системі наявні n суб'єктів, які виробляють один з можливих типів товарів для підтримання свого функціонування. Решта $l - n$ суб'єктів економічної системи функціонують за рахунок зовнішніх надходжень. Ці надходження можуть бути сформовані в результаті оподаткування прибутків. Відповідно вектор $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^n$ вказуватиме рівні оподаткування суб'єктів економічної системи. Економічна система відкрита, і її суб'єкти можуть як отримувати додаткові обсяги товарів ззовні, так і експортувати частину своїх товарів. Таку взаємодію із зовнішнім оточенням задаватимуть вектори експорту $\{e_i\}_{i=1}^n$ та імпорту $\{i_i\}_{i=1}^n$. Серед виробників товарів є $n - t$ монополістів. Виробники отримують свій прибуток в результаті певної виробничої діяльності. Їх рішення використовувати один з можливих технологічних процесів для виготовлення обраного типу товарів описуватиме матриця $\|a_{kj} + b_{kj} / x_j\|_{k, j=1}^n$. Елементи технологічної матриці

задають ті витрати, які потрібні для виробництва одиниці випуску товару в натуральних показниках з урахуванням постійних витрат, що скеровуються на підтримання функціонування самого виробництва. Крім виготовлення власних нових товарів, суб'єкти економічної системи можуть володіти також і деяким запасом раніше вироблених товарів, як своїх, так і виготовлених іншими виробниками. Структуру запасу товарів в економічній системі характеризують елементи матриці $\|b_{kj}^1\|_{k,j=1}^n$. Її елементи b_{kj}^1 вказують на кількість запасу k -го товару у j -го суб'єкта економічної системи.

ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У моделі задаватимемо складові технологічної матриці $\|a_{kj}\|_{k,j=1}^n$, $\|b_{kj}\|_{k,j=1}^n$, елементи матриць $C^0 = \|c_{kj}^0\|_{k=1,j=1}^{n,l}$ і $C^1 = \|c_{kj}^1\|_{k=1,j=1}^{n,l}$, які визначають граничні споживчі набори товарів суб'єктів економічної системи. Відомі і елементи матриці $\|b_{kj}^1\|_{k,j=1}^n$. Весь запас товарів його власник може виставляти на продаж. Виняток становитимуть хіба що товари монополістів. Сенс монополізму полягає в тому, що їх товари не можуть виставлятися на продаж іншими суб'єктами, унаслідок чого відповідні елементи матриці запасу товарів мають бути нульовими. Згідно з економічними реаліями стратегія оподаткування, що описується вектором $(\pi_1^0, \dots, \pi_l^0)$, має бути визначеною. Щодо рівнів оподаткування монополістів $(\pi_{t+1}, \dots, \pi_n)$, то вони можуть розглядатись як важіль впливу на монополістів і залежати від стану рівноваги, у якому перебуватиме економічна система. Регулювання зовнішньоекономічної діяльності потребує фіксованих обсягів експорту (e_1^0, \dots, e_n^0) та імпорту товарів (i_1^0, \dots, i_n^0) . Стратегії поведінки виробників, крім заданих технологічних коефіцієнтів, передбачають певне додаткове планування їх діяльності. Для монополістів це означає, що вони самостійно здатні контролювати рівень цін своїх товарів $(p_{t+1}^0, \dots, p_n^0)$. Решта виробників здійснюють планування контролем значень обсягів випуск своїх товарів (x_1^0, \dots, x_t^0) .

Із досягненням рівноваги в економічній системі встановлюватиметься баланс між попитом на товари і їх пропозицією. Рівновага економічної системи з указаними характеристиками описується рівняннями [1, 3]:

$$\sum_{j=1}^l c_{kj}(x)y_j = x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - \sum_{i=1}^n b_{ki} + \sum_{i=1}^n b_{ki}^1 - e_k + i_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^n a_{kj} p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj} p_k + \\ & + \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj}^1 p_k = y_j \sum_{s=1}^n c_{sj}(x) p_s, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система рівнянь (1), (2) задає рівність попиту і пропозиції в економічній системі. За її допомогою можна визначити всі ймовірні стани рівноваги з прибутковим виробництвом суб'єктів економічної системи [1]. Характеристиками різних станів рівноваги будуть вектори $\{p_i\}_{i=1}^t$, $\{\pi_i\}_{i=t+1}^n$, $\{x_i\}_{i=t+1}^n$ і $\{y_i\}_{i=1}^l$. Саме стосовно цих векторів і розв'язуватимемо систему рівнянь (1), (2) з рештою заданих величин. Серед станів рівноваги одні є прийнятними для всіх споживачів, інші можуть бути для них небажаними. Вважатимемо, що прийнятні стани рівноваги визначаються значеннями ступенів задоволення потреб споживачів і компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^l$ мають належати інтервалу $y^m \leq y_i \leq y^M$, $i = \overline{1, l}$.

ОПТИМАЛЬНІ СТУПЕНІ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОТРЕБ СПОЖИВАЧІВ

Вважатимемо матрицю $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ продуктивною. Тоді із системи рівнянь (1) для частини індексів отримаємо вираз

$$\sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \tilde{z}_s^1 = \tilde{b}_k^0, \quad k = \overline{1, t}, \quad (3)$$

де введено нові невідомі величини

$$\tilde{z}_i^1 = \sum_{j=1}^l c_{ij}(x) y_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Права частина виразу (3) буде заданою

$$\tilde{b}_k^0 = x_k^0 - \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} - \sum_{i=1}^n b_{si}^1 \right], \quad k = \overline{1, t}.$$

Для решти індексів маємо

$$x_k = \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \tilde{z}_s^1 + \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \times \\ \times \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} - \sum_{i=1}^n b_{si}^1 \right], \quad k = \overline{t+1, n}, \quad (5)$$

Функціональну залежність величин \tilde{z}_s^1 , $s = \overline{1, n}$ від вектора x тимчасово не братимемо до уваги і розглядатимемо їх як незалежні змінні. Якщо із системи рівнянь (3) визначити вектор $\tilde{z}^1 = \{\tilde{z}_s^1\}_{s=1}^n$, то за ним з підсистеми рівнянь (5) можна однозначно визначити і невідомі обсяги випуску продукції монополістів $\{x_i\}_{i=t+1}^n$. Але у виразі (3) невідомих більше ніж рівнянь. У цьому випадку для вектора $\tilde{z}^1 = \{\tilde{z}_s^1\}_{s=1}^n$ можна застосувати параметричне подання розв'язку. Такого типу параметричне подання згідно з працею [1] описуватиме всі можливі додатні розв'язки задачі вигляду (3) стосовно вектора \tilde{z}^1 . Щоб використати це подання, необхідно виконати

певні вимоги. Для зменшення кількості параметрів потрібно щоби ранг матриці $\|(E - A)_{ks}^{-1}\|_{k,s=1}^{t,n}$ дорівнював t . Із припущення про продуктивність матриці $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ впливатиме існування невідродженої матриці $\|(E - A)_{ks}^{-1}\|_{k,s=1}^t$ [4]. Далі слід вимагати, щоб елементи оберненої до неї матриці $\|H_{ki}^0\|_{k,i=1}^t$ задовольняли нерівності

$$(\tilde{b}^0, H_i^0) = \sum_{s=1}^t \tilde{b}_s^0 H_{si}^0 > 0, \quad i = \overline{1, t}.$$

Тоді можна записати параметричний розв'язок $\tilde{z}^1 = \tilde{z}^1(\tilde{\gamma})$ рівняння (3):

$$\tilde{z}^1(\tilde{\gamma}) = \left\{ (\tilde{b}^0, H_1^0) - \sum_{j=t+1}^n (d_j, H_1^0) \tilde{\gamma}_j \tilde{z}_j^*, \dots, (\tilde{b}^0, H_t^0) - \sum_{j=t+1}^n (d_j, H_t^0) \tilde{\gamma}_j \tilde{z}_j^*, \tilde{\gamma}_{t+1} \tilde{z}_{t+1}^*, \dots, \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_n^* \right\}, \quad (6)$$

У виразі (6)

$$(d_k, H_i^0) = \sum_{s=1}^t (E - A)_{sk}^{-1} H_{si}^0, \quad k = \overline{t+1, n},$$

для заданого додатного вектора $\tilde{z}^* = \{\tilde{z}_i^*\}_{i=t+1}^n$ мають виконуватись вимоги

$$(\tilde{b}^0, H_k^0) \geq (d_j, H_k^0) \tilde{z}_j^*, \quad j = \overline{t+1, n}, \quad k = \overline{1, t},$$

а компоненти вектора параметрів $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{t+1}, \dots, \tilde{\gamma}_n)$ належатимуть множині Γ^* , яка задається обмеженнями

$$(\tilde{b}^0, H_k^0) > \sum_{j=t+1}^n (d_j, H_k^0) \tilde{\gamma}_j \tilde{z}_j^*, \quad k = \overline{1, t};$$

$$\tilde{\gamma}_i > 0, \quad i = \overline{t+1, n};$$

$$\sum_{j=t+1}^n \tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{n+1} = 1.$$

Параметр $\tilde{\gamma}_{n+1}$ відіграє роль масштабного доданка, тому він може бути і від'ємним. Якщо з рівняння (5) за вектором $\tilde{z}^1(\tilde{\gamma})$ визначити рівноважний вектор обсягів випуску товарів монополістами $\{x_i\}_{i=t+1}^n$, його компоненти залежатимуть від вибору вектора параметрів $\tilde{\gamma}$. Через функціональну залежність елементів матриці попиту $C(x)$ від вектора x тепер вони теж залежатимуть від вектора $\tilde{\gamma}$. Позначимо:

$$c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) = c_{kj}(x), \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Як і для елементів матриці $C(x)$, для елементів матриці $\|c_{kj}^*(\tilde{\gamma})\|_{k=1, j=1}^{n, l}$ мають зберегтися обмеження

$$c_{kj}^0 \geq c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) \geq c_{kj}^1, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}, \quad \tilde{\gamma} \in \Gamma^*. \quad (7)$$

Урахуємо тепер зв'язок (4) між величинами $\tilde{z}_s^1(\tilde{\gamma})$, $s = \overline{1, n}$ і компонентами вектора x , унаслідок чого отримаємо рівняння для знаходження рівноважних значень ступенів задоволення потреб споживачів

$$\sum_{j=1}^l c_{ij}^*(\tilde{\gamma}) y_j = \tilde{z}_i^1(\tilde{\gamma}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Очевидно, що область значень компонентів вектора y залежить від того, якими будуть вибрані значення компонентів вектора параметрів $\tilde{\gamma}$ з множини Γ^* . Сама ж система рівнянь (8) не дає змоги однозначно визначити компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^l$. З'ясуємо, чи можна визначати характеристики, прийнятні для суб'єктів економічної системи, ґрунтуючись на принципах оптимальності. Визначити прийнятні значення ступенів задоволення потреб споживачів, тобто з інтервалу $y^m \leq y_i \leq y^M$, $i = \overline{1, n}$, можна, розв'язавши екстремальну задачу за фіксованого вектора $\tilde{\gamma}$ з множини Γ^*

$$\min_{(y_1, \dots, y_n)} \tilde{\mathcal{F}}^0(\tilde{\gamma}), \quad \tilde{\mathcal{F}}^0(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\beta_j(\tilde{\gamma}) - y_j]^2, \quad (9)$$

з урахуванням рівностей (8) як додаткових вимог. Використаємо раніше отримані результати [5]. Тоді величини $\{\beta_i(\tilde{\gamma})\}_{i=1}^n$ задаватимемо виразами

$$\beta_s(\tilde{\gamma}) = \Delta_1 \alpha_s + \sum_{k=1}^t \alpha_k c_{ks}^*(\tilde{\gamma}), \quad s = \overline{1, t},$$

$$\beta_s(\tilde{\gamma}) = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^t \alpha_k c_{ks}^*(\tilde{\gamma}), \quad s = \overline{t+1, n},$$

а задачу (9) розв'язуватимемо за додаткових вимог

$$\sum_{j=1}^n c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) y_j + \Delta_1 y_k = \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}), \quad k = \overline{1, t}. \quad (10)$$

Відповідно до результатів [5] значення ступенів задоволення потреб споживачів (y_1, \dots, y_n) , які розв'язуватимуть екстремальну задачу (9), (10), описуватимуться рівняннями

$$y_s = \Delta_1 (\alpha_s - \lambda_s) + \sum_{k=1}^t (\alpha_k - \lambda_k) c_{ks}^*(\tilde{\gamma}), \quad s = \overline{1, t}; \quad (11)$$

$$y_s = \Delta_0 \alpha_s^1 + \sum_{k=1}^t (\alpha_k - \lambda_k) c_{ks}^*(\tilde{\gamma}), \quad s = \overline{t+1, n}, \quad (12)$$

де величини $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^t$ будуть розв'язком операторного рівняння

$$\alpha_k - \lambda_k = \tilde{\Theta}_k^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t), \quad k = \overline{1, t}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_k^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t) &= \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^*(\tilde{\gamma}) \alpha_s^1 \right) - \\ &- \frac{1}{\Delta_1} \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) (\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t c_{jk}^*(\tilde{\gamma}) (\alpha_j - \lambda_j) \right) - \\ &- \frac{1}{\Delta_1^2} \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^*(\tilde{\gamma}) c_{ji}^*(\tilde{\gamma}) \right] (\alpha_j - \lambda_j), \quad k = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

За кожного фіксованого вектора $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{t+1}, \dots, \tilde{\gamma}_n)$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma^*$ у рівняннях (10)–(13) сталі Δ_0 , Δ_1 є заданими, їх значення вибираються з умов

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=n+1}^l c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) - \Delta_1 \right) (\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma})) > 0, \quad k = \overline{1, t}, \\ y^m \left| \sum_{j=n+1}^l c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) - \Delta_1 \right| &\leq \left| \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) \right| \leq y^M \left| \sum_{j=n+1}^l c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) - \Delta_1 \right|, \quad k = \overline{1, t}, \end{aligned}$$

Заданими є і сукупність параметрів $\{\alpha_{t+1}^1, \dots, \alpha_n^1\}$. Для існування розв'язку зі встановленими обмеженнями на вектор ступенів задоволення потреб споживачів достатньо виконати такі умови: для величин σ^m , σ^M , вибраних з оцінок

$$\begin{aligned} y^m &\leq \sigma^m \left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^t c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \right) \leq \sigma^M \left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^t c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \right) \leq y^M, \quad s = \overline{1, t}; \\ y^m - \Delta_0 \alpha_s^1 &\leq \sigma^m \sum_{k=1}^t c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \leq \sigma^M \sum_{k=1}^t c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \leq y^M - \Delta_0 \alpha_s^1, \quad s = \overline{t+1, n}, \end{aligned}$$

і сталих Δ_0 , Δ_1 справедливі нерівності

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_s^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{k=t+1}^n c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \alpha_k^1 \right) - \frac{\sigma^m}{\Delta_1^2} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^t c_{sk}^*(\tilde{\gamma}) \times \right. \\ &\times c_{ik}^*(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{si}^*(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{is}^*(\tilde{\gamma}) \left. \right) \leq \sigma^M, \quad s = \overline{1, t}; \\ &\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_s^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{k=t+1}^n c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \alpha_k^1 \right) - \frac{\sigma^M}{\Delta_1^2} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^t c_{sk}^*(\tilde{\gamma}) \times \right. \\ &\times c_{ik}^*(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{si}^*(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{is}^*(\tilde{\gamma}) \left. \right) \geq \sigma^m, \quad s = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Виникає питання як вибирати вектор $\tilde{\gamma}$ з множини Γ^* . Припустімо, що він має бути розв'язком системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^n c_{kj}^*(\tilde{\gamma})y_j + \Delta_1 y_k = \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}), \quad k = \overline{t+1, n}. \quad (14)$$

або відповідно до подання (6)

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{1}{\Delta_0 \tilde{z}_k^*} \left(\sum_{j=1}^n c_{kj}^*(\tilde{\gamma})y_j + \Delta_1 y_k \right), \quad k = \overline{t+1, n}. \quad (15)$$

Сформулюємо умови існування додатного розв'язку із заданими властивостями системи рівнянь (11)–(13), (15).

Теорема 1. Нехай для заданих значень сталих Δ_0 , Δ_1 і параметрів $\{\alpha_{t+1}^1, \dots, \alpha_n^1\}$, а також вибраних на підставі оцінок

$$y^m \leq \sigma^m \left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^t c_{ks}^1 \right) \leq \sigma^M \left(\Delta_1 + \sum_{k=1}^t c_{ks}^0 \right) \leq y^M, \quad s = \overline{1, t};$$

$$y^m - \Delta_0 \alpha_s^1 \leq \sigma^m \sum_{k=1}^t c_{ks}^1 \leq \sigma^M \sum_{k=1}^t c_{ks}^0 \leq y^M - \Delta_0 \alpha_s^1, \quad s = \overline{t+1, n},$$

величин σ^m , σ^M справедливі нерівності

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_s^M - \sum_{k=t+1}^n c_{ks}^1 \alpha_k^1 \right) - \frac{\sigma^m}{\Delta_1^2} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^t c_{sk}^1 \times \right. \\ \left. \times c_{ik}^1 + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{si}^1 + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{is}^1 \right) \leq \sigma^M, \quad s = \overline{1, t};$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_s^m - \sum_{k=t+1}^n c_{ks}^0 \alpha_k^1 \right) - \frac{\sigma^M}{\Delta_1^2} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^t c_{sk}^0 \times c_{ik}^0 + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{si}^0 + \Delta_1 \sum_{i=1}^t c_{is}^0 \right) \geq \sigma^m, \quad s = \overline{1, t},$$

де

$$\tilde{z}_i^m = (\tilde{b}^0, H_i^0) - \frac{y^M}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^+} (d_j, H_i^0) \left(\sum_{k=1}^n c_{jk}^0 + \Delta_1 \right) +$$

$$+ \frac{y^m}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^-} |(d_j, H_i^0)| \left(\sum_{k=1}^n c_{jk}^1 + \Delta_1 \right) > 0, \quad i = \overline{1, t};$$

$$\tilde{z}_i^M = (\tilde{b}^0, H_i^0) - \frac{y^m}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^+} (d_j, H_i^0) \left(\sum_{k=1}^n c_{jk}^1 + \Delta_1 \right) +$$

$$+ \frac{y^M}{\Delta_0} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i^-} |(d_j, H_i^0)| \left(\sum_{k=1}^n c_{jk}^0 + \Delta_1 \right) \geq \tilde{z}_i^m, \quad i = \overline{1, t};$$

$$\mathcal{Q}_i^+ = \{k \in [t+1, n], \quad k : (d_k, H_i^0) > 0\}, \quad i = \overline{1, t};$$

$$\mathcal{Q}_i^- = \{k \in [t+1, n], \quad k : (d_k, H_i^0) < 0\}, \quad i = \overline{1, t}.$$

Тоді існує додатний розв'язок задачі (11)–(13), (15). Розв'язком будуть вектори $\{y_i\}_{i=1}^n$, $\{\tilde{\gamma}_i\}_{i=t+1}^n$ і $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^t$. Крім того, компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^n$ задовольнятимуть обмеження $y^m \leq y_i \leq y^M$, $i = \overline{1, n}$.

Доведення. Унаслідок припущення про властивості елементів матриці $\|c_{kj}^*(\tilde{\gamma})\|_{k=1, j=1}^{n, l}$, для яких мають виконуватись обмеження (7)

$$c_{kj}^0 \geq c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) \geq c_{kj}^1, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}, \quad \tilde{\gamma} \in \Gamma^*,$$

з виразу (15) отримаємо граничні значення параметрів $\{\tilde{\gamma}_{t+1}, \dots, \tilde{\gamma}_n\}$:

$$\tilde{\gamma}_k^m = \frac{y^m}{\Delta_0 \tilde{z}_k^*} \left(\sum_{j=1}^n c_{kj}^1 + \Delta_1 \right), \quad k = \overline{t+1, n};$$

$$\tilde{\gamma}_k^M = \frac{y^M}{\Delta_0 \tilde{z}_k^*} \left(\sum_{j=1}^n c_{kj}^0 + \Delta_1 \right), \quad k = \overline{t+1, n},$$

якщо всі компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^n$ міститимуться в інтервалі $[y^m, y^M]$. За цими граничними значеннями утворимо множину

$$\tilde{\Gamma}^1 = \left\{ \tilde{\gamma} \in R_+^{n-t}, \quad \left| \frac{(\tilde{\gamma}_j^M + \tilde{\gamma}_j^m)}{2} - \tilde{\gamma}_j \right| \leq \frac{(\tilde{\gamma}_j^M - \tilde{\gamma}_j^m)}{2}, \quad j = \overline{t+1, n} \right\} \subset \Gamma^*,$$

на якій також мають виконуватись обмеження (7).

Розглянемо дію оператора $\{\tilde{\Theta}_i^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$ на вектор з множини

$$\mathcal{M}_\gamma = \left\{ \alpha_k - \lambda_k \in R, \quad \left| \frac{(\sigma^M + \sigma^m)}{2} - \alpha_k + \lambda_k \right| \leq \frac{(\sigma^M - \sigma^m)}{2}, \quad k = \overline{1, t} \right\}$$

за довільно вибраного вектора $\tilde{\gamma}$ з множини $\tilde{\Gamma}^1$. Для кожного вектора з множини \mathcal{M}_γ та вектора $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}^1$ на підставі умов теореми для оператора $\{\tilde{\Theta}_i^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$ можна записати оцінки зверху

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_k^{\tilde{\gamma}} &\leq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^1 \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1^2} \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^1 c_{ji}^1 \right] \times \\ &\times (\alpha_j - \lambda_j) - \frac{1}{\Delta_1} \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^1 (\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t c_{jk}^1 (\alpha_j - \lambda_j) \right) \leq \\ &\leq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^1 \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1} \sigma^m \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^1 + \sum_{j=1}^t c_{jk}^1 \right) - \\ &- \frac{1}{\Delta_1^2} \sigma^m \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^1 c_{ji}^1 \right] \leq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^M - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^1 \alpha_s^1 \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\Delta_1} \sigma^m \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^1 + \sum_{j=1}^t c_{jk}^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1^2} \sigma^m \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^1 c_{ji}^1 \right] \leq \sigma^M, \quad k = \overline{1, t},$$

і оцінки знизу

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_k^{\tilde{\gamma}} &\geq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^0 \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1^2} \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^0 c_{ji}^0 \right] \times \\ &\times (\alpha_j - \lambda_j) - \frac{1}{\Delta_1} \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^0 (\alpha_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^t c_{jk}^0 (\alpha_j - \lambda_j) \right) \geq \\ &\geq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^0 \alpha_s^1 \right) - \frac{1}{\Delta_1^2} \sigma^M \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^0 c_{ji}^0 \right] - \\ &- \frac{1}{\Delta_1} \sigma^M \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^0 + \sum_{j=1}^t c_{jk}^0 \right) \geq \frac{\Delta_0}{\Delta_1^2} \left(\tilde{z}_k^m - \sum_{s=t+1}^n c_{sk}^0 \alpha_s^1 \right) - \\ &- \frac{1}{\Delta_1^2} \sigma^M \sum_{j=1}^t \left[\sum_{i=1}^n c_{ki}^0 c_{ji}^0 \right] - \frac{1}{\Delta_1} \sigma^M \left(\sum_{j=1}^t c_{kj}^0 + \sum_{j=1}^t c_{jk}^0 \right) \geq \sigma^m, \quad k = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Виконання цих оцінок означатиме, що за будь-якого вектора $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}^1$ оператор $\{\tilde{\Theta}_i^{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}, \alpha_1 - \lambda_1, \dots, \alpha_t - \lambda_t)\}_{i=1}^t$ переводитиме множину \mathcal{M}_γ саму в себе. Тоді для величин $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^t$ будуть справедливими обмеження

$$\sigma^m \leq \alpha_k - \lambda_k \leq \sigma^M, \quad k = \overline{1, t}.$$

Відповідно для векторів $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}^1$ і $\{\alpha_i - \lambda_i\}_{i=1}^t \in \mathcal{M}_\gamma$ з виразів (11), (12) впливатимуть оцінки знизу

$$y_s \geq \Delta_1 \sigma^m + \sigma^m \sum_{k=1}^t c_{ks}^1 \geq y^m, \quad s = \overline{1, t};$$

$$y_s \geq \Delta_0 \alpha_s^1 + \sigma^m \sum_{k=1}^t c_{ks}^1 \geq y^m, \quad s = \overline{t+1, n},$$

і оцінки зверху

$$y_s \leq \Delta_1 \sigma^M + \sigma^M \sum_{k=1}^t c_{ks}^0 \leq y^M, \quad s = \overline{1, t};$$

$$y_s \leq \Delta_0 \alpha_s^1 + \sigma^M \sum_{k=1}^t c_{ks}^0 \leq y^M, \quad s = \overline{t+1, n}.$$

Таким чином, якщо для розв'язання системи рівнянь (11)–(13), (15) використати ітераційний процес і початкові вектори $\{y_i^{[0]}\}_{i=1}^n$, $\{\alpha_i^{[0]} - \lambda_i^{[0]}\}_{i=1}^t$ та $\tilde{\gamma}^{[0]}$ вибрати відповідно з множин

$$\left\{ y_k \in R, \quad \left| \frac{(y^M + y^m)}{2} - y_k \right| \leq \frac{(y^M - y^m)}{2}, \quad k = \overline{1, n} \right\},$$

\mathcal{M}_γ і $\tilde{\Gamma}^1$, отримаємо, що подальші ітерації теж належатимуть до цих множин. У результаті на підставі теорем про нерухому точку можемо зробити висновок про існування розв'язку з потрібними властивостями задачі (11) – (13), (15).

Теорему доведено.

Так визначені компоненти вектора $\{y_i\}_{i=1}^n$ задовольнятимуть рівняння (10), (14). А щоб значення ступенів задоволення потреб споживачів відповідали одному зі станів рівноваги для компонентів вектора $\{y_i\}_{i=1}^l$, мають бути справедливими рівності

$$\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k = \sum_{j=n+1}^l c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) y_j, \quad k = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Тоді вони розв'язуватимуть і рівняння (8). Вважатимемо надалі, що у матриці $\left\| \sum_{s=n+1}^l c_{ks}^1 c_{js}^1 \right\|_{k,j=1}^n$ найбільше власне значення $\tilde{\lambda}^1$ додатне. Щоб знайти

потрібні значення ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i\}_{i=1}^l$, використаємо екстремальну задачу [5]

$$\min_{(y_{n+1}, \dots, y_l)} \tilde{\mathcal{F}}^1(\tilde{\gamma}), \quad \tilde{\mathcal{F}}^1 = \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^l [\beta_j(\tilde{\gamma}) - y_j]^2 \quad (17)$$

за додаткових вимог (16). Розв'язок задачі має задовольняти і обмеження

$$y^m \leq y_k \leq y^M, \quad k = \overline{n+1, l}. \quad (18)$$

Відповідно до результатів [5] існуватиме додатний вектор $\{\hat{\alpha}_i^1\}_{i=1}^n$, за якого величини $\{\beta_i(\tilde{\gamma})\}_{i=1}^n$ будуть означені виразом

$$\beta_s = \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k^1 c_{ks}^*(\tilde{\gamma}), \quad s = \overline{n+1, l},$$

а задача (16)–(18) розв'язна.

Справді, для екстремальної задачі (16), (17) можна записати функцію Лагранжа

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \left[\sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k^1 c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) - y_j \right]^2 + \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k^1 \left[\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k - \sum_{j=n+1}^l c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) y_j \right].$$

За такої функції Лагранжа для будь-якого довільно вибраного ненульового вектора (y_1, \dots, y_n) справедливі нерівності

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{L}}}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j = \sum_{s=1}^l y_s^2 > 0,$$

а розв'язок екстремальної задачі (16), (17) задовольнятиме вимоги

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial y_s} = y_s - \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j^1 c_{js}^*(\tilde{\gamma}) + \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k^1 c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) = 0, \quad s = \overline{n+1, l}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{\lambda}_k^1} = \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k - \sum_{j=n+1}^l c_{kj}^*(\tilde{\gamma}) y_j = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (20)$$

На підставі вимог (19), (20) отримаємо рівняння на множники Лагранжа $\{\hat{\lambda}_i^1\}_{i=1}^n$:

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=n+1}^l c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) c_{js}^*(\tilde{\gamma}) \right] (\hat{\alpha}_j^1 - \hat{\lambda}_j^1) = \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо матриця $\left\| \sum_{s=n+1}^l c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) c_{js}^*(\tilde{\gamma}) \right\|_{k,j=1}^n$ нерозкладна, то згідно з теоремою

Перона–Фробеніуса [6] існує додатний власний вектор, який відповідає найбільшому власному значенню $\tilde{\lambda}$. Якщо ж матриця розкладна, власний вектор буде принаймні невід'ємним. Нехай $\{(1+v)\hat{\alpha}_i^1 - \hat{\lambda}_i^1\}_{i=1}^n$ і є таким вектором. Тоді рівняння на множники Лагранжа подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\alpha_k^1 + v\alpha_k^1 - \lambda_k^1) &= v \sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=n+1}^l c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) c_{js}^*(\tilde{\gamma}) \right] \hat{\alpha}_j^1 + \\ &+ \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

звідки випливатиме, що для гарантованого існування ненульових множників Лагранжа $\{\hat{\lambda}_i^1\}_{i=1}^n$ достатньо відповідним чином підібрати компоненти векторів $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^n$ і значення параметра v . У випадку, якщо в матриці

$\left\| \sum_{s=n+1}^l c_{ks}^1 c_{js}^1 \right\|_{k,j=1}^n$ найбільше власне значення $\tilde{\lambda}^1$ додатне, то з нерівностей

$$\sum_{s=n+1}^l c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) c_{js}^*(\tilde{\gamma}) \geq \sum_{s=n+1}^l c_{ks}^1 c_{js}^1, \quad k, j = \overline{1, n},$$

впливатиме $\tilde{\lambda} \geq \tilde{\lambda}^1 > 0$. У результаті рівноважні значення ступенів задоволення потреб споживачів $\{y_i\}_{i=n+1}^l$ визначатимуться за формулою

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{k=1}^n c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) \sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=n+1}^l c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) c_{js}^*(\tilde{\gamma}) \right] v \hat{\alpha}_j^1 + \\ &+ \frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{k=1}^n c_{ks}^*(\tilde{\gamma}) (\tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) - \Delta_0 \tilde{z}_k^1(\tilde{\gamma}) + \Delta_1 y_k - v \alpha_k^1), \quad s = \overline{n+1, l}. \end{aligned}$$

Вибір величин $\{\alpha_i^1\}_{i=1}^n$ і v , крім забезпечення ненульових значень множників Лагранжа $\{\hat{\lambda}_i^1\}_{i=1}^n$, може гарантувати і виконання вимоги (18).

Зауваження. Достатніми умовами справедливості обмежень (18) для розв'язку задачі (16), (17) є

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{\lambda}^0} \sum_{k=1}^n c_{ks}^1 \sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=n+1}^l c_{ks}^1 c_{js}^1 \right] v \hat{\alpha}_j^1 + \\ & + \frac{1}{\tilde{\lambda}^0} \sum_{k=1}^n c_{ks}^1 (\tilde{z}_k^m - \Delta_0 \tilde{z}_k^m + \Delta_1 y^m - v \alpha_k^1) \geq y^m, \quad s = \overline{n+1, l}; \\ & \frac{1}{\tilde{\lambda}^1} \sum_{k=1}^n c_{ks}^0 \sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=n+1}^l c_{ks}^0 c_{js}^0 \right] v \hat{\alpha}_j^1 + \\ & + \frac{1}{\tilde{\lambda}^1} \sum_{k=1}^n c_{ks}^0 (\tilde{z}_k^M - \Delta_0 \tilde{z}_k^M + \Delta_1 y^M - v \alpha_k^1) \leq y^M, \quad s = \overline{n+1, l}. \end{aligned}$$

де $\tilde{\lambda}^0$ — найбільше власне значення матриці $\left\| \sum_{s=n+1}^l c_{ks}^0 c_{js}^0 \right\|_{k,j=1}^t$.

ОПТИМАЛЬНІ ЦІНИ ТОВАРІВ

Ціни є рівноважними, якщо вони задовольнятимуть рівняння вигляду (2). Нехай технології виробництва товарів такі, що для деякої додатної сталої \tilde{C}_0 справедлива оцінка

$$a_{sj} x_j \geq \tilde{C}_0, \quad j = \overline{1, t}, \quad s = \overline{1, t}.$$

Для запобігання надлишковому нагромадженню товарів, коли запас певних типів товарів в економічній системі такий, що їх подальше виготовлення може призвести до перевиробництва і порушення рівноваги, на елементи матриці запасу товарів установимо обмеження

$$\frac{y_j^m}{\pi_j} c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1 \geq -\tilde{C}, \quad j = \overline{1, t}, \quad s = \overline{1, t}. \quad (21)$$

якщо виконуватиметься вимога

$$\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 > 0, \quad j = \overline{1, t}, \quad s = \overline{1, t}. \quad (22)$$

де $\tilde{C}_0 \geq \tilde{C}$, а y_j^M і y_j^m — відповідно найвищий і найнижчий прийнятні для j -го суб'єкта економічної системи рівні задоволення потреб. Спектральний радіус матриці $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ вважається меншим за одиницю, тому вираз (2) можна трансформувати до вигляду

$$p_k = \hat{\mathcal{P}}_k^x(p), \quad k = \overline{1, t}; \quad (23)$$

$$\hat{\mathcal{P}}_k^x(p) = \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j}{\pi_j x_j} \times \right]$$

$$\times \sum_{s=1}^n c_{sj}(x) p_s + \frac{1}{x_j} \sum_{s=1}^n (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \Big], \quad k = \overline{1, t}.$$

Теорема 2. За умови виконання обмежень (21), (22) і нерівностей

$$\sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1, t]} \left[\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right] < 1,$$

де стала \tilde{C} така, що

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 - \frac{1}{x_j^0} \rho_1 \tilde{C} \right] > 0, \quad k = \overline{1, t}; \\ \rho_1 = & \frac{\sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \left[x_j^0 \sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j} \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0 + \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 \right]}{1 - \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1, t]} \left(\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj} + b_{sj} - b_{sj}^1 \right)}, \end{aligned}$$

існує додатний розв'язок рівняння (23).

Доведення. Для суми $\sum_{k=1}^t \hat{\mathcal{P}}_k^x(p)$ справедливий ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t \hat{\mathcal{P}}_k^x(p) & \leq \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^n c_{sj}(x) p_s + \right. \\ & \left. + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^n (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \right] \leq \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \right. \\ & \left. + \frac{y_j^M}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^n c_{sj}^0 p_s + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^n (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \right] \leq \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \times \\ & \times \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^n c_{sj}^0 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 \right] + \\ & + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1, t]} \left[\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right] \sum_{s=1}^t p_s. \end{aligned}$$

Урахувавши обмеження (21), отримаємо, що завжди можна підібрати значення параметра $\rho_0 > 0$, для якого виконуватиметься оцінка знизу:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{P}}_k^x(p) &\geq \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^n c_{sj}(x) p_s + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^n (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \right] \geq \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^n c_{sj}^1 p_s + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^n (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s \right] \geq \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \times \\
 &\quad \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^n c_{sj}^1 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 \right] + \rho_0 \times \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^t \left(\frac{y_j^m}{\pi_j} c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right) \geq \\
 &\quad \geq \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^n c_{sj}^1 p_s^0 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 \right] - \rho_0 t \tilde{C} \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \geq \rho_0, \quad k = \overline{1, t}.
 \end{aligned}$$

Тепер, якщо задати параметр ρ так, щоб задовольнити нерівності

$$\frac{\sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \left[x_j^0 \sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^M}{\pi_j} \sum_{s=t+1}^n c_{sj}^0 p_s^0 + \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 \right]}{1 - \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1, t]} \left(\frac{y_j^M}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right)} \leq \rho;$$

$$\sum_{j=1}^t (E-A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^n a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j^m}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^n c_{sj}^1 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^n b_{sj} p_s^0 - \frac{1}{x_j^0} \rho \tilde{C} \right] > 0, \quad k = \overline{1, t},$$

то компактна опукла множина

$$\left\{ p_k \geq \rho_0, \quad k = \overline{1, t}, \quad \sum_{k=1}^t p_k \leq \rho \right\}$$

переводитиметься оператором $\{\hat{\mathcal{P}}_k^x(p)\}_{k=1}^t$ сама в себе. У результаті на підставі теорем про нерухому точку [7] встановимо існування додатного розв'язку рівняння (23).

Теорему доведено.

Зауваження. Виконання умов теореми гарантуватиме існування розв'язку рівняння (23) і у випадку, якщо стала \tilde{C}_0 така, що $\tilde{C}_0 < \tilde{C}$.

ВИСНОВКИ

У цьому дослідженні доведено існування рівноваги в економічній системі з монополістами та споживчими уподобаннями, що формуються з урахуванням інформації про обсяги випуску товарів. Існування рівноваги означає розв'язність рівнянь, якими вона описується. Кожному їх розв'язку відповідатиме один з можливих станів рівноваги. Установлені умови на задані економічні характеристики гарантуватимуть розв'язність рівнянь рівноваги в заданій області значень, тобто вказано умови реалізації станів рівноваги із заданими властивостями. Такі стани рівноваги гарантують забезпечення хоча б мінімального рівня задоволення потреб окремих суб'єктів економічної системи. Указано алгоритми знаходження рівноважних характеристик. На відміну від попередніх результатів [3] знято встановлені там вимоги на розміщення ненульових елементів матриці попиту. Указано граничні оцінки рівноважних значень економічних характеристик, за якими можна виокремити стани рівноваги з вибраними властивостями.

Роботу виконано за часткової підтримки НАН України (проект 0118U003196).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гончар М.С. Математичні основи інформаційної економіки / М.С. Гончар. — К.: Ін-т теор. фізики, 2007. — 464 с.
2. Debreu G. Existence of competitive equilibrium / G. Debreu // Handbook of Mathematical Economics, ed. by K.J.Arrow and M.D.Intriligator. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. — Vol. II. — P.698–742.
3. Махорт А.Ф. О влиянии потребительских предпочтений на равновесие в открытой экономической системе / А.Ф. Махорт // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — № 4. — С. 11–28.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
5. Махорт А.П. Про алгоритми визначення станів рівноваги відкритої економічної системи за наявності монополістів / А.П. Махорт // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С. 95–107.
6. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
7. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 442 с.

Надійшла 19.10.2017

ОГЛЯД МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ КЛАСИФІКАЦІЇ ВЕЛИКИХ ОБСЯГІВ СУПУТНИКОВИХ ДАНИХ

М.С. ЛАВРЕНЮК, О.М. НОВІКОВ

Анотація. З появою у вільному доступі великих обсягів супутникових даних дедалі більшої актуальності набуває розвиток методів машинного навчання на підставі геопросторових даних, зокрема, супутникових. Розглянуто основні методи машинного навчання і проаналізовано особливості та результати їх застосування до класифікації земного покриття за супутниковими даними високого розрізнення. Особливу увагу приділено глибинним архітектурам, зокрема згортковим нейронним мережам, що натеper є найбільш потужним і точним методом для розпізнавання візуальних образів. Визначено основні переваги методів глибинного навчання над традиційними підходами до задач класифікації, що використовувались протягом останніх десятиліть і ґрунтувались на експертних знаннях для виокремлення ознак із вхідних даних.

Ключові слова: машинне навчання, глибинне навчання, згорткова нейронна мережа, класифікація великих обсягів даних.

ОГЛЯД МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Машинним навчанням називається галузь комп'ютерних наук, яка вивчає методи навчання комп'ютеризованих систем на підставі даних без програмування їх поведінки [1]. Методи машинного навчання (machine-learning methods) відіграють важливу роль у багатьох аспектах сучасного суспільства: від веб-пошуку до фільтрації контенту в соціальних мережах. Системи на базі методів машинного навчання використовуються в системах машинного зору, для ідентифікації об'єктів на зображеннях, аналізу людської мови і текстів тощо [2, 3].

Традиційно розпізнавання образів (або їх класифікація) здійснювалось на основі інформаційних ознак. Отже, побудова систем розпізнавання образів (pattern-recognition) або систем, в основу яких покладено методи машинного навчання, потребувала експертних знань для розроблення методів та правил виокремлення ознак (feature extraction). Виокремлення ознак — це перетворення початкових «сирих» даних (таких як значення піксела на зображенні) у придатне подання (вектор ознак), з якого система навчання (класифікатор) може виявити і класифікувати образи, що подаються на вхід. Такі методи машинного навчання обмежені в можливостях обробляти природні дані в початковому вигляді [4].

Існуючі типи класифікаторів систематизовано за різними критеріями і їх короткі характеристики наведено в табл. 1 [5].

Таблиця 1. Різновидності підходів до класифікації залежно від критеріїв

Критерій	Тип	Короткий опис
Використання або невикористання навчальних даних	Класифікація з учителем	За підходами до класифікації з учителем вхідні дані поділяють, використовуючи набір зразків як навчальні дані
	Класифікація без учителя	Підходи до класифікації без учителя, відомі як кластеризація, не беруть до уваги мітки навчальних даних для класифікації вхідних даних
	Напівавтоматичне навчання	Навчання в напівавтоматичних підходах відбувається з використанням даних як з мітками, так і без них
Урахування або неврахування будь-якого припущення про розподіл вихідних даних	Параметричні класифікатори	Параметричні класифікатори ґрунтуються на припущенні, що функція щільності ймовірності для кожного класу відома
	Непараметричні класифікатори	Непараметричні класифікатори не обмежуються жодними припущеннями про розподіл вхідних даних
Розгляд одного класифікатора або ансамблю	Один класифікатор	Використовується єдиний класифікатор для призначення мітки для об'єкта
	Ансамбль класифікаторів	Під час визначення мітки для об'єкта враховуються результати кількох (ансамблю) класифікаторів
Використання або невикористання технології жорсткого поділу, де кожен об'єкт належить лише одному кластеру	Жорсткий класифікатор	Технології жорсткої класифікації не враховують подальші зміни різних класів
	М'який (нечіткий) класифікатор	Нечіткі класифікатори моделюють поступові граничні зміни, забезпечуючи оцінку ступеня подібності всіх класів
Видача класифікатором розподілу ймовірності належності до всіх класів	Імовірнісний класифікатор	Класифікатор здатен для заданого зразка оцінити розподіл ймовірності на множині класів
	Неймовірнісний класифікатор	Підхід визначає лише найбільш придатний клас для вхідного образу

Методи машинного навчання поділяють на дві основні категорії: навчання з учителем (supervised learning) та навчання без учителя (unsupervised learning). Методи навчання з учителем поділяють вхідні дані на набір поперед заданих класів. Для навчання такого класифікатора потрібна навчальна вибірка, яка містить марковані зразки різних класів. Методи навчання без учителя не потребують навчальних даних, проте вони не ставлять у відповідність вхідним даним певний клас, а лише вивчають закономірності у вхідних даних та поділяють вхідні дані на схожі між собою групи (кластери) [5]. Оскільки завданням роботи є аналіз методів класифікації, то надалі розглядатимемо лише методи навчання з учителем.

Класифікатори можна поділити на параметричні та непараметричні. До параметричних належать, наприклад, метод максимальної правдоподібності (maximum likelihood), оскільки він працює на припущенні, що функція

щільності ймовірності для кожного з класів подається гаусовим розподілом [6]. Непараметричні класифікатори, у свою чергу, не ґрунтуються на жодних припущеннях про розподіл вхідних даних. Ураховуючи той факт, що в більшості випадків функція розподілу невідома, непараметричні класифікатори набули значно більшого поширення.

Важливою властивістю класифікаторів є можливість не лише належності вхідних даних до певного класу (виходу класифікатора), а і визначення ймовірності належності до кожного з класів, на основі якої легко обрати найбільш достовірний клас [5]. Таку особливість має, наприклад, логістична регресія (logistic regression). Отримані ймовірності для кожного з класів можуть бути використані для постоброблення результатів класифікації, наприклад для об'єднання виходів з різних моделей в ансамблі, фільтрації шуму і т.ін.

Найбільш поширеними методами машинного навчання для задач класифікації [7] є штучні нейронні мережі (artificial neural network) [1], логістична регресія [1], метод опорних векторів Support Vector Machine (SVM) [1] та random forest [8].

Мета роботи — огляд сучасних методів машинного навчання, визначення їх переваг та недоліків для класифікації великих обсягів супутникових даних.

Штучна нейронна мережа

Штучна нейронна мережа — математична модель, а також її програмна або апаратна реалізація, побудована за принципом організації та функціонування біологічних нейронних мереж – мереж нервових клітин живого організму. Це поняття виникло у ході вивчення процесів, що перебігають у мозку, зокрема під час спроби моделювання цих процесів [9]. З математичного погляду навчання нейронних мереж — це багатопараметрична задача нелінійної оптимізації. Проблема навчання багатосарових нейронних мереж була вирішена в середині 1980-х років методом зворотного поширення помилки (backpropagation) [10]. Це ітеративний градієнтний алгоритм, який використовується з метою мінімізації помилки роботи нейронної мережі, що забезпечує отримання бажаного виходу. Для визначення якості роботи нейронної мережі використовують функцію втрат (loss function). Зазвичай за таку функцію обирають евклідову відстань, середньоквадратичну похибку або функцію кросентропії [11]. Мережа вважається навченою, якщо функція втрат набуває мінімального значення. Основна ідея цього методу полягає в поширенні сигналів помилки від виходів мережі до її входів у напрямку, зворотному прямому поширенню сигналів у звичайному режимі роботи мережі. Процедура зворотного поширення помилки можна застосувати кілька разів, щоб поширити градієнти через усі шари, починаючи з виходу (результату прямого проходження нейронної мережі) і до входів, що подаються в мережу. У процесі навчання нейронної мережі ваги зв'язків між нейронами коригуються на основі методу градієнтного спуску (gradient descent). На практиці зазвичай використовують модифікацію цього методу, коли процедура градієнтного спуску застосовується до груп навчальних прикладів. Такий підхід називається методом стохастичного градієнта (stochastic gradient descent), що значно пришвидшує час навчання нейронної мережі. Існують й

інші методи оптимізації: метод найменших квадратів (алгоритм Левенберга–Марквардта та алгоритм Ньютона–Гауса), квазіньютонівські методи (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS)), метод спряжених градієнтів тощо [12]. У 1986 р. Румельхарт запропонував метод моментів, що запам'ятовує зміну ваг на кожній ітерації і враховує її в подальшому коригуванні ваг нейронної мережі [13]. На відміну від методу стохастичного градієнта підхід намагається зберегти той же напрямок руху протягом коригування вагових коефіцієнтів, запобігаючи коливанням. Найсучаснішими методами оптимізації є AdaGrad (adaptive gradient algorithm), RMSProp (Root Mean Square Propagation), калманівський метод стохастичного градієнтного спуску (Kalman-based Stochastic Gradient Descent — KSGD) та Adam (Adaptive Moment Estimation) [14–16]. Ці методи є модифікаціями методу стохастичного градієнту і передбачають зміни коефіцієнта швидкості навчання під час навчання нейронної мережі.

У практичних завданнях навчання з учителем найчастіше використовуються нейронні мережі прямого поширення, такі як багат шаровий перцептрон (multilayer perceptron). Проходячи від одного шару до наступного, приховані нейрони обчислюють зважену суму входів на них з попереднього шару і застосовують нелінійну функцію – функцію активації до отриманого результату (рис. 1) [4]. Важливим критерієм функції активації є її диференційовність. Найбільш відомі функції активації: гіперболічний тангенс та сигмоїдна.

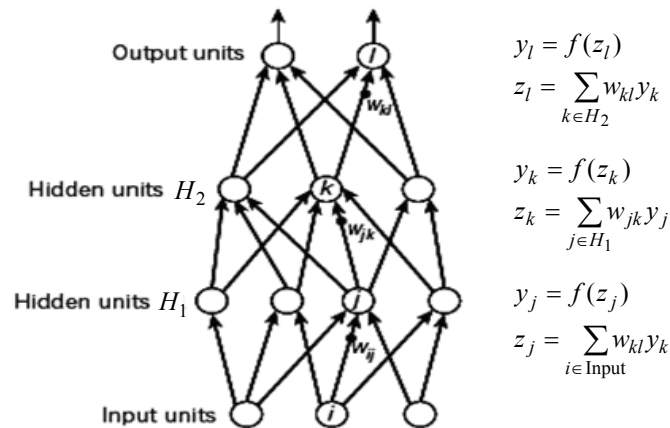


Рис. 1. Архітектура багат шарового перцептрона та принцип його роботи [4]

За теоремою про універсальну апроксимацію, доведена Хорніком у 1989 р., нейронна мережа з одним прихованим шаром може апроксимувати будь-яку неперервну функцію багатьох змінних з будь-якою точністю [17, 18]. Тому для пришвидшення навчання мережі більшість дослідників використовують архітектуру з одним прихованим шаром.

Перевагами класифікатора є його непараметричність — нейронна мережа не потребує жодних попередніх знань про розподіл вхідних даних та можливості їх поділу, які не є лінійно подільними.

Недоліки цього класифікатора:

- навчання нейронної мережі є повільним через велику кількість параметрів для оптимізації;

- збіжність до локального мінімуму;
- схильність до перенавчання (overfitting);
- є чорним ящиком.

Логістична регресія

Логістична регресія — статистичний регресійний метод моделювання залежності між векторною змінною та скаляром (вихідним значенням). Цей метод є узагальненням методу лінійної регресії з використанням softmax функції і застосовується у випадку, коли залежна змінна може набувати лише скінченну множину значень.

Параметри оцінюються на основі валідаційної вибірки, як правило, за допомогою методу максимальної правдоподібності, згідно з яким вибираються параметри, що максимізують значення функції правдоподібності на вибірці [1].

Основна відмінність та перевага такого підходу від інших моделей і алгоритмів є оцінка результату, яку можна було б розглядати як значення ймовірності для певного класу [5].

Недоліком цього підходу є нездатність побудови гіперплощини складного вигляду і, як наслідок, не дуже висока точність розпізнавання.

Метод опорних векторів

Метод опорних векторів — категорія універсальних мереж прямого поширення — запропонований в 1963 р. Вапніком [17]. Метод SVM набув поширення в останнє десятиліття для класифікації, регресії та ідентифікації новизни. Важливою властивістю SVM є те, що визначення параметрів моделі відповідає задачі випуклої оптимізації (convex optimization), і тому будь-який локальний розв'язок також є глобальним.

Такий підхід до класифікації передбачає розгляд поняття поділу (margin), яке визначається як мінімальна відстань від гіперплощини до зразків з вибірки. Подільна гіперплощина будується в такий спосіб, щоб максимізувати значення поділу. Розміщення гіперплощини визначається підмножиною точок даних, відомих як опорні вектори. Для того щоб зробити класифікатор більш потужним, у 1992 р. був запропонований спосіб створення нелінійного класифікатора, в основу якого покладено перехід від скалярних добутків до довільних ядер [4]. Це дозволило будувати нелінійні подільні гіперплощини, але не дало змоги працювати безпосередньо з початковими даними. Найбільш поширені ядра: поліноміальне, радіальна базисна функція, радіальна базисна функція Гауса та сигмоїд.

Перевагами методу опорних векторів є збіжність до глобального мінімуму та ефективність за обмеженої кількості навчальних даних [5].

Недоліки методу:

- модель SVM відносить новий приклад до тієї чи іншої категорії, що робить її не ймовірнісною, а лише бінарним класифікатором [19];
- використання ядер забезпечує роботу з лінійно неподільними множинами даних, але не дозволяє отримувати достовірні узагальнення для векторів, що віддалені від навчальних даних [4];

- навчання SVM є надто повільним і не може використовуватися для аналізу великих обсягів даних [20, 21].

Random forest

Random forest — один з поширених методів машинного навчання, що полягає у використанні ансамблю дерев рішень [21, 22]. Застосовується для задач класифікації, регресії і кластеризації. Дерево рішень будується на основі навчальної вибірки з використанням поняття інформаційної ентропії. На кожному вузлі дерева вибирається один атрибут з даних, який найбільш ефективно ділить навчальну множину на підмножини, що максимально розрізняються. Головним критерієм для вибору є нормований приріст інформації. Атрибут з найбільшим нормалізованим приростом інформації вибирається для прийняття рішення щодо поділу даних у вузлі дерева.

Більшість алгоритмів побудови дерев рішень є «жадібними». На кожному вузлі вибирається найкращий атрибут для поділу даних у поточний момент часу, що не дозволяє алгоритму з часом повернутись назад і змінити вже вибраний атрибут. Такий підхід не може гарантувати отримання оптимального розбиття.

Для навчання кожного дерева рішення, з яких складається класифікатор, навчальна вибірка ділиться на частини, що можуть містити спільні елементи. Ця технологія має назву «статистичний бутстреп» (bootstrapping) і дозволяє уникнути великої кореляції між деревами рішення, яка виникає під час навчання їх з використанням одних і тих самих даних [5].

З огляду на велику чутливість класифікатора до навчальних даних невелика зміна в навчальній вибірці призводить до зовсім інших поділів на підмножини. Для зменшення чутливості та подолання схильності до перенавчання використовують такі технології, як прорідження (pruning) уже отриманого дерева.

Перевагами цього алгоритму є можливість оцінювання значущості ознак у моделі, висока швидкість навчання та легка інтерпретація отриманої моделі.

Недоліки алгоритму: схильність до перенавчання, особливо з багатьма рівнями шумів, великий розмір отримуваних моделей.

ПОНЯТТЯ ГЛИБИННОГО НАВЧАННЯ ТА АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО ЙОГО РЕАЛІЗАЦІЇ

Розглянуті вище моделі мають неглибоку (shallow) архітектуру і значною мірою залежать від якості виокремлених вручну ознак. Виокремити ознаки, які були б стійкими і в разі повертання зображення, зміщення, зашумлення чи зміни кута спостереження, є дуже складним завданням.

Останнім часом дедалі більшого поширення набуває клас методів глибокого навчання [4], яке включає етап навчання ознак або подань.

Навчання ознак (feature learning) або навчання подань (representation learning) — набір методів для перетворення даних початкового вигляду в подання, що може бути використано для навчання класифікатора [4].

Методи глибинного навчання є методами навчання подань з багатьма їх рівнями, отриманими через об'єднання простих нелінійних модулів, кожен з яких переводить подання з одного рівня (починаючи з початкових даних) на вищий, більш абстрактний рівень. Об'єднання достатньої кількості таких трансформувальних забезпечує навчання функції будь-якої складності. Ключовим аспектом глибинного навчання є те, що шари особливостей не розробляються експертами в тій чи іншій галузі, а автоматично виокремлюються із вхідних даних.

Метод групового врахування аргументів (Group Method of Data Handling (GMDH)), запропонований українським науковцем Олексієм Івахненком, є одним з перших прикладів глибинного навчання для багатосарових нейронних мереж (у його працях розглядається мережа з 8 шарами), який використовує поліноми Колмогорова–Габора [23, 24]. Інші архітектури глибинного навчання, зокрема побудовані зі штучних нейронних мереж, беруть свій початок з неокогнітронів, запропонованого в 1980 р. Куніхіко Фукусімою [25]. Неокогнітрон — це перша двовимірна згортована нейронна мережа (Convolutional Neural Network (CNN)). Проте в цій мережі ваги налаштовувались не за допомогою методу зворотного поширення помилок, а локально за допомогою підходу «переможець отримує все» (winner-take-all). Тому цей тип мереж належить до навчання без учителя [12]. У 1989 р. метод зворотного поширення помилки успішно застосував Ян Лекун до глибинної двовимірної згорткової нейронної мережі в задачі розпізнавання рукописних цифр [26]. Після цього багато уваги приділялось розвитку глибинних мереж переконань (Deep Belief Networks (DBN)), які являють собою стек обмежених машин Больцмана (Restricted Boltzmann Machines (RBMs)), які, у свою чергу, є машиною Больцмана з тим обмеженням, що нейрони мусять формувати двочастковий граф: з'єднань між вузлами в межах групи немає [27]. Почали розвиватись також рекурентні глибинні мережі для оброблення послідовностей даних, що залежать від часу [28]. Проте в 1991 р. було помічено, що дуже глибокі нейронні мережі, особливо рекурентні нейронні мережі, складно навчити методом зворотного поширення помилки [29]. Ця проблема називається проблемою зникнення або вибуху градієнта (Vanishing or Exploding Gradients): з використанням стандартних функцій активації сукупна помилка сигналу зворотного поширення або дуже швидко прямує до нуля, або дуже швидко експоненційно зростає. Для подолання цієї проблеми в 1997 р. було запропоновано рекурентні мережі з моделлю довгої короткочасної пам'яті (Long Short-Term Memory (LSTM)) [30].

Після разового успішного використання Яном Лекуном згорткових нейронних мереж вони не здобули популярності [31]. І лише в 2012 р. А. Крижевський та інші науковці відновили інтерес до згорткових нейронних мереж після того, як показали вражаюче високу точність класифікації зображень на змаганні ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge (ILSVRC). На цьому змаганні нейронні мережі застосовувались до набору даних, що налічував понад мільйон зображень з інтернету, які містили більше ніж 1000 різних класів. Цей успіх розпочав революцію в напрямку комп'ютерного зору із застосуванням глибинних мереж у різноманітних напрямках.

Сьогодні методи глибинного навчання показують значні успіхи у вирішенні проблем, які неодноразово намагалися розв'язати протягом останніх десятиліть за допомогою штучного інтелекту: установлення рекордів у розпізнаванні зображень [32, 33], виявленні транспортних засобів [34], розпізнаванні людської мови [35], реконструкції структури мозку [36], перекладі з однієї мови на іншу [37].

Важливою вимогою для застосування методів глибинного навчання є наявність навчальних вибірок великого обсягу, оскільки недостатній обсяг навчальних даних спричиняє проблему «перенавчання» (overfitting), коли модель не узагальнює отриману під час навчання інформацію, а просто її запам'ятовує. У такому випадку на навчальних даних модель демонструє хороші результати, але не показує такої точності на невідомих даних.

АКТУАЛЬНІСТЬ МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ГЕОПРОСТОРОВОГО АНАЛІЗУ ТА СУПУТНИКОВОГО МОНІТОРИНГУ

Для геопросторового аналізу джерелами інформації є супутникові спостереження, дані безпілотних літальних апаратів та інші типи геопросторової інформації, наприклад, зібраної шляхом краудсорсингу (crowdsourcing). Нині людство вступило в нову інформаційну еру, яка характеризується наявністю у вільному доступі великих обсягів різноманітних безкоштовних супутникових даних. Протягом 2013–2016 рр. запущено декілька оптичних та радарних супутників високого розрізнення (10–30 м), що надають безоплатні дані. Sentinel-1A/B та Sentinel-2A були запущені Європейським космічним агентством (ESA) [38, 3] та Landsat-8 у межах проекту Landsat, що є спільною ініціативою між Геологічною службою США (USGS) та Національним управлінням з авіонавтики і дослідження космічного простору (NASA) [40]. Ці набори даних поновлюються регулярно та надаються користувачам у вільному доступі на оперативній основі. Це відкриває безпрецедентні можливості для геопросторового аналізу за переваги наявності часових рядів даних та можливості злиття інформації з різних джерел [41, 42]. Серед усіх продуктів, які можна отримати із супутникових даних, найважливішими є карти класифікації [43], що надзвичайно актуальні, особливо для країн, що розвиваються, оскільки офіційна статистика часто є неповною або недостовірною [44]. Карти класифікації використовуються для багатьох прикладних завдань, таких як моделювання та оцінювання змін довкілля, клімату, прогнозування врожайності і т.ін. Окрім використання карт класифікацій в різних прикладних завданнях, виникає потреба в регулярному оновленні карт класифікацій для ідентифікації вирубок лісів, аналізу пошкоджень від затоплень, посух або будь-яких інших надзвичайних ситуацій. Для більшості таких завдань не вистачає використання лише одного джерела даних, що змушує розробляти методи злиття даних з джерел з різними характеристиками, різним просторовим та часовим розрізненням [43, 45].

Різновиди класифікаторів, призначених для аналізу багатоспектральних даних, наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Різновиди підходів до класифікації багатоспектральних даних

Критерій	Класифікатори	Короткий опис
Урахування просторової інформації	Спектральні	Розглядаються гіперспектральні зображення без урахування просторових залежностей
	Просторові	Вхідні дані класифікуються з використанням інформації про «сусідні» (просторово прилегли) піксели
	Просторово-спектральні	Для класифікації гіперспектральних даних враховується сукупність спектральної та просторової інформації
Тип використуваної інформації	Попіксельний класифікатор	На вхід до класифікатора подаються вектори значень для кожного пікселя
	Об'єктний класифікатор	Кожному пікселю на зображенні ставиться у відповідність мітка таким чином, щоб піксели з однаковими мітками мали певні спільні візуальні характеристики. Класифікація проводиться на основі виділених об'єктів, а не лише одного пікселя

Специфіка класифікації геопросторових даних полягає в тому, що переважна більшість методів орієнтовані на попіксельну класифікацію — спостереження для кожного конкретного пікселя формують вхідний вектор, довжина якого дорівнює кількості спектральних каналів на знімку і на виході моделі кожному пікселю призначається значення певного класу. Для розв'язання задачі класифікації багатоспектральних супутникових знімків застосовується розвинений математичний апарат інтелектуальних методів.

АНАЛІЗ МЕТОДІВ КЛАСИФІКАЦІЇ ЗЕМНОГО ПОКРИВУ ТА ОРНИХ ЗЕМЕЛЬ ЗА СУПУТНИКОВИМИ ДАНИМИ

Донедавна найефективнішим методом для задач класифікації земного покриття за одним знімком вважався SVM. Це підтверджується результатами комплексного дослідження сучасних (state-of-the-art) попіксельних методів навчання з учителем для побудови карт земного покриття, отриманими Р. Катамі та співавторами [46]. В експерименті класифікація виконувалась за допомогою лише одного знімка. Майже такий самий результат показав нейромережвий підхід. Проте метод SVM потребує значно більше обчислювальних ресурсів. Його складність лежить у діапазоні між $O(n^2)$ та $O(n^3)$ залежно від типу ядра та реалізації [47, 48], у той же час виявляється складність багатослового перцептрона $O(n)$ [49, 50]. Як наслідок використовувати метод SVM для аналізу великих обсягів даних неможливо, а традиційні моделі багатослового перцептрона, які застосовувалися для розпізнавання зображень, через повну зв'язність між вузлами потерпають від «прокляття розмірності», тому не масштабуються на зображення вищого розрізнення, а величезна кількість параметрів швидко веде до перенавчання. У таких мережових моделях не береться до уваги просторова структура даних; однаково розглядаються вхідні піксели, розміщені далеко та близько один від одного.

Методи класифікації земного покриття на основі «великих» обсягів супутникових даних

Поява великих обсягів даних високого розрізнення не тільки відкриває нові можливості, але й породжує нові проблеми, зумовлені їх обробленням. Річ у тім, що методи геопросторового аналізу, класифікації та формування навчальної вибірки, що добре зарекомендували себе у разі оброблення одного знімка або невеликої території, виявляються непридатними для великих територій. Основні проблеми пов'язані з великими обсягами оброблюваних даних, малою площею покриття одним знімком, зашумленістю даних (хмарністю), необхідністю одночасної класифікації різночасових знімків і т.ін. Саме тому в останні роки найпоширенішими й ефективними методами класифікації типів земного покриття на основі різнорідних часових рядів супутникових даних стали ансамблеві методи [51–54] та методи глибинного навчання [55–60]. На відміну від загальноприйнятої схеми такі підходи працюють одразу з початковими даними та використовують усі наявні вхідні дані, а не виокремлюють лише важливі ознаки, як це було раніше [61, 62]. Методи глибинного навчання підтвердили свою ефективність для оброблення як оптичних (гіперспектральних та мультиспектральних), так і радарних зображень, побудови різних типів земної поверхні: ідентифікації доріг, будинків [55, 63–65]. Найбільш поширені моделі в глибинному навчанні для аналізу геопросторових даних — це згорткові нейронні мережі, глибинні автокодувальники (Deep Auto-encoders (DAE)), глибинні мережі переконань та рекурентні мережі з моделлю тривалої короткочасної пам'яті [55, 65–68].

Натепер багато праць демонструють перевагу методів глибинного навчання над загальноприйнятими методами неглибокої архітектури в задачах геопросторового аналізу. Так, у праці [44] для оцінювання індексу врожайності кукурудзи на території США використано два різні регресійні методи: Convolutional Architecture for Fast Feature Embedding (CAFFE) та Support Vector Regression (SVR). У результаті метод глибинного навчання перевершив SVR. Коефіцієнт кореляції для нього становив 0,81, середньоквадратичне відхилення — 6,298, тоді як коефіцієнт кореляції та середньоквадратичне відхилення для SVR дорівнювали 0,644 та 8,204 відповідно.

Автори [34] порівняли метод глибинного навчання на основі згорткової нейронної мережі та комбінації ансамблю SVM з різними методами для виокремлення ознак для задачі ідентифікації транспортних засобів за супутниковими знінками. Запропонований метод глибинного навчання істотно перевершив за точністю всі комбінації методу SVM.

У праці [19] порівняно метод глибинного навчання на основі розрідженого автокодувальника (sparse auto-encoders) та SVM для класифікації супутникових знімків. Отримані результати свідчать про те, що SVM варто використовувати у випадку нестачі навчальних даних. У цьому разі він виявився продуктивнішим ніж розріджений автокодувальник. Проте для великої кількості даних для навчання доцільно використовувати методи глибинного навчання. Також показано більшу чутливість SVM до шуму в навчальних даних порівняно з автокодувальником.

Для розпізнавання цілей, у тому числі і військових, з використанням даних з радара із синтезованою апертурою (РСА) існує три загальні проблеми: наявність шуму, зміщення цілі та поворот цілі. Для цього використову-

валась згорткова нейронна мережа та SVM [31]. Точності, отримані за допомогою SVM на звичайних даних, — 75,68%, на зашумлених даних — 70,58%. Точності згорткової нейронної мережі на звичайних даних — 93,16%, на зашумлених даних — 91,89%, що демонструє суттєву перевагу методів глибокого навчання над SVM.

Розпізнати різні типи поверхні Землі за допомогою оптичних супутникових знімків є надзвичайно важливим завданням. У праці [69] розв’язувалась задача ідентифікації полів для гольфу за допомогою оптичних супутникових знімків Landsat-8 з просторовим розрізненням 30 м. У ході такого експерименту перевірялась залежність якості класифікації за допомогою згорткової нейронної мережі та SVM від кількості даних у навчальній вибірці. Як метрику для оцінювання методів класифікації використовувалась не загальна точність класифікації, а F-value у зв’язку з наявністю величезної кількості від’ємних даних як у навчальній, так і в тестовій вибірці. Для всіх розмірів навчальної вибірки згорткова нейронна мережа точніше класифікувала поля для гольфу ніж SVM (рис. 2). Притому час навчання SVM значно перевищує час навчання згорткової нейронної мережі, і зі збільшенням розміру навчальної вибірки їх різниця істотно зростає (рис. 3).

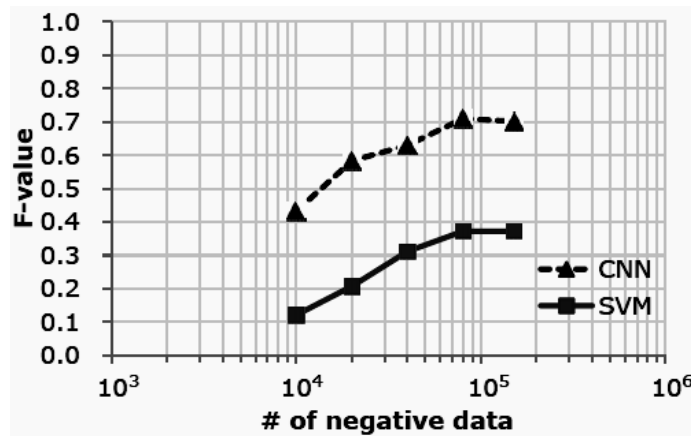


Рис. 2. Результат порівняння точності CNN і SVM [69]

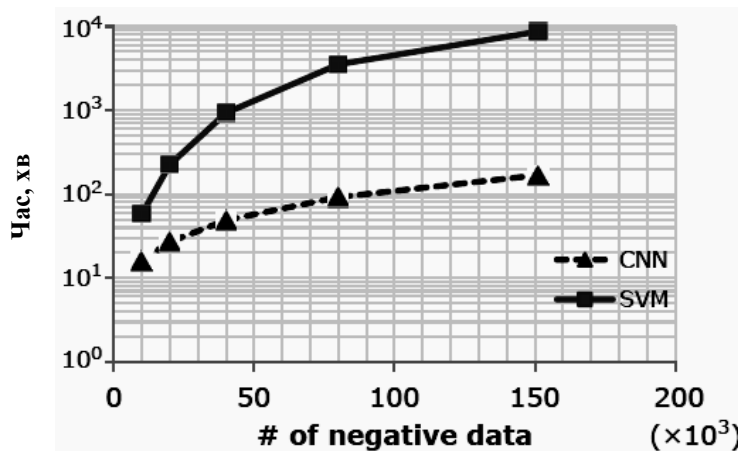


Рис. 3. Результат порівняння часу навчання CNN і SVM

Традиційний процес класифікації супутникових даних

Традиційно класифікація геопросторових даних виконувалась за загальноприйнятою схемою (рис. 4) [61], за якою навчання класифікатора охоплювало широкий спектр складних етапів: вибір галузі інтересу, поділ її на частини, виокремлення ознак, підготовка навчальної вибірки, класифікація та сегментація.

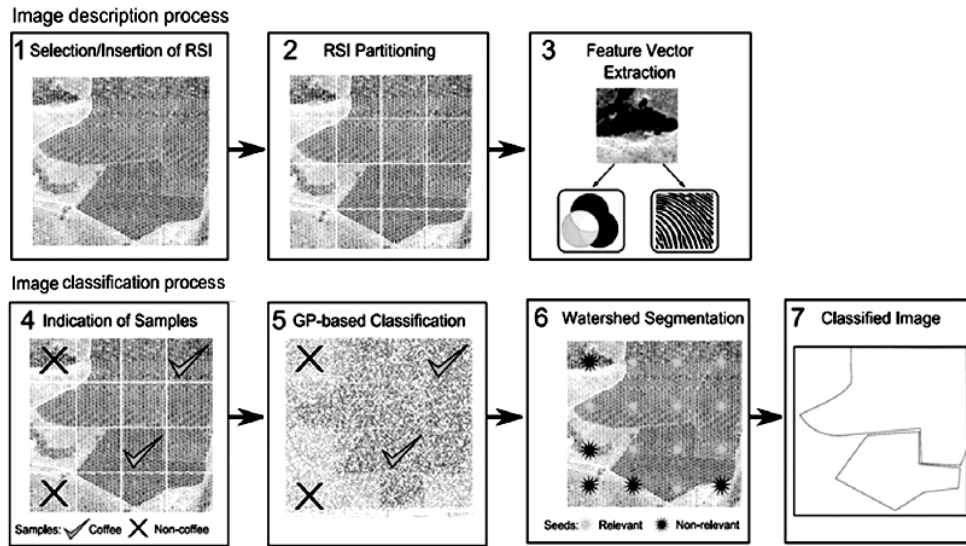


Рис. 4. Схема загальноприйнятого процесу класифікації [61]

Найбільш складною частиною був етап виокремлення ознак, який, як і в інших предметних галузях, потребував ґрунтовних експертних знань специфіки геопросторових даних та властивостей досліджуваних об'єктів. Протягом багатьох років для ручного виокремлення ознак використовувались такі методи, як Scale Invariant Feature Transform (SIFT), Speeded Up Robust Features (SURF) та Histogram of Oriented Gradients (HOG) [70]. Проте методи такого типу виокремлюють ознаки лише на низькому рівні (локальні характеристики зображення). Ідентифікація ознак на вищих рівнях, таких як виявлення контурів (edge detection), їх перетинів та частин об'єктів є надзвичайно складним завданням [34, 70].

Класифікація на основі радарних даних

За наявності хмар і тіней від них в оптичних знімках останнім часом дедалі більше використовуються радарні дані для класифікації типів земної поверхні. Радарні дані не залежать від погоди і можуть надавати достовірну інформацію не лише вдень, а й уночі. Проте найбільшою проблемою у використанні радарних даних є великий рівень шуму в них [65]. Зазвичай класифікація радарних даних виконується попіксельно з використанням таких ознак, як інтенсивність, амплітуда та фаза, хоча цього недостатньо для отримання класифікації без наявності великої кількості шумів. Необхідно розглядати текстуру радарних знімків. Багато різних фільтрів для аналізу текстури використовують середнє значення, дисперсію, контраст і т.ін. Після застосування цих фільтрів попіксельні методи машинного навчання,

такі як SVM, широко застосовуються для класифікації радарних даних. Але використання такого підходу є складним і займає багато часу, оскільки потребує ґрунтовних знань для підбору параметрів та придатних фільтрів, що можуть суттєво відрізнятись залежно від території, властивостей об'єктів, розміщених на ній, особливо з урахуванням необхідності оброблення багатьох супутникових знімків. Тому доцільно використовувати методи глибинного навчання для автоматичного виокремлення ознак та врахування текстур. Можливості методів глибинного навчання для радарних даних, отриманих із супутника TerraSAR-X, та порівняння їх із загальноприйнятим підходом проаналізовано у праці [65]. Для цього багатосаровий автокодувальник (SAE), класифікатор з розрідженим поданням (SRC) та згортковий автокодувальник (DCAE) порівнювалися з методом SVM на основі RBF ядра. Розглянуті методи глибинного навчання перевершили SVM. Проте найкращим виявився DCAE, що за рахунок свого підвибіркового шару дав змогу відчутно знизити рівень шуму на вихідній карті класифікації (рис. 5).

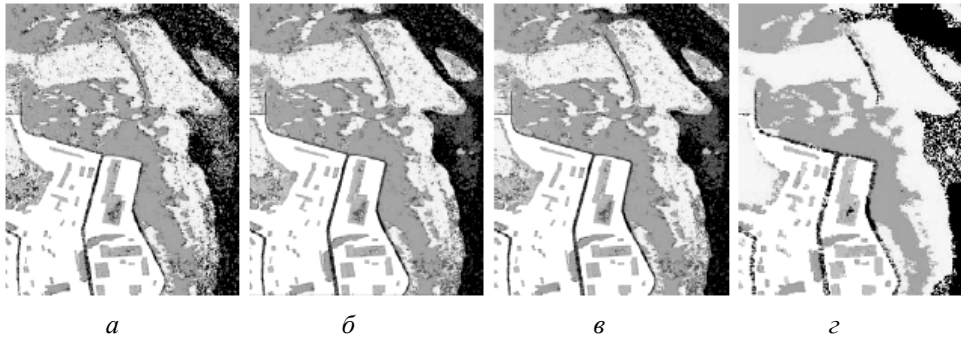


Рис. 5. Порівняння карт класифікації радарних даних, отриманих за різними методами: *а* — SVM; *б* — SRC; *в* — SAE; *г* — DCAE [65]

Із розглянутих вище праць випливає, що методи глибинного навчання — це найефективніший інструмент оброблення великих обсягів багатоспектральних супутникових даних серед методів машинного навчання. Результати експериментів показують, що методи глибинного навчання в усіх випадках випереджають інші загальноприйняті досліджувані методи машинного навчання неглибокої архітектури, що протягом десятиліть використовувались як найкращі методи для класифікації супутникових даних.

ЗГОРТКОВІ НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ В ЗАДАЧАХ КЛАСИФІКАЦІЇ СУПУТНИКОВИХ ДАНИХ

Найбільш прийнятною глибинною архітектурою для оброблення геопросторових даних і, як наслідок, для розв'язання поставленої задачі класифікації посівів є згорткові нейронні мережі, оскільки вони призначені для оброблення даних, які подаються у вигляді багатовимірних масивів. Наприклад, стандартне кольорове зображення складається з трьох двовимірних масивів, що містять інтенсивності пікселів у кожному із трьох каналів (R — червоний, G — зелений та B — голубий). Багатоспектральні дані подаються саме у вигляді багатовимірних масивів. Одновимірні масиви використовуються

для подання сигналів та послідовностей, зокрема мови. Двовимірні масиви застосовують для зображень, аудіоспектрограм, геопросторових даних. Тривимірні подання використовують для відео- або об'ємних зображень, у тому числі багатоспектральних супутникових знімків або їх рядів. Варто зазначити, що методи попиксельної класифікації геопросторових даних часто потерпають від наявності шуму на вихідній карті класифікації, що називається шумом типу «сіль та перець» (salt-and-pepper). Це притаманно не лише радарним даним, а й оптичним знімкам високого розрізнення. Саме тому для класифікації важливо розглядати не лише спектральні характеристики окремих пікселів, а і просторові, що і робить згорткова нейронна мережа.

Архітектура згорткової нейронної мережі

Можна виокремити чотири ключові властивості, які забезпечують перевагу використання згорткових нейронних мереж для оброблення геопросторових даних: локальні з'єднання, спільні ваги (shared weights), підвибірка (pooling) та використання багатьох шарів.

Типова згорткова мережа містить декілька рівнів оброблення інформації (рис. 6) [4]. Перші кілька рівнів складаються з двох типів шарів: згорткових, що чергуються з підвибірковими шарами. Згорткові та підвибіркові шари безпосередньо пов'язані з класичними уявленнями про прості та складні клітини в нейробіології, а архітектура в цілому нагадує організацією зорової кори тварин [4].

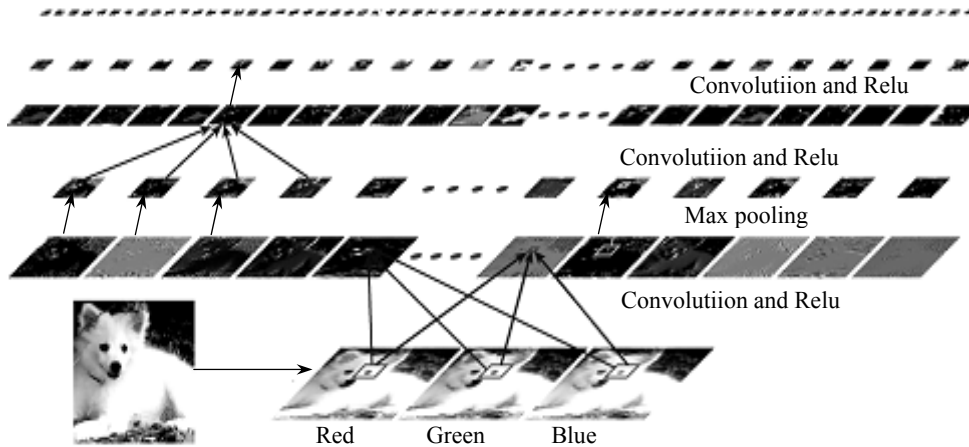


Рис. 6. Архітектура типової згорткової нейронної мережі [4]

Згортковий шар є основним блоком мережі. Параметри шару складаються з набору фільтрів або ядер, які мають невелике рецептивне поле по ширині та довжині, але простягаються на всю глибину вхідного багатовимірного масиву. Однією з головних переваг згорткових мереж є використання спільної ваги у згорткових шарах: для кожного пікселя певного шару використовується один і той же фільтр (weights bank). Основна ідея полягає в тому, що ідентифікація об'єкта в одній частині вхідних даних дасть змогу знайти такий самий об'єкт в іншій частині даних. Це допомагає зменшити ємність необхідної пам'яті для збереження архітектури мережі та

підвищити продуктивність мережі за рахунок інваріантності до зсуву вхідних даних. Під час прямого проходження кожен фільтр здійснює згортку по ширині та висоті вхідного масиву даних, обчислюючи скалярний добуток вхідних даних та фільтра, формуючи двовимірну карту активації цього фільтра. Об'єднання всіх активаційних карт, отриманих усіма фільтрами вздовж виміру глибини, формує вихідний масив згорткового шару. За вхідних даних великої розмірності, таких як супутникове зображення, недоцільно з'єднувати нейрони з усіма нейронами попереднього шару, оскільки у такій архітектурі мережі не враховуються просторові властивості даних. У згорткових мережах використовується локальна просторова кореляція шляхом локального з'єднання між нейронами сусідніх шарів: кожен нейрон з'єднується лише з невеликою ділянкою вхідного масиву [4]. Розмір цієї ділянки називається рецептивним полем нейрона і задається параметром. Після кожного згорткового шару застосовується нелінійна функція активації, як і для звичайного багатозарового перцептрона.

Підвибірковий (pooling) шар є різновидом нелінійного зниження потужності множини дискретних значень шляхом об'єднання семантично подібних ознак в одну. Існує декілька нелінійних функцій для реалізації підвибірки, серед яких найпоширенішою є підвибірка максимізації (maxpooling). Вона поділяє вхідне зображення на множину квадратів, які не перетинаються, і для кожного з них залишає максимальне значення. Ідея полягає в тому, що точне положення знайденої ознаки не так важливе, як її грубе положення відносно інших ознак. Підвибірковий шар забезпечує інваріантність відносно зсуву та спотворення об'єкта на вхідному зображенні.

Після декількох послідовних чергувань згорткового та підвибіркового шарів використовують один або декілька повнозв'язних шарів (fully-connected) нейронів. Нейрони у повнозв'язному шарі з'єднані з усіма нейронами попереднього шару, як у звичайних нейронних мережах прямого поширення. Звичайний метод зворотного поширення похибки дозволяє навчати згорткову нейронну мережу, підбираючи ваги у фільтрах аналогічно до того, як навчаються звичайні багатозарові мережі.

Основним недоліком традиційних нейронних мереж вважається їх збіжність до локального мінімуму. Цей недолік притаманний і глибинним нейронним мережам. Проте на практиці збіжність до локального мінімуму рідко є проблемою для глибинних мереж. Незалежно від початкових умов система майже завжди досягає розв'язку однакового рівня якості [4]. Нещодавні теоретичні та емпіричні результати переконливо свідчать про те, що локальні мінімуми загалом не є проблемою [72, 73]. Річ у тім, що поверхня функції втрат містить багато сідлових точок, де градієнт дорівнює нулю і в переважній їх більшості значення функції втрат дуже схожі. Таким чином, не має великого значення, у якій з цих точок алгоритм навчання мережі зупиниться.

Особливості та перспективи методів глибинного навчання для класифікації супутникових даних

У розглянутих вище працях методи глибинного навчання продемонстрували відмінні результати оброблення геопросторової інформації. Відзначимо, що

для забезпечення надійного поділу класів варто використовувати всі інформативні канали в багатоспектральних зображеннях. Проте згорткові нейронні мережі розглядались лише для класифікації звичайних двовимірних зображень, що зберігаються у RGB форматі або у відтінках сірого (grayscale), а технологія застосування їх до гіперспектральних зображень дуже рідко подається в літературі.

Для класифікації гіперспектральних зображень застосувати згорткову нейронну мережу напрямку не вдається [74]. Проте можна кожен піксел супутникового знімка розглядати як двовимірне зображення, висота якого дорівнює 1. Тоді на вході в мережу матимемо вектор, розмірність якого дорівнює кількості каналів у супутниковому зображенні. Таку архітектуру можна вважати одновимірною згортковою нейронною мережею. У праці [74] її ефективність порівнюється з методом RBF-SVM для класифікації гіперспектрального зображення. Показано, що цей підхід не лише перевершив RBF-SVM у термінах загальної точності класифікації, а й забезпечив вищу точність класифікації майже всіх окремих класів на трьох різних наборах даних.

Варто відзначити, що в більшості праць за тематикою аналізу геопросторових даних метод глибинного навчання використовується лише для класифікації одного знімка за конкретну дату. Таку постановку задачі не можна вважати проблемою оброблення великих обсягів даних (Big Data), а отже, багат шарова нейронна мережа не є оптимальною моделлю для їх класифікації. Для забезпечення достовірної класифікації сільськогосподарських культур чи типів земної поверхні необхідно використовувати часовий ряд знімків або навіть об'єднувати (зливати) дані з різних супутників, які доповнюють один одного важливою інформацією про спостережувану поверхню. Типовим прикладом такого злиття інформації є спільне використання оптичних (чутливих до сонячного освітлення, наявності хмар) та радарних даних (нечутливих до сонячного освітлення, майже зовсім нечутливих до хмарності) [43]. За спроби застосування загальноприйнятих методів глибинного навчання до задачі класифікації часового ряду супутникових знімків виникають такі недоліки: великий розмір знімків (щонайменше 10000 на 10000 пікселів), не однаковий розмір знімків та не повне накладання їх між собою, особливо з різних супутників, зашумленість даних (хмари та тіні від них), відносно невеликий розмір навчальних вибірок, що можна зібрати. Через експоненційне збільшення розмірів супутникових знімків різної природи актуальним завданням є розвиток моделей глибинного навчання, спроможних працювати з часовими рядами різнорідних супутникових даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Bishop C.M.* Pattern Recognition and Machine Learning / C.M. Bishop. — NY: Springer. — 2006.
2. *Zgurovsky M.Z.* System Analysis: Theory and Applications / M.Z. Zgurovsky, N.D. Pankratova // Springer. — 2007. — 448 p.
3. *Novikov A.* The synthesis of information protection systems with optimal properties / A. Novikov, A. Rodionov // Complexity and Security. — Vol. 37. — 2008. — 307 p.
4. *LeCun Y.* Deep learning / Y. LeCun, B. Yoshua, H. Geoffrey // Nature. — Vol. 521, N 7553. — 2015. — P. 436–444.

5. *Ghamisi P.* Advanced Spectral Classifiers for Hyperspectral Images: A review / P. Ghamisi, J. Plaza, Y. Chen et al // IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine. — Vol. 5, N 1. — 2017. — P. 8–32.
6. *Fukunaga K.* Introduction to statistical pattern recognition / K. Fukunaga // Academic press, 2013. — 591 p.
7. *Maulik U.* Remote Sensing Image Classification: A survey of support-vector-machine-based advanced techniques / U. Maulik, D. Chakraborty // IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine. — Vol. 5, N 1. — 2017. — P. 33–52.
8. *Gislason P.O.* Random forests for land cover classification / P.O. Gislason, J.A. Benediktsson, J.R. Sveinsson // Pattern Recognition Letters. — Vol. 27, N 4. — 2006. — P. 294–300.
9. *McCulloch W.S.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity / W.S. McCulloch, W. Pitts // The bulletin of mathematical biophysics. — Vol. 5, N 4. — 1943. — P. 115–133.
10. *Rumelhart D.E.* Learning representations by back-propagating errors / D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams // Cognitive modeling. — Vol. 5, N 3. — 1988. — P. 213–220.
11. *Amari S.I.* Statistical theory of learning curves under entropic loss criterion / S.I. Amari, N. Murata // Neural Computation. — Vol. 5, N 1. — 1993. — P. 140–153.
12. *Schmidhuber J.* Deep learning in neural networks: An overview / J. Schmidhuber // Neural networks. — Vol. 61. — 2015. — P. 85–117.
13. *Rumelhart D.E.* Learning internal representations by error propagation / D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams // Parallel distributed processing. MIT Press. — 1986. — P. 318–362.
14. *Duchi J.* Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization / J. Duchi, E. Hazan, Y. Singer // Journal of Machine Learning Research. — 2011. — P. 2121–2159.
15. *Patel V.* Kalman-Based Stochastic Gradient Method with Stop Condition and Insensitivity to Conditioning / V. Patel // SIAM Journal on Optimization. — Vol. 26, N 4. — 2016. — P. 2620–2648.
16. *Kingma D.* Adam: A method for stochastic optimization / D. Kingma, J. Ba // arXiv preprint arXiv. — Vol. 1412, N 6980. — 2014. — P. 1–15.
17. *Haykin S.* Neural networks and learning machines / S. Haykin // Upper Saddle River. — NJ, USA: Pearson, 2009. — Vol. 3. — 938 p.
18. *Hornik K.* Multilayer feedforward networks are universal approximators / K. Hornik, M. Stinchcombe, H. White // Neural networks. — Vol. 2, N 5. — 1989. — P. 359–366.
19. *Liu P.* SVM or deep learning? A comparative study on remote sensing image classification / P. Liu, K.K.R. Choo, L. Wang, F. Huang // Soft Computing. — Vol. 21, N 23. — 2017. — P. 7053–7065.
20. *Huang F.J.* Large-scale learning with SVM and convolutional nets for generic object categorization / F.J. Huang, Y. LeCun // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 2006. — P. 284–291. DOI: 10.1109/CVPR.2006.164.
21. *Pirotti F.* Benchmark of machine learning methods for classification of a Sentinel-2 image / F. Pirotti, F. Sunar, M. Piragnolo // International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences. — Vol. 41. — 2016. — P. 335–340.
22. *Breiman L.* Random forests / L. Breiman // Machine learning. — Vol. 45, N 1. — 2001. — P. 5–32.
23. *Ivakhnenko A.G.* The group method of data handling—a rival of the method of stochastic approximation / A.G. Ivakhnenko // Soviet Automatic Control. — Vol. 13, N 3. — 1968. — P. 43–55.
24. *Ivakhnenko A.G.* Polynomial theory of complex systems / A.G. Ivakhnenko // IEEE transactions on Systems, Man, and Cybernetics. — Vol. 1, N 4. — 1971. — P. 364–378.

25. *Fukushima K.* Neocognitron: A self-organizing neural network model for a mechanism of pattern recognition unaffected by shift in position / K. Fukushima // *Biol. Cybern.* — Vol. 36. — 1980. — P. 193–202. Doi:10.1007/bf00344251.
26. *LeCun Y.* Backpropagation applied to handwritten zip code recognition / Y. LeCun, B. Boser, J.S. Denker et al. // *Neural computation.* — Vol. 1, N 4. — 1989. — P. 541–551.
27. *Hinton G.E.* A fast learning algorithm for deep belief nets / G.E. Hinton, S. Osindero, Y.W. Teh // *Neural computation.* — Vol. 18, N 7. — 2006. — 1527–1554 p.
28. *Connor J.T.* Recurrent neural networks and robust time series prediction / J.T. Connor, R.D. Martin, L.E. Atlas // *IEEE transactions on neural networks.* — Vol. 5, N 2. — 1994. — P. 240–254.
29. *Hochreiter S.* Untersuchungen zu dynamischen neuronalen Netzen / S. Hochreiter // *Diss. diploma thesis, institut für informatik, lehrstuhl prof. brauer, technische universität münchen.* — 1991.
30. *Hochreiter S.* Long short-term memory / S. Hochreiter, J. Schmidhuber // *Neural computation.* — Vol. 9, N 8. — 1997. — P. 1735–1780.
31. *Ding J.* Convolutional neural network with data augmentation for SAR target recognition / J. Ding, B. Chen, H. Liu, M. Huang // *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters.* — Vol. 13, N 3. — 2016. — P. 364–368.
32. *Krizhevsky A.* Imagenet classification with deep convolutional neural networks / A. Krizhevsky, I. Sutskever, G.E. Hinton // *In Advances in neural information processing systems.* — 2012. — P. 1097–1105.
33. *Ngiam J.* Multimodal deep learning / J. Ngiam, A. Khosla, M. Kim et al. // *In Proceedings of the 28th international conference on machine learning (ICML-11).* — 2011. — P. 689–696.
34. *Chen X.* Vehicle detection in satellite images by hybrid deep convolutional neural networks / X. Chen, S. Xiang, C.L. Liu, C.H. Pan // *IEEE Geoscience and remote sensing letters.* — Vol. 11, N 10. — 2014. — P. 1797–1801.
35. *Hinton G.* Deep neural networks for acoustic modeling in speech recognition: The shared views of four research groups / G. Hinton, L. Deng, D. Yu et al. // *IEEE Signal Processing Magazine.* — Vol. 29, N 6. — 2012. — P. 82–97.
36. *Helmstaedter M.* Connectomic reconstruction of the inner plexiform layer in the mouse retina / M. Helmstaedter, K.L. Briggman, S.C. Turaga et al. // *Nature.* — Vol. 500, N 7461. — 2013. — P. 168–174.
37. *Sutskever I.* Sequence to sequence learning with neural networks / I. Sutskever, O. Vinyals, Q.V. Le // *In Advances in neural information processing systems.* — 2014. — P. 3104–3112.
38. *Drusch M.* Sentinel-2: ESA's optical high-resolution mission for GMES operational services / M. Drusch, U. Del Bello, S. Carlier et al. // *Remote Sensing of Environment.* — Vol. 120. — 2012. — P. 25–36.
39. *Torres R.* GMES Sentinel-1 mission / R. Torres, P. Snoeij, D. Geudtner et al. // *Remote Sensing of Environment.* — Vol. 120. — 2012. — P. 9–24.
40. *Roy D.P.* Landsat-8: Science and product vision for terrestrial global change research / D.P. Roy, M.A. Wulder, T.R. Loveland et al. // *Remote Sensing of Environment.* — Vol. 145. — 2014. — P. 154–172.
41. *Zhang J.* Multi-source remote sensing data fusion: status and trends / J. Zhang // *International Journal of Image and Data Fusion.* — Vol. 1, N 1. — 2010. — P. 5–24.
42. *Dalla M.M.* Challenges and opportunities of multimodality and data fusion in remote sensing / M.M. Dalla, S. Prasad, F. Pacifici et al. // *Proceedings of the IEEE.* — Vol. 103, N 9. — 2015. — P. 1585–1601.
43. *Gómez-Chova L.* Multimodal classification of remote sensing images: A review and future directions / L. Gómez-Chova, D. Tuia, G. Moser, G. Camps-Valls // *Proceedings of the IEEE.* — Vol. 103, N 9. — 2015. — 1560–1584.
44. *Kuwata K.* Estimating crop yields with deep learning and remotely sensed data / K. Kuwata, R. Shibasaki // *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS).* — 2015. — P. 858–861.

45. *McNairn H.* Early season monitoring of corn and soybeans with TerraSAR-X and RADARSAT-2 / H. McNairn, A. Kross, D. Lapen, R. Caves, J. Shang // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. — Vol. 28. — 2014. — P. 252–259.
46. *Khatami R.* A meta-analysis of remote sensing research on supervised pixel-based land-cover image classification processes: General guidelines for practitioners and future research / R. Khatami, G. Mountrakis, S.V. Stehman // *Remote Sensing of Environment*. — Vol. 177. — 2016. — P. 89–100.
47. *Abdiansah A.* Time Complexity Analysis of Support Vector Machines (SVM) in LibSVM / A. Abdiansah, R. Wardoyo // *International Journal of Computer Applications*. — Vol. 128, N 3. — 2015. — P. 28–34.
48. *Chapelle O.* Training a Support Vector Machine in the Primal / O. Chapelle // *Neural Computation*. — Vol. 19, N 5. — 2007. — P. 1155–1178.
49. *Sun X.* meProp: Sparsified back propagation for accelerated deep learning with reduced overfitting / X. Sun, X. Ren, S. Ma, H. Wang // *arXiv preprint arXiv*. — Vol. 1706, N 06197. — 2017. — P. 1–10.
50. *Gallagher M.* Multi-layer perceptron error surfaces: visualization, structure and mod-elling / M. Gallagher // *Doctoral dissertation*. — 2000.
51. *Han M.* (2012). Remote sensing image classification based on neural network ensemble algorithm / M. Han, X. Zhu, W. Yao // *Neurocomputing*. — Vol. 78, N 1. — 2012. — P. 133–138.
52. *Huang X.* An SVM ensemble approach combining spectral, structural, and semantic features for the classification of high-resolution remotely sensed imagery / X. Huang, L. Zhang // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. — Vol. 51, N 1. — 2013. — P. 257–272.
53. *Lavreniuk M.S.* Large-scale classification of land cover using retrospective satellite data / M.S. Lavreniuk, S.V. Skakun, A.J. Shelestov et al. // *Cybernetics and Systems Analysis*. — Vol. 52, N 1. — 2016. — P. 127–138.
54. *Kussul N.* Parcel-based crop classification in ukraine using landsat-8 data and sentinel-1A data / N. Kussul, G. Lemoine, F.J. Gallego et al. // *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. — Vol. 9, N 6. — 2016. — P. 2500–2508.
55. *Chen Y.* Deep learning-based classification of hyperspectral data / Y. Chen, Z. Lin, X. Zhao et al. // *IEEE Journal of Selected topics in applied earth observations and remote sensing*. — Vol. 7, N 6. — 2014. — P. 2094–2107.
56. *Zhao W.* Learning multiscale and deep representations for classifying remotely sensed imagery / W. Zhao, S. Du // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. — Vol. 113. — 2016. — P. 155–165.
57. *Kussul N.N.* Land cover changes analysis based on deep machine learning technique / N.N. Kussul, N.S. Lavreniuk, A.Y. Shelestov et al. // *Journal of Automation and Information Sciences*. — Vol. 48, N 5. — 2016. — P. 42–54.
58. *Kussul N.* Geospatial Intelligence and Data Fusion Techniques for Sustainable Development Problems / N. Kussul, A. Shelestov, R. Basarab et al. // *ICTERI*. — 2015. — P. 196–203.
59. *Zhang F.* Saliency-guided unsupervised feature learning for scene classification / F. Zhang, B. Du, L. Zhang // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. — Vol. 53, N 4. — 2015. — P. 2175–2184.
60. *Zhang F.* Scene classification via a gradient boosting random convolutional network framework / F. Zhang, B. Du, L. Zhang // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. — Vol. 54, N 3. — 2016. — P. 1793–1802.
61. *Lary D.J.* Machine learning in geosciences and remote sensing / D.J. Lary, A.H. Alavi, A.H. Gandomi, A.L. Walker // *Geoscience Frontiers*. — Vol. 7, N 1. — 2016. — P. 3–10.
62. *Peña-Barragán J.M.* Object-based crop identification using multiple vegetation indices, textural features and crop phenology / J.M. Peña-Barragán, M.K. Ngugi, R.E. Plant, J. Six // *Remote Sensing of Environment*. — Vol. 115, N 6. — 2011. — P. 1301–1316.

63. *Mnih V.* Learning to detect roads in high-resolution aerial images / V. Mnih, G. Hinton // Computer Vision–ECCV. — 2010. — P. 210–223.
64. *Mnih V.* Learning to label aerial images from noisy data / V. Mnih, G. Hinton // Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning (ICML-12). — 2012. — P. 1–8.
65. *Geng J.* High-resolution SAR image classification via deep convolutional autoencoders / J. Geng, J. Fan, H. Wang et al. // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. — Vol. 12, N 11. — 2015. — P. 2351–2355.
66. *Chen Y.* Spectral–spatial classification of hyperspectral data based on deep belief network / Y. Chen, X. Zhao, X. Jia // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. — Vol. 8, N 6. — 2015. — P. 2381–2392.
67. *Liang H.* Hyperspectral imagery classification using sparse representations of convolutional neural network features / H. Liang, Q. Li // Remote Sensing. — Vol. 8, N 2. — 2016. — P. 1–16.
68. *Lyu H.* Learning a transferable change rule from a recurrent neural network for land cover change detection / H. Lyu, H. Lu, L. Mou // Remote Sensing. — Vol. 8, N 6. — 2016. — P. 1–22.
69. *Ishii T.* Surface object recognition with CNN and SVM in Landsat 8 images / T. Ishii, R. Nakamura, H. Nakada et al. // In Machine Vision Applications (MVA), 14th IAPR International Conference. — 2015. — P. 341–344.
70. *Deng L.* Deep learning: methods and applications / L. Deng, D. Yu // Foundations and Trends® in Signal Processing. — Vol. 7, N 3–4. — 2014. — P. 197–387.
71. *Längkvist M.* Classification and segmentation of satellite orthoimagery using convolutional neural networks / M. Längkvist, A. Kiselev, M. Alirezaie, A. Loutfi // Remote Sensing. — Vol. 8, N 4. — 2016. — P. 1–21.
72. *Dauphin Y.N.* Identifying and attacking the saddle point problem in high-dimensional non-convex optimization / Y.N. Dauphin, R. Pascanu, C. Gulcehre et al. // In Advances in neural information processing systems. — 2014. — P. 2933–2941.
73. *Choromanska A.* The loss surfaces of multilayer networks / A. Choromanska, M. Henaff, M. Mathieu et al. // In Artificial Intelligence and Statistics. — 2015. — P. 192–204.
74. *Hu W.* Deep convolutional neural networks for hyperspectral image classification / W. Hu, Y. Huang, L. Wei et al. // Journal of Sensors. — 2015. — P. 1–13.

Надійшла 29.11.2017

MEDICAL IMAGE SEGMENTATION METHODS OVERVIEW

B.V. CHAPALIUK, Yu.P. ZAYCHENKO

Abstract. This article provides an overview of the modern medical image segmentation methods. The most popular methods such as multi-atlas based methods and deep learning approach are considered in more details. In addition, this article overviews different steps of the multi-atlas based methods (MAS) in detail and shows which modern algorithms and approaches used in different steps of MAS to achieve state of the art results in the medical image segmentation task and how it affects the accuracy of the algorithm. Also, there is a brief description of the modern deep learning algorithms which are used for the medical image segmentation. Such type of algorithm is used as an independent algorithm or as a part of the MAS. Finally, this article summarizes described algorithms and evaluates which approaches promise to improve state of the art result of the medical image segmentation in the future.

Keywords: medical image segmentation, multi-atlas based method, deep learning approach

INTRODUCTION

In the last few years, there is huge progress in the computer vision task with the help of the convolution neural networks (CNN) and an increasing size of the labelled datasets for training. This success is attributed to the ability of the CNN to learn a hierarchical representation of raw input data, without the usage of the handcrafted features. Since the deep learning approaches become widely used in computer vision field, there are lots of the works, which try to apply the same algorithms and approaches for the medical image processing problem. Modern image analysis technologies make good progress in the field of computer vision due to deep learning algorithms and increasing number of available datasets as well.

One of the fundamental problems in the medical image processing is segmentation. It refers to the process of tagging pixel region of interest (ROIs) with biologically meaningful labels, for example, anatomical structures or tissue type. As usual, to make modern deep learning algorithms work there should be a huge amount of data which are manually labelled by the trained expert. Labelling and segmenting dataset are expensive and complicated part of the application of medical image analytics since medical image should be manually labelled by the specialist in the medical area. Also, the labelled result may differ depending on the operator, prone to error, not scalable and hard to reproduce. Furthermore, the quality of dataset depends on the expert performance. Automatic [1] or semi-automatic [2] segmentation algorithms can address these problems by speeding up the process, reducing the cost and time, which should be spent by an expert, offering reliability, repeatability, and scalability.

There are several methods typically used for the medical image segmentation: graph-based optimal image segmentation [3], multi-atlas based methods [4], geometric deformable model approaches [5] and deep learning

approaches [6]. This article considers the most popular modern approaches for automatic image segmentation such as multi-atlas based methods and deep learning approach. Next chapter will review all the stages of the multi-atlas based methods framework and will consider which approaches and algorithms are used on each stage. The last chapter will briefly overview deep learning techniques, which might be as independent segmentation algorithms or might be a part of the multi-atlas based methods.

MULTI-ATLAS BASED METHODS

Multi-atlas based segmentation methods (MAS) are the class of methods which aim to automatic segmentation of anatomical structure on the target image by propagating a set of annotations from the set of atlas images to the new coordinates on the novel image through image registration process. Typically, atlas images are manually segmented and annotated by the costly effort of the domain expert who relies on the interactive visualisation software [7, 8].

There are several types of the atlas-based methods – probabilistic or parametric methods which build a probabilistic representation of the set of the atlases [9, 10] and nonparametric methods which use subset of atlases directly (this type of the atlas-based methods are called multi-atlas based methods) [11, 12].

There is a comparison between parametric and non-parametric methods [13] which gives the evidence that the second type of methods shows better accuracy than the first one. The success of these methods can be found in their possibility to use the best-suited atlas images subset for segmenting each particular target subject. Another explanation can be based on the fact that the registration of each of the several best-suited atlases subsets to the target image is more robust than the single image registration between the probabilistic atlas and the target image. It is evident that the drawback of the atlas subset usage is an increasing requirement to the computation performance. However, it gives more accurate and robust results. Therefore, the class of atlas-based methods should be chosen depending on the application requirements. As far as the multi-atlas based methods show better performance than probabilistic atlas-based method, this article will consider them in more detail.

Formally, the goal of MAS is segmentation of some target image T using a set of atlases A_1, \dots, A_m , and their corresponded maps label L_1, \dots, L_m which values can be 1 or 0 depend on whether voxel x belongs to the structure of interest (1) or not (0). To achieve it, as usual MAS is involved into the next three steps: atlas selection, image registration, label fusion step.

Additionally, modern algorithms can add some additional steps to the MAS pipeline like online learning [14–17] and post-processing steps [18–21].

Atlas selection step

In the scope of this step, MAS algorithms select the subset of the atlas images that are the most anatomically similar to the target subject S_T in $(1, \dots, m)$. All available atlas images are not used in MAS for the several reasons: first, this approach will improve computation efficiency of the algorithm which might be very important for the application which has strict time constraints. Second, excluding the

irrelevant images for the target subject S_T would improve final algorithm accuracy.

At the early time in the scope of the atlas selection step the subset of the atlas images are picked up randomly [11]. Under random selection of the atlas images, the accuracy of the algorithm improves with increasing number of the atlases still the number of atlases should not be too high to avoid accuracy worsening by introduced not well-suited candidates. It occurs due to the combining result of the multiple atlases leads to correct the errors of the one individual atlas. This idea is fundamental for the multi-atlas based algorithms.

The MAS algorithm segmentation performance can be improved in comparison with the randomly chosen atlases if the algorithm chooses the set of atlases which best-representing anatomy of the target image. That is because the non-related anatomical characteristic will be filtered out. The main issue, which the atlas selection step is solving, consists of defining a function that reflects the similarity between an atlas A_i and the target image T . To resolve this task there are lots of the metrics used. The metrics might include the similarity measures on the image intensities or normalized mutual information [22], registration consistency [23], cross-correlation of intensity values [24].

More recently, there are several works which defined another approach to increase performance of atlas selection step by using clustering [25]. In this paper, the authors propose to define the vector of a pair atlas agreement factor between two atlases and apply the k-means algorithm to this feature vector. Furthermore, the ranking parameter, which evaluates the mean SSD between cluster means, is applied to the result clusters. Such approach improves the total performance of their MAS algorithm.

On the other hand, atlas selection might be treated as a learning algorithm. Such approach utilises the necessity of the manual segmentation of the atlas image which reduces the cost and effort of the MAS algorithm development and also tends to be more computation efficiently than discussed approach, especially on the large dataset. For example, this paper [26] introduced Neighborhood Approximation Forest, a supervised learning algorithm which is inspired by the random forest tree algorithm [27]. This algorithm can incorporate distances that are defined on semantic information and relate them to the space of appearance-based feature. Another algorithm, which uses the same metrics for evaluating similarity between target image T and atlas image, is SVM which show state of the art result for this step [28].

To sum up, atlas selection step is an important step of MAS which can affect the final algorithm accuracy. To achieve higher accuracy on the segmentation for atlas selection can be used different metrics. However, the most promised approach is the learning algorithms which use distance metrics like SSD. On the other hand, an approach of atlas selection algorithm might vary depending on the image registration algorithm is used and specific application requirement like computation time of segmentation.

Image registration step

By the registration step in the scope of the MAS is meant the task of establishing a spatial correspondence between the target image and set of atlases. As a result, the labels can be directly propagated. It means that the possible values of labels on each target pixel correspond to the pixel on the target image.

More formally [4], set of atlases \bar{A} correspondences with the target image T can be described as follows:

$$L_i = \max_{\varphi} \{ \text{sim}(T, \varphi(A_i)) - \lambda \text{reg}(\varphi) \},$$

where operation sim is some similarity measurement term between two images, operation reg is a regularization term, which can control the flexibility of the transformation with constant λ , A_i — atlas image, φ is a spatial transformation.

The result of the label map calculation will be used on the label fusion step according to the computed transformation. More formally, it will be used in form $\tilde{L}_i \equiv \varphi(L_i)$. An extensive review of the existing spatial transformation, similarity function and regularization terms can be found in [29]. An extensive comparison review of the image registration methods on the publicly available datasets can be found in [30].

There are two types of the registration types according to its transformation model: linear and deformable registration [29].

Typically, in MAS one single registration is computed between each atlas and the target image. The usage of the atlas sets tends to improve the performance of the registration algorithm and give more robust result as was discussed at the beginning of the paper.

In conclusion, the registration algorithms map the selected atlases to the target image and create a label map with correspondence between pixels on the atlas images and target image T . Recently, the most popular and accurate methods of image registration are methods which are based on the deformable model.

Label fusion step

Label fusion is an important part of the MAS algorithm pipeline step. During this step, the final segmentation on the target image is produced. It uses the result mapping between each atlas and the target image T which is got from the image registration step. More formally [4], each atlas \tilde{A}_i and the label map \tilde{L}_i are registered to the target image T after image registration step. The segmentation result on each target voxel x of the target image T evaluated by combining labels on the corresponding voxel location $L_i(x)$ in the atlas image. The earliest and simplest algorithm of the label fusion are best atlas selection [31] and majority voting rule [11, 32]. Specifically, it can be described by the next formula:

$$\hat{F}(x) = \arg \max_{l \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{i \in S_T} \delta(L_i(x) = l) \right\},$$

where δ is the function which returns 1 if the argument is true and 0 otherwise, and S_T is the subset of the selected atlases indexes.

Even though the majority voting rule is a simple one, it gives better accuracy than any other method which uses a single atlas for image registration [31]. Nevertheless, in the real-world application some correlation in the error pattern might exist, and therefore, more robust label fusion algorithm is needed to compensate it.

According to the paper [4] there are three categories of the label fusion methods used in the modern MAS applications: weighted voting approaches, probabilistic approaches, machine-learning based approaches.

Weighted voting approaches. These approaches use weights for evaluate importance of each atlas and select the best one. Weights reflect the similarity between the atlas and the target image and might be global or local. Consequently, there are two types of methods: methods which compute weights based on each atlas independently and the methods that compute weights to minimise correlation between error patterns of atlas pairs [33, 34].

In case of the independent weighting strategy, each atlas is evaluated individually with respect to the weights. Weights represent the local importance of atlas and computed based on the similarity function between the local image patches. Typically, as similarity measurement metrics used cross-correlation, mutual information metrics or the sum of squared differences [33], or an empirical measurement might be used [35]. For example, similarity measurement metrics between local image patches of the target image and atlas can be negative SSD exponent [4]:

$$\omega_i(x) = \exp\left(-\gamma \sum_{y \in N_x} (T(Y) - A_i(y))^2\right),$$

where γ is a normalization parameter, N_x is the spatial neighborhood which defines the image patches centered at x .

As a result, the target label will be computed as follows:

$$\hat{F}(x) = \arg \max_l \left\{ \sum_{i \in S_T} \omega_i(x) \delta(L_i(x) = l) \right\},$$

where $\omega_i(x)$ is weight which denotes i -th atlas importance in evaluating the target label at the region location x , δ is the function which returns 1 if the argument is true and 0 otherwise, and S_T is the subset of the selected atlases indexes.

There might be two strategies to denote correspondence between the target image and atlas image: one-to-one correspondence and one-to-many correspondences. The one-to-many correspondence is considered to be better than one-to-one correspondences as far as it has better robustness because of considering the atlas labels in the spatial neighbourhood [36].

For the one-to-many correspondence strategy [4], the target label calculation will look as follows:

$$\hat{F}(x) = \arg \max_l \left\{ \sum_{i \in S_T} \sum_{y \in N_x} \omega_i(x, y) \delta(L_i(y) = l) \right\},$$

where $\omega_i(x, y)$ is weight which denotes estimated segmentation performance for the operation of assigning the atlas label at the point $y \in N'_x$ to the target label at the point x , N'_x is spatial neighborhood for potential atlas correspondences search, δ is the function which returns 1 if the argument is true and 0 otherwise, and S_T is the subset of the selected atlases indexes.

The independent weighting strategy works well when the anatomical image characteristics are equally distributed among the atlases, however, in the real-world usually this assumption does not work, and some anatomical characteristics and features may be overrepresented in the set of atlases. To deal with this problem the joint weighting strategy is used. [37] The main idea behind weighting strategy is to minimise the correlation of participating atlases during the weights choosing step instead of computing them independently. This approach enforces that the most represented anatomical characteristic in the dataset not accumulated in most of the calculated weights.

Probabilistic approaches. These approaches use Bayes' probability rules to select the best one label. There are two core algorithms family: STAPLE algorithm [38, 39] that directly estimates parameters performance that best suit to the probabilistic estimate of the target labels, and generative probabilistic model [40] which considers weighted voting rule from a Bayesian perspective.

Machine-learning based approaches. These approaches use supervised learning to evaluate the relationship between the appearance feature and the anatomical feature. [41]. To achieve optimal performance the set of atlases with their corresponding label are used to learn the classification rules. In comparison to the traditional MAS label fusion algorithm, which gets the target labels from the image registration step, machine learning approaches can capture more complex relationships between image and labels. The machine learning approaches will be considered in more detail in the next chapter, where the deep learning approaches will be discussed.

DEEP LEARNING APPROACH

One of the limitations of the previously discussed methods is the inability of adapting themselves to the data at hand. This means that the power of feature representation might vary across the different kind of image data. The handcrafted feature and representations depend on the expert performance, which may vary between different domain experts. Furthermore, manually feature creation cannot tend to the creation of a complex feature pattern. So far as these problems can be resolved by a deep learning approaches, it gains popularity in the research community. Recently, deep learning has become a hot topic in machine learning [42], computer vision and biomedical image processing [43]. Likewise, deep learning approach with its ability to learn hierarchy from raw data tends to improve the overall performance of the task [44] meanwhile reduce the cost of application development since the manual feature design is not required anymore. In addition, there are the deep learning approaches which outperform the classical methods like MAS with a large margin [45].

The work [43] shows an attempt to use the deep learning approach for the multiple organ detections using the 4D patient data. The authors used an unsupervised technique to create a feature representation for their data, and after that use them in the probabilistic patch-based methods. They use stacked sparse autoencoder (SSAE) to extract the feature from the dataset.

There is also another work, which extends such approach and uses the stack autoencoders as a part of the MAS and deformable model methods [46]. The authors perform the supervised fine-tuning which is adapted by stacking another

classification output layer on the top of the encoding part of the SSAE. The result of the work shows that the SSAE outperform other classical methods including the MAS and deformable model methods with handcrafted feature representation.

Another approach for applying deep learning algorithms for the medical image segmentation is to use the power of convolutional neural networks (CNN). In [47] it was proposed the U-Net architecture for the CNN which is an extension of the fully convolution neural network [48]. The authors report that they achieve state of the art results on the two challenging light data sets and tasks: segmentation of neuronal structure in EM stacks and cell segmentation in light microscopy challenge from ISBI cell tracking challenge. Consequently, this CNN has a good performance even in the small datasets.

One of the disadvantages of the U-Net CNN is an ability to work only with 2D data while most of the clinical data consist of the 3D volumes. To make the CNN to process the 3D image the V-Net CNN architecture was introduced [49]. This architecture achieves the superior result on the PROMISE12 dataset [50].

After all, the deep learning approaches show the state of the art result and promise to achieve state of the art performance on the most biomedical processing task. These approaches might be used as a part of the classical segmentation approaches, like MAS as well as independently.

CONCLUSION

This article considers auto-segmentation methods which is one of the most widely used methods in the biomedical image processing. For the last 10 years the multi-atlas based methods have been rapidly developed and achieved great performance on the different type of medical data. MAS methods consist of the three main steps: label selection, image registration and label fusion steps. The label selection step selects the most anatomically similar atlases to the target image. It has been shown, that the best approach is to select a subset of the anatomically similar atlases rather than use all available atlases. The registration step builds the map of correspondence between each atlas and the target image. This step has a huge impact on the overall MAS algorithm performance, so that the image registration approach should be chosen carefully according to the medical image processing performance. The label fusion step combines the individual decisions with the multiple atlas to decide which label should be applied to the certain point in the image. The most widely used algorithms for the label fusion are vote weighting, probabilistic weighted vote, based on the Bayes' framework. There are algorithms which use machine learning approach also.

On the other hand, recently the deep learning approach has been largely used in the biomedical image processing field and shown much promising result. There are several CNNs architectures which have achieved state of the art results on the different challenge dataset. Recent development shows that different supervised machine learning and unsupervised learning techniques tend to be used in the different steps of the MAS algorithm to improve the overall accuracy.

REFERENCES

1. *Wu Z.* Segmenting hippocampal subfields from 3T MRI with multi-modality images / Z. Wu, Y. Gao, F. Shi et al. // Segmenting hippocampal subfields from 3T MRI with multi-modality images. — Vol. 43. — 2018. — P.10–22.

2. *You W.* Semi-automatic segmentation of the placenta into fetal and maternal compartments using intravoxel incoherent motion MRI / W. You, N. Andescavage, Z. Zun, C. Limperopoulos // *Medical Imaging*. — Vol. 10137. — 2017.
3. *Oguz I.* LOGISMOS: A Family of Graph-Based Optimal Image segmentation methods / I. Oguz, H. Bogunovic, S. Kashyap et al. // *Medical Image Recognition, Segmentation and Parsing Machine Learning and Multiple Object Approaches*. — Academic Press, 2016. — P.179–206.
4. *Sanroma G.* Multiple-atlas segmentation in medical imaging / G. Sanroma, G. Wu, M. Kim, M.A. González et al. // *Medical Image Recognition, Segmentation and Parsing*. — Academic Press, 2016. — P.231–257.
5. *Carass A.* An Overview of the Multi-Object Geometric Deformable Model Approach in Biomedical Imaging / A. Carass, J.L. Prince // *Medical Image Recognition, Segmentation and Parsing Machine Learning and Multiple Object Approaches*. — Academic Press, 2016. — P.259–279.
6. *Zhou K.* Deep Learning for Medical Image Analysis / K. Zhou, H. Greenspan, D. Shen. — Academic Press, 2017.
7. *Criminisi A.* Geos: Geodesic image segmentation / A. Criminisi, T. Sharp, A. Blake // *Computer Vision — ECCV 2008*. ECCV 2008. Lecture Notes in Computer Science. — Springer, 2008. — P.99–112.
8. *Heiberg E.* Design and validation of segment-freely available software for cardiovascular image analysis / E. Heiberg, J. Sjögren, M. Ugander et al. // *BMC medical imaging*. — Vol. 10. — 2010.
9. *Pohl K.* Bayesian model for joint segmentation and registration / K. Pohl, J. Fisher, L. Grimson et al. // *Neuroimage*. — Vol. 31. — 2006. — P. 228–239.
10. *Yeo B.* Effects of registration regularization and atlas sharpness on segmentation accuracy / B. Yeo, M. Sabuncu, R. Desikan et al. // *Medical image analysis*. — Vol. 12. — 2008. — P. 603–615.
11. *Heckemann R.* Automatic anatomical brain MRI segmentation combining label propagation and decision fusion / R. Heckemann, J. Hajnal, P. Aljabar et al. // *Neuroimage*. — N. 33. — 2006. — P. 115–126.
12. *Heiberg E.* Design and validation of Segment – freely available software for cardiovascular image analysis / E. Heiberg, J. Sjögren, M. Ugander, M. Carlsson et al. // *BMC Medical Imaging*. — Vol. 10. — 2010. — P. 1.
13. *Babalola K.* An evaluation of four automatic methods of segmenting the subcortical structures in the brain / K. Babalola, B. Patenaude, P. Aljabar et al. // *NeuroImage*. — Vol. 47, N. 4. — 2009. — P. 1435–1447.
14. *Langerak T.* Label Fusion in Atlas-Based Segmentation Using a Selective and Iterative Method for Performance Level Estimation (SIMPLE) / T. Langerak, U. van der Heide, A. Kotte et al. // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. — Vol. 29. — 2010. — P. 2000–2008.
15. *Hao Y.* Local label learning (LLL) for subcortical structure segmentation: Application to hippocampus segmentation / Y. Hao, T. Wang, X. Zhang et al. // *Human Brain Mapping*. — Vol. 35. — 2014. — P. 2674–2697.
16. *Wolz R.* LEAP: Learning embeddings for atlas propagation / R. Wolz, P. Aljabar, J. V. Hajnal et al., the Alzheimer's Disease Neuroimaging Initiative // *NeuroImage*. — Vol. 49, N. 2. — 2010. — P. 1316–1325.
17. *Chakravarty M.* Performing label-fusionbased segmentation using multiple automatically generated templates / M. Chakravarty, P. Steadman, M. Eede et al. // *Human brain mapping*. — Vol. 34. — 2013. — P. 2635–2654.
18. *Yushkevich P.* Nearly automatic segmentation of hippocampal subfields in in vivo focal T2-weighted MRI / P. Yushkevich, H. Wang, J. Pluta et al. // *Neuroimage*. — Vol. 53. — 2010. — P. 1208–1224.

19. *Nouranian S.* A multi-atlas-based segmentation framework for / S. Nouranian, S. Mahdavi, I. Spadinger et al. // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 34. — 2015. — P. 950–961.
20. *Wang L.* Segmentation of neonatal brain MR images using patch-driven level sets / L. Wang, F. Shi, G. Li et al. // Neuroimage. — Vol. 84. — 2014. — P. 141–158.
21. *Asman A.* Out-of-atlas likelihood estimation using multi-atlas segmentation / A. Asman, L. Chambless, R. Thompson, B. Landman // Medical physics. — Vol. 40, N. 4. — 2013.
22. *Studholme C.* An overlap invariant entropy measure of 3D medical image alignment / C. Studholme, D.L. Hill, D. Hawkes // Pattern Recognition. — Vol. 32. — 1999. — P. 71–86.
23. *Heckemann R.* The mirror method of assessing segmentation quality in atlas label / R. Heckemann, A. Hammers, P. Aljabar et al. // Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2009. ISBI '09. IEEE International Symposium on. — 2009. — P. 1194–1197.
24. *Avants B.* The optimal template effect in hippocampus studies of diseased populations / B. Avants, P. Yushkevich, J. Pluta et al. // NeuroImage. — Vol. 49, N. 3. — 2010. — P. 2457–2466.
25. *Nouranian S.* A Multi-Atlas-Based Segmentation Framework for Prostate Brachytherapy / S. Nouranian, S.S. Mahdavi, I. Spadinger et al. // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 34, N. 4. — 2015. — P. 950–961.
26. *Konukoglu E.* Neighbourhood approximation using randomized forests / E. Konukoglu, B. Glocker, D. Zikic, A. Criminisi // Medical Image Analysis. — Vol. 17, N. 7. — 2013. — P. 790–804.
27. *Liaw A.* Classification and Regression by randomForest / A. Liaw, M. Wiener // R news. — Vol. 2, N. 3. — 2002. — P. 18–22.
28. *Sanroma G.* Learning to rank atlases for multiple-atlas segmentation / G. Sanroma, G. Wu, Y. Gao, D. Shen // IEEE Trans Med Imaging. — Vol. 33. — 2014. — P. 1939–1953.
29. *Sotiras A.* Deformable Medical Image Registration: A Survey / A. Sotiras, D. Christos, P. Nikos // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 32. — 2013. — P. 1153–1190.
30. *Ou Y.* Comparative Evaluation of Registration Algorithms in Different Brain Databases With Varying Difficulty: Results and Insights / Y. Ou, H. Akbari, M. Bilello et al. // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 33. — 2014. — P. 2039–2065.
31. *Rohlfing T.* Evaluation of atlas selection strategies for atlas-based image segmentation with application to confocal microscopy images of bee brains / T. Rohlfing, R. Brandt, R. Menzel, Jr. CR Maurer // Neuroimage. — Vol. 21. — 2004. — P. 1428–1442.
32. *Klein A.* Automated brain labeling with multiple atlases / A. Klein, B. Mensh, S. Ghosh et al. // BMC Medical Imaging. — Vol. 5. — 2005. — P. 7.
33. *Artaechevarria X.* Efficient classifier generation and weighted voting for atlas-based segmentation: Two small steps faster and closer to the combination oracle / X. Artaechevarria, A. Muñoz-Barrutia, C. Ortiz-de Solorzano // Medical Imaging 2008: Image Processing. — 2008.
34. *Wan J.* Automated reliable labeling of the cortical surface / J. Wan, A. Carass, S. Resnick, J. Prince // Biomedical Imaging: From Nano to Macro. — 2008. — P. 440–443.
35. *Zhang D.* Confidence-guided sequential label fusion for multi-atlas based / D. Zhang, G. Wu, H. Jia, D. Shen // MICCAI. — Vol. 6893. — 2011. — P. 643–650.
36. *Rousseau F.* A supervised patch-based approach for human brain labeling / F. Rousseau, P.A. Habas, C. Studholme // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 30, N. 10. — 2011. — P. 1852–1862.

37. Wang H. Regression-based label fusion for multi-atlas segmentation / H. Wang, J. Suh, S. Das et al. // Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on. — 2011. — P. 1113–1120.
38. Warfield S.K. Simultaneous truth and performance level estimation (STAPLE): an algorithm for the validation of image segmentation / S.K. Warfield, K.H. Zou, W.M. Wells // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 23. — 2004. — P. 903–921.
39. Asman A.J. Hierarchical performance estimation in the statistical label fusion framework / A.J. Asman, B.A. Landman // Medical Image Analysis. — Vol. 18, N. 7. — 2014. — P. 1070–1081.
40. Sabuncu M. A Generative Model for Image Segmentation Based on Label Fusion / M. Sabuncu, Y. Thomas, K. Leemput et al. // IEEE Transactions on Medical Imaging. — Vol. 29. — 2010. — P. 1714–1729.
41. Wang H. Multi-atlas segmentation with learning-based label fusion / H. Wang, Y. Cao, T. Syeda-Mahmood // Machine Learning in Medical Imaging. — 2014. — P. 256–263.
42. Bengio Y. Representation Learning: A Review and New Perspectives / Y. Bengio, A. Courville, P. Vincent // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — Vol. 35, N. 8. — 2013. — P. 1798–1828.
43. Shin Hoo-Chang Stacked Autoencoders for Unsupervised Feature Learning and Multiple Organ Detection in a Pilot Study Using 4D Patient Data / Hoo-Chang Shin, Matthew R. Orton, David J. Collins, Simon J. Doran, Martin O. Leach // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — Vol. 35, N. 8. — 2013. — P. 1930–1943.
44. Krizhevsky A. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks / A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. Hinton // Advances in Neural Information Processing Systems 25. — Curran Associates, Inc., 2012. — P.1097–1105.
45. Ciresan D. Deep Neural Networks Segment Neuronal Membranes in Electron Microscopy Images / D. Ciresan, A. Giusti, L. Gambardella, J. Schmidhuber // Advances in Neural Information Processing Systems 25. — Curran Associates, Inc., 2012. — P.2843–2851.
46. Guo Y. Deformable MR Prostate Segmentation via Deep Feature Learning and Sparse Patch Matching / Y. Guo, Y. Gao, D. Shen // Deep Learning for Medical Image Analysis. — Academic Press, 2017. — P.221–247.
47. Ronneberger O. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation / O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2015. Lecture Notes in Computer Science. — Springer, 2015. — P.234–241.
48. Jia Y. Caffe: Convolutional architecture for fast feature embedding / Y. Jia, E. Shelhamer, J. Donahue et al. // MM '14 Proceedings of the 22nd ACM international conference on Multimedia. — 2014. — P. 675–678.
49. Milletari F. V-Net: Fully Convolutional Neural Networks for Volumetric Medical Image Segmentation / F. Milletari, N. Navab, Sed-Ahmad Ahmadi // 3D Vision (3DV), 2016 Fourth International Conference on. — 2016. — P. 565–571.
50. Litjens G. Evaluation of prostate segmentation algorithms for MRI: the PROMISE12 challenge / G. Litjens, R. Toth, W. van de Ven et al. // Medical image analysis. — Vol. 18. — 2014. — P. 1361–8423.

Received 01.11.2017

УДК 519.226; 355.01
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.1.06

МОДЕЛЮВАННЯ ВІЙСЬКОВИХ КОНФЛІКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЙЄСОВИХ МЕРЕЖ

Г.І. КАНГУН, П.І. БІДЮК, О.Л. ЖИРОВ

Анотація. Розглянуто загальні підходи до моделювання військових конфліктів. Побудовано ймовірнісно-статистичну модель для встановлення ймовірності настання військового конфлікту у вигляді байєсової мережі. Складність моделювання військового конфлікту полягає у високій динаміці взаємодійних систем з багатьма невідомими або невимірюваними змінними і параметрами. У створеній моделі враховано неповноту та нечіткість наявної інформації. Побудована модель має на меті не тільки виявлення існуючих взаємозв'язків та залежностей між вибраними процесами, а і прогнозування ймовірності виникнення майбутніх конфліктів на основі результатів аналізу поточної ситуації. Проведено моделювання з використанням наявних статистичних даних, виконано серію обчислювальних експериментів та аналіз отриманих результатів. Статистичні дані для формування вибірки даних взято з відкритих джерел. За побудованою моделлю оцінено ймовірність внутрішнього та зовнішнього конфліктів в Україні. Отримані числові результати відповідають реальній ситуації.

Ключові слова: моделювання, військовий конфлікт, мережі Байєса, прогнозування.

ВСТУП

Життя в умовах нестабільності міжнародних відносин та переходу до нових, більш складних методів ведення конфліктів вимагає від України відповідного рівня системи національної безпеки та оборони, що зможе гарантувати можливість реалізації обраного політичного курсу і мінімізувати вплив інших держав на рішення, що приймаються, для обрання курсу, оптимального саме для української держави, а не інших зацікавлених сторін.

Побудова моделі процесу дозволяє всебічно розглянути процес та прогнозувати розвиток ситуації, що в результаті полегшує пошук оптимального рішення. Складність моделювання військового конфлікту полягає передусім у тому, що він є динамічною системою з багатьма невідомими або невимірюваними параметрами. Варто враховувати неповноту та нечіткість інформації. Аналіз та моделювання подібної системи має на меті не тільки виявлення існуючих взаємозв'язків та залежностей, а і передбачення та попередження майбутніх конфліктів на підставі результатів аналізу.

Одним з методів аналізу та моделювання військових конфліктів є метод експертних оцінок, приклади практичного застосування якого розглядаються у працях [1, 2]. Автори праці [1] ефективно застосували метод експертних оцінок для цілей воєнно-політичного прогнозування на прикладі Росії. Недолік, зумовлений суб'єктивністю оцінок, усунуто через залучення значної кількості експертів. У свою чергу, у праці [2] для дослідження можливих стратегій Росії для вирішення проблеми Південних Курил сформовано ієрархічну цільову структуру досліджуваної проблеми та застосовано метод аналізу ієрархій Т. Сааті. Подані результати використання методу аналізу ієрархій показали достатню його ефективність. Формування ієрархічних цільових структур забезпечило належну структуру досліджуваної проблеми, що дозволить суттєво спростити роботу аналітиків та експертів. Кількісні оцінки елементів дерева цілей дають змогу приймати більш обгрунтовані рішення щодо вибору тієї чи іншої стратегії поведінки в конфлікті.

У праці [3] окреслено підхід до формалізації конфлікту, побудови його математичної моделі та дослідження конфлікту як багатовимірного, неоднозначного та слабкопередбачуваного явища. Отримана модель дозволяє бачити тенденції розвитку та можливості процесів, а спеціальні процедури не потребують нагромадження статистичного матеріалу. Методику формування множини факторів воєнного конфлікту та системи взаємозв'язків між ними наведено у праці [4], у якій викладено метод формалізації негативних та різнознакових взаємозв'язків між елементами когнітивних карт з використанням логіки антонімів. Для вираження негативних та різнознакових зв'язків між елементами когнітивних карт уведено відповідні оператори, сформовано їх основні властивості.

Можливість застосування нейронних мереж і зокрема байєсової нейронної мережі, досліджується у працях [5, 6]. У праці [6] розглядаються пари учасників і відповідно для кожної пари пропонується такий набір параметрів:

- демократія (для кожної країни визначається за шкалою від мінус десяти до десяти, де десять — повна демократія, а мінус десять — повне самодержавство, після чого обирається мінімальне з двох значень);
- союзники (бінарна величина, що набуває значення 1, якщо члени пари пов'язані будь-якою формою військового союзу, та 0, якщо військовий союз відсутній);
- сусідство (має значення 1, якщо члени пари мають спільний кордон, та 0, якщо спільних кордонів не мають);
- відстань (обраховується як десятковий логарифм відстані в кілометрах між столицями членів пар);
- основна сила (дорівнює 1 для наддержав і 0 для всіх інших);
- спроможність (обраховується як десятковий логарифм суми загальної кількості населення, кількості людей в міських районах, промислового споживання енергії, виробництва чавуну і сталі, кількості активних військовослужбовців, військових витрат у доларах за останні п'ять років (від сильнішої держави до слабшої);
- залежність (сума значень експорту та імпорту між країнами, поділена на валовий внутрішній продукт (ВВП) сильнішої країни; цей параметр є

неперервним і вимірює рівень економічної незалежності менш економічно залежного члена пари).

Як набір даних у роботі використано політично значущі періоди перед холодною війною (1885–1945 рр.) та під час холодної війни. Установлено, що використання чотирьох параметрів — демократії, союзників, спроможності і залежності — або тільки залежності, або тільки можливості дає змогу уникнути всіх передбачених конфліктів. Використання тільки демократії дозволило уникнути 90% прогнозованих конфліктів, лише союзників — 77%.

У цій роботі увагу приділено моделюванню та прогнозуванню можливості виникнення конфлікту для окремих сутностей, а не пар сутностей, на базі параметрів їх стану.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Побудова моделі досліджуваного процесу дає змогу всебічно розглянути процес та прогнозувати розвиток ситуації, що в результаті полегшує пошук раціонального або оптимального рішення. Мета аналізу та моделювання подібної системи полягає не лише у виявленні існуючих взаємозв'язків та залежностей, а й у передбаченні та попередженні майбутніх конфліктів за результатами аналізу.

Завдання роботи — розроблення ймовірнісної моделі військового конфлікту на базі байєсової мережі, яка дозволить всебічно розглянути військовий конфлікт та ймовірності варіантів його розвитку на підставі вибірки статистичних даних.

ПОБУДОВА МОДЕЛІ

Первинним і одним з найважливіших завдань побудови моделі воєнного конфлікту на базі байєсової мережі є обрання змінних (вузлів) мережі та опис взаємозв'язків між ними. Будемо вважати можливим один з двох результуючих вузлів:

1) внутрішній конфлікт (імовірність конфлікту всередині країни — цей вузол включатиме такі типи конфліктів, як повстання або революція, громадянська війна, відсутність внутрішнього конфлікту);

2) зовнішній конфлікт (імовірність конфлікту з іншою країною, включатиме наявність та відсутність зовнішнього конфлікту).

Більш складним завданням є раціональний вибір вихідних змінних моделі. Виходячи з результатів дослідження [4], але з урахуванням переходу від дослідження пар сутностей до дослідження окремих сутностей, вважаємо доцільним обрати такі впливові змінні:

- індекс людського розвитку;
- рівень інфляції;
- контроль корупції;
- демократію;
- наявність поточного конфлікту;
- рівень міграції;
- військові витрати (%GPD);

- ренти природних ресурсів (%GPD).

Ці змінні мають подану нижче інтерпретацію.

Індекс людського розвитку — інтегральний показник, що розраховується щорічно для міждержавного порівняння і вимірювання рівня життя, грамотності, освіченості і довголіття як основних характеристик людського потенціалу досліджуваної території. Це стандартний інструмент для загального порівняння рівня життя різних країн і регіонів. Індекс публікується в межах програми розвитку Організації Об'єднаних Націй у звітах про розвиток людського потенціалу [7].

Інфляція — надмірне відносно потреб товарообігу збільшення кількості паперових грошей з наступним їх швидким знеціненням [8]. Проявляється зростанням загального рівня цін та зниженням купівельної спроможності грошей.

Індекс контролю корупції відображає ступінь, у якому державна влада функціонує з метою особистої вигоди, у тому числі дрібних і великих форм корупції, а також захоплення держави з боку еліт і приватних інтересів [9]. За розрахунковим показником країни оцінюються в одиницях стандартного нормального розподілу, тобто приблизно від -2,5 до 2,5. За ним також вимірюється сила і ефективність політики країни та інституціональних меж для запобігання і боротьби з корупцією.

Демократія — політичний режим, за якого єдиним легітимним джерелом влади в державі визнається її народ. При цьому управління державою здійснюється народом безпосередньо (пряма демократія), або опосередковано через обраних представників (представницька демократія) [10]. Іноді демократію визначають також як набір ідей і принципів, що стосуються свободи, власне вона і являє собою інституціональну свободу. У формулюванні 16-го президента США Авраама Лінкольна демократія — урядування «іменем народу, силами народу і для народу».

Рівень міграції — якісний показник рівня міграції у країні, що набуватиме одного з трьох значень: переважної імміграції, переважної еміграції, приблизно однакових їх значень.

Військовий бюджет (або військові витрати), відомий також як оборонний бюджет, є обсягом фінансових ресурсів, що виділяються країною для росту і підтримання збройних сил, необхідних для оборонних цілей. Військові бюджети часто відображають, наскільки високою суб'єкт вважає ймовірність загрози для нього, або міру агресії, яку він може проявити. Розмір бюджету також відображає здатність країни фінансувати військові дії.

Оцінку природної ренти ресурсів розраховують як різницю між ціною ресурсного товару і середньою вартістю його придбання. Цього досягають через оцінку світових цін одиниць конкретних товарів і віднімання оцінки середніх питомих витрат на виробництво (промислових витрат). Ці одиниці множать на фактичну кількість товару, що країна виробляє, щоб визначити ціну кожного товару як частки ВВП.

Необхідно формалізувати та, у разі потреби, дискретизувати всі обрані змінні. Спочатку визначимо можливі значення результуючих змінних.

1. Внутрішній конфлікт = {наявність; відсутність}.

2. Зовнішній конфлікт = {наявність; відсутність}.

Потім формалізуємо вихідні параметри.

1. Індекс людського розвитку поділимо на категорії відповідно до таких числових значень коефіцієнта:

- дуже високого (0,8 – 1);
- високого (0,7 – 0,8);
- середнього (0,55 – 0,7);
- низького (0 – 0,55).

2. Рівень інфляції визначається у відсотках відносно попереднього року і може мати як від’ємні значення (дефляція), так і додатні (інфляція) значення відповідно. Залежно від числового значення коефіцієнта використано таку шкалу:

- інфляції немає (< 0);
- низький рівень (0 – 5%);
- середній рівень (5% – 10%);
- високий рівень ($> 10\%$).

3. Індекс контролю корупції набуває значень у проміжку [-2,5; 2,5]. Відповідно до статичних даних параметр набуватиме одного з таких значень:

- дуже низького (< -1);
- незадовільного (-1 – 0);
- задовільного (0 – 1,5);
- високого ($> 1,5$).

4. Змінна «демократія» набуватиме одного з таких лінгвістичних значень:

- відсутня;
- гібридний режим;
- перехідний період;
- повна демократія.

5. Наявність поточного конфлікту — бінарна змінна, що дорівнюватиме 1 за наявності конфлікту та 0 за його відсутності.

6. Рівень міграції включає як показник відтоку людей з країни, так і показник притоку. Можливі такі його значення:

- переважна імміграція (більше населення вибуває, ніж прибуває);
- переважна еміграція (більше населення прибуває, ніж вибуває);
- приблизно однакові.

7. Показник військових витрат розраховується у доларах США або відсотках від ВВП. Пропонуються такі значення змінної на основі статистичних даних:

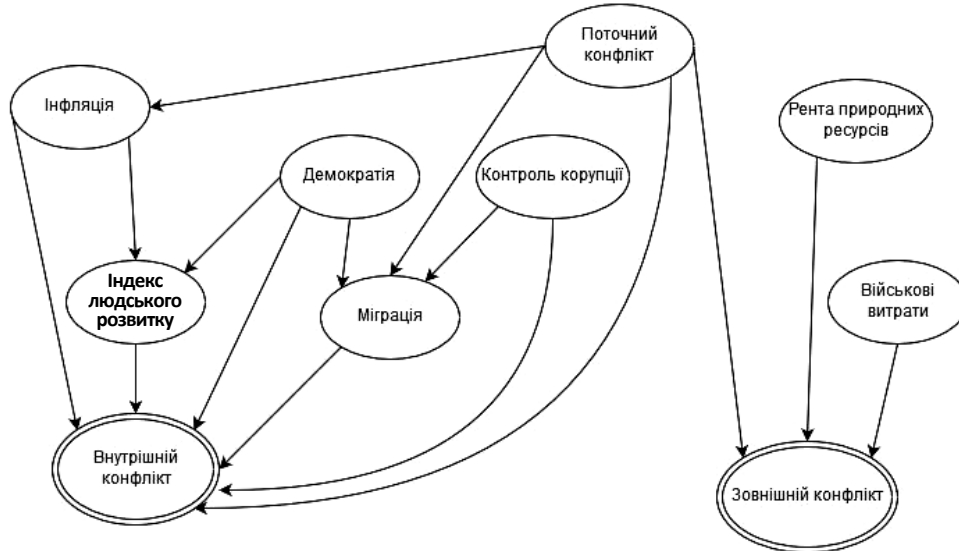
- додатне (збільшення частки військових витрат);
- від’ємне (зменшення частки військових витрат);
- стабільне.

8. Рента природних ресурсів показує рівень видобування та продажу корисних копалин. Як відомо, значення цього показника напряму впливає на ймовірність зовнішніх конфліктів. Можливі такі значення змінної:

- дуже високе ($> 20\%$);
- високе (10 – 20%);

- середнє (5 – 10%);
- низьке (0 – 5%).

Установлено взаємозв'язки між параметрами. Граф зв'язків зображено на рисунку.



Модель зв'язків між змінними мережі

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для моделювання мереж Байєса створено множину бібліотек різними мовами програмування. У цьому дослідженні використано бібліотеку SMILE та графічний інтерфейс GeNIe. Статистичні дані для формування вибірки даних взято з відкритих джерел. Вибірка складається з даних про 51 країну з різними показниками обраних параметрів моделі.

Для навчання параметрів мережі використано такі алгоритми:

- Estimated Posterior Importance Sampling (EPIS);
- Adaptive Importance Sampling (AIS).

Аналіз чутливості досліджуваних мереж дає змогу виявити такі найбільш чутливі змінні мережі, як демократія, контроль корупції, рента природних ресурсів. Такий результат зберігається від мережі до мережі і означає, що навіть невеликі зміни у цих вузлах істотно впливають на остаточний результат (внутрішній або зовнішній конфлікт).

Проаналізуємо результати, отримані під час моделювання, для цільового параметра «зовнішній конфлікт».

Із результатів першого експерименту видно, що за умови зростання державних витрат на військову сферу ймовірність зовнішнього конфлікту підвищується лише за наявності поточного військового конфлікту та низького або високого значення ренти природних ресурсів. Це зумовлюється тим, що модель не розрізняє зовнішні конфлікти за типом (країна, що нападає, чи країна, що захищається). Виходячи з цього, отримані результати показують, що з імовірністю дещо вищою за 50% зовнішні конфлікти країн,

які вже беруть участь у зовнішньому конфлікті, будуть продовжуватися і надалі, причому логічно припустити, що країни з низькою рентою природних ресурсів в цьому випадку — це країни, що нападають, а з високою — що захищаються.

За умови спадних витрат на військову сферу ймовірність зовнішнього конфлікту коливається в межах 50% за умови низької та середньої ренти природних ресурсів. Це пояснюється тим, що зменшення військових витрат порівняно з попередніми роками збільшує ймовірність завершення існуючих конфліктів через нестачу фінансування військових дій; це зменшує ймовірність початку нових конфліктів з боку агресора проте збільшує ймовірність стати жертвою конфлікту.

У разі збереження сталого рівня витрат на військову сферу високою (80%) є ймовірність зовнішнього конфлікту за умови низької ренти природних ресурсів та наявності поточного конфлікту — фактично продовження існуючого конфлікту (для захоплення природних ресурсів) на поточному рівні. За інших умов, навіть за попередньої наявності конфлікту, зовнішній конфлікт малоімовірний.

На підставі результатів другого експерименту (після видалення з мережі найменш впливових зв'язків) можна зробити такі висновки. Із таблиць умовних ймовірностей змінної «зовнішній конфлікт» видно, що, на відміну від попередньої моделі, за умови зростання державних витрат на військову сферу ймовірність виникнення зовнішнього конфлікту підвищується до 67% за високого значення ренти природних ресурсів, причому це значення зберігається як за наявності поточного конфлікту, так і його відсутності. За низької ренти природних ресурсів та відсутності конфлікту ймовірність зовнішнього конфлікту зростає до 48%. Отже, ймовірність наявності зовнішнього конфлікту за другою моделлю вища за умови високої ренти природних ресурсів і не залежить від наявності чи відсутності поточного конфлікту. Такі результати вважаємо більш достовірними ніж отримані за попередньою моделлю.

У разі збереження сталого рівня витрат на військову сферу високою (75%) є ймовірність виникнення зовнішнього конфлікту за умови низької ренти природних ресурсів та, на відміну від попередньої моделі, відсутності поточного конфлікту.

У зв'язку з кардинальною розбіжністю результатів першого та другого експериментів відносно змінної «поточний конфлікт» за схожих результатів відносно інших змінних для подальших експериментів цей вузол вирішено видалити з мережі.

За результатами третього експерименту, за умови зростання державних витрат на військову сферу та середньої ренти природних ресурсів, ймовірність зовнішнього конфлікту майже повністю відсутня (<1%). Це пояснюється відсутністю необхідності отримувати природні ресурси з інших країн. Водночас нарощування та підтримання військової сили гарантує захист від нападу на країну ззовні. Відсутність демократії за низької ренти природних ресурсів також показує низьку (10%) ймовірність зовнішнього конфлікту навіть у разі збільшення витрат на військову сферу. Для перехідної та повної демократії цей показник підвищується до 33% і 38% відповідно, а ймовірність зовнішнього конфлікту за гібридною демократією підвищується до 84%.

За високої ренти природних ресурсів імовірність зовнішнього конфлікту становить високі значення (67%) для будь-якого типу демократії в країні аналогічно до попереднього експерименту.

За спадних військових витрат імовірність зовнішнього конфлікту майже відсутня за умови високої та дуже високої ренти природних ресурсів (99% і 89% — імовірність відсутності конфлікту відповідно). Ситуація для середньої ренти природних ресурсів однак значно відрізняється за зростаючих та спадних витрат на військову сферу. За спадання військових витрат імовірність зовнішнього конфлікту підвищується до 87% за відсутності демократії: спадаючи до 49% за перехідної та повної демократії та 12% за гібридної, оскільки відсутність якісного підтримання військової сфери робить країну вразливою перед нападниками. Відсутність демократії підвищує цю ймовірність, що дозволить назвати воєнні дії «миротворчими» або визнати такими, що допомагають населенню протидіяти існуючому режиму.

За стабільних військових витрат імовірність зовнішнього конфлікту дуже низька для середньої, високої та дуже високої ренти природних ресурсів. Лише за низької ренти в разі неповних різновидів демократії ймовірність зовнішнього конфлікту коливається від 50% для відсутньої або гібридної до 88% для перехідної.

Отже, з отриманих під час проведення трьох експериментів таблиць умовних імовірностей для змінної «зовнішній конфлікт» можна зробити такі висновки:

- Середня рента природних ресурсів сама по собі мало впливає на ймовірність зовнішнього конфлікту, але ця ймовірність тим більша, чим менше грошей держава витрачає на підтримання та покращення у військовій сфері, і тим менша, ніж більш просунута форма демократії, наявна у певній країні.
- Збільшення військових витрат у країнах з низьким рівнем ренти ресурсів та перехідною або повною формою демократії підвищує ймовірність зовнішніх конфліктів (більш імовірно зі сторони агресора) і досягає свого максимуму за гібридної демократії.
- Стабільні військові витрати зазвичай означають стабільність країни відносно військових конфліктів: підтримку існуючих та відсутність нових.

Розглянемо результати, отримані відносно змінної «внутрішній конфлікт». Для цього проведено три аналогічні до попередніх експерименти: з повною моделлю, після видалення найменш важливих зв'язків і після видалення вершини «поточний конфлікт».

Через надвелику кількість вхідних зв'язків змінної «внутрішній конфлікт» у першому експерименті повна таблиця умовних ймовірностей не наводилася. Однак можна зробити такі висновки.

По-перше, низький або дуже низький рівень контролю корупції у поєднанні з не дуже високим рівнем індексу людського розвитку (ІЛР) та низьким рівнем демократії дає майже 90%-ву ймовірність внутрішнього конфлікту. Це легко пояснюється невдоволеністю мешканців країни рівнем життя. По-друге, спостерігається низька ймовірність виникнення конфлікту за перехідного та повного показників демократії, а також — високого та дуже високого рівнів ІЛР у поєднанні з низькою інфляцією та високим рівнем контролю корупції. Переважна імміграція у країну збільшує ймовірність

виникнення внутрішнього конфлікту навіть за високих показників рівня життя та демократії. Причиною цього є як невдоволеність корінних мешканців засиллям мігрантів, так і спроби мігрантів встановити свій лад у країні, до якої вони мігрували, а також ведення нечесного життя.

З огляду на подані у другому експерименті дані висока ймовірність внутрішнього конфлікту за низького або середнього значення ІЛР призводить до переважної еміграції з країни і становить близько 83% для низького рівня ІЛР та 50% для середнього. За високого та дуже високого значень ІЛР відповідно до другої моделі ймовірність внутрішнього конфлікту майже відсутня, незначно зростаючи (33%) за високого ІЛР та переважної еміграції з країни (яка, зазвичай, пов'язана з низьким рівнем демократії та високим рівнем контролю корупції).

Третій експеримент показав, що ймовірність внутрішнього конфлікту за переважної імміграції дуже низька (17% і 4%) за високого та дуже високого значень ІЛР. За низького та середнього значень цього показника та переважної імміграції ймовірність внутрішнього конфлікту збільшується (на 25% і 50%). У разі переважної еміграції з країни ймовірність внутрішнього конфлікту також зменшується зі збільшенням значення ІЛР: від 79% за низького ІЛР до 25% за дуже високого. За приблизно однакових рівнів імміграції та еміграції у країні, що досліджується, ймовірність виникнення конфлікту, навпаки, збільшується зі збільшенням рівнів ІЛР: від 12% за низького до 75% за високого рівня з падінням ймовірності до 30% за дуже високого ІЛР. Це пояснюється тим, що саме у країнах з високим рівнем ІЛР найбільше невдоволення викликають потоки мігрантів. Такі країни вже стали привабливими для мігрантів з гірших (за ІЛР) країн, але, на відміну від країн з дуже високим ІЛР, ще недостатньо окріпли для того, щоб витрати ресурсів країни на мігрантів не впливали на рівень життя корінних мешканців.

Отже, з отриманих під час проведення усіх трьох експериментів таблиць умовних ймовірностей для змінної «внутрішній конфлікт» можна зробити такі висновки:

- високий рівень контролю корупції зменшує ймовірність внутрішнього конфлікту у країні;
- низький або дуже низький рівень контролю корупції у поєднанні з не дуже високим рівнем ІЛР та низьким рівнем демократії має майже 90%-ву ймовірність внутрішнього конфлікту;
- ймовірність виникнення конфлікту за перехідного та повного показників демократії, а також високого та дуже високого рівнів ІЛР у поєднанні з низькою інфляцією та високим рівнем контролю корупції майже дорівнює нулю;
- переважна імміграція у країну збільшує ймовірність виникнення внутрішнього конфлікту навіть за високих показників рівня життя та демократії, особливо за середньої та високої інфляції.

Виконано також прогнозування конфліктів для України на основі побудованої моделі. Прогнозована ймовірність внутрішнього конфлікту становить 49%; ймовірність зовнішнього — 63%. Така низька ймовірність зовнішнього конфлікту (низька, оскільки реально ймовірність зовнішнього конфлікту в Україні дорівнює одиниці) пояснюється тим, що в контексті розробленої моделі нинішній конфлікт пояснюється слабо, оскільки він

слабко пов'язаний як з рентою природних ресурсів, так і з рівнем демократії або військових витрат.

Наступні експерименти спрямовано на пошук взаємозв'язків у вибірці даних за допомогою алгоритмів «вивчення структури», що дозволяє генерувати ймовірнісну модель у формі мережі Байєса з вибірки статистичних даних.

У першому експерименті використовувався байєсовий пошук. Виявлено, що найбільш пов'язаними є дані за такими змінними, як «контроль корупції», «ІЛР», «демократія» і «міграція».

Змінна «контроль корупції» виявилась параметром впливу відносно інших трьох інших змінних. З отриманих таблиць умовних ймовірностей випливає:

- підвищення рівня контролю корупції сприяє підвищенню ІЛР;
- підвищення рівня контролю корупції означає перехід до вищої форми демократії;
- низький та дуже низький рівні контролю корупції зумовлюють переважну еміграцію з країни, тоді як високий рівень — переважну імміграцію у країну.

У другому експерименті отримано ще один результат генерування мережі. Отриманий граф містить підграф, отриманий у попередньому експерименті. На відміну від попереднього методу у генерованій мережі були також наявні змінні «індекс людського розвитку» та «внутрішній конфлікт». Інфляція за такою моделлю впливає на ймовірність внутрішнього конфлікту безпосередньо, тоді як міграція та демократія — опосередковано через змінну «індекс людського розвитку». Відповідно до таблиць умовних ймовірностей вузла «внутрішній конфлікт» за високого та дуже високого показників ІЛР ймовірність внутрішнього конфлікту підвищується лише за низького та середнього рівнів контролю корупції і становить близько 50%. За низького та середнього показників ІЛР ймовірність внутрішнього конфлікту коливається від 30% до 52%, падаючи до 10% за відсутності інфляції.

За цією моделлю отримано такий прогноз для України: ймовірність внутрішнього конфлікту становить 48%.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто проблему моделювання військових конфліктів, визначення та формалізації параметрів моделі. Результатом роботи стала побудована модель військового конфлікту у формі мережі Байєса. Модель навчено на сформованій з реальних статистичних даних вибірки, виконано серію обчислювальних експериментів та проаналізовано отримані результати.

За побудованою моделлю оцінено ймовірність внутрішнього конфлікту в Україні у 48%, що цілком відповідає реальності. Ймовірність зовнішнього конфлікту оцінено у 63%. Оскільки реально ймовірність зовнішнього конфлікту в Україні дорівнює одиниці, цей прогноз не є точним. Це зумовлено тим, що в контексті розробленої моделі нинішній конфлікт пояснюється слабко, оскільки він слабко пов'язаний як з рентою природних ресурсів, так і з рівнем демократії або рівнем реальних військових витрат України.

Отже, модель можна вважати адекватною та придатною для практичного використання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Богатирьов Е.Я.* Аналіз методів військово-політичного прогнозування / Е.Я. Богатирьов, Ю.Д. Макієв, В.П. Малішев // Стратегія громадянського захисту: проблеми та дослідження. — 2013. — Т. 3. — №2(5).
2. *Абаєв Л.Ч.* Моделювання криз і конфліктів у міжнародних відносинах: досвід практичного застосування / Л.Ч. Абаєв // Проблеми національної стратегії. — 2012. — № 1. — С. 57–72.
3. *Рома О.М.* Спосіб формалізації конфлікту та його системне моделювання / О.М. Рома, В.Б. Толубко, С.В. Ленков // Ukrainian Information Security Research Journal. — 2009. — Т. 11. — № 3(44).
4. *Адаменко А.А.* Методика формування множини факторів воєнного конфлікту та системи взаємозв'язків між ними / А.А. Адаменко // Наука і техніка повітряних збройних сил України. — 2011. — № 1. — С. 141–145.
5. *Beck N.* Improving Quantitative Studies of International Conflict: A Conjecture / N. Beck, G. King, Z. Langche // American Political science review. — 2000. — Vol. 94. — N 1. — P. 21–35.
6. *Marwala T.* Modelling and Controlling Interstate Conflict, Budapest / T. Marwala, M. Lagazio // Hungary: IEEE International Joint Conference on Neural networks. — 2004. — P. 1–6.
7. *The Human Development concept* [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://hdr.undp.org/en/humandev/>
8. *Словник української мови: в 11 т.* / АН УРСР, Ін-т мовознавства; за ред. І.К. Білодіда. — Т. 4. — К.: Наук. думка, 1973. — С. 42.
9. *Lambsdorff J.* How Corruption Affects Persistent Capital Flows / J. Lambsdorff // Economics of Governance. — 2003. — Vol. 4. — P. 229–243.
10. *Етимологічний словник української мови: в 7 т.* / АН УРСР, Ін-т мовознавства ім. О.О. Потебні; ред. кол.: О.С. Мельничук, І.К. Білодід, В.Т. Коломієць, О.Б. Ткаченко. — Т. 2. — К.: Наук. думка, 1982. — С. 31.

Надійшла 26.12.2017

МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНЬОЇ ВАЛЮТИ В РЕФЛЕКСИВНИХ ІГРАХ З БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ ВИГРАШУ

С.А. СМІРНОВ, І.М. ТЕРЕЩЕНКО

Анотація. Розглянуто завдання прийняття рішень в умовах конфлікту, багатокритеріальної невизначеності та рефлексивної взаємодії гравців. Моделювання рефлексивної поведінки дає змогу аналізувати ситуації, коли прийняті рішення відрізняються від нерефлексивної раціональної поведінки, та дослідити і виявити внутрішні причини такої поведінки. Розв'язання проблеми з огляду на багатозначність інтересів сторін ґрунтується на багатокритеріальному узагальненні запропонованої В.О. Лефевром постановки, що базується на використанні поняття внутрішньої валюти. Для обчислення початкової оцінки внутрішньої валюти супротивника на основі номінально відомих критеріїв використано метод інтервальних оцінок, що дає змогу експертам задавати діапазон можливих значень вагових коефіцієнтів без визначення їх конкретних значень і спростувати експертну процедуру. Вагові коефіцієнти уточнено розв'язуванням допоміжної оптимізаційної задачі з пошуку поправок, унесених до моделі визначення внутрішньої валюти.

Ключові слова: рефлексивні ігри, багатокритеріальні функції виграшу, метод внутрішньої валюти, метод лінійної згортки, інтервальні оцінки.

ВСТУП

Ситуація багатокритеріального вибору завжди виникає під час відшукування управлінського рішення або за спроби прогнозування можливих дій. Пошук оптимального розв'язку наражається на складну систему взаємозалежних компонентів. Як правило, рішення будують на основі теорії корисності, яка припускає раціональність дій супротивника. Проте досить часто виникають ситуації, коли здавалося б раціональне рішення щодо корисності не збігається або взагалі не відповідає реальному стану речей. Така невідповідність досить часто спричиняється неправильною побудовою моделі функціонування певної системи, недостатньою кількістю або точністю застосованих параметрів, даних тощо. Вирішення цієї проблеми спонукає до застосування ігрового підходу, а саме — до моделювання на основі рефлексивних ігор рефлексивної поведінки сторін. Таким дослідженням робиться спроба проаналізувати спосіб дій особи, що приймає рішення, та виявити внутрішні нераціональні причини такої поведінки.

Пропонована робота ґрунтується на одному з рішень для розв'язання цієї проблеми, запропонованих В.О. Лефевром [1], через уведення поняття внутрішньої валюти. Це поняття являє собою уявлення людини про її узагальнений критерій вибору, що будується з урахуванням ваг, які вказують на той чи інший рівень важливості номінальних критеріїв — власного та супротивника. Будуємо уявну внутрішню валюту супротивника, що є, влас-

не, спробою передбачити його дії. Грунтуючись на такому підході та вважаючи, що супротивник (другий гравець) думає по-іншому, будуємо модель і на її основі дії першого гравця. Відповідно те саме робить і супротивник.

Конфлікт двох учасників X та Y В.О. Лефевр запропонував розглянути в межах функціонування соціального середовища. Припустімо, що немає підстав сумніватися в раціональності поведінки гравця X , проте він діє неоптимально з погляду гравця Y . Це означає, що цінності, які приписуються цьому гравцю відповідно до уяви X про нього, не відповідають дійсності. Аналогічно розцінюються дії гравця Y з позиції гравця X . Таким чином, насправді кожен з гравців може вирішувати зовсім інше завдання, мету якого не розпізнав супротивник. Тоді для досягнення максимальної корисності на підставі певних факторів необхідно здобути нові знання, переоцінивши цінності, що впливають на справжні дії гравця і дають змогу прогнозувати його дії.

Звідси випливає, що вирішення проблем рефлексивного керування є актуальним, оскільки воно має на меті керування діями супротивника за умови, що він усвідомлює поточну ситуацію і може зробити свій вибір. У свою чергу, це дозволяє розглянути керування вибором у ширшому спектрі ситуацій. Вирішення такого завдання дає набагато ефективніші методи розв'язання, бо це розширює сферу їх застосувань, оскільки не завжди можна позбавити можливості вибору. А саме такі завдання найчастіше постають, наприклад, в економіці, військовій справі тощо.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Математична модель побудови внутрішньої валюти, запропонована В.О. Лефевром спільно з П.В. Барановим і В.С. Лепським, виглядає таким чином. Нехай гравці X та Y отримують певні номінальні виграші A і B відповідно. Додатково вводяться величини α і β . Параметр α характеризує ставлення гравця X до самого себе, рівень важливості своїх цінностей, а параметр β — його ставлення до партнера. Відповідно такі самі параметри вводяться і для гравця Y . Тоді внутрішня валюта кожного з них будується за таким правилом:

$$H_1^{(X)} = A + A\alpha + B\beta; H_1^{(Y)} = B + B\alpha + A\beta,$$

де $H_1^{(X)}$ і $H_1^{(Y)}$ — відповідно внутрішні валюти гравців X та Y з точки зору гравця X .

Звернемо увагу на параметри α і β . Їх можна розглядати як коефіцієнти, причому α відомий гравцю X , оскільки він знає свої дії, свою систему цінностей, а параметр β — це міра готовності гравця X урахувати інтереси супротивника, його систему цінностей. Аналогічно такі припущення використовуються і для гравця Y .

Проте наведена модель має певну умовність. Основним недоліком є використання лише одного критерію для побудови внутрішньої валюти для кожного з гравців, у той час як у реальності їх завжди декілька. Більш того, їх кількість у загальному випадку є різною у кожного з гравців, причому про

існування деяких критеріїв інформації може і не бути. Легко бачити наявність штучного припущення щодо використання однакових і незмінних параметрів у побудові критерію для обох гравців. З огляду на це пропонується модель внутрішньої валюти з урахуванням рефлексії першого рангу, що має такий вигляд:

$$H^X = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} A_{\mu}^X + \sum_{\nu} \beta_{\nu} B_{\nu}^X ; \quad H^{XY} = \sum_{\mu} \alpha'_{\mu} A_{\mu}^X + \sum_{\nu} \beta'_{\nu} B_{\nu}^X ;$$

$$H^Y = \sum_{\mu} \alpha''_{\mu} A_{\mu}^Y + \sum_{\nu} \beta''_{\nu} B_{\nu}^Y ; \quad H^{YX} = \sum_{\mu} \alpha'''_{\mu} A_{\mu}^Y + \sum_{\nu} \beta'''_{\nu} B_{\nu}^Y ,$$

де H^X — модель внутрішньої валюти першого гравця X ; H^{XY} — модель внутрішньої валюти другого гравця Y в уявленні X . Аналогічно для гравця Y моделями внутрішньої валюти є H^Y та H^{YX} . Оскільки задаються вагові коефіцієнти, то величини A і B без ваг не використовуємо. Розглянемо параметри: α_{μ} — вагові коефіцієнти для критеріїв гравця X ; α_{μ} — оцінювання критеріїв гравця X супротивником Y ; $\beta_{\nu}, \beta'_{\nu}$ — уявлення X про вагові коефіцієнти гравця Y для його критеріїв; β''_{ν} — справжні оцінки критеріїв супротивника ним же; β'''_{ν} — гравець Y вважає, що гравець X так оцінює його дії; $\alpha''_{\mu}, \alpha'''_{\mu}$ — супротивник оцінює дії X зі свого бачення; A_{μ}^X — критерії гравця X ; B_{ν}^X — критерії, що використовує гравець Y з точки зору X ; A_{μ}^Y — критерії гравця X з точки зору гравця Y ; B_{ν}^Y — дійсні критерії, що використовує супротивник.

Мета роботи — створення алгоритму розрахунку вагових коефіцієнтів для побудови процедури визначення внутрішньої валюти для розв'язання конфліктної ситуації в умовах багатокритеріального вибору. Модель, для якої розробляється вказаний алгоритм, має видавати результат, прийнятний щодо корисності для гравця.

АНАЛІЗ СИТУАЦІЇ ГРИ

Розглянемо для наочності простий випадок, коли гравці мають по два критерії кожен. Зауважимо, що внутрішня валюта по суті є зваженою сумою критеріїв. Це дозволяє перейти від багатокритеріальної до однокритеріальної задачі і скористатися відомими методами. Отже, нехай отримано внутрішні валюти першого гравця і другого з точки зору першого. Якщо внутрішню валюту другого гравця обчислено правильно, тоді можна точно за знайденими формулами передбачати його подальші дії:

$$H^X = \alpha_1 A_1^X(x) + \alpha_2 A_2^X(x) + \beta_1 B_1^X(y) + \beta_2 B_2^X(y) ;$$

$$H^{XY} = \alpha'_1 A_1^X(x) + \alpha'_2 A_2^X(x) + \beta'_1 B_1^X(y) + \beta'_2 B_2^X ,$$

де x і y — стратегії першого та другого гравців відповідно.

Тоді з уведенням певних стратегій для кожного гравця можна побудувати, наприклад, біматричну гру та розв'язувати її відомими методами. Од-

нак, щоб перейти до розв'язання вказаної задачі, необхідно принаймні бути впевненими, що внутрішні валюти обчислені правильно. Інакше будь-яка побудована на цьому гра залишалася б грою з неповною інформацією.

У дійсності часто трапляється ситуація, коли знайдений розв'язок відрізняється від реального. Припустимо, що вибрані стратегії приведуть до ситуації (i, j) , супротивник сподівався на ситуацію (l, k) . Реальною ситуацією стала (i, k) . Таким чином, за виконаними розрахунками спрогнозовано ситуацію (H_{ij}^X, H_{ij}^{XY}) , тобто згідно з рішенням першого гравця вибрано i -у стратегію і зроблено припущення, що гравець Y обере j -у стратегію. Насправді виявилось, що він обрав k -у стратегію; реальний стан описується ситуацією (H_{ik}^X, H_{ik}^{XY}) . Подамо гру у вигляді біматричної гри у вигляді:

$$\begin{pmatrix} (H_{11}^X, H_{11}^{XY}) & \dots & (H_{1j}^X, H_{1j}^{XY}) & \dots & (H_{1k}^X, H_{1k}^{XY}) & \dots & (H_{1m}^X, H_{1m}^{XY}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (H_{i1}^X, H_{i1}^{XY}) & \dots & (H_{ij}^X, H_{ij}^{XY}) & \dots & (H_{ik}^X, H_{ik}^{XY}) & \dots & (H_{im}^X, H_{im}^{XY}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (H_{n1}^X, H_{n1}^{XY}) & \dots & (H_{nj}^X, H_{nj}^{XY}) & \dots & (H_{nk}^X, H_{nk}^{XY}) & \dots & (H_{nm}^X, H_{nm}^{XY}) \end{pmatrix}.$$

Розв'язання даної задачі потребує додаткових припущень і розрахунків, оскільки, по-перше, маємо два набори вагових коефіцієнтів, не пов'язаних між собою, по-друге, у ситуації (H_{ik}^X, H_{ik}^{XY}) обчислене значення H_{ik}^{XY} є неправильним.

Як можна бачити, у розв'язанні такої задачі є певна невизначеність щодо точної оцінки параметрів гравця Y та у загальному випадку його критеріїв. У праці [2] запропоновано використовувати інтерактивні методи, щоб особа, яка приймає рішення, мала змогу аналізувати результати на певній ітерації та коригувати параметри задачі для розв'язання на наступному кроці. В алгоритмі процедури побудови внутрішньої валюти застосовувався метод Джоффріона–Дайєра–Файнберга для відновлення градієнта за допомогою локальних коефіцієнтів заміщення, які визначалися опитуванням експертів. Нормовані координати знайденого вектора градієнта і є ваговими коефіцієнтами критеріїв для побудови внутрішньої валюти.

Одним з недоліків розробленої процедури є те, що експерти залучалися не лише на початку, але й на подальших кроках для визначення поправкових коефіцієнтів. Тому для розроблення нового алгоритму одна з вимог полягає у залученні експертів лише на початку.

Задавати початкові значення параметрів у критеріальному просторі особі, що приймає рішення, досить складно. Будь-якому з експертів набагато простіше визначити межі, у яких має існувати певний параметр. Тоді виникає потреба у виборі методу, який би працював у вказаній ситуації. У роботі пропонується використати метод інтервальних оцінок [3].

Оскільки, знаючи використані стратегії, можна обчислити $A_i^X(x)$ і $B_j^X(y)$ і, отже, розглядати $A_i^X(x)$ і $B_j^X(y)$ як певні константи.

Вагові коефіцієнти формул H_{ij}^{XY} і H_{ik}^{XY} мають певні граничні значення. Звідси впливає задача визначення вагових коефіцієнтів, яка зводиться до пошуку алгоритму обчислення поправок, що вносяться до граничних значень певних коефіцієнтів, оскільки звернення до експертів застосовується лише на першому кроці для надання інтервальних оцінок, у межах яких містяться вагові коефіцієнти.

АЛГОРИТМ УТОЧНЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ ВАЛЮТИ

Припускаємо, що гравець X використовує алгоритм уточнення внутрішньої валюти. Для його застосування перепозначимо $A_i^X(x)$ і $B_j^X(y)$ як C_k , де k пробігає всі індекси i та j , і впорядкуємо їх у вигляді $0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_n$; коефіцієнти позначимо як x_k . Оскільки гравець X намагається зрозуміти спосіб дій гравця Y , модель внутрішньої валюти H^{XY} набуде такої форми:

$$H^{XY} = \sum_{k=1}^n x_k C_k ; \quad 0 \leq \underline{x}_k \leq x_k \leq \overline{x}_k \leq 1,$$

де \underline{x}_k і \overline{x}_k — відповідно нижня та верхня межі значень коефіцієнта x_k .

Зазначимо, що застосування методу інтервальних оцінок дає точку $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \overline{x}_{i+1}, \dots, \overline{x}_n)$, де лінійна комбінація $\sum_{k=1}^n x_k C_k$ набуває максимального значення. Позначимо її через H_{\max}^{XY} . Маємо справжнє значення H^Y і точку, що задовольняє співвідношення $H_{\max}^{XY} \leq H^Y$. Оскільки сума вагових коефіцієнтів повинна дорівнювати одиниці, то і поправкові коефіцієнти ε_k із формули $x_k + \varepsilon_k$ повинні задовольняти умову $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 0$, тобто $\langle \overline{\varepsilon}, \overline{1} \rangle = 0$. Крім того, позначивши через $\Delta = H_{\max}^{XY} - H^Y$, запишемо ще одну умову: $\langle \overline{\varepsilon}, \overline{C} \rangle = \Delta$. Варто припустити, що поправкові коефіцієнти мають бути невеликими, звідси отримуємо задачу $\sum_k \overline{\varepsilon}_k^2 \rightarrow \min$. Алгоритм розрахунку поправок для вагових коефіцієнтів пропонуємо у такому вигляді:

1. Обчислюємо значення H_{\max}^{XY} згідно з методом інтервальних оцінок.
2. Якщо реальне значення H^Y не збігається з початковим, то складаємо систему рівнянь для обчислення поправок, інакше переходимо до пункту 3. Отже, розв'язуємо оптимізаційну задачу $\sum_k \varepsilon_k^2 \rightarrow \min$ за таких умов:

$$\sum_{k=1}^n (x_k + \varepsilon_k) C_k = H^Y ; \quad \langle \overline{\varepsilon}, \overline{1} \rangle = 0 ; \quad \langle \overline{\varepsilon}, \overline{C} \rangle = \Delta ,$$

де $\sum_k x_k C_k = H_{\max}^{XY}$.

3. За отриманою моделлю внутрішньої валюти обчислюємо оптимальну стратегію. Виконуємо наступний крок і переходимо до пункту 1.

Вважаємо скориговані значення вагових коефіцієнтів сприйнятними щодо інформованості гравця X .

Алгоритм виконується не більше ніж $n-1$ раз, оскільки за $n-1$ точкою можна побудувати таку модель H^{XY} , що $H^{XY} = H^Y$. Така ситуація виникає тоді, коли супротивник не відчуває потреби підвищити свій рівень рефлексії, на чому завжди засновані переваги від використання рефлексивного керування.

Опишемо вказаний процес пошуку поправок з геометричного погляду. Є дві гіперплощини, одна з яких проходить через нуль і ортогональна до вектора, що складається лише з одиниць. Розв'язком буде вектор мінімальної довжини від початку координат до перетину цих двох гіперплощин. Цей вектор є сумою двох ортогональних векторів. Один вектор напрямлений так само, як і вектор C і його довжина дорівнює $\frac{\Delta}{\|C\|}$. Другий вектор ортогональний до першого, усі його компоненти в сумі дають нуль і його довжина є мінімальною.

Існування, єдність та можливість знаходження такого вектора очевидні і сумнівів не викликають.

ВИСНОВКИ

Розроблено метод розрахунку вагових коефіцієнтів за новою інформацією у ході рефлексивної гри для процедури обчислення внутрішньої валюти. Пропонований метод дає змогу на основі аналізу поведінки другого гравця проводити процес уточнення параметрів для побудови моделі внутрішньої валюти супротивника.

Запропоновано використовувати метод інтервальних оцінок, який дозволяє експертній процедурі встановлення вагових коефіцієнтів критеріїв надавати не точкові значення, а інтервальні у певних межах. Подолання інтервальної невизначеності реалізується за допомогою гарантованих оцінок.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лефевр В.А.* Внутренняя валюта в рефлексивных играх / В.А. Лефевр, П.В. Баранов, В.Е. Лепский // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1969. — № 4. — С. 29–33.
2. *Смирнов С.А.* Процедура обчислення внутрішньої валюти в рефлексивних іграх / С.А. Смирнов, І.М. Терещенко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 1. — С. 39–44.
3. *Смирнов С.А.* Гарантированный синтез скалярного критерия для решения задачи многокритериальной оптимизации / С.А. Смирнов, И.С. Гонтаренко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2006. — № 2. — С. 99–106.

Надійшла 30.10.2017

ПРИСКОРЕННЯ МЕТОДУ КВАДРАТИЧНОГО РЕШЕТА НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ УМОВНО B -ГЛАДКИХ ЧИСЕЛ

В.М. МІСЬКО

Анотація. Досліджено ступінь прискорення базового методу квадратичного решета на основі пошуку умовно B -гладких чисел. Проведено аналіз впливу на ефективність алгоритму та кількості випадків використання умовно B -гладких чисел. Показано, що модифікований алгоритм на основі пошуку умовно B -гладких чисел дозволяє факторизувати число у тих випадках, коли базовий алгоритм квадратичного решета (за стандартного інтервалу просіювання та розміру факторної бази) не зміг сформувати матрицю для отримання розв'язку.

Ключові слова: факторизація, метод квадратичного решета, умовно B -гладкі числа, прискорення.

ВСТУП

В інформаційно-телекомунікаційних системах для розв'язання задачі захисту інформації часто використовують RSA алгоритм. Поширення цього алгоритму робить актуальним його криптоаналіз. В основі криптостійкості найбільш популярного сьогодні асиметричного криптоалгоритму RSA є складність факторизації великих цілих чисел. Відкритий ключ містить велике складене ціле число — криптомодуль N , що є добутком двох великих простих чисел. Натепер немає відомого простішого універсального способу зламати шифрування як факторизація N . Тоді можемо отримати два прості числа з добутку та розшифрувати повідомлення [7, 8].

У 1977 р., коли був винайдений алгоритм RSA, факторизація цілих чисел з 80-десятковими знаками здавалась неможливою; 256-бітові ключі були надійними. Першим суттєвим проривом стало квадратичне решето (Quadratic Sieve) [1] — метод, винайдений Карлом Померансом у 1981 р., який може факторизувати числа розміром 100 десяткових символів і більше. Натепер це найефективніший відомий метод факторизації чисел, розміром меншим за 100 десяткових знаків. Поява ідей, які дозволяють знизити обчислювальну складність методу квадратичного решета, може розширити множину великих чисел (більше 100 десяткових знаків), де цей метод буде найкращим, це дасть змогу удосконалити процес криптоаналізу, хоча може призвести до збільшення числа розрядів N для криптостійких шифрів RSA.

Тому розроблення нових способів прискорення методу квадратичного решета та їх дослідження є актуальним. У дослідженні пропонується додатково використовувати B -гладкі з неединичними залишками, які є квадратами простих чисел. Такі B -гладкі числа будемо називати **умовно B -гладкими**.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Припустімо, що N — число, яке потрібно факторизувати, алгоритм квадратичного решета намагається знайти два числа x та y таких, щоб $x \not\equiv \pm y \pmod{n}$ і $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$. Це означатиме, що $(x - y)(x + y) \equiv 0 \pmod{n}$, тоді вирахуємо множники N як $\gcd(x - y, n)$ і $\gcd(x + y, n)$, використовуючи алгоритм Евкліда. Є імовірність 50 відсотків шансу, що цей додаток буде нетривіальним дільником N [2].

Алгоритм квадратичного решета генерує послідовність квадратів, використовуючи багаточлен $x^2 - N$, змінюючи x від \sqrt{N} до $\sqrt{N} + M$ [2]. Величина M збільшується до межі $|M| \leq L^b$, де L^b — **інтервал просіювання**. Це місце, де метод стає евристичним, оскільки абсолютно точного способу обчислення інтервалу просіювання немає.

У квадратичному решеті вираховуємо залишок $x^2 \pmod{N}$ для деяких x і знаходимо таку множину, добуток елементів якої є квадратом. Це дає змогу порівняти квадрати. Однак піднесення до квадрата множини випадкових чисел за модулем N приводить до великої кількості різних простих множників, великих векторів та до великого розміру матриці спеціальної системи лінійних рівнянь. Тому для спрощення додатково шукаємо пари цілих чисел x і $y(x)$, які відповідають значно простішим умовам ніж $x^2 \equiv y^2 \pmod{N}$. Алгоритм вибирає набір простих чисел, **який називається факторною базою**, і намагається знайти x таке, щоб залишок $y(x) = x^2 \pmod{N}$ був добутком простих чисел, що входять до факторної бази. Такі x називаються гладкими стосовно факторної бази, або B -гладкими.

Як факторну базу B беремо множину простих чисел, яка складається з простих чисел p , які не перевищують задану межу L^a (вибирається з урахування оптимальності). Межа L^a — це ще одне евристичне місце алгоритму.

Алгоритм працює в два етапи: етап збирання даних, які можуть привести до рівності квадратів, та етап оброблення даних, де він розміщує всю зібрану інформацію у матрицю і оброблює її для отримання розв'язку. Другий етап потребує великої ємності пам'яті і його важко розпаралелити.

Швидкість та результати роботи алгоритму залежать від розміру факторної бази та розміру інтервалу просіювання.

Якщо кількість простих чисел у факторній базі (розмір факторної бази) дуже мала, то розмір вектора степенів буде теж малим, що значно зменшує кількість операцій. Проблема полягає в тому, щоб знайти такі B -гладкі числа, які б входили в цю факторну базу. Чим менша факторна база, тим суттєво меншою є кількість B -гладких чисел, тобто необхідно значно збільшувати

ти інтервал просіювання. Якщо створити велику за розміром факторну базу, то постала б проблема розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь спеціального вигляду з матрицею великої розмірності, що потребує великої ємності пам'яті та ресурсів. Оптимальне значення розміру факторної бази пропонується у праці [3], яке обчислюється за формулою

$$A = L^a = \left(e^{\sqrt{\ln(n)\ln\ln(n)}} \right)^{\sqrt{2}/4} = L(n)^{\sqrt{2}/4} = L^{\sqrt{2}/4}. \quad (1)$$

Ця формула не дає остаточної відповіді. Для кожного випадку найкращий розмір факторної бази є індивідуальним і може відрізнятись від значення, отриманого за формулою (1).

Наприклад, коли факторизували RSA-129 у 1994 р., використовували факторну базу простих чисел розміром 534339.

Інтервал просіювання повинен бути таким, щоб кількість B-гладких була більшою за кількість елементів у кожному векторі. Але цієї умови не достатньо. Можна скласти матрицю, де кількість векторів більша за кількість елементів у кожному векторі, та отримати хибний розв'язок. У такому випадку знадобиться розширити інтервал просіювання для отримання додаткових векторів. Для загального випадку (згідно з працею [3]) визначити розмір інтервалу просіювання можна за формулою

$$M_{\max} = L^b = \left(e^{\sqrt{\ln(n)\ln\ln(n)}} \right)^{3\sqrt{2}/4} = L(n)^{3\sqrt{2}/4} = L^{3\sqrt{2}/4}. \quad (2)$$

Якщо після ділення числа M на всі прості числа з факторної бази B , залишок не дорівнює одиниці, то таке число відкидаємо. Додатковий аналіз цих чисел може надати більшу кількість векторів для побудови матриці.

Основною проблемою методу квадратичного решета є пошук достатньої кількості B-гладких чисел. Тому пошук способів отримання додаткових варіантів залишків, що можуть розглядатися як B-гладкі числа, є актуальним завданням.

Додатковий аналіз B-гладких чисел згадується в літературі [2, 5, 6]. Пропонується запам'ятовувати B-гладкі з неединичним простим залишком. Для знаходження B-гладких з однаковими залишками потрібно використовувати їх разом.

Пропонується розглянути неединичні залишки, які є квадратами простих чисел. Вектори таких чисел можна додавати до матриці, не враховуючи ці залишки. Як квадрати вони жодним чином не впливають на розв'язок. Якщо $y(a) = 7 \cdot 11^2 \cdot 23 \cdot 137^2$ та $y(b) = 7 \cdot 23$, тоді $y(a)y(b) = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 23^2 \cdot 137^2$. За обраного максимального числа для факторної бази 23, вектор $y(a)$ увійде до матриці. Під час розв'язання матриці можна не враховувати 137^2 , оскільки 137 має парний степінь. Такі залишки і називаються **умовно B-гладкими**.

Слід зазначити, що натепер в асиметричних криптосистемах використовуються числа розміру 1024 біт і більше. У цьому дослідженні використовувались числа розміром до 33 біт. Але результати дослідження дають основу для подальшого вивчення цього питання на числах розміру 1024 біт і більше.

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІЗУ УМОВНО *B*-ГЛАДКИХ ЧИСЕЛ

Розглянемо на прикладі ефективність запропонованої модифікації. Оберемо $p = 401$ і $q = 103$. Ці прості числа створюють число для факторизації $pq = N = 41303$. Обчислимо за формулою (1) розмір факторної бази $A = 6$. За допомогою формули (2) отримаємо інтервал просіювання $M = 203$.

Після просіювання варіантів $y(x)$ через факторну базу отримуємо *B*-гладкі числа. Ці числа наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Результати просіювання варіантів $y(x)$

Знак числа	Вектори степенів <i>B</i> -гладких чисел						<i>B</i> -гладкі
	2	11	19	23	29	37	
1	1	1	0	0	2	0	-18502
1	0	1	0	0	0	2	-15059
1	1	0	0	1	0	1	-1702
0	1	0	2	0	0	0	722
0	0	0	0	2	1	0	15341
0	1	1	0	1	0	1	18722

Цих чисел не достатньо для факторизації обраного N . Знайдемо умовно *B*-гладкі числа (табл. 2).

Таблиця 2. Результати додаткового просіювання варіантів $y(x)$

Знак числа	Вектори степенів умовно <i>B</i> -гладких чисел						Дільники, які не входять до факторної бази	Умовно <i>B</i> -гладкі
	2	11	19	23	29	37		
0	0	0	0	0	0	0	149^2	22201
0	1	0	0	0	0	0	131^2	34322
0	1	0	0	0	0	0	157^2	49298

Число 22201 не ввійшло до матриці, оскільки воно має прості дільники, які не потрапили у факторну базу. Число 22201 є квадратом, за допомогою якого отримуємо розв'язок. Числа 32322 та 49298 не є квадратами, але разом дають ще один розв'язок.

Розглянемо інший приклад. Оберемо $p = 11$ і $q = 601$, дістаємо $pq = N = 6611$. Обчислимо розмір факторної бази та інтервал просіювання $A = 5$, $M = 102$.

Після просіювання варіантів $y(x)$ через факторну базу отримуємо *B*-гладкі числа. Ці числа наведено в табл. 3.

Обчислюючи матрицю створену з векторів з табл. 3, дістаємо тільки хибні розв'язки. Знайдемо умовно *B*-гладкі числа (табл. 4).

Таблиця 3. Результати просіювання варіантів $y(x)$

Знак числа	Вектори степенів В-гладких чисел					В-гладкі
	2	5	17	29	31	
1	1	1	1	1	0	-4930
1	0	1	0	1	1	-4495
1	1	1	2	0	0	-2890
1	1	0	1	1	0	-986
1	0	0	1	0	1	-527
1	1	2	0	0	0	-50
0	0	1	0	2	0	4205
0	1	1	1	0	1	5270

Таблиця 4. Результати додаткового просіювання варіантів $y(x)$

Знак числа	Вектори степенів умовно В-гладких чисел					Дільники, які не входять до факторної бази	Умовно В-гладкі
	2	5	17	29	31		
1	1	0	0	0	0	41^2	-3362
0	0	1	0	0	0	37^2	6845

Число -3362 дозволило сформувати розв'язок з чисел: -4930, -4495, -3362 та -527.

Приклади випадків, де умовно В-гладкі числа входять до розв'язку, наведено в табл. 5.

Таблиця 5. Приклади факторизації з умовно В-гладкими числами

p	q	N	В-гладкі, які утворюють квадрат	Умовно В-гладкі	Множники умовно В-гладких чисел
27743	41203	1143094829	45292900	45292900	$5^2 \cdot 7^2 \cdot 673^2$
89	46411	4130579	-1496450, -5618	-1496450	$-1 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 173^2$, $-1 \cdot 2 \cdot 53^2$
5647	40577	229138319	-29848630, -2996875, 11514850	-29848630,	$-1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7653^2$, $-1 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 137$, $2 \cdot 5^2 \cdot 41^2 \cdot 137$
29741	40087	1192227467	26759929	26759929	$7^2 \cdot 739^2$
30271	48533	1469142443	83375161	83375161	$23^2 \cdot 739^2$
30707	32089	985356923	477481	477481	691^2
31729	32423	1028749367	120409	120409	347^2
32443	45137	1464379691	40284409	40284409	$11^2 \cdot 577^2$
32887	39371	1294794077	10510564	10510564	$2^2 \cdot 1621^2$
6163	44777	275960651	-22386875, -2107, 23952473	23952473	$-1 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 43$, $-1 \cdot 7^2 \cdot 43, 17 \cdot 1187^2$
36353	39511	1436343383	2493241	2493241	1579^2
37561	43067	1617639587	7579009	7579009	2753^2

Продовження табл. 5

38239	45413	1736547707	12866569	12866569	$17^2 \cdot 211^2$
39157	45119	1766724683	8886361	8886361	$11^2 \cdot 271^2$
40577	46811	1899449947	9715689	9715689	$3^2 \cdot 1039^2$
41719	45137	1883070503	2920681	2920681	1709^2
6359	43051	273761309	-38568413 -23710340 -6177145 -685684	-38568413 -23710340	$-1 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 269^2$, $-1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 179^2$, $-1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29^2 \cdot 113$, $-1 \cdot 2^2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 113$
44867	47911	2149622837	2316484	2316484	$2^2 \cdot 761^2$
45403	46589	2115280367	351649	351649	593^2
48193	48539	2339240027	29929	29929	173^2

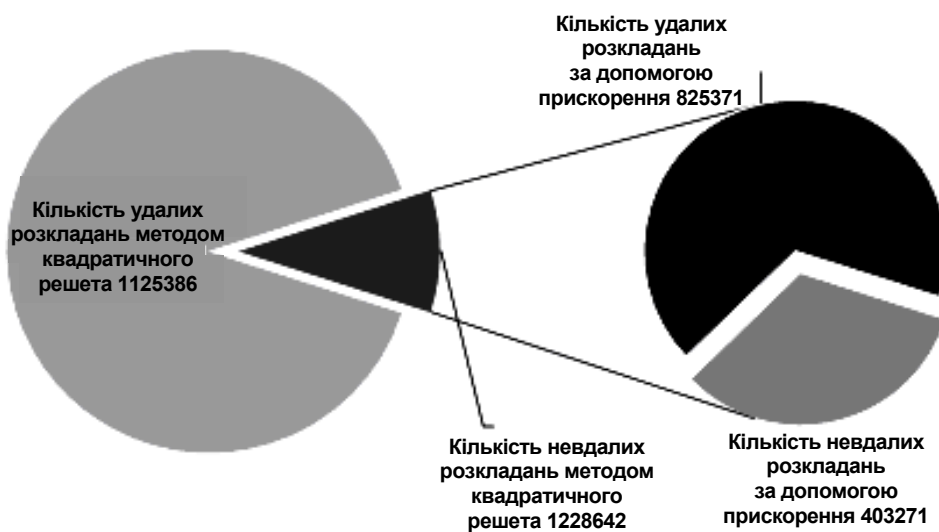
ПОРІВНЮВАЛЬНА ОЦІНКА АНАЛІЗУ УМОВНО В-ГЛАДКИХ ЧИСЕЛ

Додаткові вектори у сформованій матриці дозволили отримати розв'язок без розширення факторної бази або інтервалу просіювання.

Отримати числа, у яких залишок є квадратом, можна доволі часто. За першими 5000 простими числами сформовано $12.5 \cdot 10^6$ можливих варіантів N , знайдено додаткові вектори у 99% випадках.

Корисну дію цього методу можна побачити, якщо обрати випадки, у яких базовий алгоритм квадратичного решета за рекомендованими у працях [2, 4, 6] розмірами факторної бази та інтервалу просіювання, обчислених за формулами (1) і (2), не зміг знайти розв'язок, і застосувати аналіз $y(x)$, у яких залишок після просіювання є простим числом у парному степені.

У 7% випадках модифікований алгоритм зміг факторизувати число (див. рисунок).



Діаграма ефективності аналізу умовно В-гладких чисел

Варто зазначити, що якщо для порівнювального аналізу взяти меншу кількість простих чисел, починаючи не з першого простого числа, отримаємо кращі результати. Наприклад, якщо взяти тисячу простих чисел, починаючи з простого числа з порядковим номером 4000 або 5000, знайдемо, що модифікований алгоритм зміг факторизувати всі числа.

ОЦІНЮВАННЯ СКЛАДНОСТІ ТА ЧАСУ ВИКОНАННЯ

Складання матриці для стандартного алгоритму квадратичного решета потребує кількості елементів L^{2a} [3]. Кількість потрібних варіантів $y(x)$ (B -гладких) для стандартного квадратичного решета можна розрахувати за формулою L^{2a+1} .

Усі залишки $y(x)$ уже отримано, їх пошук не потрібен. Для застосування аналізу умовно B -гладких чисел необхідно для кожного варіанта $y(x)$ запам'ятовувати залишок (якщо він є квадратом), тому потрібна ємність пам'яті збільшується і дорівнює L^{2a+1} .

На перший погляд додатковий аналіз варіантів $y(x)$ робить алгоритм складнішим і збільшує час його роботи — додаткове обчислення квадратного кореня з усіх залишків $y(x)$, більших за одиницю. Однак із застосуванням додаткового аналізу варіантів $y(x)$ кількість придатних $y(x)$ збільшується (за рахунок умовно B -гладких) на деяке γ і становить $b = a + (4a)^{-1} + \gamma$. Значення b — кількість ітерацій в алгоритмі — обирається таким, щоб кількість придатних варіантів $y(x)$ становила L^a , тому $b = a + (4a)^{-1} - \gamma$. Як бачимо ця кількість зменшилась.

Беручи до уваги те, що b — показник степені інтервалу просіювання L^b , тоді кожне знайдене умовно B -гладке значення значно зменшує інтервал просіювання.

Оцінити швидкість модифікованого алгоритму можна за формулою

$$L^{\max\{2a+1, a+(4a)^{-1}-\gamma, 3a\}}$$

Швидкість просіювання зменшилась на γ , де γ — кількість елементів $y(x)$ доданих умовно B -гладких залишків.

ВИСНОВКИ

Швидкість роботи методу квадратичного решета залежить від таких евристичних значень, як розмір факторної бази та інтервал просіювання. На основі проведених численних експериментів показано, що використання умовно B -гладких чисел дозволяє факторизувати число у тих випадках, коли базовий алгоритм квадратичного решета (за стандартного інтервалу просіювання та розміру факторної бази) не зміг сформулювати матрицю для отримання розв'язку.

Модифікований алгоритм зміг зменшити кількість невдалих факторизацій з 11% до 3% відносно базового алгоритму квадратичного решета.

Швидкість просіювання модифікованого алгоритму зменшилась на γ . Для кожного випадку значення γ є різним і дорівнює кількості елементів $u(x)$ доданих завдяки використанню умовно B -гладких чисел.

Отримані результати є підставою для подальшого дослідження на числах 1024 біт і більше.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pomerance C. The quadratic sieve factoring algorithm / C. Pomerance // *Advances in Cryptology* (T. Beth, N. Cot and I. Ingemarsson eds.), *Lecture Notes in Comput. Sei.* — Paris, 1985. — P. 169–182.
2. Lindquist E. The Quadratic Sieve Factoring Algorithm / E. Lindquist // *Math 488: Cryptographic Algorithms*, Dicembre. — New York, 2001. — P. 1–11.
3. Pomerance C. Analysis and comparison of some integer factoring algorithms / C. Pomerance // *Mathematisch Centrum Computational Methods in Number Theory*, Pt. 1. — Amsterdam: Math Centre Tract 154, 1982. — P. 89–139.
4. Pomerance C. Smooth numbers and the quadratic sieve / C. Pomerance // *Proc. of an MSRI workshop.* — New York: Proc. Amer. Math. Soc. 115, 2008. — P. 69–81.
5. Song Y. Quadratic Sieve / Y. Song // *Primality Testing and Integer Factorization in Public-Key Cryptography Second Edition.* — New York: Springer, 2008. — P. 234–239.
6. Crandall R. Smooth numbers and the quadratic sieve / R. Crandall, C. Pomerance // *Prime Numbers A Computational Perspective Second Edition.* — New York: Springer, 2005. — P. 261–315.
7. Горбенко И.Д. Анализ каналов уязвимости системы RSA / И.Д. Горбенко, В.И. Долгов, А.В. Потий, В.Н. Федорченко // *Безопасность информации.* — 1995. — № 2. — С.22–26.
8. Brown D. Breaking RSA May Be As Difficult As Factoring [Електронний ресурс] / Daniel R.L. Brown // *Cryptology ePrint Archive.* — 2005. — Режим доступу: <https://eprint.iacr.org/2005/380>.

Надійшла 24.07.2017

EMPIRICAL ANALYSIS OF MOON'S GRAVITATIONAL WAVE AND EARTH'S GLOBAL WARMING

YOSHIO MATSUKI, P.I. BIDYUK

Abstract. This research examines a possibility of a disturbance by Moon's gravitational wave to the Earth's global warming process in comparison with the increase of global volume of carbon dioxide. Because the general theory of relativity that predicts the gravitational wave of a planet has a dimension of $1/(\text{distance})^2$, we analyzed the data sets of global temperature and global carbon dioxide, with this dimension of gravitational wave using Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model, Generalized Classical Regression Model, and Nonlinear Regression Model. The results suggest that there is a disturbance to the process of global warming by the Moon's gravitational wave. However, there is uncertainty for this conclusion because the Moon's rotational movement around Earth gives different type of distributions of its sample data, while global temperature and carbon dioxide increase proportionally accordingly to available time-series.

Keywords: global warming, Moon and Earth, global carbon dioxide, gravitational wave.

INTRODUCTION

Einstein's theory of gravitational wave predicts that it contains a factor of λ , which has the dimension of $\frac{1}{r^2}$, where r is the distance (kilometers), to where the gravitational wave reaches from a planet. Therefore, in this research, $\frac{1}{r^2}$ is considered as a surrogate of the intensity of the gravitational wave, and its relation to the global temperature is analyzed, together with the global carbon dioxide, in time-series.

THEORY

In the general theory of relativity [1], gravity is described by the derivatives, $g_{\mu\nu}$, of the scalar potential, $V = -m/r$, where μ and ν are 0, 1, 2, 3, which indicate the coordinates of the empty curved-space in 4 dimensions, where x^0 is for time, x^1 , x^2 and x^3 for space, and m is mass of a planet, and r is the distance from the cen-

ter of the planet. The gravitational field in the empty space is described by Ricci tensor:

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

while gravitational wave is described by the solutions of $g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0$ in harmonic coordinates, where the condition of harmonic coordinates is $g^{\mu\nu} \left(g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} \right) = 0$, where each of $g_{\rho\sigma}$ satisfies the d’Alambert equation, $g^{\mu\nu} (V_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_{,\alpha}) = 0$, where each of α, μ, ν, ρ and σ indicates each of the coordinates, x^0, x^1, x^2 and x^3 . Here, $g_{\mu\nu,\rho} = \frac{d}{dx^\rho} g_{\mu\nu}$, and $g_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{d^2}{dx^\rho dx^\sigma} g_{\mu\nu}$.

When the gravitational waves are all moving in the same direction, for example x^3 , $g_{\mu\nu}$ are functions of only one variable, x^3 in time-series. And, in more general case, $g_{\mu\nu,\sigma} = u_{\mu\nu} l_\sigma$ when $g_{\mu\nu}$ are all functions of the single variable $l_\sigma x^\sigma$, while l_σ are the constants that satisfy $g^{\rho\sigma} l_\rho l_\sigma = 0$, and $u_{\mu\nu}$ is the derivative, $g_{\mu\nu}$, of the function $l_\sigma x^\sigma$. And, then, after the transformation of the tensors, we get:

$$u_\rho^\nu l_\nu = \frac{1}{2} u l_\rho. \tag{2}$$

And, then, $\Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = \frac{1}{2} u l_\alpha$. Now, the gravitational wave moves in the direction l_σ of the form, $x^{\mu'} = x^\mu + b^\mu$, where b^μ is a function only of $l_\sigma x^\sigma$ with the restriction that wave moves only in one direction. And, then, the equation (2) indicates the flow of the energy in the direction of x^3 :

$$16\pi t_0^0 = \frac{1}{4} (u_{11} - u_{22})^2 + u_{12}^2.$$

Here, t^{ν}_μ is a pseudo-tensor, which means a quantity, given by $t^{\nu}_\mu \sqrt{-g} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - g^{\nu}_\mu \tilde{L}$, while $L = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma)$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^* - L$, $R^* = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma)$, $\tilde{L} = L\sqrt{-g}$, $\sqrt{-g} = \sqrt{-g}$, and $g = g_{00}$.

The gravitational field equation of the empty space (1) is generalized to a tensor equation:

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{3}$$

where λ is a constant. The values of $R_{\mu\nu}$ contain second derivatives of the $g_{\mu\nu}$, because $R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$; so, λ must have the dimension of (distance)⁻². Where the planet exists, this constant coefficient λ must be small enough, so that the flow of energy does not disturb the coordinate that the planet makes, as shown in the tensor equation (1).

There is a comprehensive action principle:

$$\delta(I_g + I') = 0, \tag{4}$$

where I_g is the gravitational action, and I' is the action of sum of all the other fields; while, $\delta I_g = -\int (R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)\sqrt{-g}\delta g_{\alpha\beta}d^4x$, and $I = \int R\sqrt{-g}d^4x$.

For the cosmological theory, an extra term is added, such as: $I_c = c\int\sqrt{-g}d^4x$, where c is a suitable constant. And, then, $\delta I_c = c\int\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$, and the action principle (equation (4)) gives:

$$(16\pi)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}cg^{\mu\nu} = 0. \tag{5}$$

Then, the equation (3) gives $R = 4\lambda$, and hence: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\lambda g_{\mu\nu}$.

And, if $8\pi c = -\lambda$, it satisfies the equation (5).

This theory suggests that Moon emits gravitational wave to Earth, which is a flow of energy; and its intensity includes a dimension, related to $R = 4\lambda = -8\pi c \propto \frac{1}{r^2}$, where r is the distance between two planets. In this re-

search, we use $\frac{1}{r^2}$ as an indicator of the gravitational wave. In the following sections, we report the methods and the results of the analysis. It is assumed that the global temperature is an indicator of the energy, which is given by the indicator of Moon's gravitational wave. The global carbon-dioxide is analyzed together in the mathematical models for the data analysis, in order to evaluate the importance of Moon's gravitational wave.

METHOD OF THE RESEARCH

The descriptive statistics of the data, from 1987 till 2009, of the global temperature (increased degree Celsius since 1978) [2], the global carbon dioxide (million metric tons) [3], the distance between Moon and Earth (r : kilometers) [4], and calculated $\frac{1}{r^2}$ ((kilometers)²), are shown in Table 1.

Table 1. Descriptive statistics

Variable	Global Temperature (°C) *	Carbon-gas (million metric tons) **	Distance between Moon and Earth (r: kilometers)	$1/r^2$ ((kilometers) ⁻²)
Mean	0,29130	$1,25165 \cdot 10^3$	$3,62618 \cdot 10^5$	$7,60509 \cdot 10^{-12}$
Standard deviation	0,12125	$2,14245 \cdot 10^2$	$5,98411 \cdot 10^2$	$2,51097 \cdot 10^{-14}$
Minimum	0,10000	$8,92000 \cdot 10^2$	$3,61583 \cdot 10^5$	$7,56999 \cdot 10^{-12}$
Maximum	0,43000	$1,62600 \cdot 10^3$	$3,63483 \cdot 10^5$	$7,64865 \cdot 10^{-12}$
Skewness	-0,21063	0,14292	-0,15249	0,15787
Kurtosis	1,29401	1,82491	1,67498	1,67879
Valid number of observations	23	23	23	23

* Increased degree Celsius since 1978

** To convert these estimates to units of carbon dioxide (CO₂), simply multiply these estimates by 3,667 [2]

Regression analysis is made on the global temperature, the global carbon-dioxide and $\frac{1}{r^2}$, with the models, considered below.

Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model

The global temperature $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, the constant value 1, x_1 , the measured global carbon-dioxide, x_2 , and the inverse of the squared distance between Moon and Earth, x_3 , are transformed into the forms of $n \times 1$ vectors, y , x_1 , x_2 , x_3 , where n is the number of observation, 23. Then $n \times k$ matrix $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ is defined, where $k = \text{rank}(X)$.

We assume that: $E(y) = X\beta$, $V(Y) = \sigma^2 I$, X non-stochastic, and $\text{rank}(X) = k = 3$, where $E(y)$ is the mean of y , $V(y)$ is the variance of Y , and $\sigma^2 = V(y)$. I is $n \times n$ matrix, in which all diagonal elements are 1, and other elements are 0. In the Classical Regression Model, it is assumed that the diagonal elements of $V(Y) = \sigma^2 I$ are all of the same value, σ^2 . And, all covariances are assumed to be zero. With the following algebra, b (estimated coefficient β from the sampled data) and σ^2 are calculated:

$$Q = X'X, \text{ where } X' \text{ is a transposed matrix of the matrix } X;$$

$$b = Q^{-1}X'Y, \text{ where } Q^{-1} \text{ is an inversed matrix of the matrix } Q;$$

$$\hat{Y} = Xb: \text{ expected global temperature } Y;$$

$$e = Y - \hat{Y};$$

$$V(b) = \frac{e'e}{n-k} Q^{-1}.$$

And square-root of the diagonal elements of $V(b)$ are the standard errors of elements of the estimated coefficient-vector b .

Time Series

After applying the Classical Regression Model to this problem, we examine the time-series of the sampled data of global temperature, carbon-dioxide and $\frac{1}{r^2}$, in order to estimate the independency (or dependency) and the distribution patterns of these variables. For this purpose, we calculate the autocorrelation of each of the sampled data of these three variables, with the following algebra:

From n consecutive observations, y_1, \dots, y_n , we make a vector $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, where 'T' transposes a vector. And then we calculate: sample mean: $m = \sum_{t=1}^n y_t / n$, sample autovariance: $c_0 = \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 / n$, the first sample

autocovariance: $c_1 = \sum_{i=2}^n (y_i - m)(y_{i-1} - m) / (n-1)$, and then similarly, the second

sample autocovariance: $c_2 = \sum_{i=3}^n (y_i - m)(y_{i-2} - m) / (n-2)$, and so forth.

Then we calculate the sample autocorrelations: $r_j = c_j / c_0$.

Generalized Classical Regression

In general, the autocorrelation suggests whether, or not, changes in time-series of each of the variables are related to its own past; or it suggests whether or not, the variable in the past is independent from the present time with the same pattern of the distribution of the variable as it currently has. By comparing three autocorrelations for three variables of global temperature, carbon-dioxide and $\frac{1}{r^2}$, we will be able to estimate the distribution pattern of the standard deviations of the $n \times k$ matrix $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, to see if the diagonal elements of the assumed matrix of variances (square-root of standard deviation) $\Sigma = V(Y) = \sigma^2 I$ are all equal and/or if the covariances are zero, or not. If not, the Classical Regression Model is not applicable; but, instead, we need Generalized Classical Regression Model, in which $\Sigma = V(Y) \neq \sigma^2 I$, and/or the matrix Σ contains non-zero covariances.

In this research, we examine two possibilities:

a) Pure Heteroskedasticity, in which diagonal elements of Σ are all different; and,

b) First-Order Autoregressive Process, in which the first-order autocovariance, $c_1 = \sum_{i=2}^n (y_i - m)(y_{i-1} - m) / (n-1)$ is not zero.

In case of Pure Heteroskedascity, the y_i 's are uncorrelated, but have different variances: the matrix Σ is diagonal, with diagonal elements $\sigma_1^2, \dots, \sigma_i^2, \dots, \sigma_n^2$. Here we assume an $n \times n$ matrix H that makes $H\Sigma H' = I$. H is the diagonal matrix that has the $1/\sigma_i$'s on its diagonal. If the σ_i 's are known, then we can transform the data by dividing all variables at the i th observation by σ_i to get

$$y_i^* = y_i / \sigma_i, \quad x_{ij}^* = x_{ij} / \sigma_i, \quad \text{where } i = 1, 2, \dots, 23; \quad j = 1, 2, 3.$$

Then Classical Regression Model will apply to the new data and the regression of Y^* on X^* will produce the Least-Squares Estimation of Generalized Classical Regression Model of b^* with the same procedure shown in the analysis of the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model.

When we assume that the time-series of the global temperature is First-Order Autoregressive Process, a common practice is: at first, run Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model of y on X to get the residuals $e = Y - \hat{Y}$.

Then regress e_i on e_{i-1} (across $i = 2, \dots, 23$ in the time-series) to estimate $r_1 = c_1/c_0$: as $\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^{23} e_i e_{i-1}}{\sum_{i=2}^{23} e_{i-1}^2}$. No intercept is required when the sum of the residuals $\sum_{i=1}^{23} e_i$ is zero. And then transform the data as bellow, using $\hat{\rho}$: $y_i^* = y_i - \hat{\rho} y_{i-1}$ and $X^* = X_i - \hat{\rho} X_{i-1}$, where $X_i = \{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}\}$ and $X_{i-1} = \{x_{1,i-1}, x_{2,i-1}, x_{3,i-1}\}$; and then run Least Squares Estimations of Linear Classical Regression Model of y^* over X^* .

Nonlinear Regression Model

In this research, we try to analyze the database also with Nonlinear Regression Model, with Cobb-Douglas function, $y = b_1 x_2^{b_2} x_3^{b_3}$. Not like as Least Squares Estimation of Classical Regression Model, we cannot calculate the coefficients, b_1 , b_2 , b_3 , algebraically; but, we can calculate them only numerically:

Now

$$h = h(b_1, b_2, b_3, x_2, x_3);$$

$$z = \frac{\partial h}{\partial b_1} \frac{\partial h}{\partial b_2} \frac{\partial h}{\partial b_3} = z(x_2, x_3, b_1, b_2, b_3);$$

$$u = y - h = u(y, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3).$$

We seek the values of b_1 , b_2 , b_3 that make $z'u = 0$. We assume that b_1^0 , b_2^0 , b_3^0 are the initial guessed values for b_1 , b_2 , b_3 . Then, $h^0 = h(b_1^0, b_2^0, b_3^0, x_2, x_3)$, $z^0 = z(x_2, x_3, b_1^0, b_2^0, b_3^0)$, $u^0 = y - h^0 = u(y, x_2, x_3, b_1^0, b_2^0, b_3^0)$. The linear approximation to h at the point (b_1^0, b_2^0, b_3^0) is $h = h^0 + z^0(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0)$, so that order of approximation,

$$u = y - h = y - [h^0 + z^0(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0)] =$$

$$= u^0 - z^0(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0);$$

$$\varphi(b_1, b_2, b_3) = u'u = u^0'u^0 + (b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0)z^0'z^0 -$$

$$- 2(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0)z^0'u^0;$$

$$\varphi'(b_1, b_2, b_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} \frac{\partial \varphi}{\partial b_3} = 2(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0)z^0'z^0 - 2z^0'u^0.$$

Set $\varphi'(b_1, b_2, b_3) = 0$, and solve for $(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0) = z^0'u^0 / z^0'z^0$.

And then take the resulting $(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0)$ as the new b_1^0 , b_2^0 , b_3^0 and restart the calculation. Continue until the result converge, that is until $(b_1 - b_1^0)(b_2 - b_2^0)(b_3 - b_3^0) \cong 0$.

In practice, the derivative $z = \frac{\partial h}{\partial b_1^0} \frac{\partial h}{\partial b_2^0} \frac{\partial h}{\partial b_3^0}$ can be approximated numerically as

$$z^0 = b_1^0(x_2^{(b_2+p_2)(b_3+p_3)} - b_1^0 x_2^{(b_2-p_2)(b_3-p_3)}) / [2p_1 2p_2 2p_3],$$

where $p_1, p_2,$ and p_3 are small steps.

RESULT

The results of Least Squares Estimation of Classical Regression Model are shown from Table 2 to Table 6.

Table 2. Matrix $Q = X'X$ in Classical Regression Model

23,00000	$2,87880 \cdot 10^4$	$1,74917 \cdot 10^{-10}$
$2,87880 \cdot 10^4$	$3,70424 \cdot 10^7$	$2,18930 \cdot 10^{-7}$
$1,74917 \cdot 10^{-10}$	$2,18930 \cdot 10^{-7}$	$1,33027 \cdot 10^{-21}$

Table 3. Matrix $X'Y$ in Classical Regression Model

6,70000
$8,92389 \cdot 10^3$
$5,09527 \cdot 10^{-11}$

Table 4. Matrix $b = Q^{-1}X'Y$ in * Classical Regression Model

for 1 (x_1)	-1,17863
for Carbon dioxide (x_2)	$5,33150 \cdot 10^{-4}$
for ($1/r^2$) (x_3)	$1,05537 \cdot 10^{11}$

* With this model, $R^2 = 0,88602$.

Table 5. Matrix $V(b) = \frac{e'e}{n-k} Q^{-1}$ in Classical Regression Model

7,71895	$-7,67170 \cdot 10^{-6}$	$-1,01370 \cdot 10^{12}$
$-7,67170 \cdot 10^{-6}$	$1,82931 \cdot 10^{-9}$	$7,07689 \cdot 10^5$
$-1,01370 \cdot 10^{12}$	$7,07689 \cdot 10^5$	$1,33176 \cdot 10^{23}$

Table 6. Coefficients and standard errors of the coefficients in Classical Regression Model

Variable	Coefficient	Standard error
for 1 (x_1)	-1,17863	2,77830
for Carbon dioxide (x_2)	$5,33150 \cdot 10^{-4}$	$4,27704 \cdot 10^{-5}$
for ($1/r^2$) (x_3)	$1,05537 \cdot 10^{11}$	$3,64933 \cdot 10^{11}$

The coefficients of Table 6, which are calculated by Classical Regression Model, show that $x_3 \left(\frac{1}{r^2} \right)$ influences y (global temperature) more than x_2 (carbon-dioxide) does; however, the standard error of the estimated coefficient of x_3 is larger than x_2 's. In order to investigate this large size of the standard error of the coefficient of x_3 , we analyzed the patterns of the changes of $y, x_2,$ and $x_3,$

in time-series, by calculating their autocorrelations. Fig. 1 shows the autocorrelation of y , Fig. 2 of x_2 and Fig. 3 of x_3 .

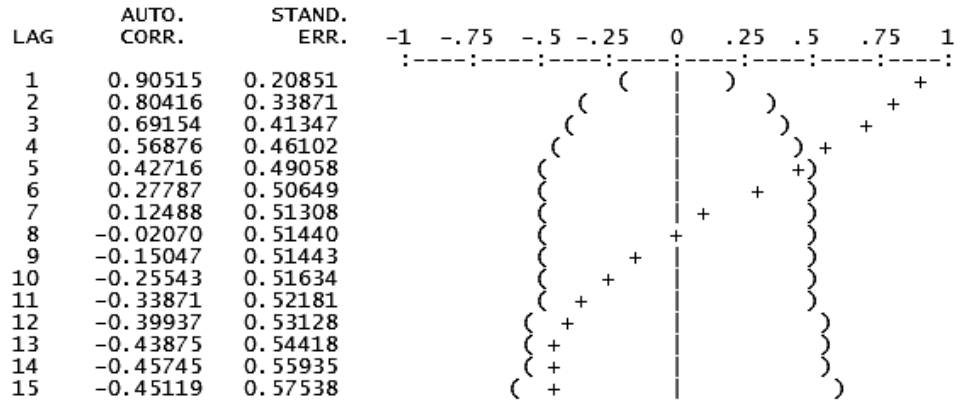


Fig. 1. Calculated autocorrelation of global temperature (y)

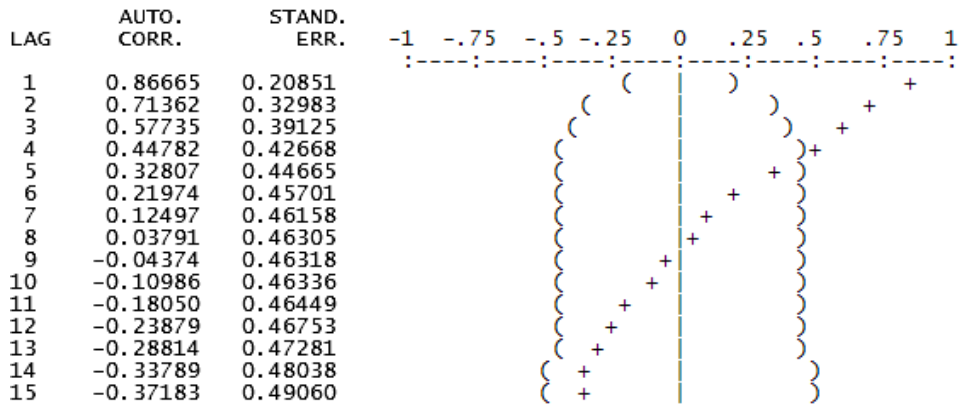


Fig. 2. Calculated autocorrelation of global carbon dioxide (x_2)

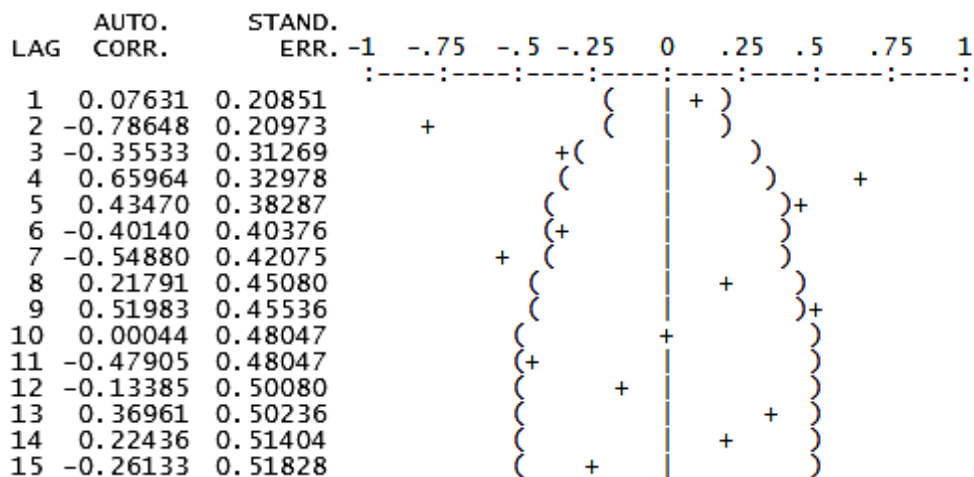


Fig. 3. Calculated autocorrelation of $1/r^2$, x_3

The autocorrelation of y (sample data of global temperature) in Fig. 1 suggests that all sample autovariance c_0 of y are same over different i s, where $i = 2, \dots, 23$; and, sample autocovariances c_i s are becoming smaller when i becomes larger; so, this sample data of y suggests possibilities of both Heteroskedasticity and Autoregressive Process.

The autocorrelation of x_2 (sample data of carbon dioxide) in Fig. 2 also suggests possibilities of both Heteroskedasticity and Autoregressive Process. However, the autocorrelation of $x_3, 1/r^2$, in Fig. 3 shows a different pattern of its distribution, in comparison with Fig. 1 and Fig. 2. And, then, because of these observations of autocorrelations, we further tested Generalized Classical Regression Model by regressing y over x_2 and x_3 , assuming the following: Pure Heteroskedacity, where the diagonal elements of Σ have different variances, $\sigma_1^2, \dots, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{23}^2$, and First Order Autoregressive Process, in which the first-order autocovariance, $\hat{\rho} = c_1/c_0$ is not zero, but the same value.

The results of the analysis with Generalized Classical Regression Model in the assumed Pure Heteroskedasticity and the assumed First-Order Autoregressive Process are shown from Table 7 to Table 11.

Here, it is noted that for b) First-Order Autoregressive Process, at first, we calculated the residuals $e = Y - \hat{Y}$, and $\sum_{i=1}^{23} e_i$ to see if the sum of the residuals is zero. And, then, we knew $\sum_{i=1}^{23} e_i = 4.52104 \times 10^{-11}$, which is small enough to assume as it is zero. And, then, we regressed e_i on e_{i-1} (across $i = 2, \dots, 23$ in time-series), and then, we got $\hat{\rho} = 0.90997$.

Table 7. Matrix $Q = X'X$ in Generalized Classical Regression Model

Pure Heteroskedasticity			First-Order Autoregressive Process		
23,00000	$1,34369 \cdot 10^2$	$6,96610 \cdot 10^3$	0,17832	$2,82472 \cdot 10^2$	$1,35613 \cdot 10^{-12}$
$1,34369 \cdot 10^2$	$8,07005 \cdot 10^2$	$4,06960 \cdot 10^4$	$2,82472 \cdot 10^2$	$4,62382 \cdot 10^5$	$2,14549 \cdot 10^{-9}$
$6,96610 \cdot 10^3$	$4,06960 \cdot 10^4$	$2,10987 \cdot 10^6$	$1,35613 \cdot 10^{-12}$	$2,14549 \cdot 10^{-9}$	$1,03352 \cdot 10^{-23}$

Table 8. Matrix $X'Y$ in Generalized Classical Regression Model

Pure Heteroskedasticity	First-Order Autoregressive Process
55,25547	$7,97115 \cdot 10^{-2}$
$3,43513 \cdot 10^2$	$1,26456 \cdot 10^2$
$1,67350 \cdot 10^4$	$6,06319 \cdot 10^{-13}$

Table 9. Matrix $b^* = Q^{-1}X'Y$ in Generalized Classical Regression Model

Pure Heteroskedasticity*	First-Order Autoregressive Process
for 1, x_1	0,37507
for Carbon dioxide, x_2	$1,36503 \cdot 10^{-5}$
for $(1/r^2)$, x_3	$6,61708 \cdot 10^9$

* With this model, $R^2 = 0,88602$, which is as same as R^2 of the classical regression model in Table 4.

Table 10. Matrix $V(b^*) = \frac{e'e}{n-k} Q^{-1}$ in Generalized Classical Regression Model

Pure Heteroskedasticity			First-Order Autoregressive Process		
$5,24998 \cdot 10^2$	-0,11178	-1,73122	0,62342	$-3,49710 \cdot 10^{-5}$	$-7,45413 \cdot 10^{10}$
-0,11178	$5,71097 \cdot 10^{-3}$	$2,58920 \cdot 10^{-4}$	$-3,49710 \cdot 10^{-5}$	$1,37856 \cdot 10^{-8}$	$1,72693 \cdot 10^6$
-1,73122	$2,58920 \cdot 10^{-4}$	$5,71096 \cdot 10^{-3}$	$-7,45413 \cdot 10^{10}$	$1,72693 \cdot 10^6$	$9,44181 \cdot 10^{21}$

Table 11. Coefficients and standard errors of the coefficients in Generalized Classical Regression Model

Variable	Pure Heteroskedasticity		First-Order Autoregressive Process	
	Coefficient	Standard error	Coefficient	Standard error
for 1 (x_1)	-9,72055	22,91283	0,37507	0,78957
for Carbon dioxide (x_2)	0,94202	$7,55710 \cdot 10^{-2}$	$1,36503 \cdot 10^{-5}$	$1,17412 \cdot 10^{-4}$
for ($1/r^2$) (x_3)	$2,18557 \cdot 10^{-2}$	$7,55709 \cdot 10^{-3}$	$6,61708 \cdot 10^9$	$9,71690 \cdot 10^{10}$

The adjusted coefficients of Table 11, which were calculated by the assumption of Pure Heteroskedasticity in Generalized Classical Regression Model, suggest that $x_3 \left(\frac{1}{r^2} \right)$ influenced y (global temperature) less than x_2 (carbon-dioxide) did; while, the standard error of the estimated coefficient of x_3 is almost equal to x_2 's. On the other hand the assumption of First-Order Autoregressive Process suggests that $x_3 \left(\frac{1}{r^2} \right)$ influenced y (global temperature) more than x_2 (carbon-dioxide) did; while, the standard error of the estimated coefficient of x_3 is larger than x_2 's.

In order to further investigate the relation between $x_3 \left(\frac{1}{r^2} \right)$ and y (global temperature), we also analyzed the same data set by Nonlinear Regression Model of Cobb-Douglas function. The result is shown in Table 12.

Table 12. Coefficients of Cobb-Douglas model, $y = b_1 x_2^{b_2} x_3^{b_3}$

Coefficient	Estimated coefficient	Standard error
b_1 coefficient of 1	0,000103	0,02761
b_2 coefficient of x_2	2,126546	0,23431
b_3 coefficient of x_3	0,283107	10,62035

The estimated coefficients of nonlinear Cobb-Douglas function show that the coefficient of x_2 is larger than the coefficient of x_3 . This result suggests that the carbon dioxide is more influential to the global warming, than $\frac{1}{r^2}$, if the global temperature is to be described by the Cobb-Douglas function.

ANALYSIS OF THE CALCULATED RESULTS

We cannot measure Moon's gravitational wave; while the general theory of relativity only suggests that it includes dimension of $\frac{1}{r^2}$, where r is a distance between Moon and Earth in kilometers. The result of the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model suggests that the influence of Moon's gravitational wave to the global warming is large; however, the standard error of the estimated coefficient is also large. On the other hand, the autocorrelations of the global temperature, in time-series, suggests that the process of the global warming could be explained by its own history, which could be also influenced by carbon dioxide and gravitational wave from Moon. However, as shown in Fig. 4, the distribution of $\frac{1}{r^2}$ is cyclic in time-series because Moon rotates on oval orbit around Earth; while the distributions of global temperature and carbon dioxide are proportional to the time-series as Fig. 1 and Fig. 2 show. And then we assumed that Moon's gravitational wave could disturb the process of the global warming; and, then we tried to measure the order of magnitude of the assumed disturbance by Moon to Earth (global temperature), with two assumptions in the Generalized Classical Regression Models: Pure Heteroskedasticity and First-Order Autoregressive Process, and one Nonlinear Model.

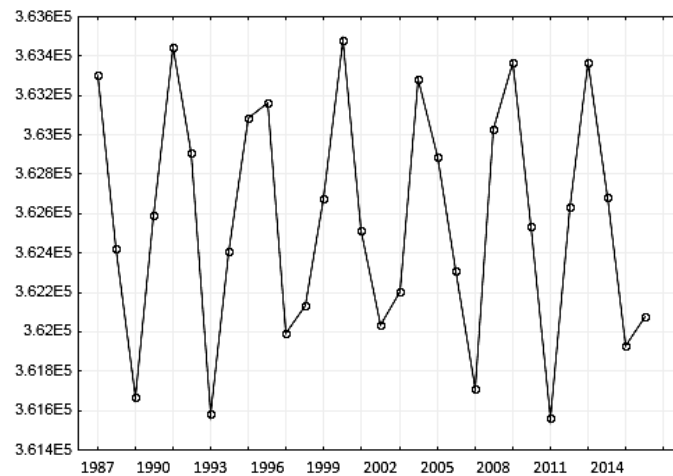


Fig. 4. Distance between Moon and Earth

The results of First-Order Autoregressive Process of Generalized Classical Regression Model suggests large disturbance of Moon to the process of global warming, which is as same as the result of Least Squares Estimation of Classical Regression Model; although, the results of the analysis with the assumptions of Pure Heteroskedasticity and Nonlinear Model suggest the opposite.

The reasons of these differences, which are observed in analysis in these four models, are supposed to be related to the nature of Moon's movement on the oval orbit, which gives larger variance and covariance, which are taken in different ways by different models.

CONCLUSION AND RECOMMENDATIONS

We assumed that the gravitational wave from Moon to Earth influenced the global temperature of Earth; and, then, the result of the Least Squares Estimation of Classical Regression Model suggested such effect to exist. However, we also found that the calculated standard error of the estimated coefficient of the gravitational wave was large.

And, then, we examined Generalized Classical Regression Model, to see if the magnitude of standard error changes, by assuming Pure Heteroskedasticity and First Order Autoregressive Process, which added more different variances and covariances in the regression models. The results indicated that the expected influence of Moon's gravitational wave was large, while the standard-error was large with the assumption of First Order Autoregressive Process; while, the expected influence was small and its standard error was also small when Pure Heteroskedasticity is assumed. However, we don't know if the assumption of Pure Heteroskedasticity is appropriate for modeling Moon's rotational movement.

Also, we tested the nonlinear Cobb-Douglas function to simulate the impacts from Moon's gravitational wave and carbon dioxide to the global warming, and the result showed more influence of carbon dioxide. However, we don't know any reasonable theory to justify the nonlinear function, yet, rather we examined it, only to observe how the coefficients change in comparison with those of Least Squares Estimation of Classical Regression Model.

Upon above observations, we cannot deny our assumption that Moon's gravitational wave could disturb the process of global warming, yet; while, the results also suggest that uncertainty exists because of Moon's rotational movement, which is different from the processes of rising global temperature and carbon dioxide.

REFERENCES

1. *Dirac P.A.M.* General Theory of Relativity / P.A.M. Dirac. — New York: Florida University, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1975. — P. 69. — Available at: <http://amarketplaceofideas.com/wp-content/uploads/2014/08/P%2520A%2520M%2520Dirac%2520-%2520General%2520Theory%2520of%2520Relativity1.pdf>
2. *UK* Department of Energy and Climate Change (DECC). — Available at: <http://en.openei.org/datasets/dataset/b52057cc-5d38-4630-8395-b5948509f764/resource/f42998a9-071e-4f96-be52-7d2a3e5ecef3/download/england.surface.temp1772.2009.xls>
3. *Boden T.A.* Global Regional and National Fossil-Fuel CO2 Emissions / T.A. Boden, G. Marland, R.J. Andres. — Available at: cdiac.ornl.gov/trends/emits/tre_glob.html
4. *Moon* Distance Calculator — How Close is Moon to Earth? — Available at: <https://www.timeanddate.com/astronomy/moon/distance.html?year=1987&n=367>.

Received 28.08.2017

ПРОГНОЗУВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ НА ОСНОВІ МАТРИЧНОЇ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ: ПРИКЛАДИ

І.М. НАЗАРАГА

Анотація. Для розв'язання задачі прогнозування на основі методу найменших квадратів використано клас матричних функцій з набором матричних аргументів (матричну множинну регресію). Послідовне розв'язання задачі прогнозування виконано із застосуванням математичного апарату сингулярного розкладу і техніки псевдообернення за Муром-Пенроузом у межах розвитку концепції коротких операторів. Алгоритм оцінювання невідомих параметрів реалізовано у Wolfram Mathematica. Запропонований метод продемонстровано для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України. Підхід перевірявся на статистичних даних про економічні показники за період 2007 – 2016 рр.; наведено результати розрахунків. Як показано на прикладах, матрична множинна регресія може бути ефективним інструментом прогнозування в економіці з прийнятною для процесів планування точністю.

Ключові слова: матрична множинна регресія, метод найменших квадратів, макроекономіка, прогноз.

ВСТУП

З огляду на важливість та складність прийняття керівниками вищих рівнів обґрунтованих та ефективних рішень для управління економікою виникає потреба у передбаченні наслідків цих рішень. Тому наразі підвищується роль науково обґрунтованих прогнозів макроекономічних показників.

Створення, удосконалення та модифікація математичних моделей та методів прогнозування економічних процесів сприяють розробленню узагальненої методології макроекономічного моделювання, а реалізація та апробація відповідних алгоритмів прогнозування є важливими для відпрацювання відповідних рекомендацій щодо прийняття управлінських рішень.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В Україні дослідження у сфері макромоделювання економічних процесів проводяться у багатьох наукових інститутах та державних структурах.

Результати цих досліджень знайшли відображення у низці моделей, основними з яких є:

- макромоделі економіки України-1 (розроблена в Інституті економіки і прогнозування НАНУ, автори В.М. Геєць, М.І. Скрипниченко, М.П. Соколик, С.С. Шумська [1–3]);
- модель середньострокового прогнозування Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України (розробники Л. Гуляницький, І. Сергієнко, Б. Панасюк [4]);

- моделювальна система «Бюджет» (автори М.В. Михалевич, В.С. Михалевич, Сергієнко І.В. [5], розробка Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України);
- макроекономічна модель Києво-Могилянської академії, розроблена під керівництвом І.Г. Лук'яненко [6, 7];
- моделі прогнозування, які ґрунтуються на методі групового врахування аргументів; розроблений у Кібернетичному центрі НАН України О.Г. Івахненком та його учнями [8–10];
- макроекономічна модель Міжнародного центру перспективних досліджень, Міністерства економіки України та Національного банку України [11];
- макроекономічна модель Науково-дослідного економічного інституту Міністерства економіки України (автор А. О. Сігайов [12]);
- макроекономічна модель міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем ЮНЕСКО/МПІ НАН України та Міністерства освіти і науки України, подана низкою економетричних моделей «УКРМАКРО» (автори О. Бакаєв, Г. Бондаренко, І. Лукінов [13]);
- довгострокова економетрична модель економічного зростання у перехідних економіках (розроблена співробітниками Міжнародного валютного фонду О. Гаврилишиним, І. Изворські, Р. Рооденом [14]);
- макроекономічна модель центру соціальних та економічних досліджень (CASE); автори-розробники М. Гроніцкі, Я. Ширмер, К. П'єтка [15, 16];
- модель макроекономіки України «Альфа», що розроблена в державному НДІ інформатизації та моделювання економіки Міністерства економіки України та розвивається в Національному інституті стратегічних досліджень при Президентові України й Інституті економіки промисловості України (автор Ю.М. Харазішвілі [17, 18]).

Аналізуючи праці [1–18], можна констатувати, що в Україні сформувалися такі два основні підходи до макроекономічного моделювання:

- 1) застосування різних варіантів регресійного аналізу та побудова регресійних (лінійних та нелінійних) рівнянь для моделювання тих чи інших економічних змінних на основі передісторії з наступною екстраполяцією;
- 2) моделювання соціально-економічних процесів на базі аналітичних (точних) залежностей із застосуванням сучасних економічних теорій, що відображають функціональні зв'язки між показниками. Головною та найважливішою перевагою аналітичних методів є невідривність від самого об'єкта прогнозування.

Переважає більшість установ, які здійснюють макроекономічний аналіз та прогнозування, використовує перший підхід, тобто такий, який базується на застосуванні часових рядів макропоказників і поліномів, побудованих на їх основі. Зауважимо, що для макроекономіки перехідного періоду значення і роль передісторії дещо знижуються, що зумовлено, особливо в короткостроковому періоді, швидкими кардинальними змінами економічного, ринково-кон'юнктурного, соціально-політичного характеру. Утім не підлягає запереченню використання методів регресійного аналізу і прогнозування на основі передісторії, які можна і потрібно застосовувати

для знаходження значень змінних і параметрів та для яких неможливо встановити модельні зв'язки, зокрема в умовах перехідних економік.

У працях [19–22] запропоновано нові методи аналізу об'єктів, які можна подати складними багаторозмірними табличними структурами (матрицями), і проводиться дослідження сучасного математичного апарату, що дозволяє оперувати із цими структурами. Зокрема, у працях [20–22] В.С. Донченком та його учнями запропоновано концепцію кортежних операторів, що дає змогу перенести техніки сингулярного розкладу і псевдообернення на евклідові простори матриць фіксованої розмірності.

Таким чином, для розв'язання задач прогнозування запропоновано до розгляду клас матричних функцій набору матричних аргументів — матричну множинну регресію [21]. У процесі розвитку концепції кортежних операторів [20–22] розроблено математичний апарат сингулярного розкладу і техніки псевдообернення за Муром–Пенроузом, що дозволило поставити і конструктивно розв'язати задачу оцінювання методом найменших квадратів для множинної матричної регресії. Зокрема, запропоновано алгоритм оцінювання методом найменших квадратів для вектора невідомих параметрів згаданого класу матричних функцій [21]. Оскільки для економічних завдань природними представниками досліджуваних об'єктів є табличні структури, наприклад, таблиці показників за роками, кварталами чи місяцями, то запропоновані методи можна успішно застосовувати для прогнозування економічних показників.

Мета дослідження — з'ясувати можливість використання запропонованого у праці [21] алгоритму на основі матричної множинної регресії для розв'язання задач прогнозування макроекономічних показників з прийнятною для планування точністю.

Емпіричними даними для розрахунків стали дані Державної служби статистики України про такі макроекономічні показники: внутрішній валовий продукт, оплата праці найманих працівників, кінцеві споживчі витрати, експорт товарів та послуг, імпорт товарів та послуг.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МЕТОДУ ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ МАТРИЧНОЇ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ

Теоретичні основи методу аналізу та прогнозування об'єктів, що виражені матрицями, детально подано у працях [20–22].

Отже, нехай маємо M матриць спостережень: X_1, X_2, \dots, X_M .

Формуємо матричні пари, що задають вхідні та вихідні дані моделі: $(O_1, Y_1), (O_2, Y_2), \dots, (O_N, Y_N)$, де $Y_i, i = \overline{1, N}$ — відгуки прогнозу, $Y_i = X_{K+i}, i = \overline{1, N}$, а $O_i, i = \overline{1, N}$ — матричні кортежі-рядки, які називатимемо основами (опорами) прогнозу: $O_1 = (X_1 : \dots : X_K)$, $O_2 = (X_2 : \dots : X_{K+1}), \dots$, $O_N = (X_N : \dots : X_{K+N-1})$; $M > N + K$, K — довжина основи.

Множинну матричну регресію з матричними значеннями визначимо таким чином [21]: як матричну функцію Y матричного кортежу-рядка $\alpha_{1,K} = (X_1 : \dots : X_K)$, $X_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ такого вигляду $Y(\alpha_{1,K}) = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_K X_K$, $\beta_k \in R^1$, $k = \overline{1, K}$, що визначаються на основі спостере-

жень $(\alpha_{1,K}^{(i)}, Y_i), i = \overline{1, N}$, де $\alpha_{1,K}^{(i)}, i = \overline{1, N}$ — i -та компонента матричного кортежу-рядка $\alpha_{1,K} = (X_1 \dotsc X_K)$.

Аналогічно до праць [21, 22] визначимо оператор $\wp_{\alpha_{N,K}} : R^K \rightarrow R^{N,m \times n}$ — матричний кортежний оператор з евклідового простору R^K в евклідові простір стовпчикових кортежів довжини N з матриць розмірності $m \times n$ і покомпонентним скалярним добутком для стовпчикових кортежів

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix} \in R^{N,m \times n}, \chi_2 = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_N \end{pmatrix} \in R^{N,m \times n} \text{ у такому вигляді: } (\chi_1, \chi_2)_{N,m \times n} = \sum_{i=1}^N (A_i, B_i)_{tr}, \text{ а } \wp_{\alpha_{N,K}}^* : R^{N,m \times n} \rightarrow R^K \text{ — оператор, спряжений до } \wp_{\alpha_{N,K}}.$$

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗУВАННЯ ПОКАЗНИКІВ

1. Побудова стовпчикових «компонентних» кортежів $\chi_j, j = \overline{1, K}, \chi_Y$:

$$\chi_j = \begin{pmatrix} O_1^{(j)} \\ O_2^{(j)} \\ \dots \\ O_N^{(j)} \end{pmatrix}, \text{ де } O_i^{(j)} \text{ — } j\text{-та компонента } O_i, i = \overline{1, N}, \chi_Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{pmatrix} \text{ — ма-}$$

тричний стовпчиковий кортеж, отриманий зі значень спостережень $Y_i, i = \overline{1, N}$.

2. Побудова матриці Грама \mathbf{F} стовпчикових «компонентних» кортежів $\mathbf{F} = (\chi_i, \chi_j)_{i,j=\overline{1,K}}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\chi_1, \chi_1) & (\chi_1, \chi_2) & \dots & (\chi_1, \chi_K) \\ (\chi_2, \chi_1) & (\chi_2, \chi_2) & \dots & (\chi_2, \chi_K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\chi_K, \chi_1) & (\chi_K, \chi_2) & \dots & (\chi_K, \chi_K) \end{pmatrix},$$

де $(\chi_i, \chi_j)_{i,j=\overline{1,K}}$ — «скалярний» добуток матричних кортежів, який визначається покомпонентним скалярним добутком відповідних матриць.

Зауваження: для матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ скалярний добуток визначається так: $(A, B) = \sum_{i=1, m, j=1, n} a_{ij} b_{ij} = tr A^T B$.

3. Розв’язання задачі на власні значення для \mathbf{F} . Обчислення ненульових сингулярностей $(v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1, r}, r = rank \mathbf{F}$ матриці Грама \mathbf{F} стовпчикових «компонентних» кортежів.

Зауваження: ненульові сингулярності (v_i, λ_i^2) , $i = \overline{1, r}$ записуємо у відповідності до зростання власних значень.

4. Обчислення власних кортежів $\psi_i : \psi_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{k=1}^K \chi_k v_{ki}$, $i = \overline{1, r}$ оператора

$$\mathcal{P}_{\alpha_{N,K}} \mathcal{P}_{\alpha_{N,K}}^*$$

5. Обчислення скалярних добутоків $sk_i = (\psi_i, \chi_Y)_{N, m \times n}$, $i = \overline{1, r}$.

6. Обчислення $\hat{\beta}$ за формулою $\hat{\beta} = \sum_{k=1}^r \lambda_k^{-1} v_k (\psi_k, \chi_Y)_{N, m \times n}$.

7. Обчислення прогнозованої функції $\hat{Y} = \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_k X_{N+k}$, $X_i \in R^{m \times n}$, $i = \overline{1, K}$.

ЕМПІРИЧНІ ДАНІ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ

Для розглянутих у роботі прикладів використано статистичні дані Державної служби статистики України із квартальною дискретизацією [23]. Зокрема, у табл. 1 – 5 подано значення валового внутрішнього продукту (ВВП), оплати праці найманих працівників (ОПНП), кінцевих споживчих витрат (КСВ), експорту (Е) та імпорту (І) за 2007 – 2016 рр. (квартальні дані у фактичних цінах).

Таблиця 1. Значення 5 показників поквартально за 2007 – 2008 рр. (млн грн)

Показник	I	II	III	IV	I	II	III	IV
	2007	2007	2007	2007	2008	2008	2008	2008
ВВП	139444	166869	199535	214883	191459	236033	276451	244113
ОПНП	69078	82021	91922	108915	100492	116441	121522	132009
КСВ	112494	130245	140935	174907	161565	182154	194262	220921
Е	67513	79664	88491	87537	88516	116640	132177	107526
І	76022	85992	93895	108464	110802	135800	144433	129553

Таблиця 2. Значення 5 показників поквартально за 2009 – 2010 рр. (млн грн)

Показник	I	II	III	IV	I	II	III	IV
	2009	2009	2009	2009	2010	2010	2010	2010
ВВП	189028	214103	250306	259908	217286	256754	301251	307278
ОПНП	99206	111616	114251	126270	114062	133690	139108	153791
КСВ	172426	188041	196074	216285	194511	216027	232397	271295
Е	86994	95390	114962	126218	112105	134553	145563	157144
І	92892	96846	116057	133065	114550	131242	156102	179050

Таблиця 3. Значення 5 показників поквартально за 2011 – 2012 рр. (млн грн)

Показник	I 2011	II 2011	III 2011	IV 2011	I 2012	II 2012	III 2012	IV 2012
ВВП	261878	314620	376019	364083	293493	349212	387620	378564
ОПНП	135831	155367	158186	178727	158145	180432	179944	199638
КСВ	236580	268688	285548	314385	272970	311851	328173	356607
Е	156545	179626	184258	187524	165810	181413	188467	181657
I	173046	187916	202131	215935	186323	215091	214364	219616

Таблиця 4. Значення 5 показників поквартально за 2013 – 2014 рр. (млн грн)

Показник	I 2013	II 2013	III 2013	IV 2013	I 2014	II 2014	III 2014	IV 2014
ВВП	303753	354814	398000	408631	316 905	382391	440476	447143
ОПНП	163364	183339	180058	203892	169 089	186692	188225	190937
КСВ	285787	330494	341854	371497	304 578	352472	351349	421560
Е	149357	152499	162010	165535	151 712	202040	204937	212440
I	172928	173944	212798	205060	162 853	210717	216959	236235

Таблиця 5. Значення 5 показників поквартально за 2015 – 2016 рр. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016
ВВП	375991	456715	566997	588841	455637	535324	669170	723051
ОПНП	166364	194932	195389	220961	192014	220039	224611	240612
КСВ	345298	404693	429804	529418	438528	470927	508831	600568
Е	249852	250632	266601	278843	251845	283191	299323	340266
I	261354	252318	274856	294910	294328	292715	351084	385000

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА АЛГОРИТМОМ ДЛЯ РІЗНИХ ВАРІАНТІВ ГРУПУВАННЯ СПОСТЕРЕЖУВАНИХ ДАНИХ

На підставі даних табл. 1 очевидним чином формуємо матриці спостережень X_1 та X_2, \dots , на підставі даних табл. 5 – матриці X_9 і X_{10} .

Маємо 10 матриць спостережень: X_1, X_2, \dots, X_{10} .

Поданий вище алгоритм реалізовано у середовищі Wolfram Mathematica і за ним виконано розрахунки для різних варіантів групування даних.

Далі наведемо детальну схему розрахунку першого варіанта, а в решті випадків подаватимемо лише вхідні дані та результуючі таблиці прогнозних значень показників.

Варіант 1

$$K = 3, N = 5;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3), Y_1 = X_4; O_2 = (X_2 X_3 X_4), Y_2 = X_5;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5), Y_3 = X_6; O_4 = (X_4 X_5 X_6), Y_4 = X_7;$$

$$O_5 = (X_5 X_6 X_7), Y_5 = X_8.$$

1. Побудова стовпчикових «компонентних» кортежів:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислення матриці Грама:

$$F = \begin{pmatrix} 3238471770363 & 3695301166916 & 3695301166916 \\ 3695301166916 & 4275319205765 & 4640650457122 \\ 4022783818779 & 4640650457122 & 5096736715966 \end{pmatrix}, r = \text{rank } F = 3.$$

3. Обчислення ненульових сингулярностей матриці Грама **F** стовпчикових «компонентних» кортежів:

$$v_1 = (0,481782; -0,802513; 0,351937), \lambda_1 = 147468,756;$$

$$v_2 = (-0,715427; -0,128307; 0,686805), \lambda_2 = 198378,243;$$

$$v_3 = (-0,506014; -0,582676; -0,635955), \lambda_3 = 3542517,005.$$

4. Обчислення власних кортежів $\psi_i, i = \overline{1, r}$. Отримуємо три власні кортежі-матриці розмірності 24×4 , які не наводимо у зв'язку з їх великим розміром.

5. Обчислення скалярних добутків:

$$sk_1 = 118985,393; sk_2 = 75188,228; sk_3 = -2478812,622.$$

6. Знаходження $\hat{\beta}: \hat{\beta} = (0,472; -0,288; 0,989)$.

7. Обчислення прогнозної функції:

Прогноз показників на 2015 р. (поквартально і за рік у цілому) подано в табл. 6.

Таблиця 6. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2015 р. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	У цілому 2015 р.
ВВП	364319,03	440654,63	503775,36	503033,39	1811782,41
ОПНП	194744,65	216909,02	219141,72	224238,91	855034,30
КСВ	347626,57	400450,07	403760,81	478079,33	1629916,78
Е	185209,21	241449,93	244899,63	248093,53	919652,29
І	199107,07	259732,61	254358,38	278136,40	991334,46

Варіант 2

$$K = 3, N = 6;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3), Y_1 = X_4; O_2 = (X_2 X_3 X_4), Y_2 = X_5;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5), Y_3 = X_6; O_4 = (X_4 X_5 X_6), Y_4 = X_7;$$

$$O_5 = (X_5 X_6 X_7), Y_5 = X_8; O_6 = (X_6 X_7 X_8), Y_6 = X_9.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix}.$$

Результат обчислень за алгоритмом (прогноз значень показників на 2016 р.) наведено в табл. 7 (квартальні дані та за рік у цілому).

Таблиця 7. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2016 р. (млн грн)

Показник	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016	У цілому 2016 р.
ВВП	433695,44	518619,66	630096,81	655502,51	2237914,41
ОПНП	199021,37	232587,48	230267,10	269508,70	931384,65
КСВ	397228,75	464485,67	496709,00	584068,04	1942491,45
Е	277954,75	260259,57	280771,61	291889,10	1110875,03
І	299942,78	272343,05	316996,86	323553,21	1212835,89

Варіант 3

$$K = 4, N = 4;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4), Y_1 = X_5; O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5), Y_2 = X_6;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6), Y_3 = X_7; O_4 = (X_4 X_5 X_6 X_7), Y_4 = X_8.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}.$$

Прогноз на 2015 р. подається у табл. 8 (квартальні дані та за рік):

Таблиця 8. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2015 р. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	У цілому 2015 р.
ВВП	371635,11	456049,62	528706,34	515384,32	1871775,39
ОПНП	197063,78	220652,68	226220,82	226534,14	870471,42
КСВ	351978,00	402954,30	407662,26	491269,19	1653863,75
Е	202554,83	277783,02	278407,39	279384,65	1038129,88
І	212596,58	294916,31	266538,41	305262,57	1079313,86

Варіант 4

$$K = 4, N = 5;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4), Y_1 = X_5;$$

$$O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5), Y_2 = X_6;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6), Y_3 = X_7;$$

$$O_4 = (X_4 X_5 X_6 X_7), Y_4 = X_8;$$

$$O_5 = (X_5 X_6 X_7 X_8), Y_5 = X_9.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix}.$$

Результат розрахунку за алгоритмом (прогноз значень відповідних показників на 2016 р.) подано у табл. 9 (квартальні дані та в цілому за рік).

Таблиця 9. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2016 р. (млн грн)

Показник	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016	У цілому 2016 р.
ВВП	450775,44	537064,93	648284,26	668516,46	2304641,08
ОПНП	205713,68	243697,16	240385,16	289982,96	979778,95
КСВ	407938,32	475514,47	518184,18	593590,41	1995227,38
Е	304062,75	268825,30	292743,44	298281,97	1163913,46
І	331339,33	292423,06	336455,97	337617,27	1297835,63

Варіант 5

$$K = 5, N = 3;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4 X_5), Y_1 = X_6;$$

$$O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5 X_6), Y_2 = X_7;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6 X_7), Y_3 = X_8.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_5 = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}.$$

Прогноз значень показників на 2015 р. (квартальні дані та в цілому за рік) як результат обчислень за алгоритмом подано в табл. 10.

Таблиця 10. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2015 р. (млн грн)

Показник	I 2015	II 2015	III 2015	IV 2015	У цілому 2015 р.
ВВП	320262,93	389877,65	458030,44	449476,61	1617647,64
ОПНП	168548,28	188293,25	191653,25	198948,83	747443,61
КСВ	301161,34	345971,84	351874,82	413788,92	1412796,91
Е	174465,46	227054,45	228378,01	232141,21	862039,14
І	187870,08	237520,45	232869,67	257369,89	915630,08

Варіант 6

$$K = 5, N = 4;$$

$$O_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4 X_5), Y_1 = X_6; O_2 = (X_2 X_3 X_4 X_5 X_6), Y_2 = X_7;$$

$$O_3 = (X_3 X_4 X_5 X_6 X_7), Y_3 = X_8; O_4 = (X_4 X_5 X_6 X_7 X_8), Y_4 = X_9.$$

Стовпчикові «компонентні» кортежі:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}; \chi_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}; \chi_4 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}; \chi_5 = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}; \chi_Y = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix}.$$

У результаті застосування алгоритму отримуємо прогноз значень показників на 2016 р. (квартальні дані та в цілому за рік), табл. 11.

Таблиця 11. Прогнозні значення 5 показників поквартально на 2016 р. (млн грн)

Показник	I 2016	II 2016	III 2016	IV 2016	У цілому 2016 р.
ВВП	402460,80	482792,18	566956,08	568345,28	2020554,34
ОПНП	196277,51	228834,31	228353,18	261436,26	914901,26
КСВ	368337,09	425160,03	455892,61	519157,90	1768547,64
Е	257878,01	258518,25	273517,80	272129,22	1062043,28
І	280807,45	288234,60	299236,38	310479,10	1178757,52

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЕНЬ

Для визначення точності прогнозу показників використаємо формальний критерій точності (Absolute Percentage Error): $APE = \left| \frac{z - \hat{z}}{z} \right|$, де z — фактичне, а \hat{z} — прогнозне значення відповідного показника.

Для перевірки якості запропонованого методу використано ретроспективне оцінювання прогнозу. Загальноприйнятим є те, що значення APE , яке менше за 10%, відповідає високій точності прогнозу, а отже, і якості моделі чи підходу; від 10 до 20 % — добрій точності; від 20 до 50 % — задовільній; більше як 50 % — незадовільній.

Розраховані значення похибок прогнозу річних значень показників за вказаним критерієм для кожного з варіантів подано у табл. 12.

Таблиця 12. Точність прогнозу для 5 показників для різних варіантів групування даних

Показник	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5	Варіант 6
ВВП, %	8,89	6,10	5,87	3,30	18,65	15,22
ОПНП, %	9,95	6,17	11,94	11,68	3,88	4,29
КСВ, %	4,64	3,78	3,24	1,17	17,34	12,40
Е, %	12,07	5,43	0,75	0,91	17,58	9,58
І, %	8,50	8,34	0,38	1,91	15,49	10,91

Як бачимо з табл. 12, для варіанта 2 значення похибок менші за 10%, що відповідає високій точності прогнозу. Для інших варіантів похибки не перевищують 20%, що свідчить про добру точність прогнозу і, відповідно, якість методу прогнозування.

Таким чином, згідно з обчисленими значеннями критерію APE (від 0% до 20%) точність прогнозування вказаних економічних показників є доброю. Перевищення 10% значення похибки можна пояснити використанням статистичних даних кризових 2008 – 2009 рр., а також специфікою статистичних даних Державної служби статистики України: за 2011 – 2015 рр. використовуються дані без урахування тимчасово окупованої території АР Крим, м. Севастополя та частини зони проведення антитерористичної операції.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядаються приклади застосування матричної множинної регресії для прогнозування макроекономічних показників. З метою розв'язання задачі оцінювання методом найменших квадратів для множинної матричної регресії використано розроблений математичний апарат сингулярного розкладу і техніку псевдообернення за Муром–Пенроузом у межах розвитку концепції кортежних операторів.

Емпіричними даними для обчислень стали дані Державної служби статистики України за 2007 – 2016 рр. із квартальною дискретизацією. Розра-

хунки виконано у середовищі Wolfram Mathematica. Розглянуто декілька варіантів групування спостережуваних даних.

Згідно з обчисленими значеннями похибок прогнозу річних значень показників за критерієм APE для кожного з варіантів групування даних (від 0% до 20%), точність прогнозу і відповідно якість методу прогнозування вказаних економічних показників є доброю.

Таким чином, виконані розрахунки показують, що матрична множинна регресія може бути використана для розв'язання задач прогнозування макроекономічних показників з прийнятною для планування точністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Геєць В.* Секторальні макромоделі прогнозування економіки України / В. Геєць, М. Скрипниченко, М. Соколик, С. Шумська // *Економіст*. — 1998. — №5. — С. 58–67.
2. *Моделі* ендогенного зростання економіки України / [ред. М.І. Скрипниченко]. — К.: ДУ «Ін-т економіки та прогнозування», 2007. — 576 с.
3. *Макроекономічне* моделювання за секторами національної економіки у програмно-аналітичному інструментарії «Макропрогноз економіки України» / В.М. Геєць, М.І. Скрипниченко // *Математичне моделювання в економіці: зб. наук. пр.* — 2013. — Вип. 1. — С. 116–129.
4. *Гуляницький Л.* Розробка моделей середньострокового прогнозування ВВП України / Л. Гуляницький, І. Сергієнко, Б. Панасюк // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 68–71.
5. *Михалевич М.В.* Моделювання перехідної економіки. Моделі, методи, інформаційні технології / М.В. Михалевич, І.В. Сергієнко. — К.: *Наук. думка*, 2005. — 670 с.
6. *Лук'яненко І.Г.* Динамічні макроекономічні моделі. Новий концептуальний підхід / І.Г. Лук'яненко. — К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2003. — 50 с.
7. *Лук'яненко І.Г.* Макрофінансова стабільність: моделі та методи оцінки: моногр. [Електронний ресурс] / І.Г. Лук'яненко, О.І. Фарина. — К.: НаУКМА, 2016. — 185 с. — Режим доступу: <http://www.ekmair.ukma.edu.ua/handle/123456789/10878>
8. *Івахненко О.* Індуктивні методи прогнозування та аналізу складних економічних систем / О. Івахненко, Г. Івахненко // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 88–97.
9. *Степашко В.С.* Опыт применения системы АСТРИД для моделирования экономических процессов по статистическим данным / В.С. Степашко, Ю.В. Коппа // *Кибернетика и вычислительная техника*. — 1998. — № 117. — С. 24–31.
10. *Зайченко Ю.П.* Нечіткий метод групового врахування аргументів та його застосування в задачах прогнозування макроекономічних показників / Ю.П. Зайченко, О.Г. Кеббал, В.Ф. Крачковський // *Наук. вісті НТТУ «КПІ»*. — 2000. — № 2. — С. 18–26.
11. *Початкова* робоча модель для України: інформаційний бюлетень Міжнародного центру перспективних досліджень // *Вісник центру*. — № 154, 17 черв. 2002 р.
12. *Сігайов А.О.* Методичний та організаційний аспекти аналізу монетарних показників / А.О. Сігайов. — К.: *Наук. думка*, 2003. — 370 с.
13. *Бакаєв О.* Системи макроеконометричних моделей прогнозування економіки України / О. Бакаєв, Г. Бондаренко, І. Лукинов // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 35–44.
14. *Havrylyshyn O.* Recovery and Growth During the Transition Economy / O. Havrylyshyn, Ivailo Izvorski and Ron van Rooden // *IMF Working paper WP*. — 1998. — 141 p.

15. *Гроніцкі М.* Альтернативні сценарії розвитку економіки України у 1998 – 1999 роках / М. Гроніцкі, Я. Ширмер, К. П'єтка // *Економіст*. — 1998. — № 5. — С. 72–76.
16. *Gronicki M.* Macroeconomic Models for Ukraine / М. Gronicki, К. Piêtka // *CASE Working paper*, 1999. — 56 p.
17. *Харазішвілі Ю.М.* Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України: моногр. / Ю.М. Харазішвілі. — К.: ПоліграфКонсалтинг, 2007. — 324 с.
18. *Харазішвілі Ю.М.* Неформальна складова в структурі регіональної економіки: спроба моделювання та оцінки / Ю.М. Харазішвілі, Р.В. Прокопенко, В.І. Ляшенко // *Вісник економічної науки України*. — 2017. — № 1 (32). — С. 109–116.
19. *Donchenko V.* Vectors and matrixes least square method: foundation and application examples / V. Donchenko, I. Nazaraga, O. Tarasova // *International Journal Information Theories and Applications*. — 2013. — Vol. 20, N 4. — P.311–322.
20. *Donchenko V.* “Feature Vectors” in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes / V. Donchenko, T. Zinko, F. Skotarenko // *Problems of Computer Intellectualization: international conference, Institute of Cybernetics NASU, ITHEA*. — Kyiv, Ukraine, – Sofia, Bulgaria. — 2012. — P. 111–124.
21. *Донченко В.С.* Матрична множинна регресія / В.С. Донченко, О.В. Тарасова // *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*. — 2015. — № 2. — С. 133–138.
22. *Донченко В.С.* Концепція кортежності для лінійних операторів та її реалізація для матричних кортежів / В.С. Донченко, Т.П. Зінько, Ф.М. Скотаренко // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. — 2015. — №3 (120). — С. 127–140.
23. *Офіційний сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс]*. — Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>.

Надійшла 12.10.2017

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ДИФФЕОМОРФИЗМОМ МЕЖДУ РИМАНОВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

А.Ю. ПОТАПЕНКО

Аннотация. Рассмотрена конструкция оператора Лапласа в L_2 -версии по мере в контексте диффеоморфизма между (бесконечномерными) римановыми многообразиями. Получена связь между операторами замыкания градиента, граничным оператором следа и дивергенции по мере на диффеоморфных римановых многообразиях. Показано, что в случае корректности определения замыкания градиента, граничного оператора следа и дивергенции на римановом многообразии соответствующие операторы на диффеоморфном с ним римановом многообразии тоже корректно определены. Как результат полученной связи между операторами расширен класс решаемых задач (задач, которые имеют, притом единственное, решение) на римановом многообразии (и на гильбертовом пространстве как частном случае риманова многообразия) сведением задачи специального типа к ассоциированной с ней задаче Дирихле.

Ключевые слова: гильбертово пространство, риманово многообразие, диффеоморфизм, борелевская мера, дифференцирование мер, оператор Лапласа, задача Дирихле.

ВВЕДЕНИЕ

Построению оператора Лапласа в бесконечномерном случае и связанным с ним уравнениям посвящено много публикаций (см., например, работы [1–8]). В данной работе продолжается исследование иной конструкции лапласиана: лапласиана в L_2 -версии. Лапласиан в L_2 -версии на гильбертовом пространстве был предложен и изучался в работах [9–12]; на римановых, в том числе бесконечномерных, многообразиях лапласиан в L_2 -версии и задача Дирихле рассматриваются в работах [13, 14].

В настоящей работе исследуется диффеоморфное отображение между бесконечномерными римановыми многообразиями специального класса как способ расширения класса решаемых краевых задач. Изометрическим отображениям между конечномерными римановыми многообразиями посвящены, например, работы [15, 16]. Насколько известно автору исследования диффеоморфных отображений между римановыми многообразиями в контексте краевых задач ранее не проводились.

Цель работы — расширение класса решаемых краевых задач на римановом многообразии путем сведения задачи специального типа к диффеоморфно ассоциированной с ней задаче Дирихле, которая исследовалась в работе [14].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть M — риманово сепарабельное многообразие класса C^2 с модельным пространством H ; G — область в M с гладкой границей $S = \partial G$; $T_p S$ — касательное пространство к S в точке $p \in S$, линейное подпространство $T_p M$ коразмерности 1. Риманов тензор позволяет для каждого $p \in M$ задать на $T_p M$ скалярное произведение (\cdot, \cdot) , а следовательно, и соответствующую норму $\|\cdot\|$.

Обозначим через $C_b(M)$ пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на M , через $C_b(M; TM)$ — пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей на M , через $C_b^1(M)$ (соответственно, $C_b^1(M; TM)$) — пространство всех функций $f \in C_b(M)$ (соответственно, полей $\mathbf{X} \in C_b(M; TM)$), дифференцируемых в каждой точке $x \in M$ с непрерывной и ограниченной на всем M производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Здесь $f'(p) \in T_p^* M$ определен формулой $f'(p): T_p M \ni \mathbf{Y}_p \mapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathbb{R}$; $\mathbf{X}'(p)$ — линейный оператор в $T_p M$, определённый формулой $\mathbf{X}'(p): \mathbf{Y}_p \mapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p} \mathbf{X}$, где ∇ — связность Леви-Чивиты на M (бесконечномерный вариант см., например, [17, с. 83]).

Атлас $\Omega = \{(\varphi, U_\varphi)\}$ ($\varphi: U_\varphi \rightarrow H$) риманова многообразия M будем называть *равномерным* [18], если существуют такие $r > 0$, $\delta^-, \delta^+ > 0$, что

1) для каждой точки $p \in M$ существует такая карта (φ_p, U_p) , что $\varphi_p(U_p) \supset B_r(\varphi_p(p)) = \{q \in H : \|\varphi_p(p) - q\| < r\}$;

2) для каждых $p \in M$, $q \in U_p$, $\xi \in T_q M$ выполняется $\delta^- \|\xi^{q,p}\|_H^2 \leq \|\xi\|_H^2 \leq \delta^+ \|\xi^{q,p}\|_H^2$ для карты (φ_p, U_p) из пункта 1).

В работе [18] доказана полнота внутренней метрики риманова многообразия с равномерным атласом. Напомним, что полнота метрики является необходимым условием корректного построения оператора Лапласа, проведенного в работе [13].

Пусть везде в дальнейшем M_1 и M_2 — счетномерные римановы многообразия класса C^2 с равномерными атласами Ω_1 и Ω_2 соответственно; $F: M_1 \rightarrow M_2$ — ограниченный диффеоморфизм между ними, т.е., существует такое $K > 0$, что $\|F'(p)\|, \|(F^{-1})'(q)\| \leq K$ для всех $p \in M_1, q \in M_2$; G_1 — область в M_1 с гладкой границей $S_1 = \partial G_1, G_2 = F(G_1), S_2 = \partial G_2 = F(S_1)$.

СТРОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Векторное поле $\mathbf{Z} \in C_b^1(M; TM)$ будем называть *строго трансверсальным* к S , если существует $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $p \in S$: $d(\mathbf{Z}(p), T_p S) \geq \delta$ (здесь $d(\mathbf{Z}(p), T_p S) = \inf \{ \|\mathbf{Z}(p) - \xi\|, \xi \in T_p S \}$).

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{n}_1 \in C_b^1(M_1)$ — строго трансверсальное к S_1 векторное поле. Тогда векторное поле $\mathbf{n}_2 = F'(F^{-1})\mathbf{n}_1(F^{-1})$ — строго трансверсальное к S_2 .

Доказательство. Фиксируем точку $q \in S_2$ и обозначим $p = F^{-1}(q) \in S_1$. Также обозначим как K_2 множество всех C^1 кривых $v_2 : (-a_{v_2}, a_{v_2}) \rightarrow S_2$ ($a_{v_2} > 0$) таких, что $v_2(0) = q$. Аналогично обозначим как K_1 множество C^1 кривых $v_1 : (-a_{v_1}, a_{v_1}) \rightarrow S_1$ ($a_{v_1} > 0$) таких, что $v_1(0) = p$. Заметим, что $K_2 = \{F \circ v_1 \mid v_1 \in K_1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} d(\mathbf{n}_2(q), T_q S_2) &= \inf \{ \|\mathbf{n}_2 - v_2'(t)|_{t=0}\| \mid v_2 \in K_2 \} = \\ &= \inf \{ \|F'(p)\mathbf{n}_1(p) - F'(p)v_1'(t)|_{t=0}\| \mid v_1 \in K_1 \} \geq \\ &\geq \|(F'(p))^{-1}\|^{-1} \inf \{ \|\mathbf{n}_1(p) - v_1'(t)|_{t=0}\| \mid v_1 \in K_1 \} = \\ &= \|(F^{-1})'(p)\|^{-1} d(\mathbf{n}_1(p), T_p S_1), \end{aligned}$$

откуда, учитывая ограниченность диффеоморфизма F и условие леммы, получаем существование таких $K, \delta > 0$, не зависящих от q , что

$$d(\mathbf{n}_2(q), T_q S_2) \geq \frac{\delta}{K},$$

что и доказывает строгую трансверсальность \mathbf{n}_2 к S_2 .

ЗАМЫКАЕМОСТЬ ГРАДИЕНТА

Лемма 2. Пусть оператор grad_{G_1} корректно задан (мера μ_1 имеет полный носитель) и замыкаем в $L_2(G_1; \mu_1)$, для $A \in B(M_2)$ $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$. Также

$$\overline{\text{grad}_{G_1} f} = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow f = \text{const} \pmod{\mu_1}.$$

Тогда оператор grad_{G_2} также корректно задан и замыкаем в $L_2(G_2; \mu_2)$ и

$$\overline{\text{grad}_{G_2} f} = 0 \pmod{\mu_2} \Leftrightarrow f = \text{const} \pmod{\mu_2}.$$

Следующее утверждение следует непосредственно из построения меры μ_2 .

Утверждение 1. Пусть $f \in L_1(M_2)$. Тогда $f \circ F \in L_1(M_1)$ и

$$\int_{M_2} f d\mu_2 = \int_{M_1} f \circ F d\mu_1.$$

Доказательство леммы 2. Корректность задания grad_{G_2} очевидна: полнота носителя меры μ_2 следует из полноты носителя меры μ_1 и определения μ_2 . Сначала докажем замыкаемость grad_{G_2} . Пусть $C^1(G_2) \ni f_n \rightarrow 0$ в $L_2(G_2; \mu_2)$, $\text{grad}_{G_2} f_n \rightarrow \mathbf{Z}$ в $L_2(G_2, TM_2; \mu_2)$. Необходимо показать, что $\mathbf{Z} = 0 \pmod{\mu_2}$. Благодаря утверждению 1 имеем

$$\int_{G_2} f_n^2 d\mu_2 = \int_{G_1} f_n^2 \circ F d\mu_1 = \int_{G_1} (f_n \circ F)^2 d\mu_1,$$

а значит $C^1(G_1) \ni f_n \circ F \rightarrow 0$ в $L_2(G_1; \mu_1)$.

Найдем $\text{grad}_{G_1}(f_n \circ F)$:

$$\text{grad}_{G_1}(f_n \circ F) = ((f_n \circ F)')^* = (f_n'(F(\cdot))F'(\cdot))^* = (F')^*((\text{grad}_{G_2} f_n) \circ F). \quad (1)$$

Теперь покажем, что $\text{grad}_{G_1}(f_n \circ F) \rightarrow (F')^*(\mathbf{Z} \circ F)$ в $L_2(G_1; TM_1; \mu_1)$.

Действительно, учитывая ограниченность диффеоморфизма F и сходимость $\text{grad}_{G_2} f_n \rightarrow \mathbf{Z}$ в $L_2(G_2, TM_2; \mu_2)$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{G_1} \|(F')^*(\mathbf{Z} \circ F) - (F')^*((\overline{\text{grad}_{G_2} f_n}) \circ F)\|^2 d\mu_1 \leq \\ & \leq K^2 \int_{G_1} \|\mathbf{Z} \circ F - ((\overline{\text{grad}_{G_2} f_n}) \circ F)\|^2 d\mu_1 = \\ & = K^2 \int_{G_1} \|\mathbf{Z} - \overline{\text{grad}_{G_2} f_n}\|^2 \circ F d\mu_1 = K^2 \int_{G_2} \|\mathbf{Z} - \overline{\text{grad}_{G_2} f_n}\|^2 d\mu_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда, благодаря замыкаемости grad_{G_1} , получаем

$$(F')^*(\mathbf{Z} \circ F) = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow \mathbf{Z} \circ F = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow \mathbf{Z} = 0 \pmod{\mu_2},$$

что доказывает замыкаемость grad_{G_2} .

Теперь докажем, что

$$\overline{\text{grad}_{G_2} f} = 0 \pmod{\mu_2} \Leftrightarrow f = \text{const} \pmod{\mu_2}.$$

Для этого сначала покажем, что $f \circ F \in D(\overline{\text{grad}_{G_1}})$ и

$$\overline{\text{grad}_{G_1}}(f \circ F) = (F')^*((\overline{\text{grad}_{G_2} f}) \circ F). \quad (2)$$

Поскольку $f \in D(\overline{\text{grad}_{G_2}})$, существует последовательность $f_n \in C^1(G_2)$ такая, что $f_n \rightarrow f$ в $L_2(G_2; \mu_2)$ и $\text{grad}_{G_2} f_n \rightarrow \overline{\text{grad}_{G_2} f}$ в $L_2(G_2; TM_2; \mu_2)$. Из $f_2 \rightarrow f_n$ получаем $f_n \circ F \rightarrow f \circ F$ в $L_2(G_1; \mu_1)$ и

$$\begin{aligned} & \int_{G_1} \|(F')^* ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) - \text{grad}_{G_1} (f_n \circ F)\|^2 d\mu_1 = \\ & = \int_{G_1} \|(F')^* ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) - (F')^* ((\text{grad}_{G_2} f_n) \circ F)\|^2 d\mu_1 \leq \\ & \leq K^2 \int_{G_1} \|((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) - ((\text{grad}_{G_2} f_n) \circ F)\|^2 d\mu_1 = \\ & = K^2 \int_{G_1} \|\overline{\text{grad}}_{G_2} f - \text{grad}_{G_2} f_n\|^2 d\mu_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что доказывает тождество (2).

Теперь, имея (2), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}_{G_2} f = 0 \pmod{\mu_2} & \Leftrightarrow (F')^* ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) = 0 \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{\text{grad}}_{G_1} (f \circ F) = 0 \pmod{\mu_1} & \Leftrightarrow f \circ F = \text{const} \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow f = \text{const} \pmod{\mu_2}. \end{aligned}$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ГРАНИЧНЫЙ ОПЕРАТОР СЛЕДА

Пусть на M_1 фиксировано строго трансверсальное к S_1 поле $\mathbf{n}_1 \in C_b^1(M_1)$ такое, что логарифмическая производная μ_1 вдоль поля \mathbf{n}_1 $\text{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1$ обладает свойством

$$\text{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1|_{G_1} \in L_\infty(G_1). \tag{3}$$

Данное условие, вместе с замыкаемостью \mathbf{grad}_{G_1} , позволяют корректно определить граничный оператор следа

$$\gamma_1 : D(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}) \rightarrow L_2(S_1) = L_2(S_1, \tau_1),$$

который для функций $u \in C^1(G_1)$ совпадает с оператором ограничения: $u \mapsto u|_{S_1}$. На гильбертовом пространстве граничный оператор следа введен в работе [9] и исследован в работе [11]; случай риманова многообразия аналогичен. Построение поверхностной меры τ_1 также приведен в работе [9].

Напомним, что функция $\rho \in L_1(M_1; \mu_1)$ совпадает с $\text{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1$, так как для всех функций $u_1 \in C_b^1(M_1)$ выполняется

$$-\int_{M_1} (\text{grad}_{M_1} u_1, \mathbf{n}_1) d\mu_1 = \int_{M_1} u_1 \rho d\mu_1. \tag{4}$$

Пусть $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$ и $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$. Леммы 1 и 2 позволяют утверждать, что \mathbf{n}_2 будет строго трансверсально к S_2 , а оператор grad_{G_2} — замыкаем. Для построения оператора следа на $D(\overline{\mathbf{grad}}_{G_2})$ не достаточно условия $\text{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2|_{G_2} \in L_\infty(G_2)$. Как будет видно из следующей леммы, это условие действительно выполняется.

Лемма 3.

$$\operatorname{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2 = (\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех функций $u \in C_b^1(M_2)$ выполняется

$$-\int_{M_2} (\operatorname{grad}_{M_2} u, \mathbf{n}_2) d\mu_2 = \int_{M_2} u ((\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}) d\mu_2.$$

Действительно, учитывая утверждение 1, определение \mathbf{n}_2 и тождества (1) (точнее, его аналог для градиентов на M_1, M_2) и (4), имеем

$$\begin{aligned} & -\int_{M_2} (\operatorname{grad}_{M_2} u, \mathbf{n}_2) d\mu_2 = -\int_{M_1} (\operatorname{grad}_{M_2} u, \mathbf{n}_2) \circ F d\mu_1 = \\ & = -\int_{M_1} ((F')^* ((\operatorname{grad}_{M_2} u) \circ F), \mathbf{n}_1) d\mu_1 = -\int_{M_1} (\operatorname{grad}_{M_1} (u \circ F), \mathbf{n}_1) d\mu_1 = \\ & = \int_{M_1} (u \circ F) \operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1 d\mu_1 = \int_{M_2} u ((\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}) d\mu_2. \end{aligned}$$

Следствие 1. Если $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1|_{G_1} \in L_\infty(G_1)$, то $\operatorname{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2|_{G_2} \in L_\infty(G_2)$.

Таким образом, на $D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_2})$ корректно определен граничный оператор следа γ_2 . Следующее утверждение отображает связь операторов γ_1 и γ_2 .

Утверждение 2. Пусть $u \in D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_1})$. Тогда $u \circ F^{-1} \in D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_2})$ и

$$\gamma_2(u \circ F^{-1}) = \gamma_2(u) \circ F^{-1}.$$

Доказательство. Доказательство вхождения $u \circ F^{-1} \in D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_2})$ аналогично проведенному в тождестве (2).

Поскольку $\gamma_1(u) = u|_{S_1}$ и $\gamma_2(u \circ F^{-1}) = (u \circ F^{-1})|_{S_2}$ для $u \in C^1(G_1)$, доказательство утверждения в этом случае очевидно. Поскольку $C^1(G_1)$ плотно в $D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_1})$, утверждение истинно в общем случае.

ДИВЕРГЕНЦИЯ ПО МЕРЕ

Замыкаемость $\operatorname{grad}_{G_1}$, а также условие (3) позволяют корректно определить граничные операторы следа $\gamma_1 : D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_1}) \rightarrow L_2(S_1)$ и $\gamma_2 : D(\overline{\operatorname{grad}}_{G_2}) \rightarrow L_2(S_2)$. Теперь оператор дивергенции по мере корректно определяем следующим образом [10]:

$$\operatorname{div}_1 \stackrel{\Delta}{=} -(\overline{\operatorname{grad}}_{G_1}|_{\operatorname{Ker} \gamma_1})^*; \operatorname{div}_2 \stackrel{\Delta}{=} -(\overline{\operatorname{grad}}_{G_2}|_{\operatorname{Ker} \gamma_2})^*.$$

Следующая лемма устанавливает связь между операторами div_1 и div_2 .

Лемма 4. Пусть $\mathbf{Z}_1 \in D(\text{div}_1)$; $\mathbf{Z}_2(p) = F'(F^{-1}(p))\mathbf{Z}_1(F^{-1}(p))$. Тогда $\mathbf{Z}_2 \in D(\text{div}_2)$ и

$$\text{div}_2 \mathbf{Z}_2 = (\text{div}_1 \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех функций $u \in \text{Кег } \gamma_2$ выполняется

$$\int_{G_2} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u, \mathbf{Z}_2) d\mu_2 = - \int_{G_2} u((\text{div}_1 \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}) d\mu_2.$$

Убедимся, что это действительно так. Учитывая утверждение 1, определение \mathbf{Z}_2 , тождество (2), вхождение $u \circ F \in \text{Кег } \gamma_1$ (как следствие утверждения 2) и определение div_1 , имеем

$$\begin{aligned} \int_{G_2} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u, \mathbf{Z}_2) d\mu_2 &= \int_{G_1} ((F')^* (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) \circ F, \mathbf{Z}_1) d\mu_1 = \\ &= \int_{G_1} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} (u \circ F), \mathbf{Z}_1) d\mu_1 = \\ &= - \int_{G_1} (u \circ F)(\text{div}_1 \mathbf{Z}_1) d\mu_1 = - \int_{G_2} u((\text{div}_1 \mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}) d\mu_2. \end{aligned}$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, F-АССОЦИИРОВАННАЯ С ЗАДАЧЕЙ ДИРИХЛЕ

Пусть grad_{G_1} замыкаем и выполнено условие (3), а значит, корректно определены операторы $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$, γ_1 и div_1 . Благодаря леммам 1 и 2 и следствию 1 можем утверждать, что операторы $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 и div_2 также корректно определены.

Рассмотрим задачу Дирихле на M_1 . Пусть $f \in L_2(G_1)$, $k \in C^1(G_1)$, $a \in C(G_1)$, $k(x) \geq \delta > 0$, $a(x) \geq \alpha > 0$. Рассмотрим уравнение относительно функции u

$$\text{div}_1(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - a \cdot u = f \tag{5}$$

с краевым условием

$$\gamma_1(u) = \varphi, \tag{6}$$

где $\varphi \in \text{Im } \gamma_1$.

Определение. Будем называть следующую краевую задачу относительно функции u F -ассоциированной с задачей Дирихле (5)–(6) уравнение

$$\text{div}_2((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F')^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) - (a \circ F^{-1})u = f \circ F^{-1} \tag{7}$$

с краевым условием

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}. \tag{8}$$

Теорема. Функция u_2 будет решением F -ассоциированной краевой задачи (7)–(8), тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2 \circ F$ будет решением соответствующей задачи Дирихле (5)–(6).

Доказательство. Сначала рассмотрим краевые условия. Учитывая утверждение 2, имеем

$$\begin{aligned} \gamma_2(u_2) = \varphi \circ F^{-1} &\Leftrightarrow \gamma_2(u_1 \circ F^{-1}) = \\ &= \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_1(u_1) \circ F^{-1} = \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_1(u_1) = \varphi. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что уравнение (7) при $u = u_2$ эквивалентно уравнению (5) при $u = u_1$. Действительно, учитывая тождество (2) и лемму 4, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_2((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F')^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_2) - (a \circ F^{-1})u_2 &= f \circ F^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{div}_2((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F')^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} (u_1 \circ F^{-1})) - (a \circ F^{-1})(u_1 \circ F^{-1}) &= \\ = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow \operatorname{div}_2(F'(F^{-1}(\cdot))(k \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_1)(F^{-1}(\cdot))) - (a \cdot u_1) \circ F^{-1} &= f \circ F^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\operatorname{div}_1(k \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_1)) \circ F^{-1} - (a u_1) \circ F^{-1} &= \\ = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow \operatorname{div}_1(k \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_1) - a \cdot u_1 &= f. \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

В работе показано, что выполнение технических условий, позволяющих построить на римановом многообразии с равномерным атласом лапласиан по мере, сохраняется при переходе к диффеоморфному риманову многообразию с равномерной структурой (леммы 1 и 2 и следствие 1). Проведенное сравнение соответствующих операторов на диффеоморфных многообразиях $(\overline{\mathbf{grad}}, \gamma, \operatorname{div})$ позволяет свести рассмотрение краевой задачи вида (7)–(8) к задаче Дирихле (5)–(6) на диффеоморфном многообразии, расширив таким образом, благодаря в частности результатам работ [13, 14], класс решаемых краевых задач. В контексте дальнейших исследований представляется разумным рассмотреть конкретные примеры диффеоморфных пар многообразий и соответствующих им краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gross L. Potential theory on Hilbert space / L. Gross // J. Funct. Anal. — 1967. — 1. — P. 123–181.
2. Далецкий Ю.Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения / Ю.Л. Далецкий // Успехи мат. наук. — 1967. — 22, № 4. — С. 3–54.
3. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа / П. Леви. — М.: Наука, 1967. — 512 с.

4. *Немировский А.С.* Об аксиоматическом описании оператора Лапласа для функций на гильбертовом пространстве / А.С. Немировский, Г.Е. Шилов // *Функциональный анализ и его приложение.* — 1969. — **3**, № 3. — С. 79–85.
5. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами / Ю.В. Богданский // *Укр. мат. журн.* — 1977. — **29**, № 6. — С. 781–784.
6. *Accardi L.* On Laplacians and traces / L. Accardi, O.G. Smolianov // *Conf. Semin. Univ. Bari.* — 1993. — **250**. — P. 1–25.
7. *Accardi L.* A quantum approach to Laplace operators / L. Accardi, A. Barhoumi, H. Ouerdiane // *Infinite Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top.* — 2006. — **9**. — P. 215–248.
8. *Accardi L.* Exotic Laplacians and associated stochastic processes / L. Accardi, U.C. Ji, K. Saito // *Infinite Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top.* — 2009. — **12**. — P. 1–19.
9. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2 -версии / Ю.В. Богданский // *Укр. мат. журн.* — 2011. — **63**, № 9. — С. 1169–1178.
10. *Богданский Ю.В.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве / Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // *Укр. мат. журн.* — 2014. — **66**, № 6. — С. 733–739.
11. *Богданский Ю.В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра / Ю.В. Богданский // *Укр. мат. журн.* — 2015. — **67**, № 11. — С. 1450–1460.
12. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере и эргодическая теорема / Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // *Укр. мат. журн.* — 2015. — **67**, № 9. — С. 1172–1180.
13. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле I / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // *Укр. мат. журн.* — 2016. — **68**, № 7. — С. 897–907.
14. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле II / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // *Укр. мат. журн.* — 2016. — **68**, № 11. — С. 1443–1449.
15. *Obata M.* Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere / M. Obata // *J. of the Math. Soc. of Jap.* — 1962. — **14**, N. 3. — P. 333–340.
16. *Omori H.* Isometric immersions of Riemannian manifolds / H. Omori // *J. of the Math. Soc. of Jap.* — 1967. — **19**, N 2. — P. 205–214.
17. *Далецкий Ю.Л.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия / Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская. — К.: Вища шк., 1989. — 296 с.
18. *Потапенко О.Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою / О.Ю. Потапенко // *Наукові вісті НТУУ «КПІ».* — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79.

Поступила 27.10.2017

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І
МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS AND
METHODS OF SYSTEM ANALYSIS

УДК 517.9, 519.816

Системный подход к поддержке принятия решений на основе иерархических и сетевых моделей / Недашковская Н.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 7–18.

Предложены методология и системный подход к поддержке принятия решений (ППР) на основе иерархических и сетевых моделей, который включает методы оценивания и повышения согласованности матриц парных сравнений (МПС) общего вида, расчета нечетких локальных весов элементов модели на основе нечетких МПС, вычисления интервалов доверия для локальных весов, нахождения агрегированных весов и функций доверия к элементам модели, оценивания чувствительности результатов, а также средства анализа эффективности методов, систему моделирования экспертного оценивания и инструментарий в виде системы ППР. Предлагаемая методология позволяет повысить достоверность решений практических слабо структурированных задач ППР за счет использования более эффективных методов на каждом из этапов решения задачи. Достоверность результатов применения методологии при решении практической задачи ППР может быть оценена средствами анализа чувствительности на основе индексов устойчивости вычисленных локальных и глобального ранжирований альтернатив решений. Рис.: 4. Библиогр.: 30 назв.

UDC 517.9, 519.816

A system approach to decision support on basis of hierarchical and network models / Nedashkovskaya N.I. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 7–18.

A methodology and a system approach to decision support based on hierarchical and network models are proposed, which include methods for estimating and improving the consistency of pairwise comparison matrices (PCM), calculating fuzzy local weights for model elements based on fuzzy PCM, calculating confidence intervals for local weights, finding aggregated weights and aggregated belief functions for model elements, estimating the sensitivity of the results, tools for analyzing the effectiveness of the methods and an expert evaluation modeling system. A decision support system is built on basis of the proposed methodology. The proposed methodology makes it possible to increase the reliability of solutions of practical weakly structured decision-making problems by using more efficient methods at each of the stages of solving the problem. Reliability of results of application of the methodology while solving a practical decision-making problem can be assessed by means of sensitivity analysis using the stability indices of the computed local and global rankings of the decision alternatives. Figs.: 4. Refs: 30 titles.

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 004.82

Структурно-функциональный уровень организации лингвистического процессора / Кисленко Ю.И., Химич А.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 19–35.

Речевая деятельность человека актуализируется индивидуальной речевой системой, которая (по Л. Щербе) определяется взаимодействием лингвистического процессора, ответственного за структурный уровень организации речевой деятельности, и естественно-речевой базы знаний, где хранится весь текущий когнитивный

потенциал как символического, так и образного уровня. С позиций учета интеграционного подхода к анализу речевой деятельности презентован структурно-функциональный уровень организации лингвистического процессора для обработки сообщений моно/полипредикатных уровней. Такой подход, сочетающий особенности формирования и взаимодействия лингвистического процессора и базы данных, является плодотворной основой моделирования индивидуальной речевой системы для решения важных проблем информационных технологий. Рис.: 3. Табл.: 3. Библиогр.: 11 назв.

UDC 004.82

Structural and functional level of the organization of the linguistic processor / Kyslenko Yu.I., Khimich A.V. // *System Research and Information Technologies*. — 2018. — № 1. — P. 19–35.

The speech activity of a person is actualized by an individual speech system that (according to L. Scherba) is determined by the interaction of the linguistic processor, responsible for the structural level of the organization of speech activity, and the knowledge database, where all current cognitive potential is stored and represented on the symbolic and figurative levels. The structural and functional level of the organization of the linguistic processor for processing messages of mono/poly predicate levels is presented from the point of view of the integration approach to the analysis of a speech activity. This approach combines the features of the formation and interaction of the linguistic processor and knowledge database. It is a fruitful basis for modeling an individual speech system for solving important problems in the field of the information technology. Figs.: 3. Tables: 3. Refs: 11 titles.

УДК 519.86

Алгоритм определения состояний равновесия при условии зависимости структуры потребления от объемов выпуска / Махорт А.Ф. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2018. — № 1. — С. 36–51.

Доказано существование равновесия в экономической системе с монополистами и потребительскими предпочтениями, которые формируются с учетом информации об объемах выпуска товаров. Установлены условия на заданные экономические характеристики, которые обеспечат решимость уравнений равновесия в заданной области значений. Предложен алгоритм нахождения равновесных характеристик. Рассмотрена возможность оптимального выбора равновесных характеристик. Оптимальность связывается с желанием субъектов экономической системы обеспечить наиболее полное удовлетворение своих нужд. Найдены граничные значения экономических характеристик, которые позволяют оценить возможность достижения состояний равновесия с выбранными свойствами. Библиогр.: 7 назв.

UDC 519.86

The algorithm for determining the states of equilibrium subject to the dependence of the consumption structure on the volumes of production / Makhort A.Ph. // *System Research and Information Technologies*. — 2018. — № 1. — P. 36–51.

The model describes an economy with monopolies and consumers interests dependent on the production volume of goods. Determined limitations of defined model characteristics prove an equilibrium existence. The equilibrium existence means a solvability of equilibrium equations. An algorithm for solving the equilibrium problem is proposed. Each solution corresponds to an equilibrium state of the economy. The algorithm determines the equilibrium states with indicated properties. Discovered optimal values of equilibrium characteristics guarantee an acceptable level of satisfaction of all economy subjects' needs. Evaluated boundary values of equilibrium characteristics lead to an estimation of an attainment of selected equilibrium states. Refs.: 7 titles.

УДК 004.85

Обзор методов машинного обучения для классификации больших объемов спутниковых данных / Лавренюк Н.С., Новиков А.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 52–71.

С появлением в свободном доступе больших объемов спутниковых данных все большую актуальность приобретает развитие методов машинного обучения на основе геопространственных данных, в частности спутниковых. В работе рассмотрены основные методы машинного обучения и проанализированы особенности и результаты их применения к задачам классификации земного покрова по спутниковым данным высокого разрешения. Особое внимание уделяется глубинным архитектурам, в частности сверточным нейронным сетям, что на сегодняшний день являются наиболее мощным и точным методом для распознавания визуальных образов. Определены основные преимущества методов глубинного обучения над традиционными подходами к задачам классификации, что использовались на протяжении последних десятилетий и базировались на экспертных знаниях для выделения признаков из входящих данных. Рис.: 6. Табл.: 2. Библиогр.: 74 назв.

UDC 004.85

Review of machine learning methods for Big satellite Data classification / Lavreniuk M.S., Novikov O.M. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 52–71.

With the appearance of free access to Big satellite data, the development of machine learning methods based on geospatial data, in particular satellite data, is becoming more and more relevant. In this paper, we consider and analyze the peculiarities of the basic machine learning methods and results of their application to the tasks of land cover classification based on high resolution satellite data. Special attention is paid to deep architectures, in particular, convolutional neural networks, which nowadays are the most powerful and precise method for visual pattern recognizing. We determine the main advantages of the deep learning methods over the traditional approaches to the classification tasks, that have been used over the last decades and based on expert knowledge to the features extraction from the input data. Figs.: 6. Tables: 2. Refs: 74 titles.

УДК 683.519

Огляд методів сегментації медичних зображень / Чапалюк Б.В., Зайченко Ю.П. // System Research and Information Technologies. — 2018. — №1. — P. 72–81.

Наведено огляд сучасних методів сегментації медичних зображень. Розглянуто найбільш популярні методи, такі як багатоатласні методи (БММ) та методи сегментації на базі глибинного навчання. Детально викладено кожен із кроків БММ, алгоритми та підходи, які використовуються для досягнення найбільшої точності сегментації, а також вплив вибору кожного алгоритму певного кроку БММ на сумарну точність роботи алгоритму. Показано сучасні підходи глибинного навчання, що застосовуються для сегментації медичних зображень. Такі алгоритми зазвичай використовуються як самостійні незалежні алгоритми, але можуть використовуватися і як частина БММ. Оцінено підходи, які можуть допомогти підвищити точність сегментації медичних зображень в майбутньому. Бібліогр.: 50 назв.

УДК 683.519

Обзор методов сегментации медицинских изображений / Чапалюк Б.В., Зайченко Ю.П. // System Research and Information Technologies. — 2018. — №1. — P. 72–81.

Приведен обзор современных методов сегментации медицинских изображений, наиболее популярные методы, такие как многоатласные методы (МММ) и методы сегментации на базе глубинного обучения. Подробно изложен каждый из шагов МММ, алгоритмы и подходы, что используются для достижения наибольшей точности сегментации, а также влияние выбора каждого алгоритма определенного

шага МАМ на суммарную точность работы алгоритма. Показаны современные подходы глубинного обучения, применяемые для сегментации медицинских изображений. Такие алгоритмы обычно используются как самостоятельные независимые алгоритмы, но могут использоваться и как часть МАМ. Оценены подходы, которые могут помочь повысить точность сегментации медицинских изображений в будущем. Библиогр.: 50 назв.

ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І
УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ,
ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

DECISION MAKING AND CONTROL IN
ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND
SOCIAL SYSTEMS

УДК 519.226; 355.01

Моделирование военных конфликтов с использованием байесовских сетей / Кангун Г.И., Бидюк П.И., Жиров А.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 82–92.

Рассмотрены общие подходы к моделированию военных конфликтов. Построена вероятностно-статистическая модель для установления вероятности наступления военного конфликта в форме байесовой сети. Сложность моделирования военного конфликта состоит в высокой динамике взаимодействующих систем со многими неизвестными или неизмеряемыми переменными и параметрами. В созданной модели учтены неполнота и нечеткость имеющейся информации. Целью построенной модели является не только выявление существующих взаимосвязей и взаимозависимостей между выбранными процессами, а и прогнозирование вероятности возникновения будущих конфликтов на основе результатов анализа текущей ситуации. Проведено моделирование с использованием имеющихся статистических данных, выполнены серия вычислительных экспериментов и анализ полученных результатов. Статистические данные взяты с открытых источников. Построенная модель использована для вычисления вероятности возникновения внутреннего и внешнего конфликтов в Украине. Численные результаты соответствуют реальной ситуации. Рис.: 1. Библиогр.: 10 назв.

UDC 519.226; 355.01

Military conflicts modeling by making use of Bayesian networks / Kanhun H.I., Bidiyuk P.I., Jirov O.L. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 82–92.

General approaches to modeling military conflicts are considered. A probabilistic and statistical model for computing probability of a military conflict in the form of Bayesian network was constructed. The complexity of modeling military conflicts is due to the high dynamics of interacting systems with many unknown or non-measurable variables and parameters. The constructed model takes into consideration incompleteness and fuzziness of the available information. The purpose of the model is not only in revealing existing links and dependencies between the processes selected, but also in forecasting the probability of future conflicts using results of the analysis of the current situation. A modeling was performed using available statistical data, a series of computational experiments was fulfilled and analysis of the results was performed. Statistical data was taken from open sources. The constructed model was used for computing the probability of internal and external conflicts for Ukraine. The obtained numerical results correspond to the actual situation. Figs.: 1. Refs: 10 titles.

УДК 519.83

Моделирование внутренней валюты в рефлексивных играх с многокритериальными функциями выигрыша / Смирнов С.А., Терещенко И.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 93–98.

Рассмотрена задача принятия решений в условиях конфликта, многокритериальной неопределенности и рефлексивного взаимодействия игроков. Моделирование рефлексивного поведения дает возможность анализировать ситуации, когда

принятые решения отличаются от нерелексивного рационального поведения, исследовать и выявлять внутренние причины такого поведения. Решение проблемы с учетом многозначности интересов сторон основано на многокритериальном обобщении предложенной В.А. Лефевром постановки, базирующейся на использовании понятия внутренней валюты. Для вычисления начальной оценки внутренней валюты противника на основе номинально известных критериев использован метод интервальных оценок. Его применение дает возможность экспертам задавать диапазон возможных значений весовых коэффициентов без определения их конкретных значений, что упрощает экспертную процедуру. Весовые коэффициенты уточнены путем решения вспомогательной задачи с поиска поправок, которые вносятся в модель определения внутренней валюты. Библиогр.: 3 назв.

UDC 519.83

Modeling of inner currency in reflexive games with multi-criteria payoff functions / Smirnov S.A., Tereshchenko I.M. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 93–98.

The problem of decision-making under conditions of the conflict, multi-objective uncertainty and reflexive interaction of the parties is considered. Modeling of reflexive behavior makes it possible to analyze situations when the decisions taken differ from the non-reflexive rationality, to investigate and reveal the internal causes for such behavior. The solution of this problem, taking into account the multi-valued interests of the parties, is based on a multi-criteria generalization of the proposed V. Lefebvre setting, based on the use of the concept of inner currency. To calculate the initial assessment of the opponent's inner currency on the basis of nominally known criteria, the interval estimates method was used. Its application enables experts to set a range of possible values of weight coefficients, without requiring the definition of their specific values, which simplifies the expert procedure. The further refinement of the weighting factors occurs by solving an auxiliary problem for finding corrections that are introduced into the model for determining the inner currency. Refs: 3 titles.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF
INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION
MAKING SUPPORT

УДК 511:003.26.09

Ускорение метода квадратичного решета на основании использования условно B -гладких чисел / Мисько В.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 99–106.

Исследована степень ускорения базового метода квадратичного решета на основе поиска условно B -гладких чисел. Проведено анализ влияния и количества случаев использования условно B -гладких чисел. Показано, что модифицированный алгоритм на основе поиска условно B -гладких чисел позволяет факторизовать число в тех случаях, когда базовый алгоритм квадратичного решета (при стандартном интервале просеивания и размере факторной базы) не смог сформировать матрицу для получения решения. Рис.: 1. Табл.: 5. Библиогр.: 8 назв.

UDC 511:003.26.09

Acceleration of the quadratic sieve method based on the additional search of B -smooth numbers / Misko V.M. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 99–106.

We will investigate the degree of acceleration of the basic quadratic sieve method based on the search for conditionally B -smooth numbers. An analysis is made of the influence, and the number of cases of using conditionally B -smooth numbers. It is shown that the modified algorithm based on the search for conditionally B -smooth numbers allows to factor the number in those cases when the basic quadratic sieve algorithm (with the stan-

hard sieving interval and the size of the factor base) could not form a matrix for obtaining the solution. Figs.: 1. Tables: 5. Refs: 8 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 519.004.942

Емпіричний аналіз гравітаційної хвилі Місяця та глобального потепління Землі / Мацукі Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 107–118.

Розглянуто можливість порушення процесу глобального потепління Землі гравітаційною хвилею Місяця порівняно зі збільшенням глобального об'єму вуглекислого газу. Оскільки загальна теорія відносності передбачає, що гравітаційна хвиля планети має розмірність $1/(\text{відстань})^2$, проаналізовано вибірки даних про глобальну температуру та глобальний об'єм вуглекислого газу з цією розмірністю гравітаційної хвилі із застосуванням методу найменших квадратів і лінійної класичної регресійної моделі, узагальненої моделі класичної регресії та моделі нелінійної регресії. Отримані результати свідчать, що гравітаційна хвиля Місяця збуджує процес глобального потепління, однак є деяка невизначеність, оскільки обертальний рух Місяця навколо Землі приводить до різних типів розподілів вибірок даних, а глобальна температура і вуглекислий газ збільшуються пропорційно згідно з наявними часовими рядами. Рис.: 4. Табл.: 12. Бібліогр.: 4 назв.

УДК 519.004.942

Эмпирический анализ гравитационной волны Луны и глобального потепления Земли / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 107–118.

Рассмотрена возможность нарушения процесса глобального потепления Земли гравитационной волной Луны по сравнению с увеличением глобального объема углекислого газа. Поскольку общая теория относительности предсказывает, что гравитационная волна планеты имеет размерность $1/(\text{расстояние})^2$, проанализирован набор данных о глобальной температуре и глобальном объеме углекислого газа с этой размерностью гравитационной волны с использованием метода наименьших квадратов и линейной классической регрессионной модели, обобщенной классической регрессионной модели и модели нелинейной регрессии. Полученные результаты свидетельствуют о том, что процесс глобального потепления возмущается гравитационной волной Луны, однако существует некоторая неопределенность, поскольку вращательное движение Луны вокруг Земли приводит к различным типам распределений выборочных данных, а глобальная температура и двуокись углерода увеличиваются пропорционально согласно имеющимся временным рядам. Рис.: 4. Табл.: 12. Библиогр.: 4 назв.

УДК 51-77+338.27

Прогнозирование макроэкономических показателей на основе матричной множественной регрессии: примеры / Назарага И.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 119–131.

Для решения задачи прогнозирования на основе метода наименьших квадратов использован класс матричных функций с набором матричных аргументов (матричная множественная регрессия). Последовательное решение задачи прогнозирования выполнено с применением математического аппарата сингулярного разложения и техники псевдообращения за Муром–Пенроузом в пределах развития концепции кортежных операторов. Алгоритм оценивания неизвестных параметров реализован в Wolfram Mathematica. Предложенный метод продемонстрирован для прогнозирования основных макроэкономических показателей экономики Украины. Подход

проверялся на статистических данных относительно экономических показателей за период 2007 – 2016 гг. Представлены результаты расчетов. Как показано на примерах, матричная множественная регрессия может быть эффективным инструментом прогнозирования в экономике с приемлемой для процессов планирования точностью. Табл.: 12. Библиогр.: 23 назв.

UDC 51-77+338.27

Predictions of macroeconomic indicators based on matrix multiple regression: examples / Nazaraha I.M. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 119–131.

For formulation and solution of the prediction problem based on the method of least squares the class of matrix functions with the set of matrix arguments (matrix multiple regression) is used. The successive solution of the prediction problem was performed using the mathematical apparatus of the singular value decomposition and the Moore–Penrose pseudoinverse technique under the development of tuple operators. The algorithm for estimating the unknown parameters was implemented in Wolfram Mathematica. The proposed method was demonstrated for predictions of basic macroeconomic indicators of Ukrainian economics. The approach was verified using statistical data about economic indicators of Ukraine for the period of 2007–2016. The results of calculations were presented. As shown in examples, the matrix multiple regression can be an effective prediction instrument in economics with an acceptable for planning processes accuracy. Tables: 12. Refs.: 23 titles.

УДК 517.98+517.95

Крайова задача, асоційована з дифеоморфізмом між рімановими багатовидами / Потапенко О.Ю. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 1. — С. 132–140.

Розглянуто конструкцію оператора Лапласа в L_2 -версії за мірою в контексті дифеоморфізму між (нескінченновимірними) рімановими багатовидами. Отримано зв'язок між операторами замикання градієнта, граничним оператором сліду і дивергенції за мірою на дифеоморфних ріманових багатовидах. Показано, що у випадку коректності визначення операторів замикання градієнта, граничного оператора сліду і дивергенції на рімановому багатовиді відповідні оператори на дифеоморфному з ним рімановому багатовиді також коректно визначені. Як результат отриманого зв'язку між операторами розширено клас задач, що мають розв'язок (задач, що мають, причому єдиний, розв'язок) на ріманових багатовидах (і на гільбертовому просторі як окремому випадку ріманового багатовиду) зведенням задачі спеціального типу до асоційованої з нею задачі Діріхле. Бібліогр.: 18 назв.

UDC 517.98+517.95

Boundary value problem, associated with diffeomorphism between Riemannian manifolds / Potapenko O.Yu. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 1. — P. 132–140.

Laplace operator construction is considered in L_2 -version with respect to the measure in the context of diffeomorphism between (infinite-dimensional) Riemannian manifolds. The connection between such operators as the gradient closure, boundary restriction operator and divergence with respect to the measure on diffeomorphic manifolds is derived. It is proved that in the case when the gradient closure, boundary restriction operator and divergence with respect to measure are correctly defined on a Riemannian manifold, the respective operators are correctly defined on a diffeomorphic Riemannian manifold too. As a corollary of the derived connection, the class of solvable boundary value problems (problems that have one and only one solution) on Riemannian manifolds (and on Hilbert's space as a particular case of Riemannian manifold) is widened by reducing the problem of a special kind into an associated with it Dirichlet problem. Refs.: 18 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Жиров Олександр Леонідович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зайченко Юрій Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Кангун Ганна Іллівна,

студентка ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Кисленко Юрій Іванович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної кібернетики факультету інформатики та обчислювальної техніки КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Лавренюк Микола Сергійович,

аспірант КПІ ім. Ігоря Сікорського, молодший науковий співробітник Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ

Махорт Андрій Пилипович,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник лабораторії математичного моделювання відділу синергетики Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

Мацукі Йошіо,

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Місько Віталій Миколайович,

аспірант відділу автоматизації проектування енергетичних установок Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, Київ

Назарога Інна Михайлівна,

кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна, Київ

Недашківська Надія Іванівна,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Новіков Олексій Миколайович,

професор, доктор технічних наук, проректор з науково-навчальної роботи КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Потапенко Олексій Юрійович,

аналітик систем ПП «ІСТА Груп», Україна, Київ

Смирнов Сергій Анатолійович,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, заступник директора Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Терещенко Іван Миколайович,

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційної безпеки Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Хіміч Андрій Васильович,

аспірант кафедри технічної кібернетики факультету інформатики та обчислювальної техніки КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Чапалюк Богдан Володимирович,

аспірант кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для журналу

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

1. Стаття з анотаціями та іншою інформацією подається з використанням веб-сайту журналу (<http://journal.iasa.kpi.ua>).

Назва статті, прізвище та ініціали автора (авторів), а також анотація (від 700 до 1000 символів) подаються українською, російською та англійською мовами.

2. Текст статті набирається в редакторі Microsoft Word 2003 шрифтом Times New Roman із вирівнюванням по ширині.

3. На початку статті вказується індекс УДК, назва статті, ініціали та прізвище автора (авторів).

4. Список літератури подається в порядку посилання після тексту статті. Якщо є можливість, у списку вказується DOI кожного посилання.

5. Набір формул здійснюється в редакторі формул «Equations». Для змінних з індексами та без індексів застосовуються дужки клавіатурного набору, наприклад (x_i^j, y_k^l) , $[x_i^j, y_k^l]$.

6. Символи у формулах (крім особливих випадків) набираються курсивом. Допускаються прямі символи, але їх треба розмітити або включити до списку спеціальних символів.

7. Нумерувати необхідно тільки ті формули (винесені на середину рядків), на які є посилання в тексті.

8. Таблиці та рисунки виконуються в одному стилі, їм надається номер, назва і розташовуються після посилань у тексті. Не слід повторювати в статті підписи до рисунків та таблиць.

9. Стаття разом із таблицями, рисунками і списком літератури має бути не більше 15 сторінок. Оглядові статті обсягом до 25 сторінок приймаються за домовленістю із редколегією.

До рукопису додаються відомості про кожного автора: країна, місто, місце роботи, службова посада, вчений ступінь та звання, сфера наукових досліджень, контактні телефони, адреса та e-mail.